# Obyčejné diferenciální rovnice

Numerické metody

13. května 2018

FJFI ČVUT v Praze

**Stiff**

**Okrajová úloha**

**Střelba**

**Metoda sítí**

# Stiff

# Stiff - Úloha

Jedná se o úlohy se silným tlumením.

Existuje určitý vlastní čas úlohy, během něhož se stane něco závratného a pak se úloha ustálí.

# Stiff - Příklad

Jako příklad si vezmeme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = -100y + 100\,,$$

s libovolnou počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$.

# Stiff - Program

Stejně jako jsme řešili úlohu v předchozím cvičením, použijeme stejné metody i na řešení této stiff rovnice, tedy Eulerovu metodu, metodu středního bodu, Heunovu metodu, Runge-Kuttovu metodu 4. řádu, implicitní Eulerovu metodu a metodu prediktor korektor.

Program je ke stažení zde.

V tomto případě je Eulerova metoda velice nestabilní, naproti tomu implicitní Eulerova metoda se chová velice pěkně. Pro více bodů pak nejlépe aproximuje chování Runge-Kuttova metoda.

# Okrajová úloha

# Okrajová úloha - Zadání podmínek

Pokud nemáme zadané podmínky v jednom bodu, nemůžeme použít žádnou dříve zmíněnou metodu, jelikož ty řešily pouze počáteční problém.

Řešit okrajový problém je obecně složitější než počáteční.

Máme více bodů v prostoru, ve kterých jsou zadané podmínky. Není tedy možné rozvíjet řešení z počátečního bodu, jelikož tam neznáme všechny podmínky.

# Střelba

# Střelba - Řešení

Jednou z možností je převést úlohu na počáteční problém.

Na začátku se navolí neznámé podmínky v počáteční bodě a ODR vyřešíme. Když dojdeme na okraj, zjistíme jak moc se nám hodnoty liší od původně zadaných. Počáteční podmínky tedy upravíme a znovu řešíme.

Jedná se tedy o řešení nelineární rovnice, kde hledanými parametry jsou podmínky v počátku.

Tato metoda ale nemusí najít vždy řešení (a vždy správné).

## Střelba - Příklad

Metodu střelba procvičíme na rovnici

$$y''(x) + 4y'(x) + 13y(x) = 0$$

s okrajovými podmínkami $y(0) = 1$ a $y(1) = 0$.

# Střelba - Program

Počáteční problém budeme řešit pomocí Runge-Kuttovy metody 4. řádu pro soustavu dvou diferenciálních rovnic. Pro hledání správné počáteční podmínky vezme metodu regula falsi.

Program je ke stažení zde, kvůli metodě regula falsi je potřeba ještě pomocná funkce na výpočet průsečíku ke stažení zde.

Pro různé ohraničení kořenů (parametry $a$ a $b$) konverguje metoda regula falsi různě, přesto ale konverguje velice rychle, což je dáno i zadanou rovnicí, která je velice jednoduchá.

# Metoda sítí

# Metoda sítí - Metoda

Také řeší okrajový problém (ale může řešit i počáteční).

Je založena na diskretizaci prostoru na síť a použití aproximace derivací v jednotlivých uzlech. Tento přístup vede na soustavu lineárních algebraických rovnic.

## Metoda sítí - Příklad

Metodu sití si vyzkoušíme na trochu náročnějším příkladu a to pro funkci dvou proměných. Řešíme tedy parciální diferenciální rovnici!

Budeme řešit

$$\Delta f(x, y) = \nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = -q$$

s okrajovými podmínkami $f(x, 0) = 0$, $f(x, 1) = 0$, $f(0, y) = 0$ a $f(1, y) = 0$. Tedy tuto úlohu budeme řešit na čtverci $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$, kde nabývá funkce $f$ nuly.

# Metoda sítí - Program

Pro řešení soustavy lineárních algebraických rovnic použijeme zabudouvanou Matlabovskou funkci.

Program je ke stažení zde.