Obyčejné diferenciální rovnice

Numerické metody

8. května 2018

FJFI ČVUT v Praze

Úvod

Úvod - Úloha

Základní úloha, kterou řešíme v obyčejných diferenciálních rovnicích, je

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = f(x, y(x))\,, \qquad y(x_0) = y_0\,.$$

Snažíme se najít tedy řešení (hodnotu) $y(x)$ pro libovolné x.

Úvod - Numerická úloha

Protože neumíme v numerice řešit úlohy spojitě, musíme přidat k této úloze ještě délku kroku h.

Tedy budeme nacházet řešení jenom pro $x_0 + ih$, kde $i \in \{0, 1, ...\}$.

Úvod - Podmínky

Podle řádu diferenciální rovnice potřebujeme znát daný počet podmínek. Je-li tedy řád rovnice s, pak musíme mít s podmínek.

Podmínky můžeme mít buď

1. počáteční - známe s podmínek v bodě x_0,
2. okrajové - známe s na okrajích výpočetní oblasti,
3. smíšené - kombinace výše uvedených,
4. zadané rovnicí.

Základní metody

Základní metody - Eulerova metoda

Používá Taylorův rozvoj $y(x+h)$ okolo bodu x do prvního řádu

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \mathcal{O}(h^2) = y(x) + hf(x, y(x)) + \mathcal{O}(h^2)\,.$$

Tedy používá aproximaci

$$y(x+h) \approx y(x) + hf(x, y(x))\,.$$

Základní metody - Metoda středního bodu

Také používá Taylorův rozvoj $y(x+h)$ do prvního řádu, ale pro aproximace $y'(x)$ využívá mezi bod $x + h/2$.

$$y'(x) = f(x + \frac{h}{2}, y(x) + \frac{h}{2} f(x, y))\,,$$

tedy Eulerovu metodu pro $y(x + h/2)$. Výsledná rovnice je pak

$$y(x+h) = y(x) + hf(x + \frac{h}{2}, y(x) + \frac{h}{2} f(x, y))\,.$$

Základní metody - Heunova metoda

Nejdříve odhadne směrnici $y'(x)$ v bodě $x + h$ pomocí Eulerovy metody, spočítá směrnici v bodě x a pomocí průměru pak aproximuje $y'(x)$ jako

$$y(x') = \frac{1}{2}(f(x, y) + f(x + h, y(x) + hf(x, y)))\,.$$

Výsledný vzorec je tedy

$$y(x + h) = y(x) + \frac{h}{2}(f(x, y) + f(x + h, y(x) + hf(x, y)))\,.$$

Pokročilejší metody

Pokročilejší metody - Runge-Kuttovy metody

Hledá řešení jako

$$y(x+h) = y(x) + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i,$$

kde

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x, y) \\
k_2 &= f(x + c_2 h, y + h(a_{21}k_1)) \\
&\vdots \\
k_s &= f(x + c_s h, y + h(a_{s1}k_1 + a_{s2}k_2 + \cdots + a_{s,s-1}k_{s-1})).
\end{aligned}$$

Pokročilejší metody - RK4

Příklad pro Runge-Kuttovu metodu 4. řádu

$$k_1 = f(x, y)\,,$$
$$k_2 = f(x + h/2, y + hk_1/2)\,,$$
$$k_3 = f(x + h/2, y + hk_2/2)\,,$$
$$k_4 = f(x + h, y + hk_3)$$

a

$$b_1 = \frac{1}{6}\,, \quad b_2 = \frac{1}{3}\,, \quad b_3 = \frac{1}{3}\,, \quad b_4 = \frac{1}{6}\,.$$

Pokročilejší metody - Implicitní metody

Využívá implicitně zadaného bodu $y(x+h)$. Kupříkladu implicitní Eulerova metoda

$$y(x+h) = y(x) + hf(x+h, y(x+h)).$$

Pokud je $f(x, y(x))$ lineární v y, tak je najít řešení to jednoduché, pokud je ale nelineární je potřeba pokročilý řešič, což je neefektivní.

Pokročilejší metody - Metody prediktor-korektor

Spočítáme jednoduchou metodou $\tilde{y}(x+h)$ - krok **P**-predictor.
Spočítáme $\tilde{y}'(x+h) = f(x+h, \tilde{y}(x+h))$ - krok **E**-valuation.
Opravíme $y(x+h)$ pomocí implicitní metody, kde místo $y'(x+h)$ budeme uvažovat $\tilde{y}'(x+h)$ - krok **C**-orrector.

Evaluaci a korekci můžeme provádět kolikrát potřebujeme.

Soustava

Soustava - Úloha

Nyní řešíme úlohy

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}(x)}{\mathrm{d}x} = f(x, \vec{y}(x)) \,, \qquad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \,.$$

Řešení počítáme postupně po složkách, tedy triviální rozšíření.

Soustava - Příklad

Nechť

$$y_1'(x) = f_1(x, y_1, y_2)\,, \qquad y_1(x_0) = \alpha_1\,,$$
$$y_2'(x) = f_2(x, y_1, y_2)\,, \qquad y_2(x_0) = \alpha_2\,.$$

Pak řešení $y_1(x+h)$ a $y_2(x+h)$ Eulerovou metodou je

$$y_1(x+h) = y_1(x) + hf_1(x, y_1(x), y_2(x))\,,$$
$$y_2(x+h) = y_2(x) + hf_2(x, y_1(x), y_2(x))\,.$$

Vyšší řád

Vyšší řád - Úloha

Nyní řešíme úlohy

$$\frac{\mathrm{d}^n y(x)}{\mathrm{d}x^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})\,.$$

Potřebujeme tedy i n podmínek (ať už počátečních nebo okrajových či jiných).

Vyšší řád - Převod úlohy

Použijeme substituci

$$\begin{aligned} z_1 &= y(x)\,, \\ z_2 &= z_1' = y'(x)\,, \\ z_3 &= z_2' = y''(x)\,, \\ &\vdots \\ z_n &= z_{n-1}' = y^{(n-1)}(x)\,, \\ f(x, z_1, z_2, \ldots, z_n) &= z_n' = y^{(n)}(x) \end{aligned}$$

a následně řešíme jako soustavu rovnic.

Program

Program - Úloha

Budeme řešit obyčejnou difereciální rovnici prvního řádu

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = y\sin(x)\,,$$

s počáteční podmínkou

$$y(x_0) = y_0\,.$$

Program - Analytické řešení

Metody budeme porovnávat s analytickým řešením:

$$y(x) = C_1 \exp(-\cos(x)) \, ,$$

kde

$$C_1 = \frac{y_0}{\exp(-\cos(x_0))} \, .$$

Program - Metody

Ze základních metod použijeme

- Eulerovu,
- středního bodu,
- Heunovu.

Z pokročilých pak

- Runge-Kuttovu metodu 4. řádu,
- implicitní Eulerovu metodu,
- metodu prediktor-korektor Eulerovy metody (počet opakování označuje proměná m).

Program je ke stažení zde

Program - Poznámky

Zajímavé, že v tomto případě není implicitní Eulerova metoda lepší jak explicitní (tedy klasická).

Stojí také za povšimnutí, že metoda prediktor-korektor se zvyšujícím se m konverguje k implicitní Eulerově metodě.