Integrace

Numerické metody

7. května 2018

FJFI ČVUT v Praze

Úvod

Úvod - Úloha

Máme funkci $f(\vec{x})$ a snažíme se najít **určitý** integrál této funkce.

Tedy máme oblast $\mathbf{B}$ a hledáme

$$I = \int_{\mathbf{B}} f(\vec{x}) \mathrm{d}\vec{x} \, .$$

Tato oblast musí být konečná.

Pokud chceme spočítat integrál do nekonečna, je nutné použít substituci. Podobně také pro singularity.

Úvod - Náročnost

Podobně jako v analýze, integrovat je těžší než derivovat.

Snažíme se najít dobrý poměr mezi rychlostí a přesností.

Občas je to jediný způsob jak získat určitý integrál funkce.

1D

1D - Úloha

Máme tedy funkci jedné proměné $f(x)$ a znažíme se vypočítat integrál na konečném intervalu $\langle a, b \rangle$, tedy

$$I = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \, .$$

1D - Převod na derivaci

Pro různé případy je vhodné převést úlohu na diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = f(x), \quad I(a) = 0,$$

hledám tedy $I(b)$.

Vhodné pro nepěkné funkce, často spektrum záření (malé píky a pak nic).

1D - Aproximace

Druhou možností je využít (podobně jako u derivací) aproximace funkce pomocí interpolace nebo minimalizace.

Tyto aproximace jsme povětšinou schopni rychle a přesně integrovat.

Kvadraturní vzorce

Kvadraturní vzorce - Úvod

Rozdělíme interval $\langle a, b\rangle$ na ekvivalentní podintervaly, tedy pokud

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$
$$x_{i+1} - x_i = h \quad i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\},$$

pak tyto intervaly jsou rovny $\langle x_i, x_{i+1}\rangle, i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Pak integrál můžeme aproximovat jako

$$I \approx h \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i).$$

Jednotlivé metody se pak liší volbou α_i.

Kvadraturní vzorce - Rozdělení

1. základní formule - na celém intervalu stejný vzorec
   1.1 podle použití krajních bodů
      1.1.1 uzavřené - používají krajní body
      1.1.2 otevřené - nepoužívají krajní body (třeba singularity)
   1.2 podle použití bodů mimo interval
      1.2.1 interpolační - pouze body v intervalu
      1.2.2 extrapolační - využiji i body mimo interval
2. složené formule - interval rozdělím na menší vzorce, kde použijeme základní formuli

Kvadraturní vzorce - Odvození vzorců

1. pomocí Lagrangeovy interpolace
2. pomocí metody neurčitých koeficientů
3. složením dvou a více metod

Kvadraturní vzorce - Rombergova integrace

Využívá extrapolace hodnoty integrálu $I(h^2)$ pro $h \to 0$.

Počítá pro různé délky kroku h a pak extrapoluje přesnější výsledek.

Jedná se o iterační zpřesnění (tedy extrapolujeme pro menší krok na základě napočítání pár hodnot integrálů).

Gaussovy kvadratury

Gaussovy kvadratury - Úvod

Narozdíl od klasických kvadraturních vzorců (tedy kde máme ekvidistantně rozdělený interval) nyní uzlové body určujeme pomocí kořenů určité třídy polynomů.

Podobně jako u interpolace se snažíme minimalizovat počet vyhodnocení funkcí, abychom měli co nejpřesnější výsledek.

Gaussovy kvadratury - Typy

Máme několik tříd polynomů pro výpočet kořenů

1. Legendrovy polynomy,
2. Čebyševovy polynomy,
3. Laguerrovy polynomy,
4. Hermiteovy polynomy.

Gaussovy kvadratury - Postup

Postupuje se tak, že danou funkci interpolujeme daným typem polynomu, pro ten už známe integrál.

Respektive v praxi se to dělá tak, že máme připravený algoritmus na výpočet integrálu (každý typ polynomů má určitý interval na které integrujeme), transformuje původní body na náš interval a vypočítáme funkční hodnoty v tomto intervalu a dosadíme do algoritmu.

Více dimenzí

Více dimenzí - Úvod

Mějme oblast $\mathbf{B}$ a hledáme

$$I = \int_{\mathbf{B}} f(x) \mathrm{d}\vec{x} \, .$$

Tato oblast musí být konečná (ale nemusí být kompaktní, atd.).
Pokud je nekonečná, musí interval rozdělit a substituovat.

Opět tedy získáváme na konci číslo (řešíme určitý integrál).

Více dimenzí - Problémy

Ve více dimenzích je všechno komplikované.

Často je problém s hranicí integrálu.

Problém je také s pamětí a rychlostí (každá dimenze nám počet bodů umocňuje).

Více dimenzí - Pomocí symetrie

Pokud máme symetrickou úlohu (v určitém ohledu), můžeme provést transformaci do jiných souřadnic a snížit tak dimenzi úlohy.

Více dimenzí - Převod na 1D integrály

Pokud je oblast dostatečně pěkná (a také i funkce), můžeme postupně integrovat v 1D.

Více dimenzí - Monte Carlo

Často se složitější integrály řeší pomocí metody Monte Carlo.

Programy

Programy - Úloha

Úkolem bude zintegrovat funkci

$$f(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2))$$

přes jednotkový kruh okolo nuly (tedy $x^2 + y^2 <= 1$), tedy

$$\int_{x^2+y^2<=1} \exp(-(x^2 + y^2)) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \,.$$

Programy - Metody

Použijeme několik způsobů výpočtu takového integrálu

- pomocí zabudované funkce v Matlabu,
- rozkladu do 1D integrálů (použijeme složené Simpsonovo pravidlo),
- využití symetrie úlohu a převodu integrálu do polárních souřadnic
$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^1 r \exp(-r^2) \mathrm{d}r \,,$$
- pomocí metody Monte Carlo.

Program je ke stažení zde.