Extrémy funkcí

Numerické metody

6. května 2018

FJFI ČVUT v Praze

Úvod

Úvod - Úloha

Snažíme se najít extrém funkce, ať už jedné nebo více proměnných,

1. minimum lokální/globální,
2. maximum lokální/globální.

Důležité je opět znát aspoň trochu chování vyšetřované funkce.

Úvod - Náročnost

Náročnost podobná jako u nelineárních rovnic.

Těžko se nachází globální extrémy. Těžko i najdu všechny lokální extrémy.

Opět je vhodné mít extrém ohraničený, mít tedy dobrý počáteční odhad.

1D

1D - Úloha

Mějme tedy funkci $f(x)$ a interval $\langle a, b \rangle$, ve kterém se nachází (pro jednoduchost) jeden extrém.

Úkolem je lokalizovat takové x (resp. najít interval, ve kterém se takové x nachází a je dostatečně malý), pro které nabývá funkce minimum nebo maximum.

1D - Převod na hledání kořenů

Jednou z možností jak najít extrémy, je převod na hledání kořenů derivace funkce.

Jediné co je potřeba je znát derivaci funkce nebo ji umět dobře a rychle spočítat numericky.

Jestli je kořen minimum nebo maximum lze poznat z okolí tohoto kořenu.

Takovou úlohu jsme schopni řešit efektivně a hlavně přesně, ale často si situaci nemusíme ulehčit.

1D - Metoda dělení intervalu

Podobně jako u Metody půlení intervalu (v případě hledání kořenů) můžeme hledat extrém podobný způsobem.

Mějme interval $\langle a, b \rangle$ a bod c, pro který platí $a < c < b$ a $f(c) < f(a) \wedge f(c) < f(b)$ nebo $f(c) > f(a) \wedge f(c) > f(b)$, tedy víme, že v tomto intervalu je opravdu extrém.

Vložíme nový bod d mezi a a c nebo mezi c a b. Předpokládejme první možnost. Spočítáme $f(d)$, pokud $f(d) < f(c)$ zahodím b a dál počítáme s body a,d,c, jinak pokud $f(d) > f(c)$ pak naopak zahodíme a a počítáme s d,c,b.

1D - Metoda zlatého řezu

Pouze nám říká jak dělit interval $\langle a, b \rangle$.

Rozdělíme ho v poměru $0.618 : 0.382$, pokud bod c leží v levé části, a v poměru $0.382 : 0.618$ pokud c leží v pravé části.

1D - Parabolická interpolace

Mějme interval $\langle a, b \rangle$ a bod c, pro který platí $a < c < b$ a $f(c) < f(a) \wedge f(c) < f(b)$ nebo $f(c) > f(a) \wedge f(c) > f(b)$, tedy víme, že v tomto intervalu je opravdu extrém.

V okolí bodu c aproximujeme funkci jako

$$f(x) \approx \alpha(x-c)^2 + \beta(x-c) + \gamma\,.$$

V extrému je derivace nulová, tedy

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \approx 2\alpha(x-c) + \beta \overset{!}{=} 0\,,$$

tedy platí, že extrém této funkce je v bodě

$$x = c - \frac{\beta}{2\alpha}\,.$$

1D - Parabolická interpolace

Nový interval volíme podobně jako v Metodě dělení intervalu.

Pokud x spadá do intervalu $\langle a, c \rangle$, pak podle funkční hodnoty $f(x)$ zahazuji a nebo b, podobně pokud spadne x do intervalu $\langle c, b \rangle$.

Více dimenzí

Více dimenzí - Úloha

Mějme tedy funkci $f(\vec{x})$ a oblast $\mathbf{B}$, ve kterém se nachází (pro jednoduchost) jeden extrém.

Úkolem je lokalizovat takové $\vec{x}$ (resp. najít oblast, ve které se takové $\vec{x}$ nachází a je dostatečně malá), pro které nabývá funkce minimum nebo maximum.

Více dimenzí - Převod na hledání kořenů

Můžeme úlohu převést na hledání kořenů, tím, že vytvoříme soustavu rovnice pomocí $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}$.

To se nám vyplatí pouze pokud nám tam vznikne soustava lineárních rovnic.

Jinak je efektivnější hledat extrém pomocí dalších metod. Tedy oproti 1D případu, kde to naopak bylo lepší (převést na hledání kořenu), je u více dimenzích výhodnější hledat extrém, jelikož spolu složky komunikují.

Více dimenzí - Simplexová metoda

Někdy také *amoeba*.

Sestrojí se simplex (tedy trojúhelník v libovolné dimenzi, ve 3D tedy čtyrstěn, atd).

Pak se provadí základní operace (zrcadlení, kontrakce, expanze).

Tím se postupně lokalizuje extrém, ale není to moc efektivní, ale je to názorné a jednoduché.

Více dimenzí - Metoda sdružených směrů

Zvolíme bod a v něm směr. V něm najdeme minimum. V tomto minimu opět zvolíme směr a tak pokračuj dál.

Směry se volí tak, aby se to nezacyklilo a neporušilo se původní minimum.

Volíme vždy kolmý směr oproti původnímu, pak to funguje.

Více dimenzí - Metoda nejprudšího spádu

Podobné jako **Metoda sdružených směrů**, ale nyní používáme pouze první derivaci. Směr volíme ve směru gradientu (resp. v opačném v případě minima).

Ale to může být občas neefektivní, je lepší vybrat směr, který je sdružený (konjugovaný) k původnímu.

Více dimenzí - Metoda sdružených gradientů

Právě to dělá tato metoda.

Jedná se o složitější ale jednu z nejefektivnějších metod.

Často se používá i pro řešení lineárních algebraický rovnic (pokud je matice symetrická a pozitivně definitní).

Kombinatorika

Kombinatorika - Úloha

Máme diskrétní množinu a hledá minimum nějaké potenciálu.

Kupříkladu máme města a hledáme nejkratší cestu, tak abychom navštívili každé město alespoň jednou.

Často se používají metody Monte Carlo.

Viz přednáška či skripta.

Lineární programování

Lineární programování - Úloha

Máme systém rovnic a nerovnic, snažíme se najít optimální řešení.

Viz přednáška či skripta.

Programy

Programy - Funkce

Všechny metody nyní budeme zkoušet na třech funkcí

1. $(1 - x^2)\exp(-x^2/2)$, ke stažení zde,
2. $\Re(\exp(-x^2/8)\exp(\imath x 4))$, ke stažení zde,
3. $2\mathrm{sinc}(2x) - \mathrm{sinc}(x)$, ke stažení zde.

Program na vykreslení těchto funkcích k dispozice zde.

Programy - Metody

Budeme používat následující metody

- metoda zlatého řezu zde,
- metoda využívající parabolickou interpolaci zde.

Celé to budeme řídit programem, který je ke stažení zde.

Vždy zvolíme funkci (pomocí znaku '@'), ve které budeme chtít najít minimum, zvolíme interval a bod, ve kterém je obsažen extrém a spustíme jednotlivé metody, které nám vrací odhad extrému s danou přeností.