Nelineární rovnice

Numerické metody

6. května 2018

FJFI ČVUT v Praze

Úvod

Ohraničení kořene

Hledání kořene

Soustava

Programy

Úvod

Úvod - Úloha

Hledáme bod x, ve kterém je splněno pro zadanou funkci $f(x)$

$$f(x) = 0\,.$$

Respektive pro soustavu, hledáme vektor $\vec{x}$, tak aby pro vektor funkcí $\vec{f}(\vec{x})$ bylo splněno

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}\,.$$

Úvod - Jedna rovnice

Existuje vždy spočetně řešení.

Postupujeme ve dvou krocích

- ohraničíme kořen,
- najdeme kořen.

Jsme vždy schopní najít kořen s dostatečnou přesností.

Úvod - Soustava

Může existovat i nekonečno řešení.

Neexistuje obecný způsob, jak najít libovolný kořen s dostatečnou přeností. Často musíme vědět, kde přibližně se nachází, pak můžeme lehce zpřesnit.

Ohraničení kořene

Ohraničení kořene - Úvod

Mějme body a a b, platí $a < b$. Pokud platí pro zadanou funkci $f(x)$

$$f(a) \cdot f(b) < 0\,,$$

pak je mezi těmito body lichý počet kořenů.

Pokud platí

$$f(a) \cdot f(b) > 0\,,$$

pak mezi těmito body není žádný kořen nebo sudý počet kořenů.

Ohraničení kořene - Algoritmus

Vezmu si libovolné body $a < b$, kde předpokládám kořen. Postupně tento interval zkracuji, dokud neplatí

$$f(a) \cdot f(b) < 0\,.$$

Nemusí fungovat vždycky. Existují různé způsoby, ale celkově náročná úloha.

Hledání kořene

Hledání kořene - Úvod

Předpokládejme, že máme body $a < b$, mezi nimiž se nachází **jediný** kořen, a funkci $f(x)$.

Úkolem je zpřesnit tento interval, tak aby platilo $|b - a| < \varepsilon$, kde ε je požadovaná přesnost.

Hledání kořene - Metoda půlení intervalů

Jedná se oprostý algoritmus, kdy původní interval $\langle a, b \rangle$ přepůlíme, pak zjistíme ve kterém podintervalu se nachází kořen a ten znovu rozpůlíme.

Tedy vezme bod $c := \frac{a+b}{2}$,

1. pokud $f(a) \cdot f(c) < 0$, pak $b = c$,
2. pokud $f(c) \cdot f(b) < 0$, pak $a = c$.

Hledání kořene - Metoda sečen

Najdeme přímku, která spojuje $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$.

Pro tuto přímku najdeme bod, ve kterém protíná osu x, a označíme ho x_0.

Pak existují dva postupy jak vybrat nové body.

Hledání kořene - Metoda sečen - sekantová

Vezmeme nejnovější body, tedy v prvním kroku x_0 a b.

V dalším kroku, opět najdeme přímku, která spojuje $[x_0, f(x_0)]$ a $[b, f(b)]$ a její průnik s osou x označíme $\tilde{x}_0$.

V dalším zase x_0 a $\tilde{x}_0$ a tak postupujeme dál a dál.

Kořen nám může vypadnout z intervalu, nemusí tedy konvergovat.

Hledání kořene - Metoda sečen - regula falsi

Vezmeme body, mezi nimiž se nachází kořen, tedy jako u půlení intervalů

1. pokud $f(a)f(x_0) < 0$, pak $b = x_0$,
2. pokud $f(x_0)f(b) < 0$, pak $a = x_0$.

Takhle pokračujeme dál a dál.

Nevýhoda je ta, že nám jeden bod může dlouho zůstávat ve hře. Pak metoda velice pomalu konverguje.

Hledání kořene - Brentova metoda

Daleko od kořene používá metodu půlení intervalu, blízko kořenu používá *superlineární* metodu - **inverzní kvadratická interpolace**.

Velice účinná právě díky přepínání. Ale trochu náročnější na implementaci a ladění.

Hledání kořene - Newtonova-Raphsonova metoda

Používá iterační zpřesňování

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\,,$$

pro libovolné x_0 z intervalu $\langle a, b \rangle$.

Pouze výhodné (a možné) pokud známe derivaci funkce a nebo jsme ji schopni rychle numericky spočítat.

Hledání kořene - Polynomy

Pro polynomy existují efektivnější metody, viz přednáška a "skripta".

Soustava

Soustava - Úvod

Často se převádí na úlohu **hledání extrémů**.

Musíme mít hodně informací o dané soustavě a musíme vědět, co chceme přesně získat.

Často nevíme, jak blízko jsme řešení.

Soustava - Metoda prosté iterace

Převod na "lineární systém" pomocí *kontrahujícího* zobrazení.

Pak postupně iteruji pomocí tohoto zobrazení.

Soustava - Newtonova-Raphsonova metoda

Jedná se zobecnění pro této metody pro soustavu nelineárních rovnic.

Rekurentní předpis je tedy

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + (\mathbf{J}(\vec{x}^{(k)}))^{-1}\vec{f}(\vec{x}^{(k)}).$$

Programy

Programy - Funkce

Všechny metody nyní budeme zkoušet na třech funkcí

1. $(1 - x^2)\exp(-x^2/2)$, ke stažení zde a její derivace zde,
2. $\Re(\exp(-x^2/8)\exp(\imath x4))$, ke stažení zde a její derivace zde,
3. $2\mathrm{sinc}(2x) - \mathrm{sinc}(x)$, ke stažení zde a její derivace zde.

Program na vykreslení těchto funkcích k dispozici zde.

Programy - Metody

Budeme používat následující metody

- metoda půlení intervalu zde,
- sekantová metoda zde,
- metoda regula falsi zde,
- Newtonova-Raphsonova metoda zde.

Pro sekantovou metodu a metodu regula falsi, ještě potřebujeme pomocnou funkci na hledání průsečíku zde.

Programy - Spouštěcí program

Celé to budeme řídit programem, který je ke stažení zde.

Vždy zvolíme funkci, ve které budeme chtít najít kořen (pomocí znaku '@'), zvolíme interval, kde je pouze jeden kořen a spustíme jednotlivé metody, které nám vrací odhad kořene s danou přeností. (Pro Newtonovu-Raphsonovu metodu potřebujeme ještě derivaci funkce.)