Příklad řešení úlohy s tridiagonální maticí
(řešení Poissonovy rovnice)

- **Odvození Poissonovy rovnice:**
  Elektrické pole $\vec{E}$ je důsledkem statické hustoty ρ volných nábojů, což je popsáno Maxwellovou rovnicí
  $$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$
  kde ε_0 je dielektrická konstanta.
  Statické pole lze popsat skalárním potenciálem ϕ jako
  $$\vec{E} = -\nabla \phi.$$
  Z těchto rovnic vyplývá Poissonova rovnice
  $$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$
  která udává vztah mezi rozložením volných elektrických nábojů a elektrickým potenciálem.
  V jedné dimenzi má Poissonova rovnice tvar
  $$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}.$$
  Tato rovnice má uvnitř určité oblasti prostoru jediné řešení, pokud jsou dobře specifikované podmínky na okraji této oblasti. Podmínky jsou dobře specifikovány například když známe potenciál ϕ na hranicích oblasti.

- **Zadání úlohy:**
  Z Poissonovy rovnice chceme vypočítat elektrický potenciál uvnitř oblasti $x \in [0, 1]$, když je známa nábojová hustota $\rho(x)$ v této oblasti a elektrický potenciál ϕ v obou krajních bodech ($x = 0$ a $x = 1$) je nulový.

- První fáze řešení: **Diskretizace**
  - Nejprve musíme úlohu *diskretizovat*, tedy vyjádřit Poissonovu rovnici pomocí konečných diferencí.
  - Buď si konečnou diferenci pamatujeme, nebo odvodíme z Taylorova rozvoje:
  $$\begin{aligned}
  \phi(x+h) &= \phi(x) + h\,\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\,\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} \;+\; \mathcal{O}(h^3),\\
  \phi(x-h) &= \phi(x) - h\,\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\,\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} \;+\; \mathcal{O}(h^3)\\
  \Rightarrow \qquad \phi(x+h) + \phi(x-h) &= 2\,\phi(x) + 2\,\frac{h^2}{2}\,\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} \;+\; \mathcal{O}(h^3)\\
  \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} &= \frac{\phi(x+h) - 2\,\phi(x) + \phi(x-h)}{h^2} \;+\; \mathcal{O}(h).
  \end{aligned}$$
  Zanedbáme $\mathcal{O}(h)$ a máme konečnou diferenci která aproximuje druhou derivaci s přesností 1. řádu.

– Numericky tedy budeme řešit rovnice

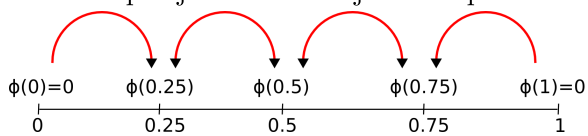
$$\frac{\phi(x+h) - 2\,\phi(x) + \phi(x-h)}{h^2} = -\,\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}$$

neboli

$$\phi(x) = \frac{\phi(x+h) + \phi(x-h) + h^2\rho(x)/\varepsilon_0}{2},$$

přičemž víme že $\phi(0) = \phi(1) = 0$ a na celém intervalu $[0,1]$ máme zadánu nábojovou hustotu $\rho(x)$ a konstantu ε_0.

– Rozdělíme výpočetní oblast pro jednoduchost jen na 4 podintervaly o délce $h = 0.25$.



Hodnotu $\phi(0)$ známe (okrajová podmínka), takže v bodu $x = 0$ nic neřešíme, dále

$$\begin{aligned}
\phi(0.25) &= \frac{\phi(0.50) + \phi(0) + h^2\rho(0.25)/\varepsilon_0}{2},\\
\phi(0.50) &= \frac{\phi(0.75) + \phi(0.25) + h^2\rho(0.50)/\varepsilon_0}{2},\\
\phi(0.75) &= \frac{\phi(1) + \phi(0.50) + h^2\rho(0.75)/\varepsilon_0}{2}
\end{aligned}$$

a konečně $\phi(1)$ opět známe.

– Poznámka: Pokud bychom rovnice chtěli řešit postupně, pak v první a druhé bychom vždy znali to co je černě ale ne to co je červeně. Rovnice tedy musíme řešit skutečně najednou jako soustavu.

- Druhá fáze: **Řešení soustavy**

  – Dosadíme $\phi(0) = \phi(1) = 0$ a dále označíme

$$\begin{aligned}
x_1 &= \phi(0.25), & x_2 &= \phi(0.5), & x_3 &= \phi(0.75),\\
b_1 &= \frac{h^2}{2\,\varepsilon_0}\,\rho(0.25), & b_2 &= \frac{h^2}{2\,\varepsilon_0}\,\rho(0.5), & b_3 &= \frac{h^2}{2\,\varepsilon_0}\,\rho(0.75)
\end{aligned}$$

a máme soustavu

$$\begin{aligned}
x_1 &= \tfrac{1}{2}\,x_2 + b_1,\\
x_2 &= \tfrac{1}{2}\,x_3 + \tfrac{1}{2}\,x_1 + b_2,\\
x_3 &= \tfrac{1}{2}\,x_2 + b_3,
\end{aligned}$$

neboli maticově

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -0.5 & 0\\ -0.5 & 1 & -0.5\\ 0 & -0.5 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ x_3\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} b_1\\ b_2\\ b_3\end{array}\right),$$

což je soustava s tridiagonální maticí, kterou umíme vyřešit standardním postupem.

- Poznámka: Při rozdělení na více podintervalů (pro dosažení vyšší přesnosti) dostaneme stejnou soustavu s tridiagonální maticí, jen o vyšší dimenzi: pro N intervalů

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{N-2} \\ b_{N-1} \end{pmatrix}.$$