
Odvození kvadraturních formulí pomocí Lagrangeova polynomu

- **Zadání:** Máme odvodit třibodovou kvadraturní formuli pro integraci funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$.
- **Postup:** Funkci aproximujeme Lagrangeovým polynomem a ten pak zintegrujeme.
- Označíme si $x_1 = a$, $x_3 = b$ a budeme uvažovat ještě jeden bod x_2 uvnitř tohoto intervalu.
- Na intervalu $[a, b]$ aproximujeme funkci $f(x)$ Lagrangeovým interpolačním polynomem druhého stupně

$$f(x) \approx L_2(x) = f_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + f_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

- Pro zjednodušení budeme předpokládat že body jsou ekvidistantní, tedy že x_2 je přesně uprostřed mezi x_1 a x_3 . Označíme $h = x_2 - x_1 = x_3 - x_2$ a zavedeme substituci

$$t = \frac{x - x_1}{h}.$$

Máme tedy

$$\begin{aligned}x - x_1 &= t h, \\x - x_2 &= x - x_1 + x_1 - x_2 = t h - h = h(t - 1), \\x - x_3 &= x - x_1 + x_1 - x_3 = t h - 2 h = h(t - 2)\end{aligned}$$

a Lagrangeův polynom je

$$\begin{aligned}L_2(x) &= f_1 \frac{h(t-1)h(t-2)}{2h^2} + f_2 \frac{h t h(t-2)}{-h^2} + f_3 \frac{h t h(t-1)}{2h^2} \\&= \frac{f_1}{2} (t^2 - 3t + 2) - f_2 (t^2 - 2t) + \frac{f_3}{2} (t^2 - t).\end{aligned}$$

- Integrál funkce $f(x)$ z bodu $a = x_1$ do bodu $b = x_3$ nyní aproximujeme integrálem Lagrangeova polynomu:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_{x_1}^{x_3} L_2(x) dx = h \int_0^2 L_2(t) dt \\&= h \left[\frac{f_1}{2} \left(\frac{1}{3} t^3 - \frac{3}{2} t^2 + 2t \right) - f_2 \left(\frac{1}{3} t^3 - t^2 \right) + \frac{f_3}{2} \left(\frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 \right) \right]_0^2 \\&= h \left(\frac{f_1}{3} + \frac{4f_2}{3} + \frac{f_3}{3} \right).\end{aligned}$$

- Tomuto konkrétnímu kvadraturnímu vzorci se říká Simpsonovo pravidlo.
- Stejným způsobem můžeme odvodit integrační formule na libovolném počtu bodů (uzlů).
- Pokud je interval $[a, b]$ dlouhý, neinterpolujeme polynomem vysokého stupně, ale rozsekáme jej na malé intervaly a v nich integrujeme.