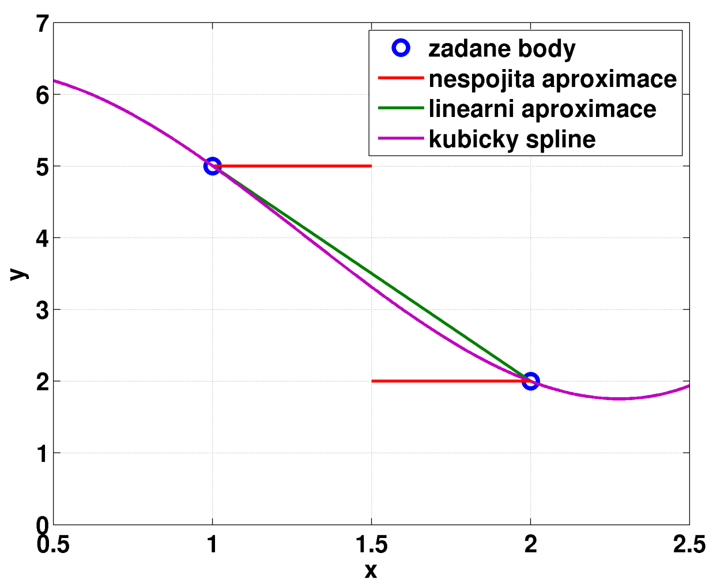
Kubický spline

- **Motivace:**
  - Aproximace pomocí Lagrangeova interpolačního polynomu je vhodná jen pro některé funkce a malý počet bodů. Například pro interpolaci 1000 bodů bychom potřebovali polynom stupně 999. To by bylo drahé (byl by potřeba velký počet operací) a nepřesné (kvůli vysokým mocninám by se mohla sčítat čísla různých řádů velikosti). Aproximace s použitím jen některých vybraných bodů by byla jednodušší, ale výběr takových bodů by nebyl jednoznačný.
  - Zkusíme jiný, intuitivní přístup. Mějme zadánu tabulku bodů z určitého intervalu a příslušných funkčních hodnot. Chceme-li rychle odhadnout funkční hodnotu $y(x)$ v nějakém bodu x daného intervalu, nejrychlejší je najít v tabulce dva nejbližší okolní body a hodnotu odhadnout buď jedním z nich nebo jejich kombinací (něčím mezi nimi). Aproximovali bychom tedy **lokálně** - jen na základě okolních dat.

- **Jednoduché lokální aproximace:**
  - Z hlavy bychom snadno provedli nejjednodušší aproximaci: nespojitou. K bodu x, ve kterém chceme odhadnout funkční hodnotu $y(x)$, nalezneme v tabulce okolní body $x_1 \leq x$ a $x_2 \geq x$ a podle toho, který je blíže, odhadneme buď $y(x) \approx y(x_1)$ nebo $y(x) \approx y(x_2)$.
  - Na papíře můžeme snadno jít o krok dál: k spojité interpolaci lineární v daném intervalu, tedy lineární kombinaci $y(x_1)$ a $y(x_2)$.
  - Na počítači snadno vypočteme i aproximaci hladkou, tedy takovou, která má všude (tedy i v bodech zadaných tabulkou) spojitou první derivaci. Pro takovou aproximaci se používají **kubické spliny**.

Uvedené tři typy aproximací jsou znázorněny na následujícím obrázku



- **Odvození kubického splinu:**
  - Hledáme takovou funkci $y(x)$, která bude v bodech x_1 a x_2 procházet jejich hodnotami $y_1 = y(x_1)$ a $y_2 = y(x_2)$ a zároveň bude v těchto bodech spojitá. Na každém intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ tedy máme čtyři podmínky

$$\forall\, i, \qquad \begin{array}{ll} y(x_i) = y_i, & \displaystyle\lim_{x\to x_{i,+}} y'(x) = \lim_{x\to x_{i,-}} y'(x), \\ y(x_{i+1}) = y_{i+1}, & \displaystyle\lim_{x\to x_{i+1,-}} y'(x) = \lim_{x\to x_{i+1,+}} y'(x) \end{array} \tag{1}$$

    a proto tam budeme aproximovat funkcí která má čtyři parametry: kubickou

$$y(x) = a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3.$$

  - Abychom zajistili spojitost první derivace, budeme požadovat existenci druhé derivace na celém intervalu včetně koncových bodů. Funkci dvakrát zderivujeme

$$y'(x) = b + 2\,c\,x + 3\,d\,x^2, \qquad y''(x) = 2\,c + 6\,d\,x$$

    a dosadíme krajní body

$$y_1'' = 2\,c + 6\,d\,x_1, \qquad y_2'' = 2\,c + 6\,d\,x_2.$$

    Hodnoty druhých derivací v krajních bodech, tedy y_1'' a y_2'', určíme později. Odečtením rovnic od sebe získáme

$$d = \frac{1}{6}\,\frac{y_2'' - y_1''}{x_2 - x_1}$$

    a zpětným dosazením do jedné z nich

$$c = \frac{1}{2}\,\frac{x_2\,y_1'' - x_1\,y_2''}{x_2 - x_1}.$$

  - Dále jsme v (1) požadovali, aby funkce $y(x)$ procházela koncovými body intervalu, tedy

$$y_1 = a + b\,x_1 + c\,x_1^2 + d\,x_1^3, \qquad y_2 = a + b\,x_2 + c\,x_2^2 + d\,x_2^3.$$

    Odtud lze již snadno získat zbývající parametry a a b.
  - Protože vyjádření aproximace $y(x)$ pomocí parametrů a, b, c, d nevypadá hezky, obvykle se funkce zapisuje ve tvaru

$$y(x) = A(x)\,y_1 + B(x)\,y_2 + C(x)\,y_1'' + D(x)\,y_2'', \tag{2}$$

    kde

$$A(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \qquad C(x) = \frac{1}{6}\,(A^3 - A)(x_2 - x_1)^2, \tag{3a}$$

$$B(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 1 - A, \qquad D(x) = \frac{1}{6}\,(B^3 - B)(x_2 - x_1)^2. \tag{3b}$$

  - Zbývá určit hodnoty druhých derivací y_1'' a y_2''. To učiníme z požadavku spojitosti v krajních bodech. Nejprve zderivujeme funkci $y(x)$ ve tvaru (2). Derivace pomocných funkcí jsou

$$A' = -\frac{1}{x_2 - x_1}, \qquad C' = \frac{1}{6}\,(x_2 - x_1)^2 (A^3 - A)' = -\frac{1}{6}\,(x_2 - x_1)(3\,A^2 - 1),$$

$$B' = \frac{1}{x_2 - x_1}, \qquad D' = \frac{1}{6}\,(x_2 - x_1)(3\,B^2 - 1)$$

a tedy

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= A'(x)\, y_1 + B'(x)\, y_2 + C'(x)\, y_1'' + D'(x)\, y_2'' \\
&= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{1}{6}\,(x_2 - x_1)(3\,A^2 - 1)\, y_1'' + \frac{1}{6}\,(x_2 - x_1)(3\,B^2 - 1)\, y_2''.
\end{aligned}
$$

Derivace aproximace $y(x)$ v bodu x_1 ovšem musí být spojitá, a proto musí vyjít stejně pro lokální funkci na intervalu $[x_0, x_1]$, označíme ji $y_{[0,1]}(x)$, a pro lokální funkci na intervalu $[x_1, x_2]$, označíme ji $y_{[1,2]}(x)$. Položíme tedy

$$
y'_{[0,1]}(x_1) \stackrel{!}{=} y'_{[1,2]}(x_1)
$$

a po dosazení

$$
\begin{aligned}
&\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} - \frac{1}{6}\,(x_1 - x_0)(3\,A^2_{[0,1]}(x_1) - 1)\, y_0'' + \frac{1}{6}\,(x_1 - x_0)(3\,B^2_{[0,1]}(x_1) - 1)\, y_1'' = \\
&\qquad = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{1}{6}\,(x_2 - x_1)(3\,A^2_{[1,2]}(x_1) - 1)\, y_1'' + \frac{1}{6}\,(x_2 - x_1)(3\,B^2_{[1,2]}(x_1) - 1)\, y_2'',
\end{aligned}
$$

odkud s použitím (3) dostáváme

$$
\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + \frac{1}{6}\,(x_1 - x_0)\, y_0'' + \frac{1}{6}\,(x_1 - x_0)\, 2\, y_1'' \;=\; \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{1}{6}\,(x_2 - x_1)\, 2\, y_1'' - \frac{1}{6}\,(x_2 - x_1)\, y_2''
$$

a po převedení neznámých na levou stranu

$$
\frac{x_1 - x_0}{6}\, y_0'' + \frac{x_2 - x_0}{3}\, y_1'' + \frac{x_2 - x_1}{6}\, y_2'' \;=\; \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.
$$

Napíšeme-li toto pro všechny body, máme soustavu lineárních rovnic pro neznámé hodnoty druhých derivací. Tato soustava má tridiagonální matici a umíme ji proto snadno řešit. Krajní hodnoty druhých derivací máme buď zadány, a nebo (častěji) je volíme rovny nule (tzv. přirozený spline).