Hledání vlastních čísel

- **Zadání:** Chceme nalézt takové vlastní číslo matice $\mathbf{A}$, které má největší absolutní hodnotu.
- **Postup:** Začneme libovolným nenulovým vektorem (počáteční odhad) a opakovaně jej násobíme zleva maticí $\mathbf{A}$. Vektor konverguje k vlastnímu vektoru který přísluší k maximálnímu (v absolutní hodnotě) vlastnímu číslu.
- **Jak to funguje?**
  - Předpokládejme například, že $\mathbf{A}$ je matice 3×3 s třemi různými vlastními čísly $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a k nim příslušnými lineárně nezávislými vlastními vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ normovanými na délku 1.
  - Lineárně nezávislé vektory tvoří bázi nějakého prostoru, takže libovolný vektor $\vec{x}$ z tohoto prostoru můžeme zapsat jako

    $$\vec{x} = \alpha_1 \, \vec{e}_1 + \alpha_2 \, \vec{e}_2 + \alpha_3 \, \vec{e}_3,$$

    kde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jsou koeficienty této lineární kombinace.
  - Co se stane, když $\vec{x}$ vynásobíme maticí $\mathbf{A}$?
    Z linearity plyne, že

    $$\begin{aligned} \mathbf{A}\vec{x} &= \mathbf{A} \left(\alpha_1 \, \vec{e}_1 + \alpha_2 \, \vec{e}_2 + \alpha_3 \, \vec{e}_3 \right) = \\ &= \alpha_1 \, \mathbf{A} \, \vec{e}_1 + \alpha_2 \, \mathbf{A} \, \vec{e}_2 + \alpha_3 \, \mathbf{A} \, \vec{e}_3 = \\ &= \alpha_1 \, \lambda_1 \, \vec{e}_1 + \alpha_2 \, \lambda_2 \, \vec{e}_2 + \alpha_3 \, \lambda_3 \, \vec{e}_3. \end{aligned}$$

    Po opětovném vynásobení zleva maticí $\mathbf{A}$ dostaneme

    $$\mathbf{A}\mathbf{A}\vec{x} = \alpha_1 \, \lambda_1^2 \, \vec{e}_1 + \alpha_2 \, \lambda_2^2 \, \vec{e}_2 + \alpha_3 \, \lambda_3^2 \, \vec{e}_3.$$

    a tak dále, takže po n vynásobeních máme

    $$\mathbf{A}^n\vec{x} = \alpha_1 \, \lambda_1^n \, \vec{e}_1 + \alpha_2 \, \lambda_2^n \, \vec{e}_2 + \alpha_3 \, \lambda_3^n \, \vec{e}_3.$$

  - Předpokládali jsme že jsou vlastní čísla různá a tedy bez újmy na obecnosti uvažujme $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$.
    Potom ale pro velká n platí $|\lambda_1|^n \gg |\lambda_2|^n \gg |\lambda_3|^n$, a tedy můžeme psát

    $$\mathbf{A}^n\vec{x} \approx \alpha_1 \, \lambda_1^n \, \vec{e}_1.$$

  - Z toho vyplývá, že když nějaký vektor $\vec{x}$ dostatečněkrát vynásobíme maticí $\mathbf{A}$, dostaneme vektor blízký nějakému násobku vlastního vektoru $\vec{e}_1$ příslušného k největšímu (v abs. hodnotě) vlastnímu číslu λ_1.
  - Jak z toho nyní dostaneme vlastní číslo λ_1?
    - Znormalizujeme vektor $\alpha_1 \, \lambda_1^n \, \vec{e}_1$, tedy vydělíme jej jeho délkou, čímž získáme vektor $\vec{e}_1$.
    - Ten pak ještě jednou vynásobíme maticí $\mathbf{A}$ a podíváme se kolikrát se některá jeho nenulová složka změní. A to je ono vlastní číslo.
      Neboli:

      $$\lambda_1 = \frac{(\mathbf{A}\vec{e}_1)_i}{(\vec{e}_1)_i} \qquad \text{pro } i \text{ takové, že } x_i \neq 0.$$