LU dekompozice

- **Motivace:** Při Gaussově eliminaci jsme upravovali matici $\mathbf{A}$ na matici v horním trojúhelníkovém tvaru, protože soustava s touto maticí je řešitelná poměrně snadno. Při těchto úpravách jsme v každém kroku vynásobili některý řádek původní matice nějakým koeficientem a sečetli jej s jiným řádkem. Tato úprava se dá zapsat jako postupné násobení matice $\mathbf{A}$ zleva maticemi $\mathbf{D_k}$. V prvním kroku má matice $\mathbf{D_1}$ tvar

$$\mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

  V dalších krocích vypadají matice $\mathbf{D_2}$, $\mathbf{D_3}$, … podobně, resp. mají nad diagonálou nuly, na diagonále jedničky a pod diagonálou na některých místech nenulové prvky.

  Matici v horním trojúhelníkovém tvaru (označme ji $\mathbf{U}$ - *upper*) jsme tedy získali postupným násobením

$$\mathbf{U} = \mathbf{D_n}\,\mathbf{D_{n-1}}\dots\mathbf{D_1}\,\mathbf{A}.$$

- **Odvození:** Matici $\mathbf{U}$ proto můžeme rozložit jako

$$\mathbf{A} = \mathbf{D_1^{-1}}\,\mathbf{D_2^{-1}}\dots\mathbf{D_n^{-1}}\,\mathbf{U}.$$

  Můžete se sami přesvědčit, že násobením matic $\mathbf{D_1^{-1}}\,\mathbf{D_1^{-1}}\dots\mathbf{D_n^{-1}}$ které mají výše popsané vlastnosti získáme vždy matici v dolním trojúhelníkovém tvaru s jedničkami na diagonále (označme ji $\mathbf{L}$ - *lower*)

$$\mathbf{L} = \mathbf{D_1^{-1}}\,\mathbf{D_2^{-1}}\dots\mathbf{D_n^{-1}}.$$

  Pro regulární matici $\mathbf{A}$ tedy existuje rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{U}$, kde matice $\mathbf{U}$ je horní trojúhelníková a matice $\mathbf{L}$ je dolní trojúhelníková s jedničkami na diagonále.

  Tento rozklad je jednoznačný.

- **Princip metody:** Máme za úkol vyřešit soustavu rovnic

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{b}.$$

  Rozložíme si matici $\mathbf{A}$ a máme

$$\mathbf{L}\,\mathbf{U}\,\vec{x} = \vec{b}.$$

  Nyní označíme vektor $\mathbf{U}\vec{x}$ jako vektor $\vec{y}$, Tím jsme získali dvě soustavy lineárních rovnic s trojúhelníkovými maticemi

$$\mathbf{L}\,\vec{y} = \vec{b}, \qquad\qquad \mathbf{U}\,\vec{x} = \vec{y},$$

  které jsme v uvedeném pořadí schopni velmi snadno vyřešit.

- **Poznámka k rozkladu matice:** Postup rozkladu matice $\mathbf{A}$ na matice $\mathbf{L}$ a $\mathbf{U}$ je poměrně jednoduchý (viz např. přednášky). Nicméně je třeba si uvědomit, že při rozkladu $\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{U}$ mohou v matici $\mathbf{U}$ na diagonále vzniknout nulové prvky, což by byl problém. Tomu je možné předejít výběrem hlavního prvku (pivotingem). Výběr hlavního prvku se dá zapsat jako násobení matice $\mathbf{A}$ zleva nějakou permutační maticí $\mathbf{P}$. Obecně tedy máme

  $$\mathbf{P}\,\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{U},$$

  čemuž odpovídá i syntaxe příslušného příkazu v Matlabu:

  ```
  [L, U, P] = lu(A)
  ```

- **Možnost zpřesnění výsledku pomocí iterativního procesu:**

  Po vyřešení soustavy získáme nepřesný výsledek $\tilde{\vec{x}}$, který se od správného řešení liší o $\Delta\vec{x}$ (kde vektor $\Delta\vec{x}$ zatím neznáme). Správné řešení je tedy

  $$\vec{x} = \tilde{\vec{x}} - \Delta\vec{x}.$$

  O kolik se přibližně liší naše řešení $\tilde{\vec{x}}$ od skutečného řešení, resp. jaké je $\Delta\vec{x}$?
  Porovnáním $\mathbf{A}\tilde{\vec{x}}$ s pravou stranou $\vec{b}$ dostaneme

  $$\mathbf{A}\,\tilde{\vec{x}} - \vec{b} \;=\; \mathbf{A}\,(\vec{x} + \Delta\vec{x}) - \vec{b} \;=\; \mathbf{A}\,\vec{x} - \vec{b} + \mathbf{A}\,\Delta\vec{x} \;=\; \mathbf{A}\,\Delta\vec{x}.$$

  Z předchozí rovnice jsme tedy schopni přibližně určit $\Delta\vec{x}$ řešením soustavy

  $$\mathbf{A}\,\Delta\vec{x} = \mathbf{A}\,\tilde{\vec{x}} - \vec{b},$$

  jejíž pravou stranu známe. Protože máme hotový LU rozklad matice $\mathbf{A}$, není toto řešení obtížné a můžeme jej provádět opakovaně. Postupujeme tedy následovně:

  0. Máme přibližné řešení $\tilde{\vec{x}}$.

  1. Najdeme $\Delta\vec{x}$ řešením soustavy $\mathbf{A}\,\Delta\vec{x} = \mathbf{A}\,\tilde{\vec{x}} - \vec{b}$.

  2. Nové, přesnější řešení soustavy tedy bude $\tilde{\tilde{\vec{x}}} = \tilde{\vec{x}} - \Delta\vec{x}$.

  3. Položíme $\tilde{\vec{x}} = \tilde{\tilde{\vec{x}}}$ a opakujeme od bodu 1.