Úvod k počátečnímu problému pro obyčejné diferenciální rovnice

- Budeme řešit **modelový příklad:** úlohu množení bakterií.
  - Na začátku máme jednu bakterii a víme, že se za určitý čas rozmnoží na dvě. Zajímá nás počet bakterií v čase t.
  - Úloha se dá formulovat jako řešení obyčejné diferenciální rovnice (ODE)

    $$\frac{\mathrm{d}\,N(t)}{\mathrm{d}\,t} = k\,N(t),$$

    kde $N(t)$ vyjadřuje počet bakterií v čase t. Počáteční podmínka je $N(0) = 1$. Rovnice nám konkrétně říká, že za jednotku času se každá bakterie rozmnoží k-krát.
  - Stejná rovnice popisuje také například úbytek radionuklidů při radioaktivním rozpadu. V tomto případě je ovšem $k < 0$.
  - Úlohu můžeme ještě dále zobecnit tak, že k nebude konstanta, ale časově závislá funkce $k = k(t)$. Například volba $k(t) = 1 + \cos t$ popisuje, že se bakterie množí především v létě (v teple), zatímco v zimě vůbec. Řešíme tedy obyčejnou diferenciální rovnici (ODE)

    $$\frac{\mathrm{d}\,N(t)}{\mathrm{d}\,t} = (1 + \cos t)\,N(t) \qquad \text{s počáteční podmínkou} \qquad N(0) = 1.$$

    Její analytické řešení je

    $$N(t) = e^{t+\sin(t)},$$

    ale zde budeme předstírat, že jej neznáme.

- **Zadání:** Při přednáškách a při cvičení z tohoto předmětu obvykle ODE zapisujeme jako

  $$\frac{\mathrm{d}\,y(x)}{\mathrm{d}\,x} = f(x, y(x)) \qquad \text{s počáteční podmínkou} \qquad y(x_0) = y_o.$$

  Například naše výše popsaná úloha je v tomto značení a v těchto proměnných

  $$\frac{\mathrm{d}\,y(x)}{\mathrm{d}\,x} = (1 + \cos x)\,y(x) \qquad \text{s počáteční podmínkou} \qquad y(0) = 1. \tag{1}$$

  Tedy: známe hodnotu funkce $y(x)$ v bodu $x = 0$ a známe všude její první derivaci. Chceme nalézt postup, jak získat funkční hodnoty $y(x)$ v libovolném bodu x.

- **Eulerova metoda:**

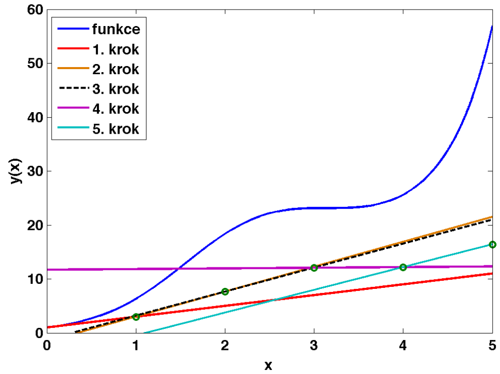
  To, že známe derivaci, znamená že známe směrnici tečny grafu. Můžeme tedy začít v bodu $x = 0$, nakreslit z tohoto bodu tečnu a hodnotu funkce v bodu blízkém k $x = 0$ hledat na této tečně. V novém bodu pak opět vypočítat směrnici tečny a postupovat po přímce s touto směrnicí, atd. Tento postup je znám jako Eulerova metoda. Matematicky ji lze odvodit pomocí Taylorova rozvoje funkce

  $$y(x + h) = y(x) + h\,\frac{\mathrm{d}\,y(x)}{\mathrm{d}x} + \dots.$$

  První derivace $y(x)$ je rovna $f(x, y(x))$, členy s druhou a vyššími derivacemi zanedbáme. Pro naši funkci (1) popisující množení bakterií tedy máme

  $$y(x + h) = y(x) + h\,(1 + \cos x)\,y(x)$$

a postup řešení spolu se směrnicemi v jednotlivých bodech vidíme zde



Jediné, čím můžeme Eulerovu metodu zpřesnit, je zmenšit délku kroku.

- **Metoda středního bodu (midpoint method):**

Můžeme se však pokusit metodu modifikovat tak, abychom dostali přesnější vyjádření směrnice tečny. Řekněme, že nejprve provedeme poloviční krok, tedy krok o $h/2$, pomocí Eulerovy metody. V tomto bodu vypočítáme novou směrnici tečny, která se bude rovnat

$$f\left(x+\frac{h}{2}\ ,\ y(x)+\frac{h}{2}f(x,y(x))\right).$$

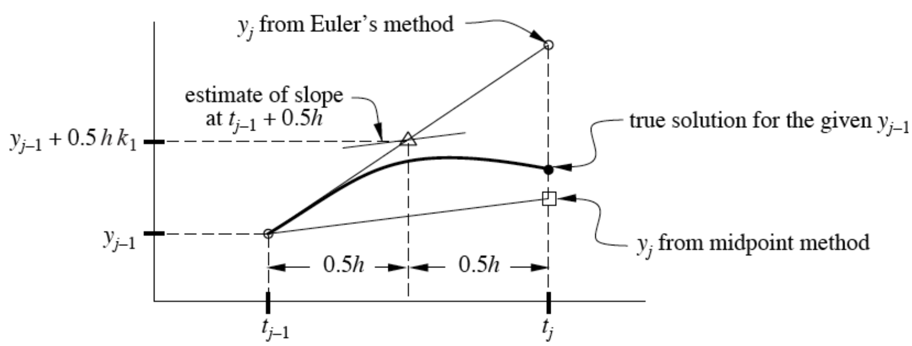
Tuto směrnici pak použijeme k provedení celého kroku z bodu x do bodu $x+h$. Metoda tedy je

$$y(x+h)\ =\ y(x)+h\,f\left(x+\frac{h}{2}\ ,\ y(x)+\frac{h}{2}f(x,y(x))\right)$$

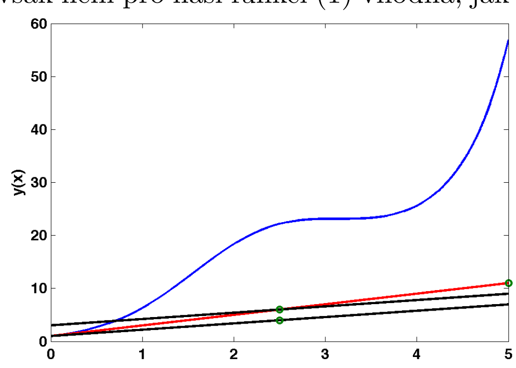
a pro konkrétně naši funkci (1) máme

$$y(x+h)\ =\ y(x)+h\left[1+\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]\left(y(x)+\frac{h}{2}(1+\cos x)\,y(x)\right).$$

Této metodě se říká metoda středního bodu (midpoint method) a její postup lze schematicky znázornit takto:



Při volbě dlouhého kroku však není pro naši funkci (1) vhodná, jak je vidět z následujícího obrázku.



- **Heunova metoda:**

  Další jednoduchá metoda spočívá v tom, že se pokusíme odhadnout směrnici tečny v bodu $x+h$, poté uděláme průměr směrnic v bodech x a $x+h$ a po přímce s touto průměrnou směrnicí postupujeme z x do $x+h$. Směrnici tečny v bodu $x+h$ odhadneme pomocí Eulerovy metody, tedy jako

$$f\Big(x+h\ ,\ y(x)+h\,f\big(x,y(x)\big)\Big).$$

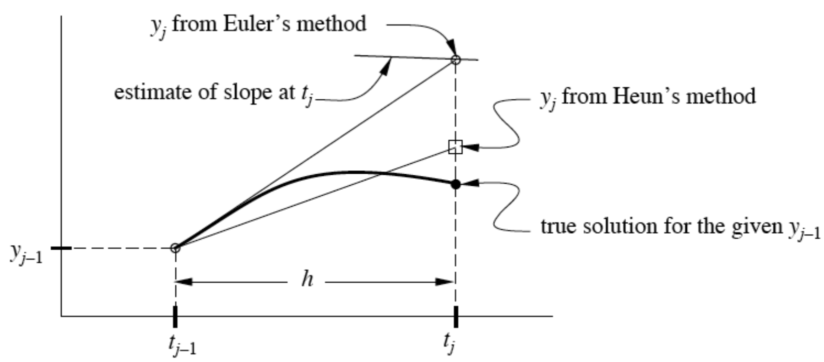
  Metoda je tedy

$$y(x+h)\ =\ y(x)+h\,\frac{1}{2}\,\bigg(f\Big(x,y(x)\Big)\ +\ f\Big(x+h\ ,\ y(x)+h\,f(x,y(x))\Big)\bigg)\ ,$$

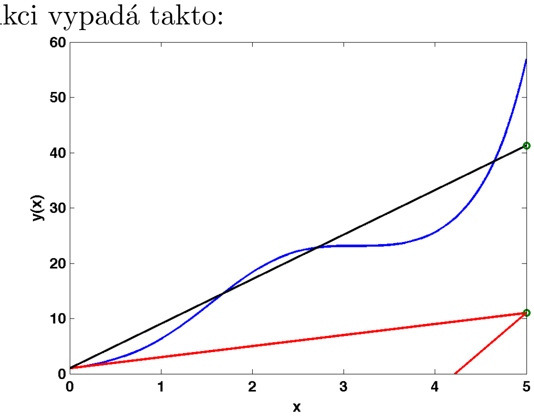
  což pro naši funkci (1) dává

$$y(x+h)\ =\ y(x)+\frac{h}{2}\,\bigg((1+\cos x)\,y(x)+\big[1+\cos(x+h)\big]\big[y(x)+h(1+\cos x)\,y(x)\big]\bigg)\ .$$

  Této metodě se říká Heunova, můžeme ji schematicky znázornit jako



  a konkrétně pro naši funkci vypadá takto:



- Všechny metody popsané v tomto textu formálně patří mezi Runge-Kuttovy metody.