Další metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic

- **Metoda Leap-Frog**
  - Často se používá pro jednoduchou integraci
  - Jednoduché odvození z Taylorova rozvoje:

$$y(x_n + h) = y_n + h\, f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} f'(x_n, y_n) + \mathcal{O}(h^3),$$
$$y(x_n - h) = y_n - h\, f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} f'(x_n, y_n) + \mathcal{O}(h^3).$$

    Rovnice od sebe odečteme a máme

$$y(x_n + h) = y(x_n - h) + 2\,h\, f(x_n, y_n) + \mathcal{O}(h^3).$$

  - Postup je tedy následující:

1. krok:	$y(x_0) = y_0$		*(počáteční podmínka)*
2. krok:	$x_1 = x_0 + h,$	$y(x_1) = y_0 + h\, f(x_0\ ,\ y_0)$	*(Eulerova metoda)*
3. krok:	$x_2 = x_1 + h,$	$y(x_2) = y_0 + 2\,h\, f(x_1 + h\ ,\ y(x_1))$	*(odsud už Leap-Frog)*
4. krok:	$x_3 = x_2 + h,$	$y(x_3) = y_1 + 2\,h\, f(x_2 + h\ ,\ y(x_2))$	
5. krok:	$x_4 = x_3 + h,$	$y(x_4) = y_2 + 2\,h\, f(x_3 + h\ ,\ y(x_3))$	

    ...

    Tedy startujeme Eulerovou metodou, protože v druhém kroku ještě nemáme data z předminulého bodu, a dále už pokračujeme Leap-Frog.

  - Odtud je patrné jméno metody: skáče jako žába ob jeden krok. Například pro $y(x_2)$ používá $f(x_1, y_1)$ z předchozího bodu, ale y_0 z předminulého.

- **Bulirsch-Stoerova Metoda**
  - Jedná se o totéž jako při Rombergově integraci: zpřesnění vhodnou kombinací jednodušší metody (např. Leap-Frog) na různých rozlišeních.
  - Opět se dá odvodit, že chyba Leap-Frog metody je úměrná pouze sudým mocninám kroku h.
  - Zpřesnění tedy dostaneme stejným způsobem jako u Romberga:
    - S použitím dvou délek kroků (rozlišení)

$$y = \frac{4}{3}\, y_h - \frac{1}{3}\, y_{2h},$$

    - s použitím tří délek kroků (rozlišení)

$$y = \frac{64}{45}\, y_h - \frac{20}{45}\, y_{2h} + \frac{1}{45}\, y_{4h},$$

      atd.

- **Implicitní metody**

  Explicitní Eulerova metoda má tvar

  $$y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n).$$

  Ukazuje se, že metoda je stabilnější v implicitním tvaru

  $$y_{n+1} = y_n + h\, f(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

  Ve funkci f na pravé straně tedy vystupuje neznámý člen y_{n+1}. Pokud je funkce f lineární v y, není to žádný problém. Pokud lineární není, je situace komplikovanější.

- **Metoda prediktor-korektor**

  – Jednoduchý příklad:

    ∗ Prediktor: explicitní Euler

    $$\widetilde{y}_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n),$$

    ∗ korektor: implicitní, např.

    $$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\, \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}\ ,\ \widetilde{y}_{n+1})}{2} \\ &= y_n + h\, \frac{f(x_n, y_n) + f(x_n + h\ ,\ y_n + h\, f(x_n, y_n))}{2}. \end{aligned}$$

  Tímto postupem jsme získali opět RK metodu, a to Heunovu!

  – Jiný příklad: přesnější metoda

    ∗ Prediktor: explicitní (Adams-Bashforth)

    $$\widetilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\,(23\, f_n - 16 f_{n-1} + 5\, f_{n-2}) + \mathcal{O}(h^4),$$

    ∗ korektor: implicitní (Adams-Moulton)

    $$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\,(5\, \widetilde{f}_{n+1} + 8\, f_n - f_{n-1}) + \mathcal{O}(h^4),$$

  kde jsme označili $f_k = f(x_k, y_k) = y'_k$.
  Vidíme, že prediktor i korektor jsou třetího řádu přesnosti.