Příklad řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic

- Budeme řešit **Newtonovy gravitační rovnice** pro systém dvou těles.
  - Tyto rovnice zapíšeme jako
    $$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -G\,M\,\frac{x}{r^3}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -G\,M\,\frac{y}{r^3},$$
    kde $(x(t), y(t))$ je poloha v orbitální rovině mnohem lehčího tělesa, které obíhá kolem tělesa s hmotností M, G je gravitační konstanta a $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
  - Pro jednoduchost budeme předpokládat že $GM = 1$.
  - Soustavu nejprve převedeme na soustavu čtyř rovnic prvního řádu. Zavedením
    $$w_1 = x, \qquad w_2 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \qquad w_3 = y, \qquad w_4 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$
    dostáváme soustavu ve tvaru
    $$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}t} &= w_2, & \frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}t} &= -\frac{w_1}{(w_1^2 + w_3^2)^{3/2}}, \\ \frac{\mathrm{d}w_3}{\mathrm{d}t} &= w_4, & \frac{\mathrm{d}w_4}{\mathrm{d}t} &= -\frac{w_3}{(w_1^2 + w_3^2)^{3/2}}, \end{aligned} \tag{1}$$
    což můžeme zapsat jako
    $$\frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}(\vec{w}, t), \qquad \text{kde} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{f}(\vec{w}, t) = \begin{pmatrix} w_2 \\ -\frac{w_1}{(w_1^2+w_3^2)^{3/2}} \\ w_4 \\ -\frac{w_3}{(w_1^2+w_3^2)^{3/2}} \end{pmatrix}.$$
  - Při počátečních podmínkách
    $$\begin{aligned} w_1(0) &= x(0) = 1, & w_2(0) &= x'(0) = 0, \\ w_3(0) &= y(0) = 0, & w_4(0) &= y'(0) = 1 \end{aligned}$$
    by řešením měl být pohyb po kružnici $x^2 + y^2 = 1$.
- Řešení metodou **RK4** s pevným krokem h:
  $$\begin{aligned} k_{1i} &= h\,f_i\Big(t_n\ ,\ w_{ni}\Big), \\ k_{2i} &= h\,f_i\Big(t_n + \frac{h}{2}\ ,\ w_{ni} + \frac{k_{1i}}{2}\Big), \\ k_{3i} &= h\,f_i\Big(t_n + \frac{h}{2}\ ,\ w_{ni} + \frac{k_{2i}}{2}\Big), \\ k_{4i} &= h\,f_i\Big(t_n + h\ ,\ w_{ni} + k_{3i}\Big), \end{aligned}$$
  $$w_i(t_{n+1}) \;=\; w_i(t_n + h) \;=\; w_i(t_n) + \frac{1}{6}\left(k_{1i} + 2\,k_{2i} + 2\,k_{3i} + k_{4i}\right).$$

- Řešení **Bulirsch-Stoerovou** metodou s použitím metody **Leap-Frog**, pevný krok h:
  - První krok z času $t_0 = 0$ do času $t_1 = 0 + h$ provedeme Eulerovou metodou

$$
\begin{aligned}
w_1(t_1) &= w_1(0) + h\, w_2(0),\\
w_2(t_1) &= w_2(0) - h\, \frac{w_1(0)}{(w_1^2(0) + w_3^2(0))^{3/2}},\\
w_3(t_1) &= w_3(0) + h\, w_4(0),\\
w_4(t_1) &= w_4(0) - h\, \frac{w_3(0)}{(w_1^2(0) + w_3^2(0))^{3/2}},
\end{aligned}
$$

    dále postupujeme metodou Leap-Frog:

$$
\begin{aligned}
w_1(t_{n+1}) &= w_1(t_{n-1}) + 2\,h\, w_2(t_n),\\
w_2(t_{n+1}) &= w_2(t_{n-1}) - 2\,h\, \frac{w_1(t_n)}{(w_1^2(t_n) + w_3^2(t_n))^{3/2}},\\
w_3(t_{n+1}) &= w_3(t_{n-1}) + 2\,h\, w_4(t_n),\\
w_4(t_{n+1}) &= w_4(t_{n-1}) - 2\,h\, \frac{w_3(t_n)}{(w_1^2(t_n) + w_3^2(t_n))^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

  - Zpřesnění Bulirsch-Stoerovou metodou dle vlastního výběru:

$$
y = \frac{4}{3}\, y_h - \frac{1}{3}\, y_{2h}, \qquad y = \frac{64}{45}\, y_h - \frac{20}{45}\, y_{2h} + \frac{1}{45}\, y_{4h}, \qquad \text{atd.}
$$