Příklad na metodu střelby

- Budeme řešit stejnou úlohu jakou se zabývá dělostřelec, když se snaží zasáhnout cíl.

- Ve vakuu je úloha poměrně snadná. Rychlost projektilu je dána

  $$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\theta \\ v_0 \sin\theta - g\,t \end{pmatrix},$$

  kde v_o je počáteční rychlost projektilu a θ elevační úhel (úhel mezi vektorem rychlosti a osou x). Dolet v horizontálním směru x lze vypočíst analyticky jako

  $$d = \frac{v_0}{g}\,\sin(2\theta),$$

  z čehož vyplývá, že ve vakuu nejdál dostřelíme, pokud vystřelíme pod úhlem $\theta = 45°$, protože $\sin(2\frac{\pi}{4}) = 1$.

- Ve vzduchu je situace jiná, protože projektil je vzduchem brzděn.
  - Pohyb projektilu je pak popsán soustavou čtyř obyčejných diferenciálních rovnic (ODE)

    $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\,\cos\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2m}\,c\,\rho\,s\,v^2 - g\,\sin\theta,$$
    $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v\,\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{g}{v}\,\cos\theta,$$

    kde

    $$v^2 = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2,$$

    s okrajovými podmínkami

    $$x(0) = y(0) = 0, \qquad v(0) = v_0, \qquad y(x_c) = 0,$$

    kde x_c je poloha cíle (horizontální vzdálenost cíle od dělostřelce).
  - Pro jednoduchost můžeme zvolit $m = 1,\ g = 1,\ c\,\rho\,s = 2$, takže řešená soustava je

    $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\,\cos\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -v^2 - \sin\theta,$$
    $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v\,\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{v}\,\cos\theta,$$

    na počátku (v čase $t = 0$) stojí střelec na pozici $x = 0$ ve výšce $y = 0$ a projektil má zasáhnout cíl na pozici $x = x_c$ ve výšce $y = 0$.
  - Střelec volí náměr, tedy úhel $\theta_0 = \theta(0)$, tak, aby zasáhl cíl. Pokud jej mine, opraví náměr a zkouší to znovu.

- Pro zvolený úhel $\theta_0 = \theta(0)$ tedy musíme řešit počáteční úlohu pro soustavu rovnic až do času t_c, kdy $x(t_c) = x_c$, a pak zjistit hodnotu $y(t_c)$. Mohou nastat tři situace:
  * $y(t_c) > 0$: dopad příliš daleko
  * $y(t_c) < 0$: dopad příliš blízko
  * $y(t_c) = 0$: zásah!
- Příklad:
  * Mějme $v_0 = 4$, $x_c = 2$.
  * Ve vakuu bychom dostřelili do vzdálenosti $d = v_0 = 4$, proto bychom i na vzduchu měli do cíle ve vzdálenosti $x_c = 2$ dostřelit, pokud nebude odpor vzduchu příliš velký.
  * Budeme postupovat následovně:
    · Vystřelíme pod úhlem $\theta_0 = 45°$ - měli bychom přestřelit
    · Vystřelíme pod úhlem $\theta_0 = 5°$ - měli bychom nedostřelit
    · Zvolíme úhel v půlce intervalu $[5°, 45°]$, tedy 25°.
      ◇ Pokud přestřelíme, budeme volit další úhel v intervalu $[5°, 25°]$, tedy 15°.
      ◇ Pokud nedostřelíme, budeme volit další úhel v intervalu $[25°, 45°]$, tedy 35°.
    · Takto pokračujeme dokud se nestrefíme s dostatečnou přesností.
  * Všimněme si, že jsme vlastně aplikovali metodu půlení intervalu pro řešení nelineární rovnice s neznámou θ_0.
  * Vlastní soustavu ODE (jednotlivý výstřel) budeme řešit například metodou RK4.