Rombergova metoda

- Jednoduché vzorce pro integraci funkce $f(x)$ v mezích od x_1 do x_n většinou nejsou dostatečně přesné. Rombergova metoda je jednoduchý algoritmus kterým je lze zpřesnit.

- Vezměme si jeden z nejjednodušších integračních vzorců - složené lichoběžníkové pravidlo

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = h\left(\frac{1}{2}\,f(x_1) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}\,f(x_n)\right)$$

  a předpokládejme že uzly jsou ekvidistantní, tedy že vzdálenost mezi dvěma sousedními body x_k a x_{k+1} je vždy rovna h. Protože chyba tohoto pravidla je úměrná h^2, není výsledek moc přesný ani pro dostatečně malé h. Použití příliš malého h zase není vhodné z důvodu velkého počtu výpočtu hodnot funkce a nárůstu zaokrouhlovací chyby.

- Lze ukázat, že chyba složeného lichoběžníkového pravidla je úměrná pouze druhým mocninám h, tedy

$$I = I_h + A\,h^2 + B\,h^4 + \ldots,$$

  kde I je přesná hodnota integrálu, I_h jeho numerická hodnota vypočtená s krokem h a A a B jsou neznámé koeficienty.

  Při provedení stejné integrace s dvojnásobným krokem $2h$ dostaneme

$$I = I_{2h} + A\,(2h)^2 + B\,(2h)^4 + \ldots.$$

- Z uvedených rovnic nyní můžeme jednoduše vyloučit chybu úměrnou h^2. Vezmeme α-krát první rovnici, β-krát druhou a sečteme

$$(\alpha+\beta)\,I = \alpha\,I_h + \beta\,I_{2h} + (\alpha+4\beta)\,A\,h^2 + (\alpha+16\beta)\,B\,h^4 + \ldots.$$

  Člen s B zatím zanedbáme a chceme se zbavit členu s A. Tedy požadujeme aby u I byla jednička a u A nula:

$$\alpha+\beta = 1, \qquad\qquad \alpha + 4\,\beta = 0,$$

  což vede na lineární soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  s řešením $\alpha = 4/3$, $\beta = -1/3$. Výsledný vzorec zpřesněný Rombergovou metodou je tedy

$$I \;=\; \frac{4}{3}\,I_h - \frac{1}{3}\,I_{2h} \;+\; \mathcal{O}(h^4).$$

- Chceme-li vzorec zpřesnit ještě dále a eliminovat i člen rozvoje chyby u B, použijeme také integrál s krokem $4h$

$$I = I_{4h} + A\,(4h)^2 + B\,(4h)^4 + \ldots,$$

vynásobíme jej γ a přičteme ke dvěma předchozím

$$(\alpha + \beta + \gamma)\, I = \alpha\, I_h + \beta\, I_{2h} + \gamma\, I_{4h} + (\alpha + 4\,\beta + 16\,\gamma)\, A\, h^2 + (\alpha + 16\,\beta + 256\,\gamma)\, B\, h^4 + \dots$$

a budeme požadovat

$$\alpha + \beta + \gamma = 1, \qquad \alpha + 4\,\beta + 16\,\gamma = 0, \qquad \alpha + 16\,\beta + 256\,\gamma = 0,$$

což dává soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 16 & 256 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

s řešením $\alpha = 64/45,\ \beta = -20/45,\ \gamma = -1/45$. Výsledný vzorec je tedy v tomto případě

$$I \;=\; \frac{64}{45}\, I_h - \frac{20}{45}\, I_{2h} + \frac{1}{45}\, I_{4h} \;+\; \mathcal{O}(h^6). \tag{1}$$

- V praxi se ovšem vzorce předem neodvozují, obvykle se postupuje iteračně dokud není dosažena požadovaná přesnost.

  Rombergova metoda se dá zapsat pomocí iteračního vzorce

  $$I_{2h}^{(k)} \;=\; \frac{4^k\, I_{2h}^{(k-1)} - I_h^{(k-1)}}{4^k - 1},$$

  kde k je iterační krok.

  Například výsledek odpovídající (1) tak dostaneme jako $I_{4h}^{(2)}$, který se počítá postupně z $I_{4h}^{(1)}, I_{2h}^{(1)}$, které se napočítaly z $I_{4h}^{(0)}, I_{2h}^{(0)}, I_h^{(0)}$.