Odvození kvadraturních formulí pomocí metody neurčitých koeficientů

- **Zadání:** Máme odvodit n-bodovou kvadraturní formuli pro integraci funkce $f(x)$ na intervalu $[x_1, x_n]$.
- **Postup:** Předpokládáme že jsme funkci aproximovali polynomem a ten pak zintegrovali. Polynom však přímo nekonstruujeme. Místo toho koeficienty integrálu vypočítáme z požadavku, aby byla aproximace přesná pro všechny polynomy až do stupně $n-1$.
- Mějme funkci $f(x)$ a její hodnoty v bodech $x_1 < x_2 < x_3$. Aproximujeme ji pomocí polynomu

$$f(x) \approx a\,x^2 + b\,x + c \tag{1}$$

a přibližný integrál tedy bude

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)\,\mathrm{d}x \;\approx\; \int_{x_1}^{x_3} \big(a\,x^2 + b\,x + c\big)\;\mathrm{d}x \;=\; a\int_{x_1}^{x_3} x^2\,\mathrm{d}x \;+\; b\int_{x_1}^{x_3} x\,\mathrm{d}x \;+\; c\int_{x_1}^{x_3} 1\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

- Jako výsledek ovšem očekáváme kvadraturní vzorec ve tvaru

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)\,\mathrm{d}x \;\approx\; w_1\,f(x_1) + w_2\,f(x_2) + w_3\,f(x_3). \tag{3}$$

Po dosazení aproximace (1) máme

$$\begin{aligned} w_1\,f(x_1) + w_2\,f(x_2) + w_3\,f(x_3) = \;& w_1\,(a\,x_1^2 + b\,x_1 + c) \\ & + w_2\,(a\,x_2^2 + b\,x_2 + c) \\ & + w_3\,(a\,x_3^2 + b\,x_3 + c) = \\ = \;& a\,(w_1\,x_1^2 + w_2\,x_2^2 + w_3\,x_3^2) \\ & + b\,(w_1\,x_1 + w_2\,x_2 + w_3\,x_3) \\ & + c\,(w_1 + w_2 + w_3). \end{aligned} \tag{4}$$

Porovnáním členů s koeficienty a, b a c na pravých stranách (2) a (4) dostaneme

$$\begin{aligned} a\,(w_1\,x_1^2 + w_2\,x_2^2 + w_3\,x_3^2) \;&=\; a\int_{x_1}^{x_3} x^2\,\mathrm{d}x, \\ b\,(w_1\,x_1 + w_2\,x_2 + w_3\,x_3) \;&=\; b\int_{x_1}^{x_3} x\,\mathrm{d}x, \\ c\,(w_1 + w_2 + w_3) \;&=\; c\int_{x_1}^{x_3} 1\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

což můžeme zapsat jako lineární soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_3} 1\,\mathrm{d}x \\ \int_{x_1}^{x_3} x\,\mathrm{d}x \\ \int_{x_1}^{x_3} x^2\,\mathrm{d}x \end{pmatrix}$$

pro neznámé koeficienty w_1, w_2, w_3 kvadraturní formule (3).

- Předpokládejme že body jsou ekvidistantní a označme $h = x_2 - x_1 = x_3 - x_2$. Potom bude mít soustava řešení $w_1 = w_3 = h/3,\ w_2 = 4h/3$, takže hledaná kvadraturní formule je

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)\,\mathrm{d}x \;\approx\; h\left(\frac{f_1}{3} + \frac{4\,f_2}{3} + \frac{f_3}{3}\right),$$

  což je Simpsonovo pravidlo.