Odvození kvadraturních formulí pomocí Lagrangeova polynomu

- **Zadání:** Máme odvodit tříbodovou kvadraturní formuli pro integraci funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$.
- **Postup:** Funkci aproximujeme Lagrangeovým polynomem a ten pak zintegrujeme.
- Označíme si $x_1 = a,\ x_3 = b$ a budeme uvažovat ještě jeden bod x_2 uvnitř tohoto intervalu.
- Na intervalu $[a, b]$ aproximujeme funkci $f(x)$ Lagrangeovým interpolačním polynomem druhého stupně

$$f(x) \approx L_2(x) = f_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + f_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

- Pro zjednodušení budeme předpokládat že body jsou ekvidistantní, tedy že x_2 je přesně uprostřed mezi x_1 a x_3. Označíme $h = x_2 - x_1 = x_3 - x_2$ a zavedeme substituci

$$t = \frac{x - x_1}{h}.$$

  Máme tedy

$$\begin{aligned} x - x_1 &= t\,h, \\ x - x_2 &= x - x_1 + x_1 - x_2 = t\,h - h = h(t-1), \\ x - x_3 &= x - x_1 + x_1 - x_3 = t\,h - 2\,h = h(t-2) \end{aligned}$$

  a Lagrangeův polynom je

$$\begin{aligned} L_2(x) &= f_1 \frac{h(t-1)h(t-2)}{2\,h^2} + f_2 \frac{h\,t\,h(t-2)}{-h^2} + f_3 \frac{h\,t\,h(t-1)}{2\,h^2} \\ &= \frac{f_1}{2}\,(t^2 - 3\,t + 2) - f_2\,(t^2 - 2\,t) + \frac{f_3}{2}\,(t^2 - t). \end{aligned}$$

- Integrál funkce $f(x)$ z bodu $a = x_1$ do bodu $b = x_3$ nyní aproximujeme integrálem Lagrangeova polynomu:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_{x_1}^{x_3} L_2(x)\,\mathrm{d}x &= h \int_0^2 L_2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= h\left[\frac{f_1}{2}\left(\frac{1}{3}\,t^3 - \frac{3}{2}\,t^2 + 2\,t\right) - f_2\left(\frac{1}{3}\,t^3 - t^2\right) + \frac{f_3}{2}\left(\frac{1}{3}\,t^3 - \frac{1}{2}\,t^2\right)\right]_0^2 \\ &= h\left(\frac{f_1}{3} + \frac{4\,f_2}{3} + \frac{f_3}{3}\right). \end{aligned}$$

- Tomuto konkrétnímu kvadraturnímu vzorci se říká Simpsonovo pravidlo.
- Stejným způsobem můžeme odvodit integrační formule na libovolném počtu bodů (uzlů).
- Pokud je interval $[a, b]$ dlouhý, neinterpolujeme polynomem vysokého stupně, ale rozsekáme jej na malé intervaly a v nich integrujeme.