Důkaz ohraničení absolutní hodnoty kořenů polynomu shora

Tvrdíme (viz přednáška), že pro všechny kořeny $x_1, \ldots, x_n$ polynomu

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \qquad a_n \neq 0$$

platí

$$\frac{|a_0|}{|a_0| + \max\limits_{k=1,\ldots,n} |a_k|} \;\leq\; |x_i| \;\leq\; 1 + \frac{\max\limits_{k=0,\ldots,n-1} |a_k|}{|a_n|}.$$

Zde ukážeme pouze důkaz pravé nerovnosti, tedy horního odhadu.

- Pokud je $|x_i| \leq 1$, není co dokazovat. Dále tedy předpokládejme $|x_i| > 1$.
- Protože $|x_i|$ je kořenem polynomu $f(x)$, platí

  $$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_n x_i^n = 0$$

  neboli

  $$a_n x_i^n = -a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \ldots - a_{n-1} x_i^{n-1}$$

  a odtud

  $$|a_n|\,|x_i|^n \leq |a_0| + |a_1|\,|x_i| + |a_2|\,|x_i|^2 + \cdots + |a_{n-1}|\,|x_i|^{n-1}.$$

- Označme $A = \max\limits_{k=0,\ldots,n-1} |a_k|$. Potom

  $$|a_n|\,|x_i|^n \;\leq\; A\left(1 + |x_i| + |x_i|^2 + \cdots + |x_i|^{n-1}\right).$$

  To je geometrická řada, a proto

  $$|a_n|\,|x_i|^n \;\leq\; A\,\frac{|x_i|^n - 1}{|x_i| - 1} \;<\; A\,\frac{|x_i|^n}{|x_i| - 1}$$

  (díky předpokladu $|x_i| > 1$).

- Tedy $|a_n| < \frac{A}{|x_i|-1}$, neboli $|x_i| < 1 + \frac{A}{|a_n|}$, a důkaz pravé nerovnosti je hotov.