Iterační metody

- Máme soustavu rovnic $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ a chceme ji řešit iterativně, tedy v mnoha jednoduchých krocích, z nichž každý o něco vylepší řešení.
- Nápad řešit (nulovat) jednu rovnici po druhé není příliš šťastný, protože vyřešením následující rovnice vždy změníme řešení rovnic předchozích. Tento postup není obecný, hodí se jen pro určitou třídu soustav.
- Pro iterační řešení matici nijak netransformujeme ani nerozkládáme, místo toho si z každé rovnice vyjádříme jednu složku řešení (nebo její část).
  Například: Soustavu tří rovnic $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ zapíšeme maticově jako

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & x_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array}\right).$$

  Z každé rovnice si vyjádříme jednu neznámou, máme tedy

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12}\, x_2 - a_{13} x_3\right), \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21}\, x_1 - a_{23} x_3\right), \\ x_3 &= \frac{1}{a_{33}} \left(b_3 - a_{31}\, x_1 - a_{32} x_2\right). \end{aligned} \tag{1}$$

- Princip iterační metody je následující.

  1. Na začátku si zvolíme libovolný nenulový vektor $\vec{x}$. Pokud máme nějaký odhad skutečného řešení, je dobré použít tento odhad.
  2. Z předchozí soustavy vypočítáme dosazením prvků matice $\mathbf{A}$, pravé strany $\vec{b}$ a zvoleného vektoru $\vec{x}$ levou stranu. Za proměnné tedy považujeme pouze členy na levé straně!
  3. Předpokládáme, že to co nám vzniklo na levé straně je lepší aproximací řešení než původní odhad. Proto v dalším kole postup opakujeme, přičemž na pravé straně používáme již nově vypočítané složky vektoru $\vec{x}$.

  Tomuto postupu se říká **iterace**. Provádíme stejný postup mnohokrát za sebou, ale vždy používáme hodnoty vypočtené v předchozím kroku. Kroky se zde značí většinou horním indexem k. Pro výše uvedenou soustavu máme tedy

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12}\, x_2^k - a_{13}\, x_3^k\right), \\ x_2^{k+1} &= \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21}\, x_1^k - a_{23}\, x_3^k\right), \\ x_3^{k+1} &= \frac{1}{a_{33}} \left(b_3 - a_{31}\, x_1^k - a_{32}\, x_2^k\right). \end{aligned} \tag{2}$$

  Tato metoda (daná volbou (1)) se nazývá Jacobiho a lze ukázat, že uvedený postup skutečně pro určitou třídu soustav rovnic vede ke správnému řešení.

- Jacobiho metodu lze zapsat i maticově. Rozdělme si matici na součet[1] tří matic: diagonální $\mathbf{D}$, horní trojúhelníkové $\mathbf{U}$ a dolní trojúhelníkové $\mathbf{L}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

  Soustavu (2) lze pak jednoduše přepsat jako

$$\vec{x}^{k+1} = \mathbf{D^{-1}} \left(\vec{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{U})\, \vec{x}^k\right)$$

  a nové řešení tedy získáváme iterací

$$\vec{x}^{k+1} = -\mathbf{D^{-1}} (\mathbf{L} + \mathbf{U})\, \vec{x}^k + \mathbf{D^{-1}}\vec{b}.$$

- Obecně tedy iterační metodu můžeme zapsat jako

$$\vec{x}^{k+1} = \mathbf{B}\vec{x}^k + \vec{c},$$

  kde konkrétně pro Jacobiho metodu máme

$$\mathbf{B} = -\mathbf{D^{-1}} (\mathbf{L} + \mathbf{U}), \qquad \qquad \vec{c} = \mathbf{D^{-1}}\vec{b}.$$

- Pokud již dosáhneme přesného řešení $\vec{x}$, chceme aby se dále neměnilo, proto musí platit

$$\vec{x} = \mathbf{B}\vec{x} + \vec{c}.$$

- Od iterační metody požadujeme aby konvergovala, tedy aby se vektor $\vec{x}^k$ pro $k \to \infty$ přibližoval ke skutečnému řešení $\vec{x}$. V kroku $k+1$ máme rozdíl

$$\begin{aligned} \vec{x}^{k+1} - \vec{x} &= \left(\mathbf{B}\vec{x}^k + \vec{c}\right) - \left(\mathbf{B}\vec{x} + \vec{c}\right) = \mathbf{B}\left(\vec{x}^k - \vec{x}\right) = \\ &= \mathbf{B}\,\mathbf{B}\left(\vec{x}^{k-1} - \vec{x}\right) = \cdots = \\ &= \mathbf{B}\,\mathbf{B}\,\mathbf{B}\ldots\mathbf{B}\left(\vec{x}^0 - \vec{x}\right). \end{aligned}$$

  Protože konvergenci vyžadujeme pro libovolný počáteční odhad (nenulový vektor) $\vec{x}^0$, musí tedy k-tá mocnina iterační matice $\mathbf{B}$ jít s rostoucím k k nule:

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\mathbf{B}^k\right\| \;=\; 0.$$

  Pro tuto třídu úloh výše popsané iterační metody konvergují.

[1] Pozor, zde se jedná o součet matic, ne o jejich součin jako například v LU dekompozici! Dále, narozdíl od LU dekompozice zde mají trojúhelníkové matice $\mathbf{L}$ a $\mathbf{U}$ nuly na diagonále.