Podmíněnost matice

- **Co to je a k čemu slouží podmíněnost matice?**
  - Můžeme pomocí ní odhadnout, jak moc se nám projeví chyby zadání a výpočtu v konečném řešení.
- **Odvození** (pro jednodušší případ, kdy $\Delta\mathbf{A} = \mathbf{0}$):
  - Předpokládejme, že řešíme soustavu

    $$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}, \tag{1}$$

    ale výsledek $\vec{x}$ nám nevyjde úplně přesně. Ve skutečnosti tedy neplatí $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$, ale něco jako

    $$\mathbf{A}(\vec{x} + \Delta\vec{x}) = \vec{b} + \Delta\vec{b}. \tag{2}$$

    (Pro jednoduchost jsme předpokládali že samotná matice $\mathbf{A}$ je zadána přesně.)
  - Z rovnice (1) a z vlastností norem plyne nerovnost

    $$\|\vec{x}\| \geq \frac{\|\vec{b}\|}{\|\mathbf{A}\|}. \tag{3}$$

    Dále, protože se jedná o lineární systém, můžeme z rovnice (2) vyjádřit $\Delta\vec{x}$ jako

    $$\begin{aligned} &\mathbf{A}(\vec{x} + \Delta\vec{x}) = \mathbf{A}\vec{x} + \mathbf{A}\Delta\vec{x} = \vec{b} + \mathbf{A}\Delta\vec{x} = \vec{b} + \Delta\vec{b} \qquad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \qquad \Delta\vec{x} = \mathbf{A}^{(-1)}\Delta\vec{b}. \end{aligned}$$

    Pro $\|\Delta\vec{x}\|$ tedy z vlastností norem platí odhad

    $$\|\Delta\vec{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \, \|\Delta\vec{b}\|. \tag{4}$$
  - Vydělením obou výše uvedených nerovností (3) a (4) získáme odhad relativní chyby řešení jako

    $$\frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{A}^{-1}\| \frac{\|\Delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}.$$
  - Hodnota $\|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{A}^{-1}\|$ se označuje jako C_p a nazývá se **podmíněnost matice**.
- Pokud je matice špatně podmíněná, je $C_p \gg 1$ a tedy i pro malé chyby ve výpočtu můžeme dostat velmi nepřesné řešení. To se týká i metod používajících pivoting.
- **Příklad:** Řešíme dvě velmi podobné lineární soustavy:

$x + y = 2,$ $x + 1.0001y = 2.0001.$	$x + y = 2,$ $x + 1.0001y = 2.0002.$
Řešení: $x = 1, \ y = 1,$	Řešení: $x = 0, \ y = 2,$

  tedy při malé změně zadání (pravé strany) došlo k velké změně výsledku.
  Obě soustavy mají stejnou matici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix}$ s podmíněností $\approx 40\,002$.

- **Cvičení:** Pokuste se najít matici 2×2 s co největší podmíněností a v Matlabu vypočítat její podmíněnost příkazem

```
norm(A) * norm(inv(A))
```

nebo

```
cond(A)
```

- Často lze špatně podmíněnou matici poznat na první pohled, protože buď v ní nebo v matici inverzní musí být velké číslo (které pak dá velkou normu). To je typické u matic s téměř lineárně závislými řádky (t.j. rovnicemi soustavy).

- Někdy lze podmíněnost trochu vylepšit normalizací - škálováním: Matice

$$\begin{pmatrix} 100 & 1 \\ 1.001 & 0.01 \end{pmatrix}$$

má téměř lineárně závislé řádky, podmíněnost $\approx 10^7$.
Vynásobením druhého řádku stovkou dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} 100 & 1 \\ 100.1 & 1 \end{pmatrix}$$

s řádky opět téměř lineárně závislými, ale alespoň stejného řádu. Tato matice má podmíněnost $\approx 2\times10^5$, tedy cca o 2 řády lepší, ale pořád hodně špatnou, a s tím už toho moc nenaděláme.