Příklad nestabilního algoritmu

- **Zadání:** Je dána obyčejná diferenciální rovnice $y'(x) = -y(x)$ s počáteční podmínkou $y(0) = 1$. Úkolem je najít $y(x)$ v libovolném bodě x.
- **Analytické řešení:** $y(x) = \exp(-x)$
- **Numerické řešení:**
  - Princip: Derivaci funkce $y(x)$ aproximujeme pomocí Taylorova rozvoje:

$$y(x+h) \;=\; \sum_n \frac{h^n\, y^{(n)}(x)}{n!} \;=\; y(x) + h\, y'(x) + \mathcal{O}\left(h^2\right).$$

  - **Algoritmus 1:**
    Použijeme tzv. Eulerovu metodu, resp. dopřednou diferenci

$$y'(x) \;=\; \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \frac{\mathcal{O}\left(h^2\right)}{h} \;\approx\; \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

    a tedy naši rovnici $y'(x) = -y(x)$ lze aproximovat jako

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = -y(x),$$

    neboli numericky řešit

$$y(x+h) \;=\; (1-h)\, y(x).$$

  - **Algoritmus 2:**
    Derivaci funkce $y(x)$ přesněji aproximujeme pomocí tzv. centrální diference, tedy kombinací rozvoje $y(x+h)$ a $y(x-h)$:

$$y'(x) \;=\; \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2\,h} + \frac{\mathcal{O}\left(h^3\right)}{2\,h} \;\approx\; \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2\,h}$$

    a tedy naši rovnici $y'(x) = -y(x)$ lze aproximovat jako

$$\frac{y(x+h) - y(x-h)}{2\,h} = -y(x),$$

    neboli numericky řešit

$$y(x+h) \;=\; y(x-h) - 2\,h\, y(x).$$

- **Stabilita numerického řešení:**
  - Předpokládejme malou chybu ε, která vznikne v průběhu výpočtu např. zaokrouhlením. Označme $\tilde{y}$ řešení s touto chybou, zatímco y bude řešení při kterém k této chybě nedochází (tedy jako by operace byly přesné).

– Při použití algoritmu 1 máme

$$
\begin{aligned}
y(x+h) &= (1-h)\,y(x), & \tilde{y}(x+h) &= (1-h)\,(y(x)+\varepsilon) \\
&& &= y(x+h)+\varepsilon(1-h), \\
y(x+2h) &= (1-h)\,y(x+h), & \tilde{y}(x+2h) &= (1-h)\,\tilde{y}(x+h) \\
&& &= (1-h)\,[y(x+h)+\varepsilon(1-h)] \\
&& &= y(x+2h)+\varepsilon(1-h)^2, \\
y(x+3h) &= (1-h)\,y(x+2h), & \tilde{y}(x+3h) &= (1-h)\,\tilde{y}(x+2h) \\
&& &= (1-h)\,[y(x+2h)+\varepsilon(1-h)^2] \\
&& &= y(x+3h)+\varepsilon(1-h)^3, \\
&\dots & &\dots
\end{aligned}
$$

a vidíme že chyba $\tilde{y}$ se postupně vytrácí.

– Při použití algoritmu 2 máme

$$
\begin{aligned}
y(x+h) &= y(x-h)-2hy(x), & \tilde{y}(x+h) &= y(x-h)+\varepsilon-2hy(x) \\
&& &= y(x+h)+\varepsilon, \\
y(x+2h) &= y(x)-2hy(x+h), & \tilde{y}(x+2h) &= y(x)-2h\tilde{y}(x+h) \\
&& &= y(x)-2h[y(x+h)+\varepsilon] \\
&& &= y(x)-2hy(x+h)-2h\varepsilon \\
&& &= y(x+2h)-2h\varepsilon, \\
y(x+3h) &= y(x+h)-2hy(x+2h), & \tilde{y}(x+3h) &= \tilde{y}(x+h)-2h\tilde{y}(x+2h) \\
&& &= y(x+h)+\varepsilon-2h[y(x+2h)-2h\varepsilon] \\
&& &= [y(x+h)-2hy(x+2h)]+(\varepsilon+4h^2\varepsilon) \\
&& &= y(x+3h)+(4h^2+1)\varepsilon, \\
y(x+4h) &= y(x+2h)-2hy(x+3h), & \tilde{y}(x+4h) &= \tilde{y}(x+2h)-2h\tilde{y}(x+3h) \\
&& &= y(x+4h)-2h(4h^2+2)\varepsilon, \\
y(x+5h) &= y(x+3h)-2hy(x+4h), & \tilde{y}(x+5h) &= y(x+5h)+h(16h^4+12h^2+1)\varepsilon, \\
y(x+6h) &= y(x+4h)-2hy(x+5h), & \tilde{y}(x+6h) &= y(x+6h)-2h(16h^4+16h^2+3)\varepsilon, \\
y(x+7h) &= y(x+5h)-2hy(x+6h), & \tilde{y}(x+7h) &= y(x+7h)+h(64h^6+80h^2+24h^2+2)\varepsilon, \\
&\dots & &\dots
\end{aligned}
$$

a vidíme že

- velikost chyby $\tilde{y}$ se postupně zvětšuje, tedy **dochází k nestabilitě**
- řešení osciluje - znaménko chyby je opačné v lichých a sudých krocích.