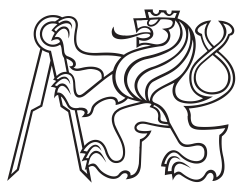


Bakalářská práce



České
vysoké
učení technické
v Praze

F4

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
Katedra fyziky

Numerické modelování elektromagnetických vlastností spinových laserů

Pavel Slanina

Vedoucí práce: Ing. Pavel Kwiecien, Ph.D.
Studijní program: Kvantové technologie
Akademický rok: 2024/2025

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Slanina**

Jméno: **Pavel**

Osobní číslo: **493008**

Fakulta/ústav: **Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská**

Zadávací katedra/ústav: **Katedra fyziky**

Studijní program: **Kvantové technologie**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Numerické modelování elektromagnetických vlastností spinových laserů

Název bakalářské práce anglicky:

Numerical modeling of electromagnetic properties of spin lasers

Pokyny pro vypracování:

1. Proveďte rešerši problematiky spinových laserů na bázi VCSEL struktur, zaměřte se zejména na možnosti modelování elektromagnetického pole.
2. Pozornost věnujte zejména maticovému algoritmu pro popis tenkých vrstev, pokuste se o počítačovou implementaci.
3. Seznamte se s programem Ansys Lumerical, který v komerční podobě implementuje metodu FDTD (případně další metody).
4. Proveďte detailní analýzu vhodně vybrané testovací struktury pomocí vlastního kódu i komerčního programu. Získané výsledky porovnejte a diskutujte.

Seznam doporučené literatury:

- [1] GERHARDT, Nils C. a HOFMANN, Martin R. Spin-Controlled Vertical-Cavity Surface-Emitting Lasers. Online. Advances in Optical Technologies. 2012, roč. 2012, s. 1-15. ISSN 1687-6393.
- [2] FÖRDÖS, T.; JAFFRÈS, H.; POSTAVA, K.; SEGHIANI, M. S.; GARNACHE, A. et al. Eigenmodes of spin vertical-cavity surface-emitting lasers with local linear birefringence and gain dichroism. Online. Physical Review A. 2017, roč. 96, č. 4. ISSN 2469-9926.
- [3] MICHALZIK, Rainer (ed.). VCSELs: fundamentals, technology and applications of vertical-cavity surface-emitting laser. Springer series in optical sciences. Berlin: Springer, c2013. ISBN 978-3-642-24985-3.
- [4] DRONG, M.; FÖRDÖS, T.; JAFFRÈS, H.Y.; PEŘINA, J.; POSTAVA, K. et al. Spin-VCSELs with Local Optical Anisotropies: Toward Terahertz Polarization Modulation. Online. Physical Review Applied. 2021, roč. 15, č. 1. ISSN 2331-7019.
- [5] YEH, Pochi. Optical waves in layered media. Series in pure and applied optics (Wiley). Hoboken: Wiley-Interscience, c2005. ISBN 0-471-73192-7.
- [6] SALEH, Bahaa E. A. a TEICH, Malvin Carl. Fundamentals of photonics. Third edition. Wiley series in pure and applied optics. Hoboken: John Wiley, [2019]. ISBN 978-1-119-50687-4.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

Ing. Pavel Kwiecien, Ph.D. katedra laserové fyziky a fotoniky FJFI

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

prof. Dr. Ing. Ivan Richter katedra laserové fyziky a fotoniky FJFI

Datum zadání bakalářské práce: **30.10.2024**

Termín odevzdání bakalářské práce: **04.08.2025**

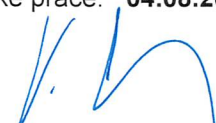
Platnost zadání bakalářské práce: **30.10.2026**



Ing. Pavel Kwiecien, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce



podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry



doc. Ing. Václav Čuba, Ph.D.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

14. 11. 2024

Datum převzetí zadání

P. Krušný

Podpis studenta

PROHLÁŠENÍ

Já, níže podepsaný

Příjmení, jméno studenta: Slanina Pavel
Osobní číslo: 493008
Název programu: Kvantové technologie

prohlašuji, že jsem bakalářskou práci s názvem

Numerické modelování elektromagnetických vlastností spinových laser

vypracoval samostatně a uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací a Rámcovými pravidly používání umělé inteligence na ČVUT pro studijní a pedagogické účely v Bc a NM studiu.

Prohlašuji, že jsem v průběhu příprav a psaní závěrečné práce nepoužil žádný z nástrojů umělé inteligence. Jsem si vědom důsledků, kdy bude zjevné nepříznivé použití těchto nástrojů při tvorbě jakékoli části mé závěrečné práce.

V Praze dne 13.07.2025

Pavel Slanina

.....
podpis studenta

Abstrakt

Jsou představeny a demonstrovány některé vybrané metody optického modelování VCSEL struktur, které jsou základem pro moderní spinové lasery. Zvláštní pozornost je věnována metodě přenosové matice pro modelování propagace světla v systému dielektrických vrstev. Uvedené metody jsou porovnány na příkladu konkrétní VCSEL struktury.

Klíčová slova: VCSEL, Optické modelování, TMM, Metoda přenosové matice

Vedoucí práce: Ing. Pavel Kwiecien, Ph.D.
Katedra laserové fyziky a fotoniky,
Praha, V Holešovičkách 747/2, místnost
L-220

Abstract

Some select methods of optical modeling of VCSEL structures, which serve as a foundation for modern spin lasers, are introduced and demonstrated. Special attention is given to the transfer matrix method of modeling the propagation of light in systems of dielectric layers. These methods are compared on an example of a concrete VCSEL structure.

Keywords: VCSEL, Optical Modeling, TMM, Transfer Matrix Method

Title translation: Numerical modeling of electromagnetic properties of spin lasers



Poděkování

Děkuji panu doktoru Pavlu Kwiecienovi za ochotné vedení této práce a za cenné rady a konzultace. Děkuji své rodině za stálou podporu ve snadných i obtížných chvílích studia. Dík patří také profesorů Václavu Hlaváčovi a Tomášovi Hejdovi za vytvoření šablony vizuálního stylu pro tuto práci.

Obsah

1 Úvod	1	6 Závěr	49
2 Základní vlastnosti VCSEL laserů	3	A Některá matematická odvození	57
2.1 Polovodičové lasery	3	A.1 Odvození hlavní diferenciální rovnice	57
2.2 VCSEL geometrie a vlastnosti	4	A.2 Odvození bloků S-matice jedné vrstvy	59
2.2.1 Vlastnosti zrcadel	4	A.3 Odvození Redhefferova součinu	60
2.2.2 Minimalizace aktivního objemu	6	A.4 Odvození reflektance a transmitance multivrstvy	61
2.2.3 Zachycení budícího proudu	6	A.5 Odvození problému vlastních čísel při výpočtu Blochových módů fotonického krystalu	63
2.2.4 Kvantově vázané nosiče v aktivních vrstvách	6	A.6 Odvození vztahu pro Q faktor optického rezonátoru	63
2.3 Procesy	7	A.7 Odvození vztahu mezi koeficientem zesílení a imaginární složkou indexu lomu	64
2.3.1 Optické procesy	7		
2.3.2 Elektrické procesy	9		
2.3.3 Tepelné procesy	10		
3 Využití spinově polarizovaných nosičů náboje	13		
3.1 Princip spinového laseru	13		
3.2 Obtíže při elektrickém čerpání	14		
3.3 Výhody spinového laseru	14		
4 Možnosti numerického modelování	17		
4.1 FDTD	17		
4.1.1 Výpočet transmisního spektra	17		
4.1.2 Výpočet rezonance dutiny	18		
4.2 Metoda přenosové matice	19		
4.2.1 Elektromagnetické pole v dielektrických vrstvách	19		
4.2.2 Hlavní diferenciální rovnice	20		
4.2.3 Rozptylová matice pro jednu vrstvu	22		
4.2.4 Speciální případy S-matice	24		
4.2.5 Součin S-matic	25		
4.2.6 Výpočty pomocí TMM	26		
4.3 Speciální numerická analýza	33		
5 Detailní optická analýza vzorové struktury	35		
5.1 Popis zvolené struktury	35		
5.2 Vlastnosti zrcadel	35		
5.2.1 Pásová struktura	36		
5.2.2 Transmisní spektrum	39		
5.3 Rezonance v dutině	40		
5.3.1 Rezonance pomocí TMM	40		
5.3.2 Rezonance pomocí FDTD	41		
5.4 Rozložení stojaté vlny	41		
5.5 Třírozměrný model	43		
5.5.1 Analýza základního módu pomocí EFM	43		
5.5.2 Analýza pomocí FDTD	45		

Kapitola 1

Úvod

Lasery s VCSEL strukturou jsou polovodičové lasery tvořené mnoha tenkými vrstvami kolmými na směr emitovaného záření. Vyznačují se mj. relativně jednoduchou výrobou ve velkém množství, vysokou spolehlivostí a snadným elektrickým čerpáním. Proto se běžně využívají například v různých senzorech, komunikacích nebo k čerpání jiných laserů. Spinové VCSELY se od nich liší spinovou polarizací elektron-děrových párů v polovodiči, která způsobuje emisi kruhově polarizovaného světla. Kromě lepší stability polarizace záření mají i další výhody, jako například snížený čerpací výkon a možnost velmi rychlé modulace.

Numerické modelování je mocný nástroj při vývoji nových technologií, který dovoluje určit vlastnosti navrhovaného zařízení, aniž by bylo nutné konstruovat prototyp. Důkladné simulace VCSEL laserů jsou komplikované multifyzikální problémy, ale i při omezení jen na optické vlastnosti lze volit z mnoha různých metod. Jeden z nejjednodušších modelů je soustava homogenních vrstev, které jsou nekonečně rozlehlé ve dvou rozměrech. Světlo je zde tvořeno monochromatickými rovinnými vlnami šířícími se kolmo na vrstvy. Složitější modely popisují například i ztrátu a zisk energie nebo nehomogenní vrstvy.

Tato práce se zabývá některými metodami optického modelování VCSEL struktur, které jsou základem pro spinové lasery. V kapitole 2 jsou představeny důležité vlastnosti VCSEL laserů a fyzikální jevy, ke kterým v nich dochází. Následně v kapitole 3 je doplněn princip a význam spinové polarizace nosičů. V kapitole 4 jsou uvedeny některé způsoby optického modelování těchto struktur s důrazem na metodu přenosové matice, která je založena na zmíněném modelu nekonečně širokých dielektrických vrstev. V kapitole 5 jsou tyto metody demonstrovány na výpočtu některých optických vlastností vzorové struktury a porovnány.

Kapitola 2

Základní vlastnosti VCSEL laserů

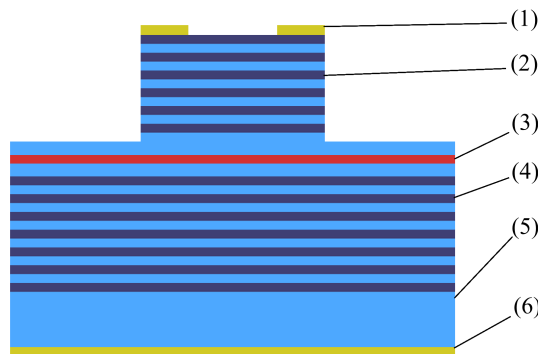
VCSEL (ang. Vertical-Cavity Surface-Emitting Laser) je typ polovodičového laseru emitující záření směrem kolmým k povrchu, na kterém je umístěn. Liší se tak od hranového laseru (ang. edge emitting laser, EEL), který emituje z hrany substrátu v rovnoběžném směru. Buzení (čerpání) je většinou prováděno elektrickým proudem a právě nízký čerpací proud je jednou z klíčových vlastností VCSEL laserů. Další důležité charakteristiky jsou vysoká konverzní účinnost okolo 50%, snadná modulace proudem, malá rozbíhavost svazku, možnost konstrukce pro teoreticky libovolnou vlnovou délku, schopnost operovat na širokém rozsahu teplot, dlouhá životnost a nízká cena výroby ve velkém objemu [1, kap. 2]. Z těchto důvodů nachází VCSEL lasery hojně využití mj. v datových komunikacích, integrované optice a různých senzorech (např. optických počítačových myších) [2], [3]. V následujících sekcích budou přiblíženy jejich základní vlastnosti a různé procesy, které řídí jejich chování a vlastnosti.

2.1 Polovodičové lasery

Principem polovodičových laserů je přechod elektronů v krystalové struktuře mezi vodivostním a valenčním energetickým pásem — foton je absorbován při excitaci valenčního elektronu na vodivostní hladinu a emitován při rekombinaci vodivostního elektronu s tzv. elektronovou děrou ve valenčním páse. V čistém polovodiči bývá valenční pás hustě obsazený, kdežto vodivostní je obsazený jen málo. Pomocí vhodných dopantů lze docílit přebytku vodivostních elektronů (polovodič typu N) nebo nedostatku elektronů valenčních (typ P), kvůli čemuž se vyskytují volné nosiče náboje (elektrony nebo díry), které nemohou rekombinovat.

Pro laserovou činnost je zapotřebí kombinovat dopované polovodiče obou typů. Pomocí elektrického napětí jsou elektrony v N polovodiči a elektronové díry v P polovodiči přiváděny směrem k rozhraní obou typů a v dostatečné blízkosti spolu mohou rekombinovat. V této oblasti tak nastává inverze populace energetických hladin a může být stimulována emise fotonů.

Aplikací budícího napětí prochází polovodičem elektrický proud. Ten způsobuje změny ve vlastnostech polovodiče, a to hlavně v souvislosti s teplotou. Tepelnými excitacemi se zvýší obsazenost vodivostního pásu, což vede na nižší pravděpodobnost rekombinace. Proto je důležitou otázkou závislost chování polovodičových laserů na teplotě a obecně na budícím proudu. Další význačnou vlastností je relativně velká šířka energetických pásem. Emitované fotony mohou být ze širokého spektra energií a konkrétní laserovou frekvenci je potřeba vybrat pomocí vhodného rezonátoru.



Obrázek 2.1: Schéma VCSEL geometrie typu air-post. Jsou vyznačeny (1) horní elektroda, (2) horní zrcadlo, (3) aktivní vrstva, (4) dolní zrcadlo, (5) substrát a (6) dolní elektroda.

2.2 VCSEL geometrie a vlastnosti

VCSEL lasery jsou tvořeny mnoha tenkými vrstvami polovodiče [4]. Běžné materiály jsou kombinace InGaAsP-InP, InGaAs-GaAs nebo GaAs-AlGaAs. Typicky je vrstev několik desítek (viz sekce 2.2.1), připravují se epitaxními metodami (např. MOCVD, MBE) a jsou řádově desítky nanometrů tlusté. Celá struktura pak má tloušťku několik mikrometrů a šířku jednotky až desítky mikrometrů. Několik vnitřních vrstev tvoří rezonanční dutinu a obsahuje také aktivní vrstvy, tedy oblast, kde dochází ke stimulované emisi světla v souvislosti s rekombinací nosičů. Ostatní vrstvy jsou pak součástí dvou Braggovských zrcadel, která se označují jako horní a spodní. Tato struktura je umístěna na polovodičovém substrátu, který často slouží jako jedna budící elektroda. Druhá elektroda je umístěna nad horním zrcadlem a má kruhový nebo prstencový tvar [4, 1, 5]. Na Obr. 2.1 je schéma řezu válcově symetrické VCSEL struktury. Laserové záření uniká buď skrz substrát, (což je běžné pro vlnové délky přibližně 920 nm a větší [1, kap. 2]), nebo skrz horní elektrodu.

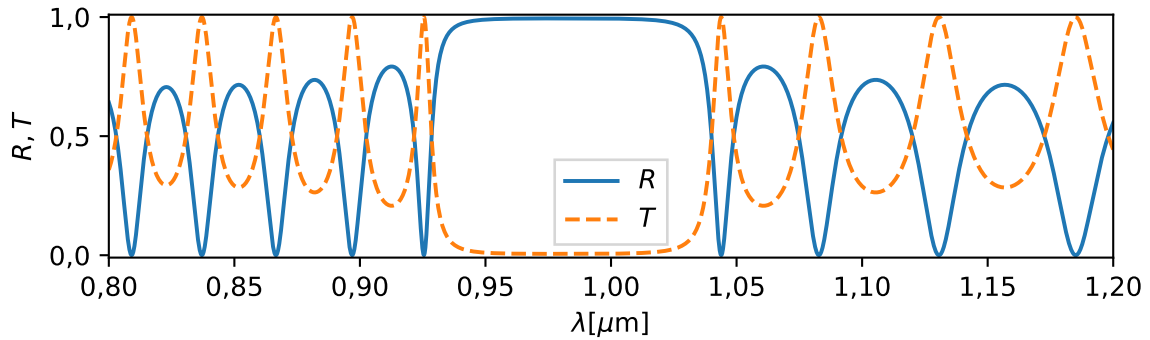
Jednou z nejdůležitějších vlastností tohoto typu laserů je obecně nízký budící proud, řádově miliampéry nebo méně. S tím také souvisí prahový proud, tedy takový budící proud I_{th} , který je nutný k zahájení laserové činnosti. Běžné prahové proudy jsou přibližně 1 mA [6, 7], ale byly demonstrovány i v řádu desítek a stovek μA [8, 9]. Do budoucna se předpovídá snížení prahu až na jednotky μA [4, 10]. Ke snížení prahového proudu jsou klíčové tři vlastnosti, které budou dále popsány. Jsou to

- vysoká reflektance zrcadel,
- malý objem aktivní oblasti a
- zachycení proudu (ang. current confinement).

2.2.1 Vlastnosti zrcadel

Prahový koeficient zesílení g_{th} záření, tedy exponenciální koeficient zesílení nutný k zahájení laserové aktivity, závisí na několika vlastnostech dutiny, mj. reflektancích zrcadel. Tento koeficient obsahuje člen tvaru

$$g_{th} \sim \frac{1}{d} \ln \frac{1}{\sqrt{R_b R_t}},$$



Obrázek 2.2: Spektrum reflektance R a transmitance T Braggovského zrcadla tvořeného střídavými dielektrickými vrstvami vypočítané semi-analytickou maticovou metodou. Byla zvolena struktura 24 párů vrstev o indexech lomu $n_1 = 3,53$, $n_2 = 3,08$ a tloušťkách $d_1 = 69,49$ nm, $d_2 = 79,63$ nm. Vnější prostředí bylo vakuum s indexem lomu 1. Je patrný zakázaný pás v rozsahu vlnových délek 0,94–1,03 μm . Mimo zakázaný pás naopak pozorujeme oscilující reflektanci.

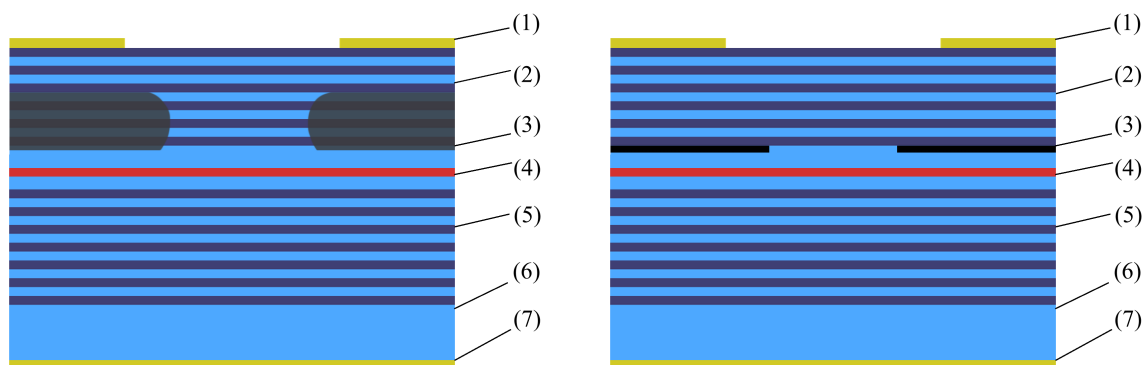
kde d je tloušťka aktivní vrstvy a R_b, R_t jsou energetické reflektance dolního a horního zrcadla. Tato závislost je odvozena například v [11]. Tam je také ukázána souvislost hustoty budícího proudu J na koeficientu zesílení — veličina $\sqrt{J/d}$ je přímo úměrná g . Proto v zájmu snížení prahového budícího proudu I_{th} je vhodné zvýšit reflektance zrcadel. Ta má být okolo 95 % [5], ale někdy se uvádí až 99,9 % [4]. Ve VCSEL geometrii se nejčastěji používají Braggovská zrcadla (ang. Bragg mirror nebo také distributed Bragg reflector, DBR) složená z mnoha tenkých vrstev dielektrika se střídavým indexem lomu. Výhodou je dosažení teoreticky libovolně vysoké reflektance jednoduše přidáním dostatečného počtu period (tj. párů vrstev).¹ V případě hranových polovodičových laserů naopak roli zrcadel mají leštěné stěny polovodičového krystalu, což vede na reflektanci okolo 30 % [4].² Použití Braggovských zrcadel je tedy velmi výhodné ve vztahu k minimalizaci budícího proudu.

Pro Braggovské reflektory je charakteristická existence povolených a zakázaných pásů (ang. passbands, stop bands), jak je popsáno například v [12, kap. 7]. Povolené pásy jsou takové intervaly frekvence, kde reflektor funguje v tzv. normálním režimu a vykazuje reflektanci mezi 0 a 1. Je běžné, že reflektance v normálním režimu značně osciluje a speciálně je nulová ve vhodných rezonančních frekvencích. Oproti tomu v zakázaných pásech nastává tzv. anomální režim a reflektance je v celém páse blízká jedné. To je ilustrováno na Obr. 2.2, kde je vykresleno spektrum reflektance R a transmitance T Braggovského zrcadla tvořeného střídavými dielektrickými vrstvami, vypočítané semianalytickou maticovou metodou, viz sekci 4.2. Je patrný zakázaný pás v rozsahu vlnových délek 0,94–1,03 μm . Mimo zakázaný pás naopak pozorujeme oscilující reflektanci.

Je přirozené ke konstrukci laserů využít právě Braggovských zrcadel v anomálním režimu. Zakázaný pás lze zkonstruovat relativně široký (ve frekvenčním spektru), což umožňuje využití pro lasery na různých vlnových délkách.

¹Prakticky se pro vysoký počet period (cca. 30) nezanedbatelně projevuje absorpce a růst reflektance zrcadla se zastaví.

²Podobná čísla lze také odhadnout výpočtem pomocí Fresnelových vzorců.



Obrázek 2.3: Vlevo: schéma válcově symetrické geometrie typu Ion Implanted. Jsou vyznačeny (1) horní elektroda, (2) horní zrcadlo, (3) oblast se zvýšenou koncentrací protonů, (4) aktivní oblast, (5) dolní zrcadlo, (6) substrát a (7) dolní elektroda. Vpravo: schéma válcově symetrické oxide-confined geometrie. Jsou vyznačeny (1) horní elektroda, (2) horní zrcadlo, (3) oxidová apertura, (4) aktivní vrstva, (5) dolní zrcadlo, (6) substrát, (7) dolní elektroda.

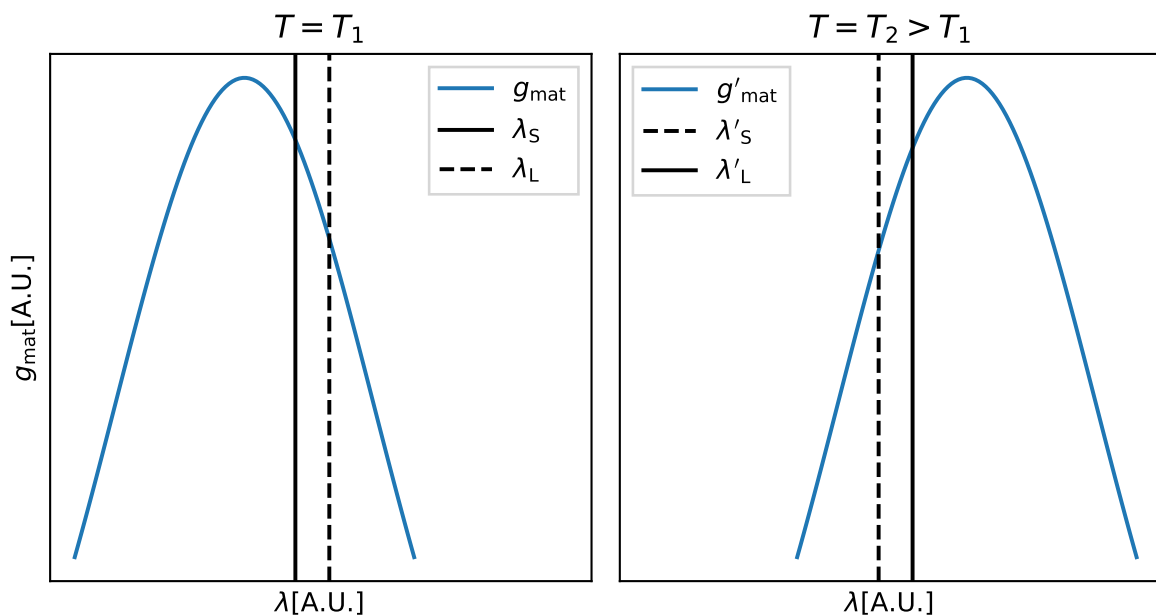
Aktivní vrstvy obsahující kvantové jámy a hlavně kvantové tečky mají několik zásadních výhod. Malá tloušťka aktivní oblasti přispívá ke snížení prahového proudu, jak bylo uvedeno výše. Pro diskrétní spektrum energie je dále snadnější zkonstruovat vhodně naladěný rezonátor, protože požadované rekombinace nosičů probíhají vždy na té nejnižší energetické hladině. Navíc jsou v něm potlačeny nezářivé přechody nosičů, a také lze vhodným tvarem potenciálu značně omezit pravděpodobnost nezářivých rekombinací (tzv. Augerových rekombinací) [14]. Byla pozorována vysoká teplotní stabilita a schopnost laserového zesílení i při teplotách substrátu okolo 200 °C [15]. V neposlední řadě závisí energetické spektrum (a tedy i frekvence emitovaného fotonu při rekombinaci na nejnižší hladině) hlavně na velikosti tečky, takže teoreticky lze připravit aktivní médium vhodné pro libovolnou frekvenci.

2.3 Procesy

Při provozu VCSELu probíhá několik vzájemně provázaných dějů, a to optických, elektrických a tepelných. Optické děje mají největší význam vzhledem k emisním a prahovým vlastnostem [1, kap. 3] a bývají také výpočetně nejnáročnější. Ostatní efekty pak představují určitá zkreslení a souvisí převážně s teplotou, ale každý jednotlivý proces ovlivňuje několik ostatních. V následujících sekcích budou popsány jednotlivé efekty a jejich relativně komplikované souvislosti.

2.3.1 Optické procesy

Z optického hlediska jde obecně o řešení Maxwellových rovnic v dané struktuře. Zjednodušeně můžeme uvažovat model propagace světla soustavou nekonečně širokých vrstev s okrajovou podmínkou spojitosti tečných složek pole na rozhraních. Tak je možné nalézt rezonanční vlnovou délku dutiny, jeden ze základních parametrů. Ta dominantně určuje vlnovou délku výstupního záření, jelikož rezonanční vlnová délka je v dutině opticky zesilována, kdežto ostatní jsou naopak tlumeny (tzv. módové zesílení). Výsledné záření tedy není primárně dáno spektrem aktivní oblasti (tzv. materiálové zesílení), ale právě rezonancí. Také lze pro konkrétní strukturu vypočítat podélný průběh amplitudy elektrického pole. Průběh pole je užitečný k nalezení parametru Γ_r (ang. relative confinement factor), který vyjadřuje, jak silně je elektrické pole lokalizováno v



Obrázek 2.4: Ilustrace původu změny polarizace 1. typu. Modrou čarou jsou naznačena spektra materiálového zesílení $g_{\text{mat}}, g'_{\text{mat}}$ pro dvě různé teploty $T_1 < T_2$. Svislými černými čarami jsou vyznačeny rezonanční vlnové délky λ_S, λ_L resp. λ'_S, λ'_L pro jednotlivé polarizace a pro obě teploty. Je patrné, že pro různé teploty je materiálově více zesílena jiná polarizace (vyznačena plnou čarou). Ilustrace byla vytvořena podle Obr. 5.2 v [1, kap. 5].

Pro různé aplikace, např. v optických komunikacích nebo integrované optice, je naopak žádoucí stabilní a předvídatelná lineární polarizace. V předchozích odstavcích bylo popsáno, že samotná struktura vykazuje jistou selektivitu v polarizaci, ale mechanismus této volby není dostatečně silný k tomu, aby garantoval stabilní směr. V aplikacích je tedy nutné polarizaci řídit pomocí vhodné úpravy základní VCSEL struktury. Výsledná polarizace nesmí být spontánní, a také nesmí záviset na konkrétní instalaci laseru (různým upevněním laseru v nějakém zařízení může například vznikat dodatečné napětí materiálu, což by ovlivnilo polarizaci). Podotkněme, že jednoduché zařazení lineárního polarizačního filtru za laser není ideální vzhledem ke značným ztrátám výkonu. Různé metody řízení polarizace byly hluboce studovány [1, kap. 5] a jedním ze slibných mechanismů je vytvoření mříže na povrchu jednoho ze zrcadel (tzv. grating VCSEL). Dielektrické mříže vyryté do horního zrcadla jsou popsány např. v [24], kde jsou také vypočteny některé jejich vlastnosti. Ukazuje se, že vhodná perioda mříže je přibližně stejná jako materiálová vlnová délka a vhodná hloubka řádově její čtvrtina. Podobné výsledky jsou dosaženy experimentálně např. v [25]. Nevýhodou takového schématu jsou ztráty dané difrakcí na mříži, které ale lze vhodnou volbou tloušťky nejvyšší vrstvy (tj. té vrstvy, ve které je vyryta mříž) značně omezit, a dostat se k celkovému výkonu srovnatelnému s laserem bez mříže [26].

Další perspektivní metodou řízení polarizace emitovaného záření je spinová polarizace nosičů náboje. Této technice je věnována kapitola 3.

■ 2.3.2 Elektrické procesy

K elektrickým procesům patří hlavně dodávání nosičů náboje do aktivních oblastí a ohřev Jouleovým teplem (viz sekci 2.3.3). Jak již bylo uvedeno, pomocí elektrického napětí jsou do aktivních oblastí přiváděny volné nosiče náboje, které tam rekombinují. Hustota nosičů a tedy i schopnost zesilovat záření tedy závisí na elektrickém proudu, který strukturou prochází. Vysokou

roste přibližně lineárně s teplotou [1, kap. 5]. V [35] je růst četnosti nesvítivých rekombinací potvrzen experimentálně a je tam uvažováno, že v masivním polovodiči pravděpodobně souvisí s defekty krystalové mříže. Jak bylo zmíněno výše, využitím kvantových teček lze nesvítivé rekombinace značně omezit.

Kapitola 3

Využití spinově polarizovaných nosičů náboje

Využití spinu v elektronice je aktuálně předmětem intenzivního výzkumu.¹ Motivací této práce je právě relativně nový obor tzv. spin-VCSELů, tedy laserů s VCSEL strukturou využívajících spinově polarizované nosiče náboje. Tak lze dojít k určitým vylepšením, která byla teoreticky předpovězena a experimentálně demonstrována.

3.1 Princip spinového laseru

Principem spinových laserů je speciální rekombinace spinově polarizovaných nosičů náboje, tj. elektronů a děr. Jak je popsáno např. v [37], [38, kap 2], elektrony ve vodivostním pásu mají orbitální moment hybnosti nulový a spin $1/2$. Naproti tomu elektronové díry ve valenčním pásu mají orbitální moment velikosti 1 a mohou tak nabývat stavů s projekcí celkového momentu hybnosti $m = \pm 1/2$ a $m = \pm 3/2$. Těm se říká lehké, resp. těžké díry (ang. Light Hole, Heavy Hole). Pomocí výběrových pravidel v dipólové aproximaci lze odvodit, že rekombinace elektronu a těžké díry je třikrát tak pravděpodobná jako rekombinace s lehkou dírou [38]. Tyto nosiče se liší projekcí momentu hybnosti o ± 1 , což odpovídá emisi nebo absorpci kruhově polarizovaného fotonu. Ve kvantových jámách tato pravidla platí jen pro projekci momentu hybnosti a také emisi fotonu v normálovém směru [37]. Z toho důvodu je pro konstrukci spinových laserů vhodná právě VCSEL geometrie s využitím kvantově vázaných stavů nosičů, viz sekci 2.2.4. Kvůli rozdílnému tvaru vlnové funkce lehkých a těžkých děr mají ve kvantové jámě tyto nosiče různé energie [37] a pomocí rezonančních vlastností laserové dutiny je možné se zbavit emise způsobené rekombinací s lehkými děrami.

Hlavní rozdíl oproti normálnímu VCSEL laseru je ve způsobu čerpání. Jeden z mechanismů je čerpání kruhově polarizovaným světlem, kde díky výběrovým pravidlům jsou takto excitovány spinově polarizované páry nosičů v aktivní oblasti. Pro běžnou aplikaci, například v komunikačních technologiích, je však vhodnější čerpat elektricky. To bylo demonstrováno např. v [39] za teploty 50 K nebo v [40] za 200 K. Někdy je používáno i hybridní čerpání [41, 42, 43], kde jsou elektricky vedeny nosiče náboje do aktivních oblastí a dodatečným kruhově polarizovaným optickým čerpáním jsou excitovány spinově polarizované elektrony.

¹Jako příklad můžeme uvést aktuální (k červenci 2025) grantový projekt GAČR č. 25-15775S s názvem Topologické spin-fotonické lasery pro datové komunikace [36], na němž se podílí Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (Fakulta materiálově-technologická), Univerzita Palackého v Olomouci (Společná laboratoř optiky) a ČVUT (FJFI) a účastní se jej mj. také vedoucí práce Ing. Pavel Kwiecien, Ph.D.

čerpán spinový laser za teploty 50 K. Prahový proud byl snížen o 11 % a ve výstupním záření byl dosažen stupeň kruhové polarizace 23 %. Podobných výsledků bylo dosaženo např. v [40] za teploty 200 K. Předpovídá se, že při úplné spinové polarizaci elektronů lze snížit prahový výkon až na polovinu. To proto, že laserové aktivity se účastní jen jeden ze dvou kruhově polarizovaných módů dutiny, a tak je prahová hustota nosičů náboje v aktivní oblasti poloviční [37].

Další výhodou spinového laseru je dobrá kontrola nad polarizací vyzářeného světla. V kapitole 2 bylo uvedeno, že směr lineární polarizace emitovaného záření není obecně určen. Využití spinu elektronů je tedy jeden ze způsobů, jak polarizaci řídit [43], a teoreticky lze takto dosáhnout stupeň kruhové polarizace až 100 % [37]. Prakticky bylo při elektrickém čerpání dosaženo kruhové polarizace o stupni přibližně desítek procent [39, 40] a při optickém čerpání bylo pozorováno zesílení elipticity, jak je popsáno např. v [47]. Tam se zmiňuje možné využití stupně polarizace ke kódování informace. Na stupni kruhové polarizace byla také pozorována velmi rychlá modulace (desítky GHz) oproti modulaci intenzity na stejném laseru (jednotky GHz) [41, 42].

Kapitola 4

Možnosti numerického modelování

V této sekci budou představeny některé přístupy k simulacím VCSEL laserů. Nejprve je uvedena metoda FDTD založená na konečných diferencích. Poté bude představena semianalytická metoda přenosové matice (TMM) a její využití při výpočtu vlastností vrstevnatých struktur. Nakonec jsou zmíněny některé speciální nástroje ke komplexním simulacím VCSEL laserů.

4.1 FDTD

Metoda konečných diferencí v časové doméně (ang. Finite Difference in Time Domain, FDTD) je metoda numerického řešení Maxwellových rovnic pomocí konečných diferencí. Prostorové derivace polí jsou nahrazeny konečnými diferencemi na pravoúhlé síti a lze je vyjádřit jako lineární kombinace hodnot polí v několika sousedních vrcholech. Podobným způsobem je diskretizována i závislost na čase. Ze znalosti hodnot polí ve všech bodech sítě a určitém čase t lze tedy vypočítat hodnoty v následujícím čase $t + \Delta t$ vynásobením vhodnou maticí, případně řešením soustavy lineárních rovnic. Toto schéma bylo poprvé popsáno a diskutováno v [48].

Velkou výhodou metody FDTD je její univerzalita. Pro komplikované problémy často není možné Maxwellovy rovnice řešit analyticky, kdežto metodu FDTD lze použít skoro vždy. Nevýhodou je vysoká výpočetní složitost. Počet N vrcholů sítě závisí na počtu n dimenzí problému a prostorovém rozlišení¹ Δx jako

$$N \sim \left(\frac{1}{\Delta x} \right)^n.$$

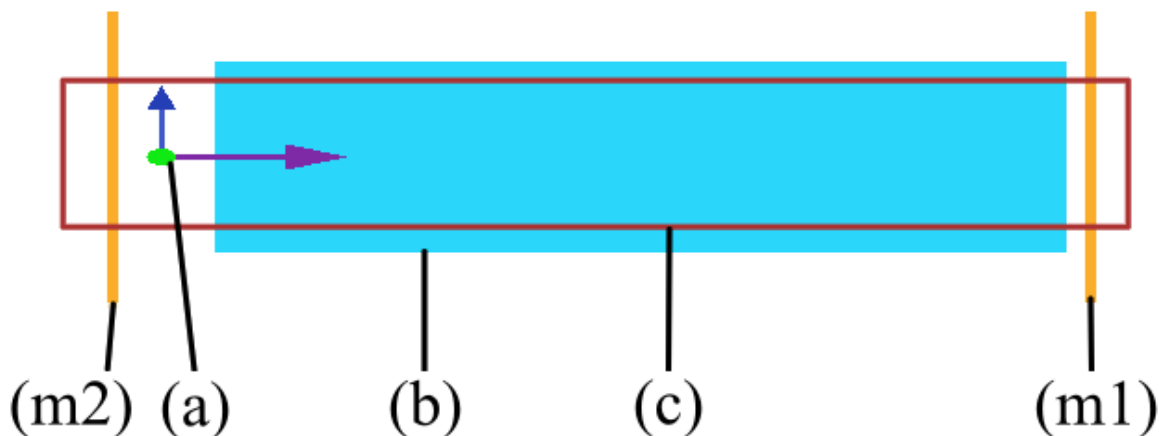
Počet prvků matice výše zmíněného lineárního problému pak závisí kvadraticky na N .

V této práci bude využita metoda FDTD implementovaná v softwaru Ansys Lumerical FDTD nabízeném firmou Ansys Optics [49].

4.1.1 Výpočet transmisního spektra

Pomocí FDTD lze vypočítat spektrum transmitance a reflektance dielektrické multivrstvy, případně libovolného objektu. Schéma výpočtu je na Obr. 4.1. Na multivrstvu necháme dopadat vlnový balík tvořený rovinnými vlnami. Reflektanci a transmitanci pak vypočteme pomocí dvojice detektorů zaznamenávajících průběh elektromagnetického pole v čase. První z nich je umístěn za multivrstvou, druhý je umístěn před zdrojem, tedy zdroj se nachází mezi tímto druhým detektorem a multivrstvou. Detektory zaznamenávají časový průběh pole v nějaké množině bodů, běžně na přímlce nebo ploše normálové na směr šíření vln (tj. rovnoběžné s rozhraními multivrstvy), a pomocí diskrétní Fourierovy transformace jej převádí do frekvenční domény. Ve

¹Zde uvažujeme stejné rozlišení ve všech rozměrech. Místo $(\Delta x)^n$ lze obecně uvažovat součin rozlišení v jednotlivých dimenzích sítě, například $\Delta x \Delta y \Delta z$.



Obrázek 4.1: Schéma výpočtu transmisního spektra pomocí FDTD. Jsou vyznačeny dielektrická multivrstva (b), zdroj rovinné vlny směřující vpravo (a), monitory (m1), (m2) ve frekvenční doméně a výpočetní oblast (c), která je v tomto případě dvojrozměrná.

frekvenční doméně je pak vypočten Poyntingův vektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H},$$

který vyjadřuje tok energie. Spektrum celkové energie prošlé detektorem ve zvoleném směru (typicky normálovém na vrstvy) lze vypočítat integrací odpovídající složky Poyntingova vektoru přes detektor.

Reflexní a transmisní spektrum je pak vypočten takto. Označme $T'_0(\lambda)$ emisní spektrum zdroje.² Poté provedeme simulaci a získáme spektra $T'_1(\lambda), T'_2(\lambda)$ z prvního a druhého detektoru. Spektrum reflektance R a transmitance T vypočteme jako

$$R(\lambda) = -\frac{T'_2(\lambda)}{T'_0(\lambda)}, \quad T(\lambda) = \frac{T'_1(\lambda)}{T'_0(\lambda)}.$$

Změna znaménka v R vyjadřuje opačný směr šíření vln ve druhém detektoru.

■ 4.1.2 Výpočet rezonance dutiny

Pomocí FDTD lze vypočítat rezonanční frekvenci tzv. studené dutiny, tedy bez započítání elektrických a tepelných jevů. Modelování je možné ve třírozměrném nebo ve zjednodušeném jednorozměrném tvaru, kdy je struktura sestavena z nekonečně rozlehlých vrstev kolmých na směr propagace světla. Dutina je excitována vhodným světelným zdrojem, například rovinnou vlnou. Ve vhodně zvoleném bodě (případně několika bodech) uvnitř dutiny je zaznamenáván časový průběh polí a pomocí Fourierovy transformace je nalezena rezonanční frekvence ω_r jako argument maxima intenzity. Q faktor dutiny lze nalézt také podle Fourierovy transformace jako

$$Q = \frac{\omega_r}{\delta\omega}, \quad (4.1)$$

²Spektrum T'_0 lze vypočítat buď přímo z vlastností zdroje, nebo pomocí třetího detektoru umístěného mezi zdrojem a multivrstvou. V takovém případě je nutné nejprve provést simulaci bez multivrstvy, jinak by třetí detektor obsahoval kromě emisního také reflexní spektrum.

kde $\delta\omega$ je šířka píku intenzity v polovině maxima (FWHM). Tento postup je v časové doméně nepraktický, protože oscilace se v rezonátoru drží dlouhou dobu. K získání spolehlivých výsledků je tedy rovněž potřeba dlouhý výpočetní čas.

Q faktor lze také počítat pomocí rozkladu na exponenciálně tlumené harmonické funkce. Ty mají tvar

$$E(t) \approx \sum_{k=1}^N A_k \exp(-i(\omega_k t - \phi_k)) \exp(-\alpha_k t), \quad (4.2)$$

kde α_k je kladná konstanta útlumu. Pak platí

$$Q_k = \frac{\omega_k}{2\alpha_k}. \quad (4.3)$$

V programu Ansys Lumerical je tento výpočet implementován funkcí `findresonances` [50]. Definice (4.1) a (4.3) jsou ekvivalentní pro vysoké hodnoty Q faktoru.

4.2 Metoda přenosové matice

V této části bude představena metoda přenosové matice (ang. Transfer Matrix Method, TMM) pro popis elektromagnetického pole ve vrstevnatých strukturách. Tato metoda je pro svou jednoduchost a efektivitu oblíbená při studiu takových struktur a má mnoho variant. Jednoduchá verze této metody, založená na Fresnelových vzorcích, je popsána například v [51]. V této práci bylo postupováno podle vylepšené a zobecněné formulace [52, 53]. Zdrojový kód implementovaných algoritmů v jazyce Python je dostupný v [54].

Jsou použity některé běžné a některé nestandardní konvence. Seznam použitého značení je v Tab. 4.1. Kromě uvedených symbolů je použita speciální notace pro některé vektory a matice. S pruhem budou značeny matice 4×4 složené z bloků 2×2 , například

$$\overline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \mathbb{S}_{11} & \mathbb{S}_{12} \\ \mathbb{S}_{21} & \mathbb{S}_{22} \end{pmatrix}.$$

Vektory dvou čísel budou značeny tučnými písmeny, například \mathbf{E}, \mathbf{c}^+ . Vektory čtyř čísel budou značeny s pruhem, například $\overline{\mathbf{d}} = (d_1, d_2, d_3, d_4)$.

4.2.1 Elektromagnetické pole v dielektrických vrstvách

Uvažujme soustavu dielektrických vrstev. Ty jsou dokonale rovné a nekonečně rozsáhlé ve směrech os \vec{x}, \vec{y} . Osa \vec{z} je jejich normálou a tloušťku vrstvy ve směru \vec{z} značíme L . Elektrické a magnetické vlastnosti vrstev jsou popsány absolutní permitivitou ε_a a permeabilitou μ_a . Každou vrstvu považujeme za homogenní a lineární, takže μ_a, ε_a jsou obecně matice 3×3 . Dále budeme pracovat s relativní permitivitou ε a permeabilitou μ , které splňují vztahy

$$\varepsilon_{a,ij} = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij}, \quad \mu_{a,ij} = \mu_0 \mu_{ij}. \quad (4.4)$$

Elektrické a magnetické pole $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$ jsou ve vztahu se svými indukcemi $\vec{\mathcal{D}}, \vec{\mathcal{B}}$

$$\mathcal{D}_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} \mathcal{E}_j, \quad \mathcal{B}_i = \mu_0 \mu_{ij} \mathcal{H}_j. \quad (4.5)$$

Pole $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$ v každé takové vrstvě jsou popsána Maxwellovými rovnicemi

$$\text{rot } \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}, \quad (4.6)$$

$$\text{rot } \vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}. \quad (4.7)$$

symbol	vztah	popis
i	$i^2 = -1$	imaginární jednotka
ε_0		elektrická permitivita vakua
ε_a		absolutní látková permitivita
ε	$\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon$	relativní látková permitivita
μ_0		magnetická permeabilita vakua
μ_a		absolutní látková permeabilita
μ	$\mu_a = \mu_0 \mu$	relativní látková permeabilita
$\vec{\mathcal{E}}$		vektor elektrického pole
$\vec{\mathcal{D}}$	$\vec{\mathcal{D}} = \varepsilon_a \vec{\mathcal{E}}$	vektor elektrické indukce
$\vec{\mathcal{H}}$		vektor magnetického pole
$\vec{\mathcal{B}}$	$\vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \mu \vec{\mathcal{H}}$	vektor magnetické indukce
$\vec{\mathcal{H}}$	$\vec{\mathcal{H}} = i \eta_0 \vec{\mathcal{B}}$	normalizované magnetické pole
η	$\eta = \mathcal{E} / \mathcal{H} = \sqrt{\mu_a / \varepsilon_a}$	impedance prostředí
η_0	$\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$	vakuová impedance
c	$c = 1 / \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$	rychlost světla ve vakuu
ω		úhlová frekvence
λ	$\lambda = 2\pi c / \omega$	vlnová délka ve vakuu
\vec{k}		vlnový vektor rovinné monochromatické vlny
k_0	$k_0 = \omega / c$	velikost vlnového vektoru ve vakuu
\vec{k}	$\vec{k} = k_0 \vec{k}$	normalizovaný vlnový vektor
v_f	$v_f = \omega / k$	fázová rychlost vlny
n	$n = c / v_f$	index lomu světla
rot	$\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$	rotace vektorové funkce ve třech rozměrech
exp	$\exp(a) = e^a, \exp(\mathbf{a}) = (e^{a_1}, \dots, e^{a_k})$	exponenciální funkce aplikovaná po složkách
diag	$\text{diag}(\mathbf{a}) = \text{diag}(a_1, \dots, a_k) = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_k \end{pmatrix}$	diagonální matice
\otimes		Redhefferův součin
$\bigotimes_{j=1}^k$	$\bigotimes_{j=1}^k \vec{\mathcal{S}}^{(j)} = \vec{\mathcal{S}}^{(1)} \otimes \vec{\mathcal{S}}^{(2)} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{S}}^{(k)}$	vícenásobný Redhefferův součin

Tabulka 4.1: Značení použité při odvození metody přenosové matice

4.2.2 Hlavní diferenciální rovnice

Pomocí TMM budeme chtít počítat vlastnosti vln uvnitř soustavy vrstev ve frekvenční doméně, např. transmisní spektrum nebo tvar stojaté vlny. Proto uvažujeme, že vlny jsou monochromatické a harmonické v čase. Jelikož je struktura homogenní ve směrech os \vec{x}, \vec{y} , předpokládáme harmonickou závislost také v proměnných x, y . Hledáme tedy vlny ve tvaru

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}(z) \exp(ik_x x + ik_y y - i\omega t). \quad (4.8)$$

Volba znaménka argumentu exponenciály je věc konvence. Zde bude důsledně používána konvence se záporným znaménkem u časové závislosti.

Předpoklad tvaru řešení (4.8) odpovídá částečné Fourierově transformaci v proměnných x, y, t . V Maxwellových rovnicích to vede k náhradě derivací

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow -i\omega, \quad \frac{\partial}{\partial x} \longrightarrow ik_x, \quad \frac{\partial}{\partial y} \longrightarrow ik_y.$$

Po částečné transformaci zůstanou v Maxwellových rovnicích jen derivace podle z a průběh polí ve směru z hledáme pomocí maticové diferenciální rovnice. Při její konstrukci je vhodné provést několik úprav. První z nich je normalizace složek vlnového vektoru

$$\tilde{k}_x = k_x/k_0, \quad \tilde{k}_y = k_y/k_0.$$

Jak je známo, při propagaci rovinné vlny přes rozhraní se složky vlnového vektoru tečné na rozhraní zachovávají, takže veličiny k_x, k_y resp. \tilde{k}_x, \tilde{k}_y jsou dobře definované. Naopak složka k_z se nezachovává a nemusí být ani jednoznačně definovaná (může záviset na polarizaci vlny). Další zjednodušení je škálování souřadnice z na $z' = k_0 z$. Vede to na změnu derivace

$$\frac{\partial}{\partial z} \longrightarrow k_0 \frac{\partial}{\partial z'}.$$

Tato úprava umožňuje další zjednodušení rovnice a lepší numerickou přesnost. Dále je provedena normalizace magnetického pole impedancí vakua

$$\vec{\mathcal{H}} = i\eta_0 \vec{\mathcal{H}}. \quad (4.9)$$

Tím se jednak vytváří určitá symetrie v diferenciálních rovnicích, jednak jsou elektrické a normalizované magnetické pole podobně velká, což může vést k numericky přesnějším výsledkům.

Závislost polí na souřadnici z' hledáme pomocí maticové diferenciální rovnice, zde nazývané hlavní rovnicí. Kromě složek vlnového vektoru se na rozhraní zachovávají také tečné složky polí $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$. Proto hledané veličiny v diferenciální rovnici budou právě tyto složky, které označíme

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_x \\ \mathcal{H}_y \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Hlavní diferenciální rovnice je odvozena z Maxwellových rovnic v příloze A.1 a má tvar

$$\frac{\partial}{\partial z'} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \overline{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{M}_{11} & \mathbb{M}_{12} \\ \mathbb{M}_{21} & \mathbb{M}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Složky blokové matice $\overline{\mathbf{M}}$ jsou

$$\mathbb{M}_{11} = \begin{pmatrix} -i\tilde{k}_y \frac{\mu_{yz}}{\mu_{zz}} - i\tilde{k}_x \frac{\varepsilon_{zx}}{\varepsilon_{zz}} & i\tilde{k}_x \frac{\mu_{yz}}{\mu_{zz}} - i\tilde{k}_y \frac{\varepsilon_{zy}}{\varepsilon_{zz}} \\ i\tilde{k}_y \frac{\mu_{xz}}{\mu_{zz}} - i\tilde{k}_x \frac{\varepsilon_{zx}}{\varepsilon_{zz}} & -i\tilde{k}_x \frac{\mu_{xz}}{\mu_{zz}} - i\tilde{k}_y \frac{\varepsilon_{zy}}{\varepsilon_{zz}} \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

$$\mathbb{M}_{12} = \begin{pmatrix} \mu_{yx} - \frac{\mu_{yz}\mu_{zx}}{\mu_{zz}} + \frac{\tilde{k}_x\tilde{k}_y}{\varepsilon_{zz}^2} & \mu_{yy} - \frac{\mu_{zy}\mu_{yz}}{\mu_{zz}} - \frac{\tilde{k}_x^2}{\varepsilon_{zz}} \\ -\mu_{xx} + \frac{\mu_{xz}\mu_{zx}}{\mu_{zz}} + \frac{\tilde{k}_y^2}{\varepsilon_{zz}} & -\mu_{xy} + \frac{\mu_{xz}\mu_{zy}}{\mu_{zz}} - \frac{\tilde{k}_x\tilde{k}_y}{\varepsilon_{zz}} \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

$$\mathbb{M}_{21} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{yx} - \frac{\varepsilon_{yz}\varepsilon_{zx}}{\varepsilon_{zz}} + \frac{\tilde{k}_x\tilde{k}_y}{\mu_{zz}^2} & \varepsilon_{yy} - \frac{\varepsilon_{zy}\varepsilon_{yz}}{\varepsilon_{zz}} - \frac{\tilde{k}_x^2}{\mu_{zz}} \\ -\varepsilon_{xx} + \frac{\varepsilon_{xz}\varepsilon_{zx}}{\varepsilon_{zz}} + \frac{\tilde{k}_y^2}{\mu_{zz}} & -\varepsilon_{xy} + \frac{\varepsilon_{xz}\varepsilon_{zy}}{\varepsilon_{zz}} - \frac{\tilde{k}_x\tilde{k}_y}{\mu_{zz}} \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

$$\mathbb{M}_{22} = \begin{pmatrix} -i\tilde{k}_y \frac{\varepsilon_{yz}}{\varepsilon_{zz}} - i\tilde{k}_x \frac{\mu_{zx}}{\mu_{zz}} & i\tilde{k}_x \frac{\varepsilon_{yz}}{\varepsilon_{zz}} - i\tilde{k}_y \frac{\mu_{zy}}{\mu_{zz}} \\ i\tilde{k}_y \frac{\varepsilon_{xz}}{\varepsilon_{zz}} - i\tilde{k}_x \frac{\mu_{zx}}{\mu_{zz}} & -i\tilde{k}_x \frac{\varepsilon_{xz}}{\varepsilon_{zz}} - i\tilde{k}_y \frac{\mu_{zy}}{\mu_{zz}} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Obecné řešení rovnice (4.11) je ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \overline{\mathbb{W}} \text{diag} \left(\exp(z' \overline{\mathbf{d}}) \right) \begin{pmatrix} \mathbf{c}^+ \\ \mathbf{c}^- \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

kde $\overline{\mathbb{W}}$ má ve sloupcích ortonormální vlastní vektory matice $\overline{\mathbb{M}}$ příslušné k vlastním číslům $\overline{\mathbf{d}}$. Tyto vektory reprezentují jednotlivé módy vln, které se ve vrstvě mohou vyskytovat, a jejich vlastní čísla jsou i-násobky jejich propagačních konstant vzhledem k souřadnici z' . Je vhodné módy seřadit tak, že první dva se propagují v kladném směru a druhé dva v záporném. Vektory koeficientů \mathbf{c}^\pm pak určují amplitudy odpovídajících dopředných resp. zpětných módů.

Pokud je prostředí diagonální, tedy jeho materiálové vlastnosti jsou diagonální tenzory

$$\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z), \quad \mu = \text{diag}(\mu_x, \mu_y, \mu_z),$$

platí $\mathbb{M}_{11} = \mathbb{M}_{22} = \Theta$ a hlavní rovnice (4.11) má tvar

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z'} = \mathbb{M}_{12} \mathbf{H}, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z'} = \mathbb{M}_{21} \mathbf{E},$$

který lze triviálně převést na jednu rovnici druhého řádu. Její řešení je speciální tvar rovnice (4.16)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{W} & \mathbb{W} \\ \mathbb{V} & -\mathbb{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{diag}(\exp(z' \mathbf{d})) & \Theta \\ \Theta & \text{diag}(\exp(-z' \mathbf{d})) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}^+ \\ \mathbf{c}^- \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

kde symboly jsou definovány následovně. \mathbb{W} má ve sloupcích ortonormální vlastní vektory matice $\mathbb{M}_{12}\mathbb{M}_{21}$ příslušné k vlastním číslům \mathbf{s} . Vektor \mathbf{d} obsahuje odmocniny vlastních čísel \mathbf{s} . Matice \mathbb{V} je rovna $\mathbb{V} = (\mathbb{M}_{12})^{-1} \mathbb{W} \text{diag}(\mathbf{d})$. Vektory \mathbf{c}^\pm jsou amplitudové koeficienty dopředné a zpětně postupujících módů rovinné vlny. Speciálně pro lineární homogenní izotropní prostředí (tzv. LHI) máme index lomu $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ a platí

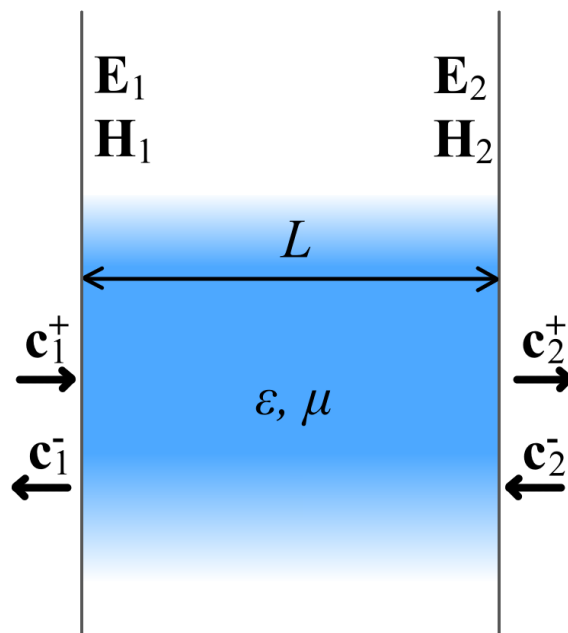
$$\begin{aligned} d_1 = d_2 &= \sqrt{\tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2 - n^2}, \\ \mathbb{W} &= \mathbb{1}, \\ \mathbb{V} &= \frac{i}{\mu \sqrt{n^2 - \tilde{k}_x^2 - \tilde{k}_y^2}} \begin{pmatrix} -\tilde{k}_x \tilde{k}_y & \tilde{k}_x^2 - n^2 \\ n^2 - \tilde{k}_y^2 & \tilde{k}_x \tilde{k}_y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.2.3 Rozptylová matice pro jednu vrstvu

Mějme jednu vrstvu tloušťky L jejíž vlastnosti jsou vyjádřeny maticí $\overline{\mathbb{W}}$ a vektorem $\overline{\mathbf{d}}$. Vrstva je obklopená homogenním prostředím, které má vlevo vlastní vektory $\overline{\mathbb{W}}^{(1)}$ a vpravo $\overline{\mathbb{W}}^{(2)}$. Pole uvnitř vrstvy je dáno amplitudovými koeficienty $\mathbf{c}^+, \mathbf{c}^-$ podle rovnice (4.16), vlevo má vlna koeficienty $\mathbf{c}_1^+, \mathbf{c}_1^-$ a vpravo $\mathbf{c}_2^+, \mathbf{c}_2^-$, viz Obr. 4.2. Existuje několik způsobů, jak vypočítat jednotlivé koeficienty \mathbf{c} pro danou dopadající vlnu, které se souhrnně nazývají metoda přenosové matice (ang. Transfer Matrix Method, TMM). Tato práce se konkrétně věnuje metodě rozptylové neboli S-matice (Scattering matrix), která je jednou z variant TMM.

S-matice, značená $\overline{\mathbb{S}}$, vyjadřuje vztah mezi vlnami dopadajícími zleva a zprava na vrstvu a vlnami prošlými a odraženými. Dopadající vlny jsou dány koeficienty $\mathbf{c}_1^+, \mathbf{c}_2^-$ a prošlé, resp. odražené vlny jsou dohromady dány koeficienty módů propagujících směrem od vrstvy, tedy $\mathbf{c}_1^-, \mathbf{c}_2^+$. S-matice má tvar

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^- \\ \mathbf{c}_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{S}_{11} & \mathbb{S}_{12} \\ \mathbb{S}_{21} & \mathbb{S}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^+ \\ \mathbf{c}_2^- \end{pmatrix} \quad (4.18)$$



Obrázek 4.2: Schéma pro odvození S-matice jedné vrstvy. Tloušťka vrstvy je L a její relativní permitivita a permeabilita jsou ε, μ . Jsou vyznačeny tečné složky polí $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ na rozhraní vlevo a $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ vpravo, které jsou na rozhraních spojitě. Také jsou vyznačeny koeficienty \mathbf{c}_1^\pm dopředné a zpětné vlny na rozhraní vlevo a \mathbf{c}_2^\pm na rozhraní vpravo.

a je různá od tzv. T-matice, která svazuje koeficienty na jedné a druhé straně vrstvy.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^- \\ \mathbf{c}_2^+ \end{pmatrix} = \overline{\mathbb{T}} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^+ \\ \mathbf{c}_2^- \end{pmatrix}.$$

To dělá S-matici v některých ohledech výhodnou, například díky její fyzikální interpretaci — vstupem problému jsou zleva a zprava dopadající vlny, výstupem je odezva vrstvy. Také umožňuje vyhnout se určitým nestabilitám při výpočtu tvaru polí, které pro velmi tlusté struktury mohou nastat při použití T-matic.

S-matice je odvozená z podmínek spojitosti vektorů \mathbf{E}, \mathbf{H} na rozhraních mezi vrstvou a okolím. Podle schématu na Obr. 4.2 označme $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ složky pole na levém rozhraní a $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ na rozhraní vpravo. Tato pole jsou podle (4.16) rovna

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{H}_1 \end{pmatrix} = \overline{\mathbb{W}}^{(1)} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^+ \\ \mathbf{c}_1^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{H}_2 \end{pmatrix} = \overline{\mathbb{W}}^{(2)} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_2^+ \\ \mathbf{c}_2^- \end{pmatrix}.$$

Koeficienty \mathbf{c}^\pm uvnitř vrstvy jsou rovny

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}^+ \\ \mathbf{c}^- \end{pmatrix} = \overline{\mathbb{W}}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{H}_1 \end{pmatrix} = \overline{\mathbb{W}}^{-1} \overline{\mathbb{W}}^{(1)} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^+ \\ \mathbf{c}_1^- \end{pmatrix}.$$

Aplikací (4.16) je pak odvozena podmínka spojitosti $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$

$$\overline{\mathbb{W}}^{-1} \overline{\mathbb{W}}^{(2)} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_2^+ \\ \mathbf{c}_2^- \end{pmatrix} = \text{diag} \left(\exp(k_0 L \bar{\mathbf{d}}) \right) \overline{\mathbb{W}}^{-1} \overline{\mathbb{W}}^{(1)} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^+ \\ \mathbf{c}_1^- \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Označme

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbb{A}} &= \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} \\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22} \end{pmatrix} = \overline{\mathbb{W}}^{-1} \overline{\mathbb{W}}^{(2)}, \\
\overline{\mathbb{B}} &= \begin{pmatrix} \mathbb{B}_{11} & \mathbb{B}_{12} \\ \mathbb{B}_{21} & \mathbb{B}_{22} \end{pmatrix} = \overline{\mathbb{W}}^{-1} \overline{\mathbb{W}}^{(1)}, \\
\mathbb{X} &= \begin{pmatrix} \exp(k_0 L d_1) & 0 \\ 0 & \exp(k_0 L d_2) \end{pmatrix}, \\
\mathbb{Y} &= \begin{pmatrix} \exp(-k_0 L d_3) & 0 \\ 0 & \exp(-k_0 L d_4) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

V příloze A.2 je odvozeno, že bloky matice $\overline{\mathbb{S}}$ jsou rovny

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}_{11} &= [\mathbb{B}_{22} - \mathbb{Y} \mathbb{A}_{21} \mathbb{A}_{11}^{-1} \mathbb{X} \mathbb{B}_{12}]^{-1} [\mathbb{Y} \mathbb{A}_{21} \mathbb{A}_{11}^{-1} \mathbb{X} \mathbb{B}_{11} - \mathbb{B}_{21}], \\
\mathbb{S}_{12} &= [\mathbb{B}_{22} - \mathbb{Y} \mathbb{A}_{21} \mathbb{A}_{11}^{-1} \mathbb{X} \mathbb{B}_{12}]^{-1} \mathbb{Y} [\mathbb{A}_{22} - \mathbb{A}_{21} \mathbb{A}_{11}^{-1} \mathbb{A}_{12}], \\
\mathbb{S}_{21} &= [\mathbb{A}_{11} - \mathbb{X} \mathbb{B}_{12} \mathbb{B}_{22}^{-1} \mathbb{Y} \mathbb{A}_{21}]^{-1} \mathbb{X} [\mathbb{B}_{11} - \mathbb{B}_{12} \mathbb{B}_{22}^{-1} \mathbb{B}_{21}], \\
\mathbb{S}_{22} &= [\mathbb{A}_{11} - \mathbb{X} \mathbb{B}_{12} \mathbb{B}_{22}^{-1} \mathbb{Y} \mathbb{A}_{21}]^{-1} [\mathbb{X} \mathbb{B}_{12} \mathbb{B}_{22}^{-1} \mathbb{Y} \mathbb{A}_{22} - \mathbb{A}_{12}].
\end{aligned} \tag{4.21}$$

■ 4.2.4 Speciální případy S-matice

V některých speciálních případech se tvar S-matice zjednoduší. V této sekci jsou uvedeny některé tyto případy, které se dále hodí při výpočtech.

■ 4.2.4.1 Stejně vnější prostředí na obou stranách

Pokud je na obou stranách stejné prostředí, platí rovnost $\overline{\mathbb{A}} = \overline{\mathbb{B}}$, a to nezávisle na konkrétním prostředí.

■ 4.2.4.2 Diagonální prostředí

Pokud jsou všechna tři prostředí diagonálně anizotropní (včetně případů, kdy jsou izotropní), můžeme označit

$$\overline{\mathbb{W}}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbb{W}^{(1)} & \mathbb{W}^{(1)} \\ \mathbb{V}^{(1)} & -\mathbb{V}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbb{W}}^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathbb{W}^{(2)} & \mathbb{W}^{(2)} \\ \mathbb{V}^{(2)} & -\mathbb{V}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbb{W}} = \begin{pmatrix} \mathbb{W} & \mathbb{W} \\ \mathbb{V} & -\mathbb{V} \end{pmatrix}.$$

Pro matice tohoto tvaru je snadné vypočítat inverzi,³ a tak odvodíme

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_{11} &= \mathbb{A}_{22} = \frac{1}{2} (\mathbb{W}^{-1} \mathbb{W}^{(2)} + \mathbb{V}^{-1} \mathbb{V}^{(2)}), \\
\mathbb{A}_{12} &= \mathbb{A}_{21} = \frac{1}{2} (\mathbb{W}^{-1} \mathbb{W}^{(2)} - \mathbb{V}^{-1} \mathbb{V}^{(2)}), \\
\mathbb{B}_{11} &= \mathbb{B}_{22} = \frac{1}{2} (\mathbb{W}^{-1} \mathbb{W}^{(1)} + \mathbb{V}^{-1} \mathbb{V}^{(1)}), \\
\mathbb{B}_{12} &= \mathbb{B}_{21} = \frac{1}{2} (\mathbb{W}^{-1} \mathbb{W}^{(1)} - \mathbb{V}^{-1} \mathbb{V}^{(1)}).
\end{aligned}$$

Navíc je $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$, což dále zjednodušuje výpočet. Připomeňme, že pokud je nějaké prostředí izotropní, jeho matice \mathbb{W} je jednotková.

³Pro matice tvaru $\overline{\mathbb{F}} = \begin{pmatrix} \mathbb{G} & \mathbb{G} \\ \mathbb{H} & -\mathbb{H} \end{pmatrix}$ platí $\overline{\mathbb{F}}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{G}^{-1} & \mathbb{H}^{-1} \\ \mathbb{G}^{-1} & -\mathbb{H}^{-1} \end{pmatrix}$.

4.2.4.3 Stejně okolí a diagonální prostředí

Pokud jsou všechna tři prostředí izotropní nebo diagonální a okolí na obou stranách vrstvy je stejné, lze kombinací předchozích případů 4.2.4.1 a 4.2.4.2 odvodit

$$\begin{aligned} S_{11} = S_{22} &= \left[A_{11} - X A_{12} A_{11}^{-1} X A_{12} \right]^{-1} \left[X A_{12} A_{11}^{-1} A_{11} - A_{12} \right], \\ S_{12} = S_{21} &= \left[A_{11} - X A_{12} A_{11}^{-1} X A_{12} \right]^{-1} X \left[A_{11} - A_{12} A_{11}^{-1} A_{12} \right]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.2.4.4 Vrstva nulové tloušťky

Pomocí S-matice lze popsat i jednoduché rozhraní dvou prostředí. Představíme si, že prostředí jsou oddělena virtuální vrstvou nulové tloušťky. Formálně platí $X = Y = \mathbb{I}$. Pokud dále uvažujeme, že virtuální vrstva má stejné vlastnosti jako prostředí vpravo, platí $\bar{A} = \mathbb{I}^{(4 \times 4)}$ a první dvě rovnice (4.21) nabývají tvar

$$S_{11} = -B_{22}^{-1} B_{21}, \quad S_{12} = B_{22}^{-1},$$

kde $\bar{B} = [\bar{W}^{(2)}]^{-1} \bar{W}^{(1)}$. Když naopak uvažujeme, že vrstva má stejné vlastnosti jako prostředí vlevo, bylo by $\bar{B} = \mathbb{I}^{(4 \times 4)}$ a získáme rovnici

$$S_{21} = A_{11}^{-1}, \quad S_{22} = -A_{11}^{-1} A_{12},$$

kde tentokrát $\bar{A} = [\bar{W}^{(1)}]^{-1} \bar{W}^{(2)}$. S-matice rozhraní nemůže záviset na tom, jaké uvažujeme materiálové vlastnosti vrstvy, jelikož vrstva má nulovou tloušťku. Uvedené složky jsou proto složky stejné matice. Pro přehlednost označme

$$\bar{J} = [\bar{W}^{(2)}]^{-1} \bar{W}^{(1)}, \quad \bar{K} = [\bar{W}^{(1)}]^{-1} \bar{W}^{(2)}.$$

Pak pro S-matici rozhraní dvou prostředí platí

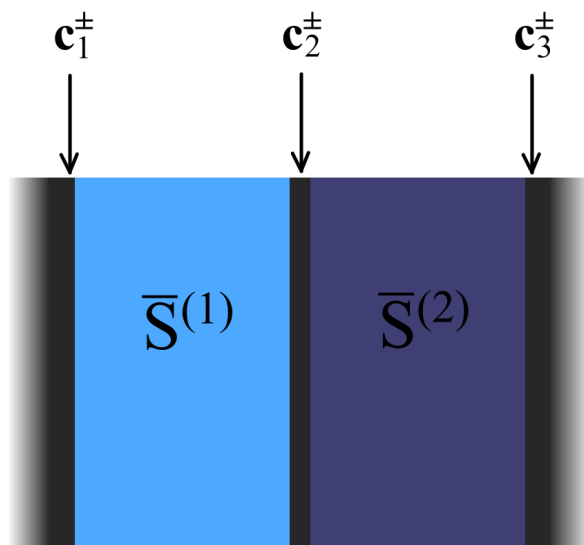
$$S_{11} = -J_{22}^{-1} J_{21}, \quad S_{12} = J_{22}^{-1}, \quad S_{21} = K_{11}^{-1}, \quad S_{22} = -K_{11}^{-1} K_{12}. \quad (4.23)$$

4.2.5 Součin S-matic

Výše byla zavedena S-matice jednotlivé vrstvy. Pro strukturu obsahující několik vrstev lze z dílčích S-matic zkonstruovat matici pro celou strukturu. Výsledek není maticový součin(!), ale tzv. Redhefferův součin (ang. Redheffer star product) uvedený níže.

Uvažujme dvě sousední vrstvy, levou s maticí $\bar{S}^{(1)}$ a pravou s maticí $\bar{S}^{(2)}$, viz Obr. 4.3. Tyto vrstvy na sebe těsně navazují, ale z hlediska metody je mezi nimi virtuální mezera o nulové tloušťce, která má při výpočtech S-matic roli odpovídajícího vnějšího prostředí. Tato virtuální vrstva se nazývá mezerové prostředí (ang. gap medium). Je zřejmé, že mezerové prostředí musí být pro obě vrstvy stejné, jinak by koeficienty c_2^\pm nebyly dobře definované, resp. byly by pro každou z vrstev různé. Z těchto důvodů je běžné počítat dílčí S-matice jednotlivých vrstev, jako by byly z obou stran obklopeny pevně zvoleným mezerovým médiem, například vakuem.

Levá matice $\bar{S}^{(1)}$ svazuje koeficienty c_1^\pm v levém prostoru a c_2^\pm ve virtuální mezeře mezi vrstvami, pravá matice $\bar{S}^{(2)}$ pak koeficienty c_2^\pm s koeficienty vpravo c_3^\pm . Rozptylová matice obou vrstev, svazující c_1^\pm a c_3^\pm , se značí $\bar{S} = \bar{S}^{(1)} \otimes \bar{S}^{(2)}$ a nazývá se Redhefferův součin matic $\bar{S}^{(1)}$ a



Obrázek 4.3: Schéma Redhefferova součinu dvou S-matic. Modře jsou vyznačeny dvě homogenní vrstvy popsané maticemi $\bar{S}^{(1)}$, $\bar{S}^{(2)}$. Při jejich výpočtu je uvažováno, že vrstvy jsou z obou stran obklopeny stejným homogenním prostředím (gap medium) vyznačeným šedě. Uprostřed je vyznačena virtuální mezeru mezi vrstvami.

$\bar{S}^{(2)}$. V příloze A.3 je odvozeno, že její složky jsou rovny

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= S_{12}^{(1)} \left[\mathbb{1} - S_{11}^{(2)} S_{22}^{(1)} \right]^{-1} S_{11}^{(2)} S_{21}^{(1)} + S_{11}^{(1)}, \\
 S_{12} &= S_{12}^{(1)} \left[\mathbb{1} - S_{11}^{(2)} S_{22}^{(1)} \right]^{-1} S_{12}^{(2)}, \\
 S_{21} &= S_{21}^{(2)} \left[\mathbb{1} - S_{22}^{(1)} S_{11}^{(2)} \right]^{-1} S_{21}^{(1)}, \\
 S_{22} &= S_{21}^{(2)} \left[\mathbb{1} - S_{22}^{(1)} S_{11}^{(2)} \right]^{-1} S_{22}^{(1)} S_{12}^{(2)} + S_{22}^{(2)}.
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

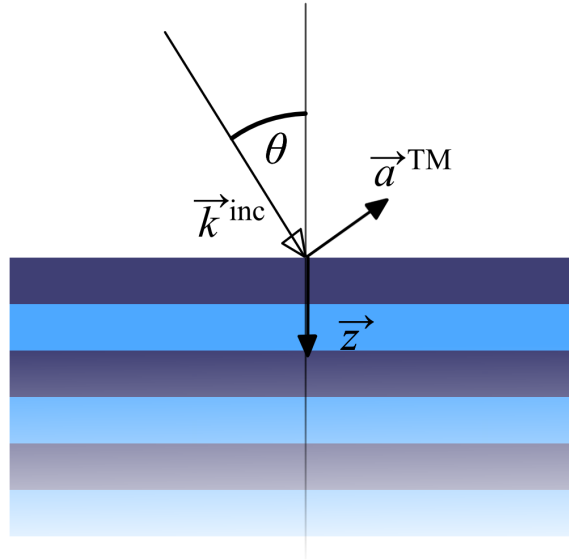
Bylo zmíněno, že je vhodné počítat dílčí S-matice vrstev, jako by byly obklopeny mezerovým médiem. Pokud je celá multivrstva zvenčí obklopena nějakým jiným prostředím, je potřeba ji správně „napojit”. Podle speciálního případu 4.2.4.4 vypočteme S-matice rozhraní mezi vnějšími prostředími a mezerovým prostředím a ty vynásobíme s maticí pro multivrstvu podle (4.24).

4.2.6 Výpočty pomocí TMM

Pomocí metody přenosové resp. S-matice lze počítat mnoho charakteristik vrstevnatých struktur. V této sekci budou představeny výpočty transmisního spektra, podélného rozložení pole (ve frekvenční doméně), pásové struktury Braggovských zrcadel a rezonance na dutině mezi dvěma zrcadly.

4.2.6.1 Spektrum reflektance a transmittance

Pomocí TMM lze vypočítat transmitanci a reflektanci dané multivrstvy v závislosti na frekvenci dopadající vlny a jejím úhlu dopadu. Bude popsán výpočet reflektance a transmittance pro jednu frekvenci, resp. vlnovou délku (TMM je ve frekvenční doméně). Spektrum lze zkonstruovat



Obrázek 4.4: Schéma dopadu rovinné vlny na vrstevnatou strukturu. Vlna je definována vektorem \vec{k}^{inc} dopadajícím pod úhlem θ . Jednotkový vektor \vec{a}^{TE} ve směru TE polarizace je kolmý na \vec{k}^{inc} a osu \vec{z} a není vyznačený. Jednotkový vektor \vec{a}^{TM} je kolmý na \vec{k}^{inc} a \vec{a}^{TE} .

jednoduchým opakováním výpočtu pro více frekvencí. Tak lze získat ucelenou informaci o transmisních vlastnostech struktury, ale některé problémy, například hledání defektních módů, jsou lépe řešeny jinými způsoby (viz dále).

Při tomto výpočtu budeme uvažovat rovinnou harmonickou vlnu dopadající zleva na multivrstvu. Pokud označíme θ úhel mezi vlnovým vektorem a normálou čela multivrstvy a φ úhel mezi rovinou dopadu a osou \vec{x} , pak vlnový vektor má tvar

$$\vec{k}^{\text{inc}} = k^{\text{inc}} (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).$$

Rovinou dopadu je myšlena taková rovina, která je kolmá na rozhraní a leží v ní vektor \vec{k}^{inc} .

Dopadající vlnu lze chápat jako superpozici dvou vln lineárně polarizovaných ve význačných směrech: TM (neboli P) a TE (neboli S). Je běžné, že prostředí vně multivrstvy je LHI (typicky vzduch nebo nějaký substrát), a tak podle Maxwellových rovnic ve frekvenční doméně platí, že pro TE polarizaci je vektor $\vec{\mathcal{E}}$ kolmý na \vec{k} a tečný na čelo multivrstvy. Pro TM polarizaci je elektrické pole kolmé na \vec{k} a leží v rovině dopadu. Jednotkové vektory ve směru TE resp. TM jsou tedy

$$\vec{a}^{\text{TE}} = \frac{\vec{k}^{\text{inc}} \times \vec{z}}{|\vec{k}^{\text{inc}} \times \vec{z}|}, \quad \vec{a}^{\text{TM}} = \frac{\vec{k}^{\text{inc}} \times \vec{a}^{\text{TE}}}{|\vec{k}^{\text{inc}} \times \vec{a}^{\text{TE}}|}.$$

To je schématicky vyznačeno na Obr. 4.4. Elektrickou amplitudu dopadající vlny konečně určíme komplexními koeficienty $P_{\text{TE}}, P_{\text{TM}}$ vyjadřujícími polarizační stav

$$\vec{\mathcal{E}}^{\text{inc}} = P_{\text{TE}} \vec{a}^{\text{TE}} + P_{\text{TM}} \vec{a}^{\text{TM}}.$$

Podle Maxwellových rovnic (4.6), (4.7) a normalizace (4.9) vypočteme magnetické pole jako

$$\vec{\mathcal{H}}^{\text{inc}} = \frac{i}{\mu^{\text{inc}}} \vec{k}^{\text{inc}} \times \vec{\mathcal{E}}^{\text{inc}}.$$

Tečné složky polí $\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}}$ jsou dány (4.10) a módové koeficienty $\mathbf{c}_{\text{inc}}^+$ vypočteme pomocí matice vlastních vektorů $\overline{\mathbb{W}}^{\text{inc}}$ pro levé vnější prostředí

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_{\text{inc}}^+ \\ \mathbf{c}_{\text{inc}}^- \end{pmatrix} = [\overline{\mathbb{W}}^{\text{inc}}]^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{\text{inc}} \\ \mathbf{H}^{\text{inc}} \end{pmatrix}.$$

Koeficient $\mathbf{c}_{\text{inc}}^-$ bude určitě nula, jelikož jde o dopadající vlnu.

Označme $\overline{\mathbb{S}}$ S-matici celé multivrstvy. Předpokládáme, že na multivrstvu dopadá vlna jen zleva, takže koeficient $\mathbf{c}_{\text{trn}}^-$ vlny dopadající zprava je roven nule. Módové koeficienty odražené a prošlé vlny jsou rovny

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_{\text{ref}}^- \\ \mathbf{c}_{\text{trn}}^+ \end{pmatrix} = \overline{\mathbb{S}} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{\text{inc}}^+ \\ 0 \end{pmatrix}$$

a tečné složky pole těchto vln vypočteme pomocí matic vlastních vektorů $\overline{\mathbb{W}}^{(\text{inc})}, \overline{\mathbb{W}}^{(\text{trn})}$ pro levé resp. pravé vnější prostředí

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{\text{ref}} \\ \mathbf{H}^{\text{ref}} \end{pmatrix} = \overline{\mathbb{W}}^{\text{inc}} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{\text{inc}}^+ \\ \mathbf{c}_{\text{ref}}^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{\text{trn}} \\ \mathbf{H}^{\text{trn}} \end{pmatrix} = \overline{\mathbb{W}}^{\text{trn}} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{\text{trn}}^+ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Složky polí odražené a prošlé vlny ve směru \vec{z} vypočteme pomocí vzorců

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_z &= \frac{1}{\varepsilon_{zz}} \left(-\varepsilon_{zx} \mathcal{E}_x - \varepsilon_{zy} \mathcal{E}_y - i\tilde{k}_x \tilde{\mathcal{H}}_y + i\tilde{k}_y \tilde{\mathcal{H}}_x \right), \\ \tilde{\mathcal{H}}_z &= \frac{1}{\mu_{zz}} \left(-\mu_{zx} \tilde{\mathcal{H}}_x - \mu_{zy} \tilde{\mathcal{H}}_y + i\tilde{k}_y \mathcal{E}_x - i\tilde{k}_x \mathcal{E}_y \right), \end{aligned} \quad (4.25)$$

které lze odvodit z Maxwellových rovnic. (Odvození je uvedeno v příloze A.1.) Připomeňme, že hodnoty polí jsou komplexní vektory a nesou tak informaci o své fázi. Pro LHI prostředí přejdou rovnice (4.25) na

$$\mathcal{E}_z = \frac{i}{\varepsilon} \left(\tilde{k}_y \tilde{\mathcal{H}}_x - \tilde{k}_x \tilde{\mathcal{H}}_y \right), \quad \tilde{\mathcal{H}}_z = \frac{i}{\mu} \left(\tilde{k}_y \mathcal{E}_x - \tilde{k}_x \mathcal{E}_y \right). \quad (4.26)$$

Optická intenzita jednotlivých vln je rovna velikosti reálné části z -složky Poyntingova vektoru $\vec{\mathcal{S}}$ ve tvaru

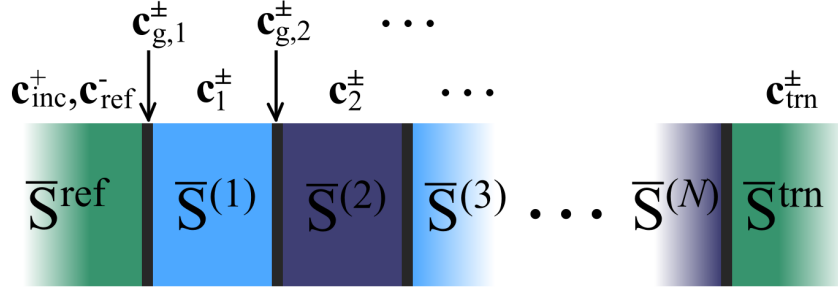
$$\vec{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^*.$$

Za předpokladu, že vnější prostředí vlevo i vpravo jsou LHI, jsou v příloze A.4 odvozeny rovnosti pro reflektanci a transmitanci dané multivrstvy

$$R = \frac{I^{\text{ref}}}{I^{\text{inc}}} = \frac{|\mathcal{E}^{\text{ref}}|^2}{|\mathcal{E}^{\text{inc}}|^2}, \quad T = \frac{I^{\text{trn}}}{I^{\text{inc}}} = \frac{|\mathcal{E}^{\text{trn}}|^2}{|\mathcal{E}^{\text{inc}}|^2} \frac{\Re(k_z^{\text{trn}}/\mu^{\text{trn}})}{\Re(k_z^{\text{inc}}/\mu^{\text{inc}})}, \quad (4.27)$$

kde $\mu^{\text{inc}}, \mu^{\text{trn}}$ jsou relativní permeability levého resp. pravého vnějšího prostředí a $k^{\text{inc}}, k^{\text{trn}}$ jsou vlnové vektory dopadající resp. prošlé vlny. Jejich složky ve směru \vec{z} lze v LHI vypočítat pomocí dielektrických vlastností daného prostředí a normalizovaných tečných složek \tilde{k}_x, \tilde{k}_y , které se v multivrstvě zachovávají

$$k_z = k_0 \sqrt{\varepsilon\mu - \tilde{k}_x^2 - \tilde{k}_y^2}.$$



Obrázek 4.5: Schéma výpočtu podélného průběhu pole v multivrstvě pomocí S-matic. Zeleně jsou vyznačeny levé a pravé vnější prostory popsané maticemi \bar{S}^{ref} , \bar{S}^{trn} , v nichž je pole popsáno koeficienty $\mathbf{c}_{\text{inc}}^+$, $\mathbf{c}_{\text{ref}}^-$, resp. $\mathbf{c}_{\text{trn}}^\pm$. Jednotlivé vrstvy jsou popsány maticemi $\bar{S}^{(k)}$ a v nich je popsáno koeficienty \mathbf{c}_k^\pm . Pole ve virtuální mezeře (vyznačené šedě) vlevo od k -té vrstvy je popsáno koeficienty $\mathbf{c}_{g,k}^\pm$.

4.2.6.2 Podélné rozložení pole

V metodě přenosové matice je uvažováno homogenní rozložení pole v příčných směrech. Pomocí dvoufázového algoritmu lze vypočítat také podélný průběh polí včetně jejich složek ve směru z .

V první fázi algoritmu je zapotřebí vypočítat S-matice jednotlivých vrstev a koeficienty $\mathbf{c}_{\text{ref}}^-$, $\mathbf{c}_{\text{trn}}^+$ odražené a prošlé vlny. Uvažme tedy soustavu N vrstev o vlastních vektorech $\bar{\mathbf{W}}^{(i)}$ a propagačních konstantách $\mathbf{d}^{(i)}$. Pro každou vrstvu lze vypočítat S-matici $\bar{S}^{(i)}$ podle 4.2.3 s použitím mezerového média o vlastních vektorech $\bar{\mathbf{W}}^g$. Matice \bar{S}^{ref} , \bar{S}^{trn} na rozhraní s volným prostorem vlevo resp. vpravo lze vypočítat podle speciálního případu 4.2.4.4. Celý systém vrstev je popsán maticí

$$\bar{S}^{(\otimes)} = \bar{S}^{\text{ref}} \otimes \bigotimes_{i=1}^N \bar{S}^{(i)} \otimes \bar{S}^{\text{trn}}$$

a koeficienty $\mathbf{c}_{\text{ref}}^-$, $\mathbf{c}_{\text{trn}}^+$ jsou pro danou dopadající vlnu vypočteny analogicky rovnici (4.18), viz sekci 4.2.6.1.

Ve druhé fázi jsou zkonstruovány koeficienty uvnitř jednotlivých vrstev a pomocí nich vypočteny hodnoty pole ve zvolených bodech souřadnice z . Uvažme nejprve koeficienty $\mathbf{c}_{g,1}^\pm$ ve virtuální mezeře mezi levým prostorem a první vrstvou, jak je ilustrováno na Obr. 4.5. Pro ty platí rovnice (4.18) ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_{\text{ref}}^- \\ \mathbf{c}_{g,1}^+ \end{pmatrix} = \bar{S}^{\text{ref}} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{\text{inc}}^+ \\ \mathbf{c}_{g,1}^- \end{pmatrix},$$

ze které je snadné odvodit

$$\mathbf{c}_{g,1}^- = [\bar{S}_{12}^{\text{ref}}]^{-1} [\mathbf{c}_{\text{ref}}^- - \bar{S}_{11}^{\text{ref}} \mathbf{c}_{\text{inc}}^+], \quad \mathbf{c}_{g,1}^+ = \bar{S}_{21}^{\text{ref}} \mathbf{c}_{\text{inc}}^+ + \bar{S}_{22}^{\text{ref}} \mathbf{c}_{g,1}^-.$$
 (4.28)

Koeficienty $\mathbf{c}_{g,i}^\pm$ v mezeře vlevo od i -té vrstvy lze vypočítat podobným způsobem. Definujme pro $r \leq s$ matici

$$\bar{S}^{(\otimes, r, \dots, s)} := \bigotimes_{t=r}^s \bar{S}^{(t)}.$$
 (4.29)

Koeficienty $\mathbf{c}_{g,i}^\pm$ jsou spojeny s koeficienty $\mathbf{c}_{\text{inc}}^+$, $\mathbf{c}_{\text{ref}}^-$ S-maticí

$$\bar{S}^{(\otimes, i)} := \bar{S}^{\text{ref}} \otimes \bar{S}^{(\otimes, 1, \dots, i-1)}$$

a analogicky (4.28) jsou rovny

$$\mathbf{c}_{g,i}^- = [\mathbb{S}_{12}^{(\otimes,i)}]^{-1} [\mathbf{c}_{\text{ref}}^- - \mathbb{S}_{11}^{(\otimes,i)} \mathbf{c}_{\text{inc}}^+], \quad \mathbf{c}_{g,i}^+ = \mathbb{S}_{21}^{(\otimes,i)} \mathbf{c}_{\text{inc}}^+ + \mathbb{S}_{22}^{(\otimes,i)} \mathbf{c}_{g,i}^-. \quad (4.30)$$

Připomeňme, že koeficienty v levém a pravém prostoru byly vypočteny v první fázi. Není nutné počítat je znovu pomocí (4.30). Pro koeficienty \mathbf{c}_i^\pm uvnitř i -té vrstvy platí

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_i^+ \\ \mathbf{c}_i^- \end{pmatrix} = [\overline{\mathbb{W}}^{(i)}]^{-1} \overline{\mathbb{W}}^g \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{g,i}^+ \\ \mathbf{c}_{g,i}^- \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

Se znalostí módových koeficientů uvnitř vrstev lze vypočítat tečné složky polí pomocí rovnice (4.16), kde za $\overline{\mathbb{W}}, \overline{\mathbf{d}}, \mathbf{c}^\pm$ jsou dosazeny vlastnosti $\overline{\mathbb{W}}^{(i)}, \overline{\mathbf{d}}^{(i)}$ a nalezené koeficienty \mathbf{c}_i^\pm . Za souřadnici z' je dosazeno $k_0 z$, kde z je poloha posunutá tak, aby $z = 0$ odpovídalo levému okraji vrstvy. V levém a pravém vnějším prostoru je posunutí takové, aby $z = 0$ bylo rozhraní multivrstvy a vnějšího prostředí. Podélné složky $\mathcal{E}_z, \mathcal{H}_z$ lze vypočítat opět rovnicí (4.25), případně (4.26). Pokud je to potřeba, lze provést zpětnou normalizaci magnetického pole podle (4.9).

Uvedený postup lze použít i v případě, kdy jsou známé koeficienty \mathbf{c}^\pm v některé vrstvě uvnitř struktury (tj. ne na jednom z okrajů). Necht jsou \mathbf{c}^\pm ve virtuální mezeře vlevo od j -té vrstvy, tedy $\mathbf{c}^\pm = \mathbf{c}_{g,j}^\pm$. Analogicky rovnici (4.30) lze určit koeficienty $\mathbf{c}_{g,i}^\pm$ pro $i > j$ jako

$$\mathbf{c}_{g,i}^- = [\mathbb{S}_{12}^{(\otimes,j,\dots,i-1)}]^{-1} [\mathbf{c}_{g,j}^- - \mathbb{S}_{11}^{(\otimes,j,\dots,i-1)} \mathbf{c}_{g,j}^+], \quad \mathbf{c}_{g,i}^+ = \mathbb{S}_{21}^{(\otimes,j,\dots,i-1)} \mathbf{c}_{g,j}^+ + \mathbb{S}_{22}^{(\otimes,j,\dots,i-1)} \mathbf{c}_{g,i}^-. \quad (4.32)$$

Podobnou úvahou jako v předchozích odstavcích lze ukázat, že pro $k < j$ jsou koeficienty $\mathbf{c}_{g,k}^\pm$ rovny

$$\mathbf{c}_{g,k}^+ = [\mathbb{S}_{21}^{(\otimes,k,\dots,j-1)}]^{-1} [\mathbf{c}_{g,j}^+ - \mathbb{S}_{22}^{(\otimes,k,\dots,j-1)} \mathbf{c}_{g,j}^-], \quad \mathbf{c}_{g,k}^- = \mathbb{S}_{11}^{(\otimes,k,\dots,j-1)} \mathbf{c}_{g,k}^+ + \mathbb{S}_{12}^{(\otimes,k,\dots,j-1)} \mathbf{c}_{g,j}^-. \quad (4.33)$$

4.2.6.3 Blochovy módy v jednorozměrném fotonickém krystalu

Pomocí S-matic lze vypočítat Blochovy módy rovinných vln v jednorozměrném fotonickém krystalu a podle nich jeho pásovou strukturu. Mějme periodickou jednorozměrnou strukturu s prostorovou periodou Λ , jako je ilustrováno na Obr. 4.6. Označme z souřadnici ve směru periodicity. Blochova věta říká, že průběh polí má tvar

$$u(z + \Lambda) = u(z) \exp(iK\Lambda). \quad (4.34)$$

Veličina K je propagační konstantou vlny v krystalu, neboli Blochův vlnčet. (Někdy je také značena $K = k_0\beta$.) V metodě S-matic jsou pole vyjádřena pomocí koeficientů \mathbf{c}^\pm , takže pro vektory těchto koeficientů musí platit stejná podmínka. Pokud označíme $\mathbf{c}_{g,n}^\pm$ koeficienty ve virtuální mezeře vlevo od n -té periody fotonického krystalu, pak platí

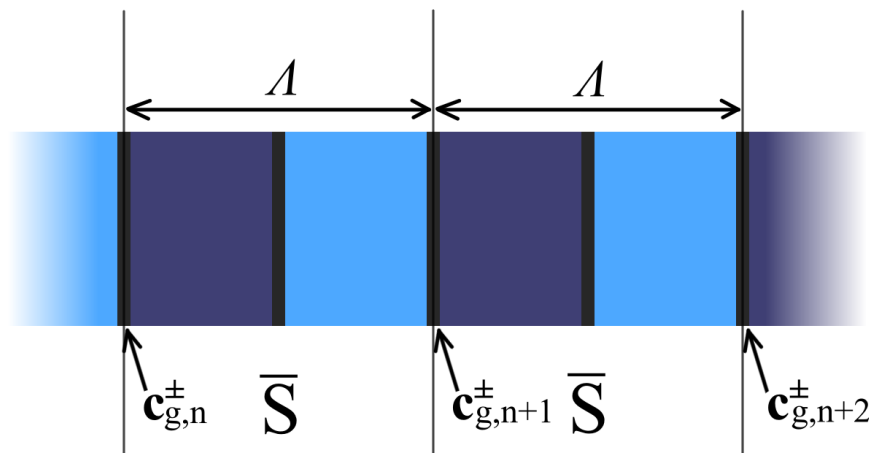
$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_{g,n}^- \\ \mathbf{c}_{g,n+1}^+ \end{pmatrix} = \overline{\mathbb{S}} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{g,n}^+ \\ \mathbf{c}_{g,n+1}^- \end{pmatrix},$$

kde $\overline{\mathbb{S}}$ je rozptylová matice jedné periody obložené mezerovým prostředím. Blochova podmínka pak má tvar

$$\mathbf{c}_{g,n+1}^\pm = \exp(iK\Lambda) \mathbf{c}_{g,n}^\pm$$

a v příloze A.5 je z ní odvozen problém vlastních čísel

$$\begin{pmatrix} \Theta & -\mathbb{S}_{12} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{S}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{S}_{11} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{S}_{21} & \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{g,n}^+ \\ \mathbf{c}_{g,n}^- \end{pmatrix} = \exp(iK\Lambda) \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{g,n}^+ \\ \mathbf{c}_{g,n}^- \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$



Obrázek 4.6: Schéma jednorozměrného fotonického krystalu s prostorovou periodou Λ . Šedě jsou vyznačeny virtuální mezery mezi jednotlivými vrstvami. Jedna perioda je popsána S-maticí \bar{S} , která udává vztah mezi koeficienty $c_{g,n}^\pm$ a $c_{g,n+1}^\pm$ ve virtuálních mezerách.

Jelikož matice \bar{S} závisí na frekvenci, lze takto zkonstruovat disperzní relaci a pásovou strukturu fotonického krystalu. Vlna o frekvenci v povoleném pásu není tlumená a její propagační konstanta je reálná.⁴ V takovém případě je vlastní číslo v rovnici (4.35) komplexní jednotka a disperzní relace má tvar

$$\cos(K\Lambda) = \Re(\exp(iK\Lambda)). \quad (4.36)$$

Naopak pokud se vlastní čísla od jednotky výrazně liší, je tato frekvence exponenciálně tlumená v dopředném ($|\exp(iK\Lambda)|^2 \ll 1$) nebo zpětném směru ($|\exp(iK\Lambda)|^2 \gg 1$). Hovoříme o zakázaném pásu.

V sekci 2.2.1 bylo uvedeno, že Braggovská zrcadla jsou vhodná ke konstrukci VCSEL laserů právě proto, že mají široké zakázané pásy o vysoké reflektanci. Braggovské zrcadlo o dostatečném počtu period lze aproximovat nekonečně periodickým 1D fotonickým krystalem a pásovou strukturu počítat právě pomocí rovnic (4.35) a (4.36) pro S-matici jedné periody (tj. typicky dvojice dielektrických vrstev).

4.2.6.4 Rezonance v defektním módu

Existence zakázaných pásů ve fotonických krystalech zároveň umožňuje rezonanci na různých defektech periodicity. V případě VCSEL laserů je defektem tenká dutina mezi dvěma DBR. Postupem podobným jako v [55] lze vypočítat rezonanční frekvenci (resp. vlnovou délku) a Q faktor dutiny pomocí S-matic. Označme $\bar{S}^{(1)}$, $\bar{S}^{(c)}$, $\bar{S}^{(2)}$ S-matice dolního reflektoru, dutiny a horního reflektoru. Matice dutiny je z obou stran navázána na mezerové prostředí stejně jako matice zrcadel na vnitřních stranách. Zvenčí jsou zrcadla navázána na odpovídající vnější prostředí, například zvolený substrát. Dále označme $\bar{S} = \bar{S}^{(c)} \otimes \bar{S}^{(2)}$. Mód \mathbf{c} v mezeře mezi dutinou a dolním zrcadlem, který se šíří směrem vzhůru, se rozptýlí na matici \bar{S} a poté na $\bar{S}^{(1)}$. Rezonance může nastat, pokud takto vznikne původní vlna, čemuž odpovídá rovnice vlastních čísel

$$\bar{S}_{22}^{(1)} \bar{S}_{11} \mathbf{c} = \alpha \mathbf{c}. \quad (4.37)$$

⁴To platí v uvedeném případě nekonečně širokých homogenních vrstev bez absorpce a emise. Obecně může být imaginární část propagační konstanty z různých důvodů nenulová a je potřeba do povoleného pásu počítat i takové frekvence, kde je imaginární část dostatečně malá v porovnání s reálnou částí.

Číslo $\alpha = |\alpha| \exp(i\varphi)$ je komplexní a odpovídá změně amplitudy a fáze dvakrát odražené vlny při interferenci s původní vlnou. Ke konstruktivní interferenci dochází, když $\varphi = 0$. V rovnici (4.37) vystupuje matice rozměru 2×2 , takže řešením jsou dvě obecně různá vlastní čísla.⁵ Rezonanci lze hledat uvnitř zakázaného pásu zrcadel jako kořen závislosti φ na frekvenci, případně vlnové délce.

Pokud původní vlnu uvažujeme v módu \mathbf{c}' šířícím se směrem dolů, získáme problém vlastních čísel podobný rovnici (4.37)

$$\mathbb{S}_{11}\mathbb{S}_{22}^{(2)}\mathbf{c}' = \gamma\mathbf{c}'. \quad (4.38)$$

Zároveň v rovnici (4.37) platí pro první odraženou vlnu vztah $\mathbf{c}^- = \mathbb{S}_{11}\mathbf{c}$. Pokud vynásobíme rovnici (4.37) zleva maticí \mathbb{S}_{11} , získáme tvar

$$\mathbb{S}_{11}\mathbb{S}^{(2)}\mathbf{c}^- = \alpha\mathbf{c}^-,$$

který je po přeznačení hledaného vlastního čísla totožný s (4.38). To umožňuje zkonstruovat celý vektor koeficientů rezonujícího módu složený z dopředné resp. zpětné části \mathbf{c} resp. \mathbf{c}' . Zpětná část je nějaký násobek \mathbf{c}^- se stejnou normou jako \mathbf{c} . Pokud je dopředná část normována na jednotku, pak

$$\mathbf{c}' = \frac{\mathbb{S}_{11}\mathbf{c}}{\|\mathbb{S}_{11}\mathbf{c}\|}.$$

Se znalostí těchto vlastních módů rezonance lze například zkonstruovat tvar stojaté vlny v rezonátoru podle sekce 4.2.6.2.

Q faktor rezonance v defektním módu lze vypočítat pomocí aproximace Fabryovým-Pérotovým rezonátorem. Nejprve poznamenejme, že Q faktor je definován jako 2π násobek podílu energie oscilací a ztráty energie během jednoho cyklu (zde dvojnásobného odrazu a propagace vlny v dutině.) Za předpokladu malých ztrát energie absorpcí a odrazem na zrcadlech lze v případě Fabryova-Pérotova rezonátoru Q faktor dobře aproximovat vzorcem

$$Q \approx \frac{\omega_r}{\delta\omega}, \quad (4.39)$$

který je odvozen např. v [12, kap. 11]. Veličina ω_r je rezonanční frekvence a $\delta\omega$ je šířka píku intenzity oscilací v závislosti na frekvenci v polovině jeho maxima (ang. full width at half-maximum, FWHM.) Při výpočtech rezonance v defektním módu budeme vycházet z tohoto vzorce.

Jedním způsobem hledání Q faktoru je přímý výpočet podle (4.39), kde pod intenzitou oscilací v závislosti na frekvenci rozumíme transmisní spektrum multivrstvy. Transmittance má totiž v okolí rezonance vysoký pík. Tento způsob je však nepraktický, protože výpočet transmisního spektra je náročný, zvláště pokud je pík velmi úzký a spektrum je tak nutné počítat s velmi jemným rozlišením.

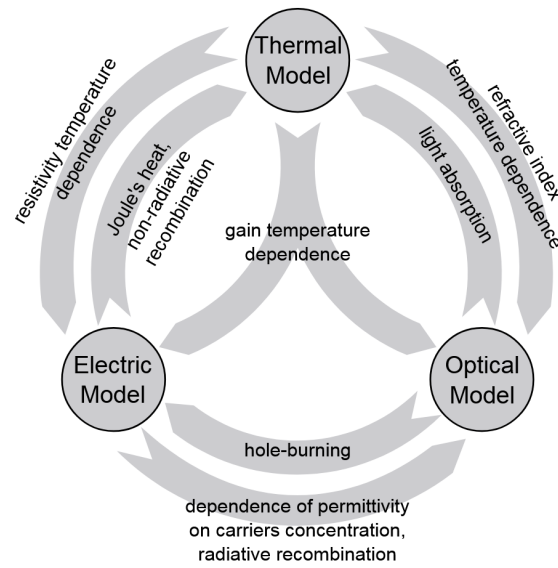
Nyní bude popsána praktičtější metoda výpočtu Q faktoru. Stále vycházíme z (4.39) a uvažujeme takto: v dutině interferuje původní vlna \mathbf{c}_0 s několikrát odraženými vlnami. Výsledek má tvar

$$\mathbf{c} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \mathbf{c}_0 = \frac{\mathbf{c}_0}{1 - \alpha},$$

kde druhá rovnost platí pro $|\alpha| < 1$. Předpokládejme, že amplituda $|\alpha|$ se v blízkosti rezonance nemění s frekvencí. Pro intenzitu záření v dutině pak platí vztah analogický Fabryovu-Pérotovu rezonátoru

$$I(\omega) = \frac{I_{\max}}{1 + \mathcal{F}^2 \sin^2 \frac{\varphi(\omega)}{2}}, \quad \text{kde } I_{\max} = I(\omega_r) = \frac{|\mathbf{c}_0|^2}{(1 - |\alpha|)^2}, \quad \mathcal{F} = \frac{2\sqrt{|\alpha|}}{1 - |\alpha|}. \quad (4.40)$$

⁵Obě vlastní čísla bývají stejná, pokud jsou vrstvy izotropní a směr šíření vln je kolmý na rozhraní.



Obrázek 4.7: Schéma provázaných procesů v elektricky čerpaném VCSEL nebo jiném polovodičovém laseru. Převzato z [57].

Odtud lze dále odvodit přibližný vztah pro Q faktor, viz přílohu A.6

$$Q^{(\text{FP})} = \frac{\omega_r \sqrt{|\alpha|}}{2(1 - |\alpha|)} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_r} = -\frac{\lambda_r \sqrt{|\alpha|}}{2(1 - |\alpha|)} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda_r}. \quad (4.41)$$

Tento vzorec je platný, když je v okolí rezonance fáze φ přibližně lineární vzhledem ke frekvenci a amplituda $|\alpha|$ je konstantní. Také musí být splněna relace

$$|\alpha| \gg 3 - 2\sqrt{2} \doteq 0,17,$$

která platí pro běžné případy se zrcadly o vysoké reflektanci.

4.3 Speciální numerická analýza

Ucelené modelování polovodičových laserů vyžaduje práci s několika vzájemně provázanými procesy, jak bylo popsáno v sekci 2.3. Ty mají povahu optickou, tepelnou a elektrickou. Také je nutné uvažovat zářivé a nezářivé rekombinace nosičů, jejich transport atd. viz schéma na Obr. 4.7. K účelům takových výpočtů existují specializované nástroje,⁶ jako například software PLaSK [56] (Photonic Laser Simulation Kit) vyvíjený Skupinou fotoniky na Technické univerzitě v Łódži. Ten modeluje zmíněné procesy pomocí vzájemně nezávislých komponent, což umožňuje volit a kombinovat algoritmy vhodné pro konkrétní problém [57]. Jednotlivé komponenty lze „propojit“ standardním rozhraním vstupů a výstupů, a sdílet tak informace mezi provázanými výpočty. V této práci budou výpočty omezeny jen na optickou část.

Software PLaSK bude využit ke třírozměrné optické analýze zvolené struktury. Bude hledána vlnová délka základního módu při laserovém prahu. Postup vychází z příkladu [59], kde jsou optické módy hledány skalární metodou efektivní frekvence (ang. Effective Frequency Method, EFM). Postup hledání prahu pak spočívá ve hledání takového koeficientu zesílení v aktivní vrstvě,

⁶Zmíníme pro úplnost, že nástrojů pro multifyzikální simulace je mnoho. Například firma Ansys Optics, jejíž implementace FDTD bude v této práci rovněž použita, aktuálně (k červenci 2025) vyvíjí vlastní nástroj pro návrh a simulace válcově symetrických VCSELů s elektrickým čerpáním [58].

který vede na nulové tlumení základního módu. (Zde je vhodné zdůraznit, že při důkladném modelování vzorové VCSEL struktury není koeficient zesílení přímo volen, ale je závislý na budícím proudu resp. napětí.)

EFM je skalární metoda optických výpočtů na soustavě vrstev. Ve formulaci podle [60] je vhodná k modelování válcově symetrických nehomogenních vrstev, jako je například oxidové okno. Ve frekvenční doméně jsou hledány vlastní módy struktury, jejichž časová závislost je úměrná $\exp(i\omega t)$. Frekvence ω je komplexní číslo, jehož imaginární část vyjadřuje útlum módu.

Kapitola 5

Detailní optická analýza vzorové struktury

V této kapitole budou demonstrovány představené výpočetní metody na vzorové struktuře. Nejprve budou analyzovány vlastnosti Braggovských zrcadel. Následně budou vyšetřeny rezonanční vlastnosti struktury v jednorozměrném přiblížení pomocí TMM a FDTD. Nakonec bude struktura analyzována pomocí třírozměrných modelů.

5.1 Popis zvolené struktury

Zvolená VCSEL struktura je založena na kombinaci GaAs a AlGaAs a pochází z [61], kde jsou porovnány různé metody optického modelování. Struktura je válcově symetrická podle svislé osy a seznam jejích vrstev je v Tab. 5.1. Je očekávána rezonance poblíž vlnové délky 980 nm a Braggovská zrcadla jsou tvořena střídavými vrstvami AlGaAs, GaAs o tloušťce rovné přibližně čtvrtině materiálové vlnové délky. Horní zrcadlo je tvořeno 24 páry a spodní 30. Spodní zrcadlo navazuje na nekonečný GaAs substrát, horní zrcadlo je naopak shora obklopené vzduchem.

Mezi zrcadly jsou umístěny dvě další multivrstvy: oxidová struktura a rezonanční dutina. Oxidová struktura je podobná jedné periodě horního zrcadla, ale část její tloušťky je nahrazena vrstvou AlOx, kde poblíž středu válcové symetrie je oxid nahrazen diskem AlAs o průměru d . Relativní poloha této oxidové apertury je značena X a je efektivně rovna tloušťce vrstvy AlGaAs pod aperturou. Tloušťka apertury je přibližně dvacetina vlnové délky v AlGaAs. Rezonanční dutina je tvořena silnou vrstvou GaAs v jejímž středu je umístěna 5 nm tlustá aktivní vrstva (kvantová jáma). Její reálný index lomu je stejný jako sousední GaAs. Část této vrstvy o průměru d poblíž osy má proměnlivou zápornou imaginární složku indexu lomu, pokud je na místě s ním počítat (viz dále). Jinak má imaginární složku kladnou. To odpovídá tomu, že střed aktivní vrstvy je elektricky čerpán a zesiluje záření díky inverzi populace energetických hladin. Naopak okraj vrstvy čerpán není, a tak absorbuje. Převodní vztah mezi imaginární složkou indexu n_i a koeficientem zesílení g je odvozen v příloze A.7 a má tvar

$$n_i = -\frac{g\lambda}{4\pi}. \quad (5.1)$$

Celková tloušťka struktury je 8479,79 nm včetně nejspodnější GaAs vrstvy těsně přilehlé k substrátu. Pokud je uvažováno radiální prostorové omezení, má struktura vnější poloměr 10 μm . Průměr apertury d byl zvolen $d = 8 \mu\text{m}$ a poloha oxidové vrstvy je proměnlivá v rozsahu výše popsané oxidové struktury (také viz dále).

5.2 Vlastnosti zrcadel

V této části budou prozkoumány a ověřeny vlastnosti Braggovských zrcadel, a to pomocí TMM (viz sekci 4.2.6) a také metodou FDTD. Bude zkoumána jejich fotonická pásová struktura a

Popis	d [nm]	n	materiál
Horní zrcadlo (24 párů)	69,49	3,53	GaAs
	79,63	3,08	AlGaAs
Oxidová struktura oxidová vrstva ($r > d/2$) otvor ($r < d/2$)	69,49	3,53	GaAs
	$63,71 - X$	3,08	AlGaAs
	15,93	2,95	AlAs
		1,6	AlOx
	X	3,08	AlGaAs
Rezonanční dutina okolí QW ($r > d/2$) QW	136,49	3,53	GaAs
	5,00	$3,53 + 0.01i$	GaAs (tlumení)
		$3,53 + in_i$	GaAs (zesílení)
	136,49	3,53	GaAs
Spodní zrcadlo (30 párů)	79,63	3,08	AlGaAs
	69,49	3,53	GaAs
Substrát	∞	3,53	GaAs

Tabulka 5.1: Popis jednotlivých vrstev, jejich tloušťek a indexů lomu ve zvolené struktuře. Převzato z [61].

ω [ω_B]	ω [THz]	λ [μm]
1	1920	0,9811
2	3840	0,4906
3	5760	0,3270

Tabulka 5.2: Vybrané násobky Braggovy frekvence ω_B a odpovídající vakuové vlnové délky λ pro zvolený fotonický krystal.

transmisní spektrum.

5.2.1 Pásová struktura

Způsobem popsaným v sekci 4.2.6.3 byla vypočtena pásová struktura zrcadel jako jednorozměrných nekonečně periodických fotonických krystalů. Výsledná pásová struktura je zakreslena na Obr. 5.1, kde je modrou čarou vyznačena disperzní relace v povolených pásích a šedými pruhy zakázané pásy. Frekvence je uvedena v jednotkách Braggovy frekvence

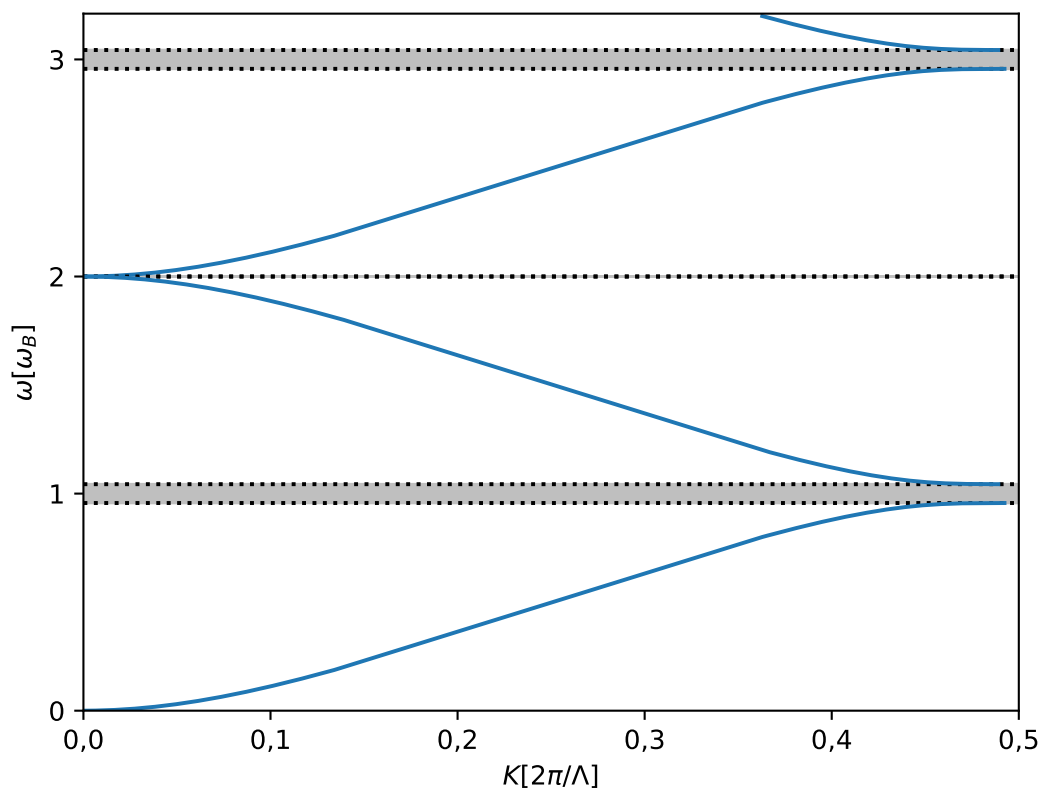
$$\omega_B = \frac{\pi c}{\bar{n}\Lambda},$$

kde $\Lambda = d_{\text{GaAs}} + d_{\text{AlGaAs}}$ je délka prostorové periody krystalu a

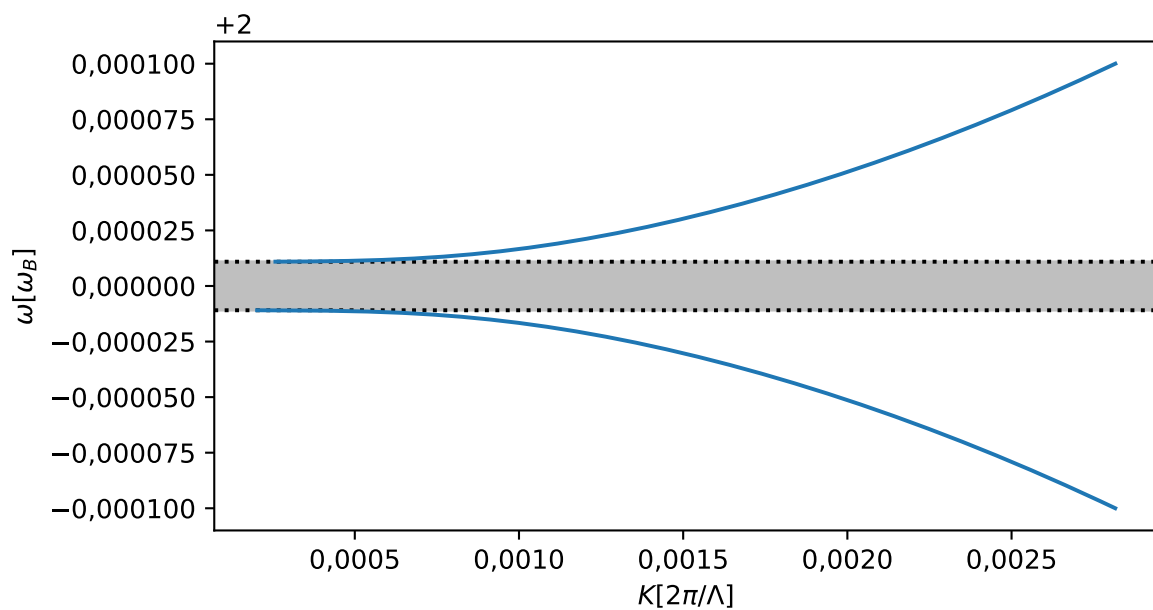
$$\bar{n} = \frac{n_{\text{GaAs}}d_{\text{GaAs}} + n_{\text{AlGaAs}}d_{\text{AlGaAs}}}{\Lambda}$$

je průměrný index lomu. Vztah mezi celočíselnými násobky Braggovy frekvence a vakuovou vlnovou délkou λ je uveden v Tab. 5.2. Jsou patrné zakázané pásy v okolí všech nenulových celočíselných násobků ω_B , včetně velmi úzkého pásu poblíž $2\omega_B$. Jeho detail je na Obr. 5.2.

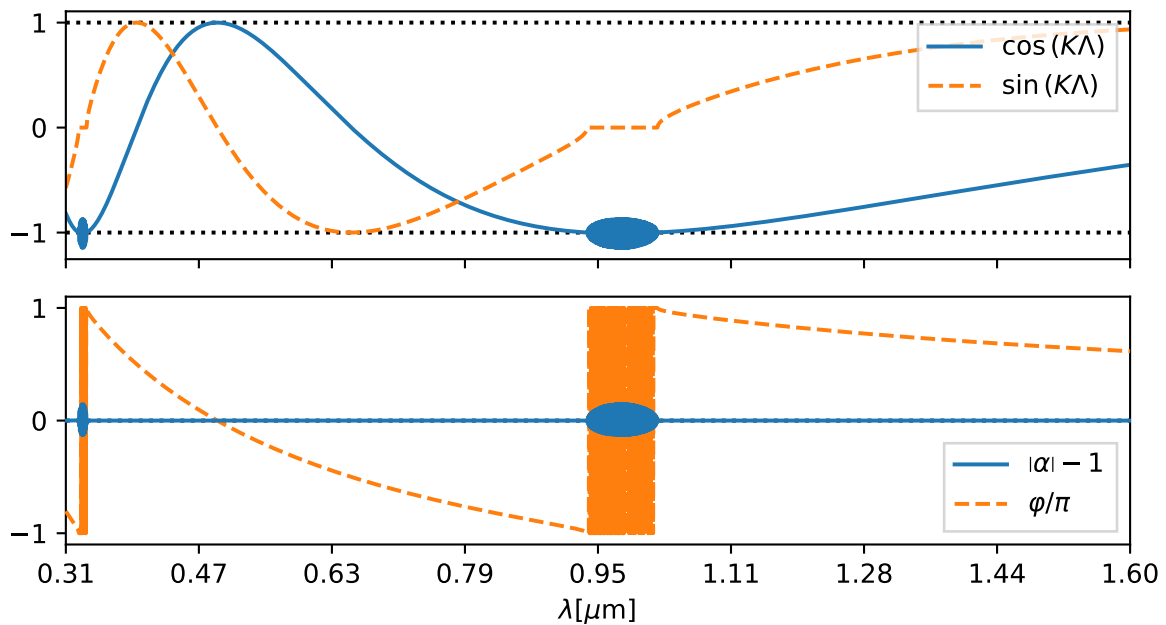
Na Obr. 5.3 je vykreslen graf Blochovy fáze $K\Lambda$ ve smyslu rovnic (4.35) a (4.36). Vlastní číslo v rovnici (4.35) bylo pro zjednodušení označeno $\exp(iK\Lambda) = \alpha = |\alpha| \exp(i\varphi)$. Na horním grafu jsou zakresleny reálná a imaginární složka vlastního čísla, na spodním grafu je pak amplituda a fáze. Jsou patrné zakázané pásy poblíž $\lambda = 0,330 \mu\text{m}$ a $\lambda = 0,950 \mu\text{m}$, kde se amplituda odchyluje



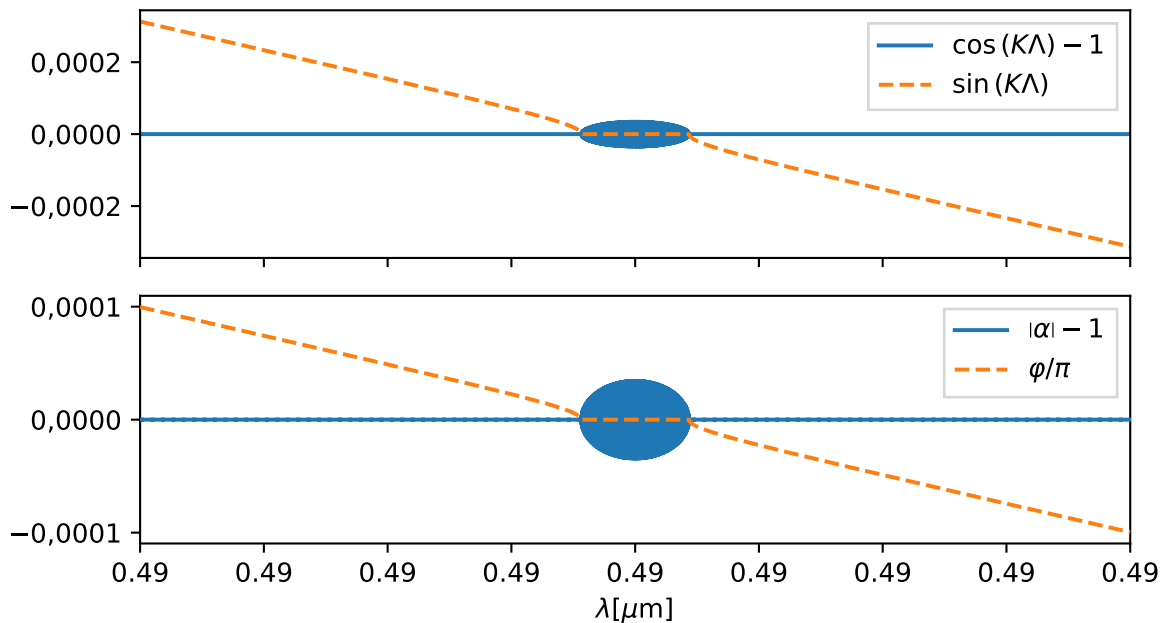
Obrázek 5.1: Pásová struktura zrcadel jako jednorozměrných fotonických krystalů. Modrou čarou je zakreslena disperzní relace, šedými pruhy jsou vyznačeny zakázané pásy.



Obrázek 5.2: Detail zakázaného pásu zrcadel v okolí $\omega = 2\omega_B$.



Obrázek 5.3: Vlastní číslo rovnice pro (4.35) zrcadla jako fotonické krystaly. Nahoře jsou reálná (modře) a imaginární složka (oranžově) vlastního čísla, dole pak jeho amplituda a fáze.

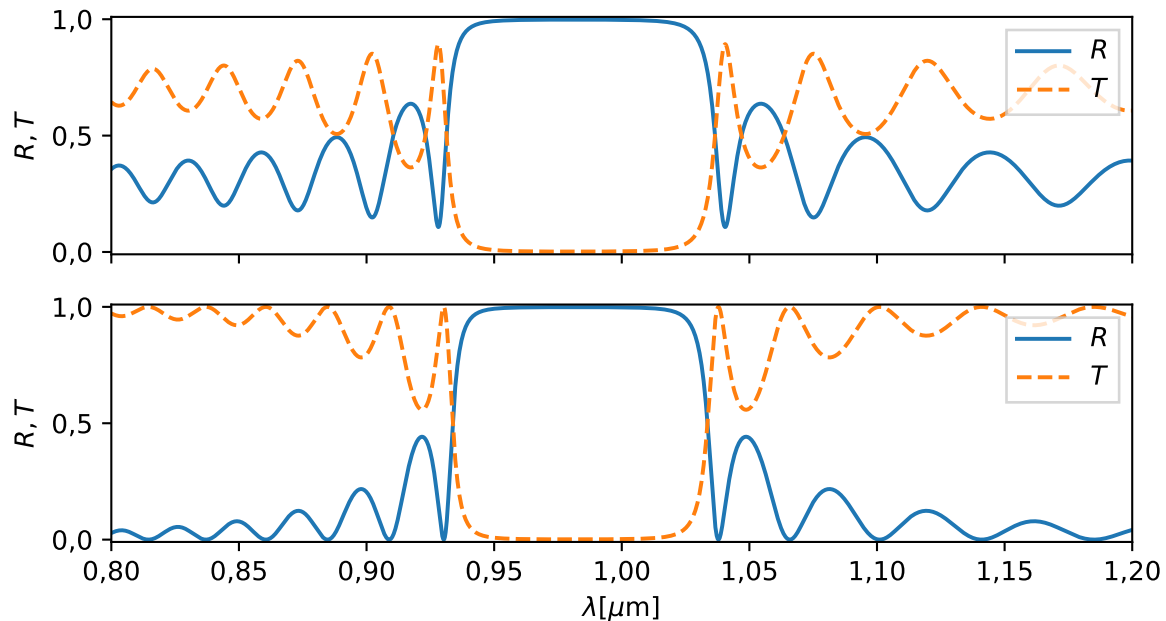


Obrázek 5.4: Vlastní číslo rovnice (4.35) pro zrcadla jako fotonické krystaly v okolí druhého zakázaného pásu. Nahoře jsou reálná (modře) a imaginární složka (oranžově) vlastního čísla, dole pak jeho amplituda a fáze.

od jedničky, fáze má chaotický průběh a $\cos(K\Lambda)$ nabývá hodnot větších jedné. Na Obr. 5.4 je vykreslen obdobný graf v blízkém okolí vlnové délky $\lambda = 0,49 \mu\text{m}$, která odpovídá frekvenci $\omega = 2\omega_B$. Tam je opět patrný velice úzký zakázaný pás, čímž se potvrzuje, že zakázaný pás na Obr. 5.2 není jen nějaký artefakt numerického výpočtu.

λ_1 [μm]	λ_2 [μm]	ω_1 [THz]	ω_2 [THz]
0,322 378	0,331 838	5842,982	5676,411
0,490 557	0,490 563	3839,819	3839,777
0,940 329	1,025 611	2003,184	1836,614

Tabulka 5.3: Přibližné hranice nalezených zakázaných pásů zvoleného fotonického krystalu.



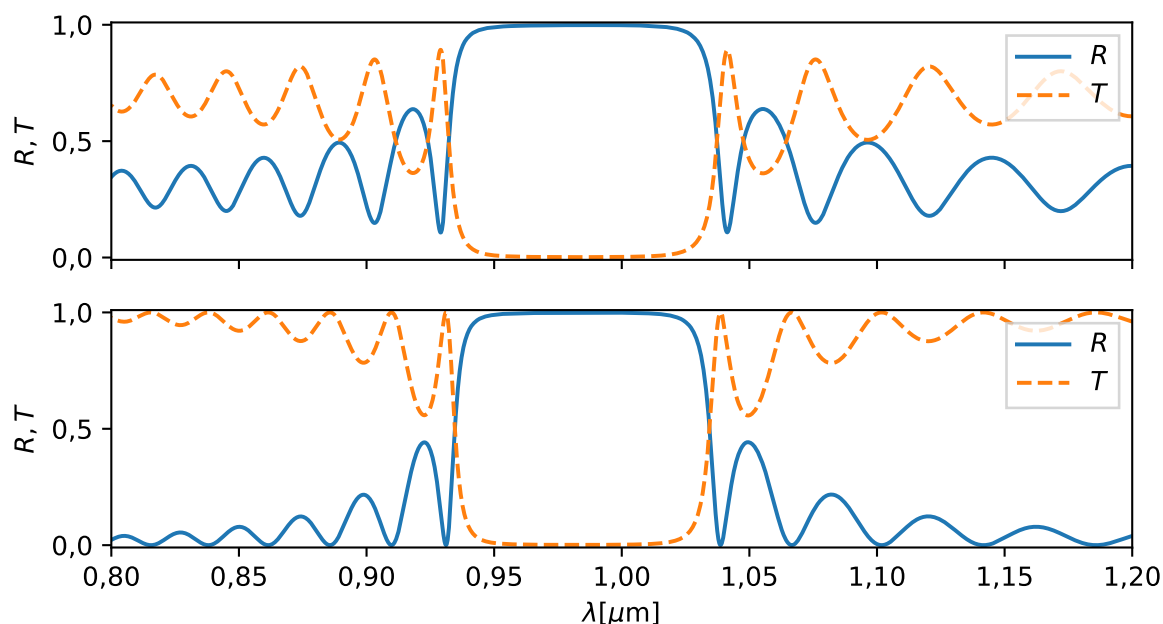
Obrázek 5.5: Reflexní (modře) a transmisní (oranžově) spektrum horního (nahore) a spodního zrcadla (dole) zvolené struktury vypočtená pomocí TMM. Horní zrcadlo je tvořeno 24 periodami, zespoda navazuje na GaAs a shora na vzduch. Spodní zrcadlo je tvořeno 30 periodami a z obou stran je obklopeno GaAs. Pro obě zrcadla je patrná oblast vysoké reflektance, která se shoduje se zakázaným pásem.

Přibližné hranice nalezených zakázaných pásů jsou uvedeny v Tab. 5.3 a to ve tvaru hraničních frekvencí i vlnových délek. Touto analýzou je potvrzeno, že návrhová vlnová délka laseru $\lambda = 0,980 \mu\text{m}$ skutečně leží v prvním zakázaném pásu, a tato zrcadla jsou tak vhodná ke konstrukci laseru na této vlnové délce.

5.2.2 Transmisní spektrum

Způsobem popsaným v sekci 4.2.6.1 byla vypočtena reflexní a transmisní spektra horního a spodního zrcadla. Graf těchto spekter v rozsahu vlnových délek od $0,8 \mu\text{m}$ do $1,2 \mu\text{m}$ pro kolmý dopad vln je na Obr. 5.5 nahoře resp. dole. Je patrná oblast mezi $0,95 \mu\text{m}$ a $1,2 \mu\text{m}$, kde je reflektance velmi vysoká. Ta přesně odpovídá prvnímu zakázanému pásu zrcadel, viz Obr. 5.1 a Obr. 5.3. Je také vidět, že pro vrchní zrcadlo je reflektance mimo zakázaný pás výrazně vyšší než pro spodní zrcadlo. To je způsobené rozdílnými vnějšími prostředními. Spodní zrcadlo je z obou stran obklopeno GaAs, kdežto horní zrcadlo zdola navazuje na vrstvu GaAs a shora na vzduch (vakuum).

Spektra reflektance a transmitance zrcadel byla vypočtena také pomocí metody FDTD podle sekce 4.1.1. To je vykresleno na Obr. 5.6, kde nahoře je spektrum horního a dole spodního zrcadla.



Obrázek 5.6: Reflexní (modře) a transmisní (oranžově) spektrum horního (nahore) a spodního zrcadla (dole) zvolené struktury vypočtená pomocí FDTD. Horní zrcadlo je tvořeno 24 periodami, zespoda navazuje na GaAs a shora na vzduch. Spodní zrcadlo je tvořeno 30 periodami a z obou stran je obklopeno GaAs. Pro obě zrcadla je patrná oblast vysoké reflektance, která se shoduje se zakázaným pásem.

Je vidět, že tato spektra se skoro dokonale shodují s Obr. 5.5. Jediný rozdíl je velmi malý posun spektra směrem do delších vlnových délek, který souvisí s konečným rozlišením výpočetní sítě při FDTD. Spektrum na Obr. 5.6 bylo počítáno pro rozlišení mřížky $dx \approx 6,24$ nm, což je přibližně desetina tloušťky vrstev zrcadel. Větší posun (přibližně o $0,01$ μm) byl pozorován při rozlišení mřížky $dx \approx 22,4$ nm, což je přibližně třetina tloušťky vrstev.

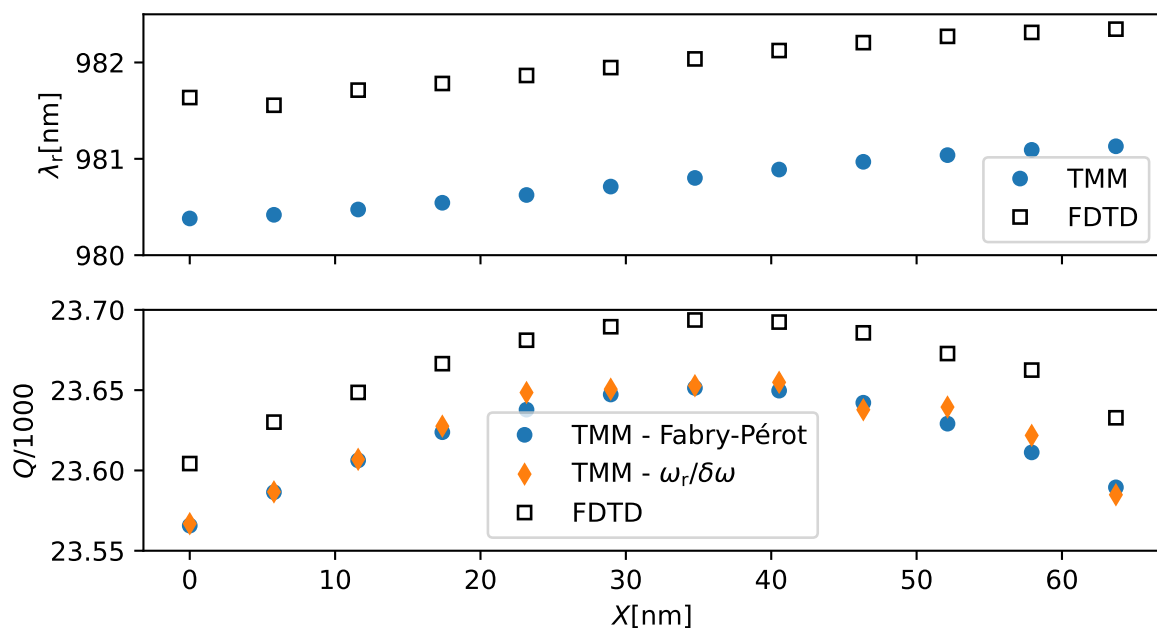
5.3 Rezonance v dutině

V jednorozměrném přiblížení byla vyšetřena rezonanční vlnová délka a Q faktor dutiny. K tomu byly použity metody přenosové matice a FDTD.

5.3.1 Rezonance pomocí TMM

Pomocí TMM byly způsobem popsáním v sekci 4.2.6.4 vypočteny rezonanční vlnové délky dutiny pro různé konfigurace oxidové struktury. Jelikož TMM v použité formulaci nedokáže pracovat s nehomogenními vrstvami, byla oxidová apertura simulována homogenní vrstvou AlAs. Graf rezonanční vlnové délky λ_r v závislosti na poloze této vrstvy je zakreslen modrými body nahore na Obr. 5.7. Vlnová délka je v rozmezí 980,3 nm až 981,2 nm a pomalu roste s posunem „oxidové apertury“ směrem nahoru ve vrstvě AlGaAs, což se dobře shoduje s výsledky na Obr. 2 v [61]. Připomeňme, že podle Tab. 5.1 odpovídá $X = 0$ nm apertuře těsně navazující na horní okraj dutiny a $X = 63,71$ nm naopak těsně navazující na následující vyšší vrstvu GaAs.

Dole na Obr. 5.7 je vykreslen Q faktor pro odpovídající konfigurace oxidové struktury. Modrými body je zakreslen Q faktor vypočtený pomocí podle Fabryovské-Pérotovské aproximace (4.41). Oranžovými kosočtverci je zakreslen Q faktor vypočtený přímo podle vztahu $Q = \omega_r / \delta\omega$



Obrázek 5.7: Rezonanční vlnová délka λ_r a Q faktor dutiny pro různou relativní polohu apertury X vypočtené pomocí FDTD v jednom rozměru (prázdnými čtverci) a TMM (modře, oranžově). Q faktor byl metodou TMM počítán podle vztahu (4.41) (modré body) a také z transmisního spektra celé struktury poblíž rezonance podle rovnice (4.39) (oranžové kosočtverce).

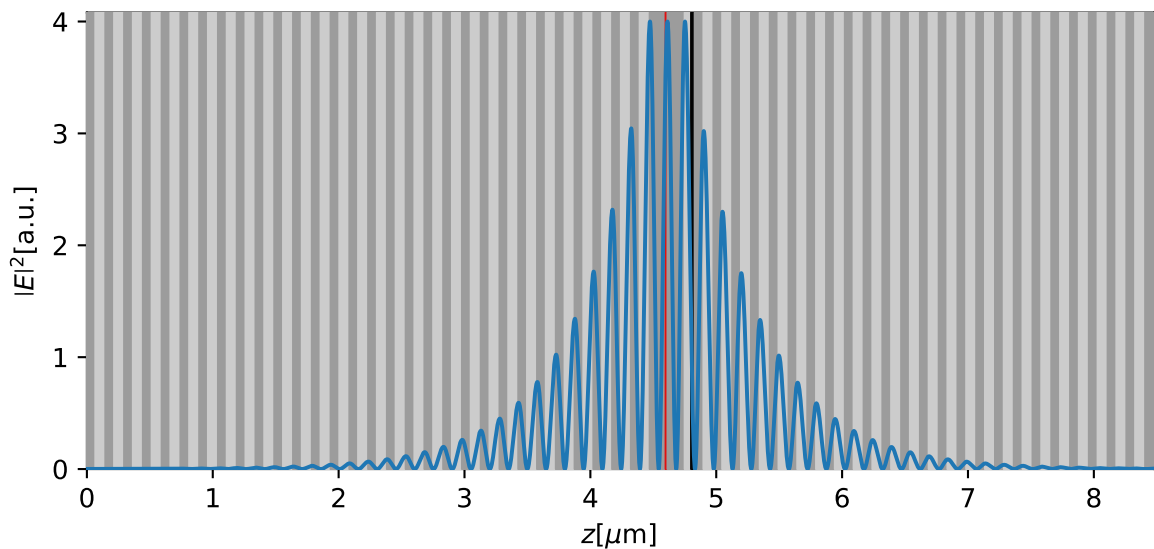
diskutovaného rovněž v sekci 4.2.6.4. Připomeňme, že ω_r je rezonanční frekvence a $\delta\omega$ je šířka píku transmitance multivrstvy poblíž rezonance v polovině jejího maxima. Tento náročný výpočet byl proveden jako ověření správnosti vzorce (4.41). Pozorujeme, že hodnoty podle obou výpočtů si skoro dokonale odpovídají.

5.3.2 Rezonance pomocí FDTD

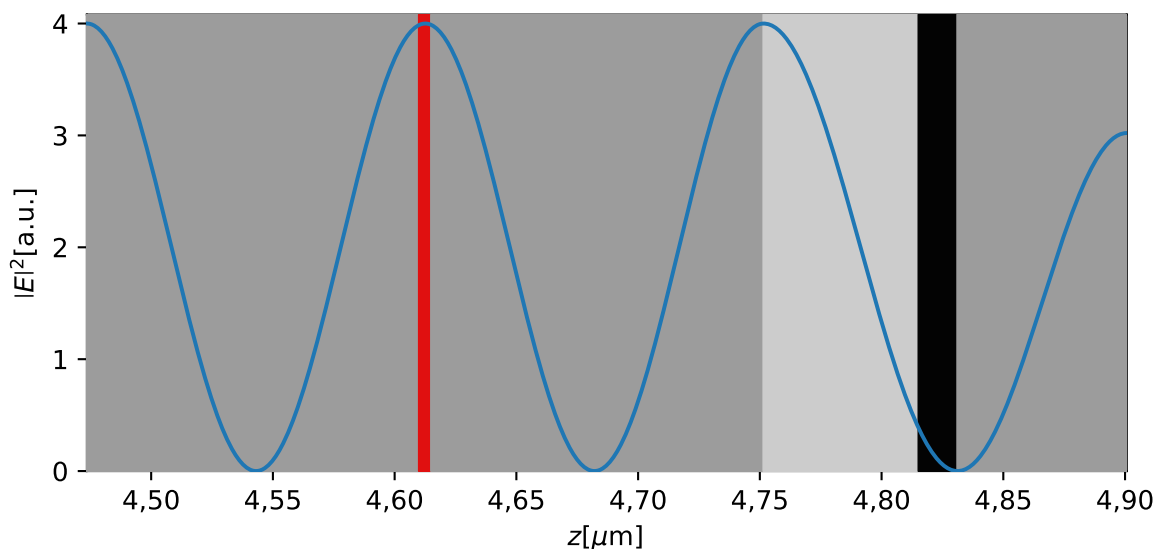
Způsobem popsaným v sekci 4.1.2 byla vypočtena rezonanční vlnová délka a Q faktor dutiny. Výpočet byl proveden pro jednorozměrnou strukturu s homogenní vrstvou AlAs místo oxidové apertury, stejně jako v předchozí sekci. Nalezené rezonanční vlnové délky λ_r v závislosti na pozici simulované apertury X jsou v horním grafu na Obr. 5.7 prázdnými čtverci. Q faktor odpovídajících rezonancí podle (4.3) je na dolním grafu Obr. 5.7 rovněž prázdnými čtverci. Pozorujeme stejnou rostoucí závislost λ_r na X posunutou o přibližně 1 nm oproti výsledku z TMM. Q faktor nabývá hodnot v podobném oblouku jako podle TMM a je zvýšený o zanedbatelnou konstantu.

5.4 Rozložení stojaté vlny

Pomocí TMM způsobem popsaným v sekci 4.2.6.2 byla vypočtena intenzita stojaté vlny při rezonanci v dutině. Pro každou polohu simulované apertury X byla nalezena rezonanční vlnová délka (viz sekci 5.3) a koeficienty c rezonujícího módu podle sekce 4.2.6.4. Z nich byly podle rovnic (4.32), (4.33), (4.31) a (4.16) vypočteny tečné složky polí E_x, E_y , resp. intenzita vlny $|E|^2$. Graf intenzity pro $X = 63,71$ nm je na Obr. 5.8. Tmavě šedými pruhy jsou vyznačeny vrstvy GaAs, světlé pruhy jsou vrstvy AlGaAs. Červeně je vyznačena aktivní vrstva a černě simulovaná apertura. Je patrné maximum intenzity v rezonanční dutině a exponenciálně tlumený průběh směrem k čelům multivrstvy. Na Obr. 5.9 je vyznačen detail intenzity stojaté vlny v dutině a

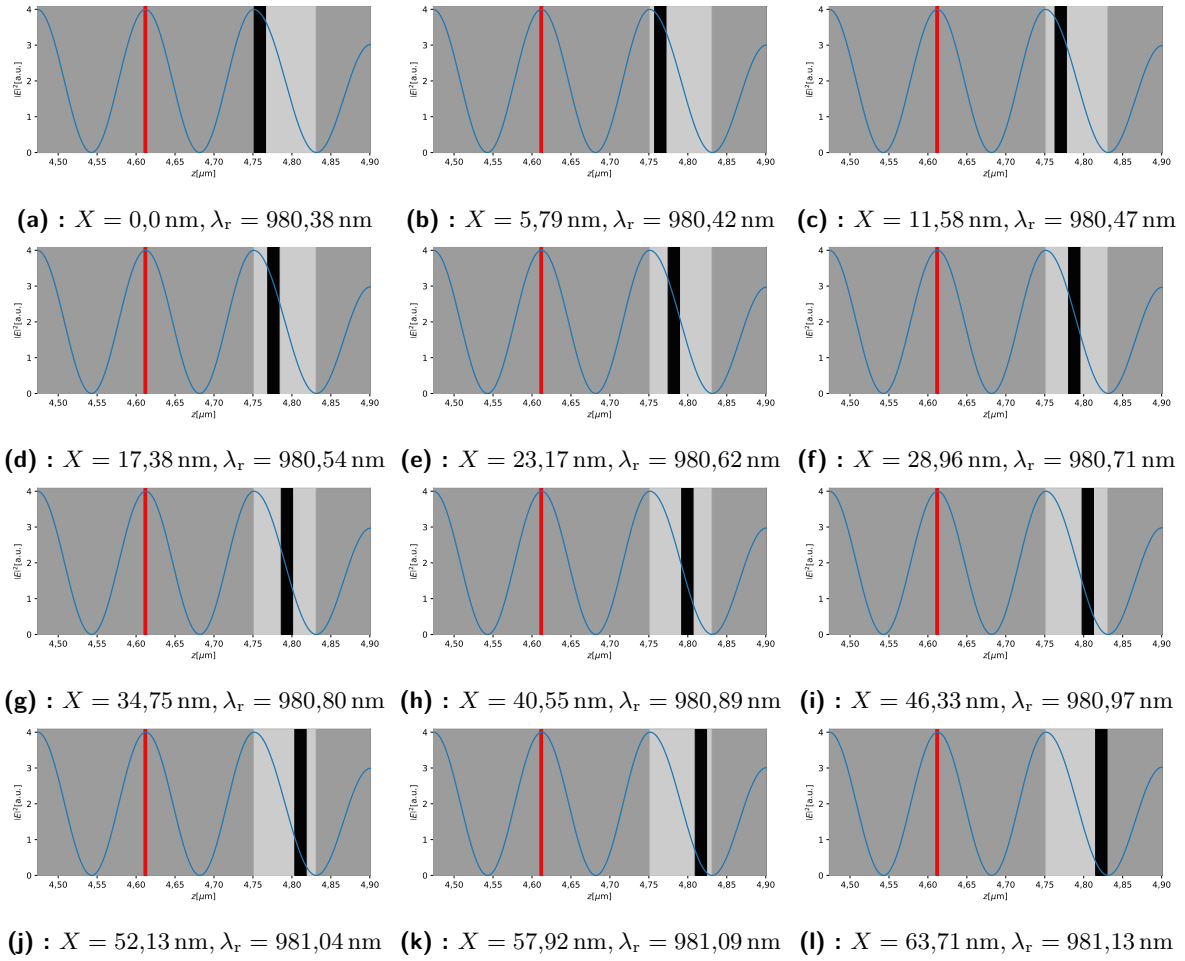


Obrázek 5.8: Rozložení intenzity pole při rezonanci v dutině vypočtené pomocí TMM. Poloha simulované apertury (tj. vrstvy AlAs) je $X = 63,71$ nm a rezonanční vlnová délka je $\lambda_r = 981,13$ nm. Tmavě šedé pruhy jsou vrstvy GaAs, světlé pruhy jsou vrstvy AlGaAs, červený pruh je aktivní vrstva a černý simulovaná apertura.



Obrázek 5.9: Detail rozložení intenzity pole v dutině a oxidové struktuře při rezonanci vypočtený pomocí TMM. Poloha simulované apertury je $X = 63,71$ nm a rezonanční vlnová délka je $\lambda_r = 981,13$ nm. Tmavě šedé pruhy jsou vrstvy GaAs, světlé pruhy jsou vrstvy AlGaAs, červený pruh je aktivní vrstva a černý simulovaná apertura.

v oxidové struktuře. Je patrné, že aktivní vrstva se skutečně nachází v maximu stojaté vlny a apertura v jejím minimu. Detail stojaté vlny pro všechny vyšetřené polohy apertury je na Obr. 5.10.



Obrázek 5.10: Detail intenzity stojaté vlny v dutině a oxidové struktuře v závislosti na poloze apertury vypočtený pomocí TMM.

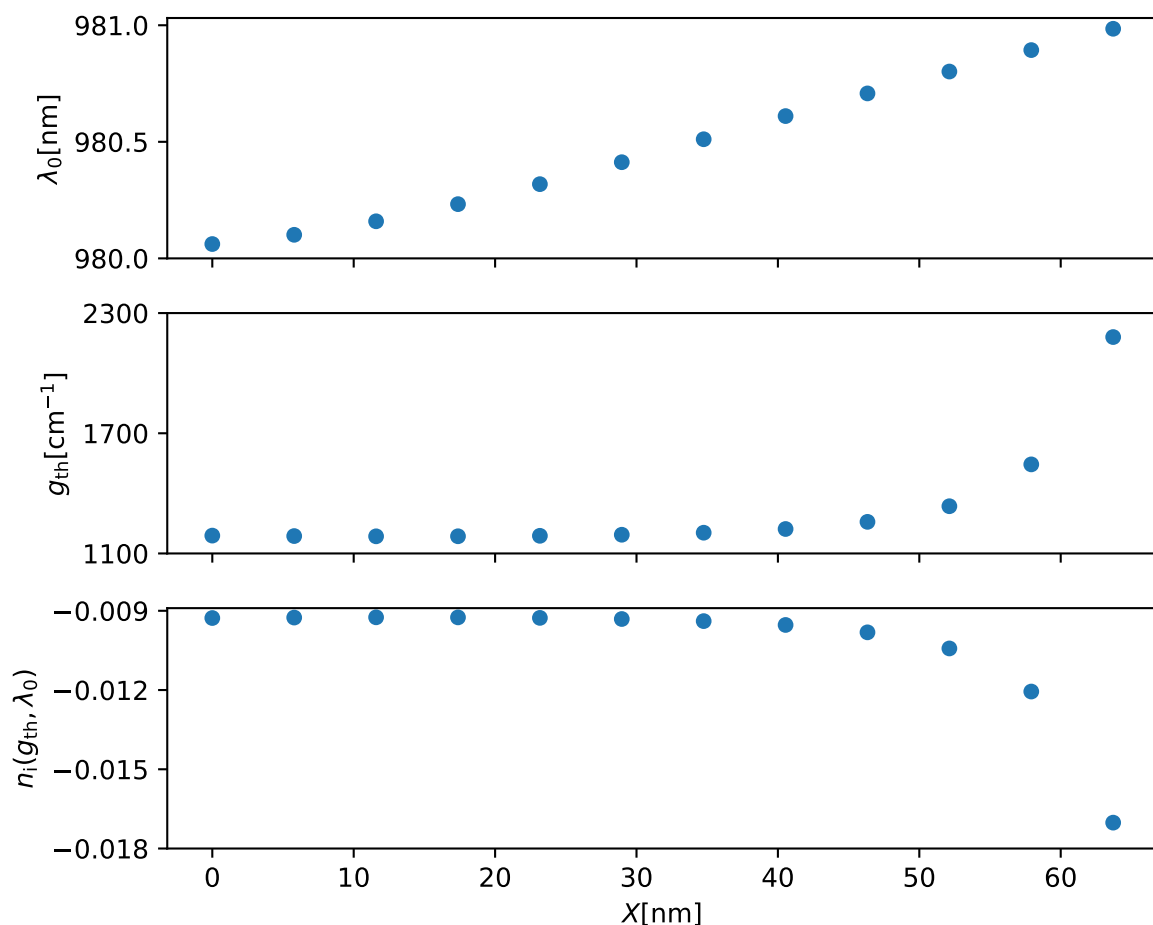
5.5 Třírozměrný model

Rezonanční vlastnosti struktury byly vypočteny také pomocí dvou třírozměrných modelů: metodou efektivní frekvence implementované v PLaSK a metodou FDTD.

5.5.1 Analýza základního módu pomocí EFM

Metodou efektivní frekvence implementovanou v nástroji PLaSK byly podle sekce 4.3 vypočteny vlastnosti základního módu. Struktura byla uvažována válcově symetrická, umístěná na nekonečném substrátu (ve všech rozměrech), a jinak obklopená vzduchem. Vnější poloměr je $10 \mu\text{m}$. Na rozdíl od předchozích jednorozměrných výpočtů byla uvažována oxidová apertura podle Tab. 5.1 o vnitřním průměru $d = 8 \mu\text{m}$. Ta byla umístěna v různých polohách X opět v poslední vrstvě AlGaAs horního zrcadla. Podobně byla zakomponována aktivní vrstva tvořená absorbujícím prstencem a zesilujícím diskem o stejném průměru d a koeficientu zesílení g . Prahové zesílení g_{th} pro laserovou činnost módu bylo hledáno pomocí hybridní Powellovy metody implementované funkcí `root` v knihovně `scipy.optimize`.

Nalezené vlnové délky a prahové koeficienty jsou na Obr. 5.11 nahoře resp. uprostřed. Je opět patrný skoro lineární nárůst vlnové délky s X . Sklon této závislosti je ale větší, než byl pozorován v jednorozměrných případech. Vlnová délka stoupá z $980,06 \text{ nm}$ na $980,98 \text{ nm}$ v případě EFM,

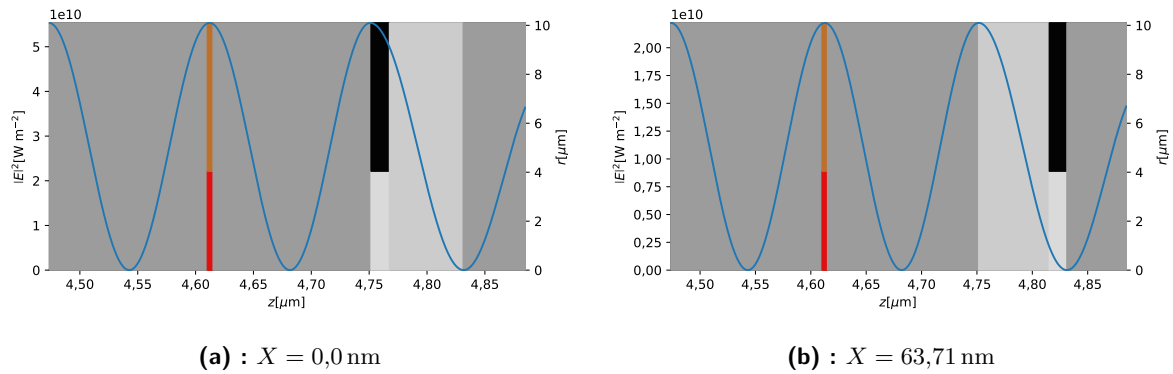


Obrázek 5.11: Nahoře: vakuová vlnová délka λ_0 základního laserového módu v závislosti na poloze oxidové apertury vypočtená pomocí EFM. Uprostřed: prahový koeficient zesílení základního módu pro odpovídající polohu oxidu. Dole: imaginární složka indexu lomu aktivní oblasti odpovídající prahovému koeficientu zesílení g_{th} vypočtená podle (5.1).

kdežto na Obr. 5.7 je mezi 980,38 nm a 981,13 nm podle TMM a mezi 981,64 nm a 982,35 nm podle FDTD v jednom rozměru. Pro úplnost je na Obr. 5.11 dole uvedena imaginární část indexu lomu n_i aktivní oblasti (zesilujícího disku uprostřed dutiny, viz Tab. 5.1) vypočtená podle rovnice (5.1). Je patrná přibližně nepřímá úměrnost mezi g_{th} a n_i , jelikož vlnová délka je skoro konstantní. Také pozorujeme, že n_i pro zesilující objem v absolutní hodnotě roste přibližně mezi hodnotou imaginární části absorbuujícího prstence v dutině, 0,01i, a skoro dvojnásobkem.

Je také patrný nárůst prahového koeficientu zesílení s rostoucím X při posunu apertury do uzlu stojaté vlny. Koeficient je zvláště vysoký pro poslední dvě polohy apertury nejbližší uzlu. To odpovídá výsledkům na Obr. 3 v [61]. Takovou vlastnost nepozorujeme ve výsledcích jednorozměrných modelů. Na Obr. 5.7 nepozorujeme žádný výrazný pokles Q faktoru pro simulovanou aperturu umístěnou do uzlu, což by odpovídalo vyšším ztrátám. To proto, že oxidové okno je nahrazeno homogenní vrstvou AlAs s indexem lomu 2,95 velmi podobným indexu AlGaAs 3,08. Zároveň žádné z vrstev nebyly v jednorozměrných výpočtech absorbuující.

Pomocí EFM byl také vypočten tvar stojaté vlny, který je na Obr. 5.12. Vlevo je stojatá vlna při oxidové apertuře umístěné do kmitny, vpravo při umístění do uzlu. Pozorujeme dobrou shodu s Obr. 5.9 a výrazný pokles maxima intenzity při posunu oxidu do uzlu.



Obrázek 5.12: Detail podélné stojaté vlny v dutině struktury vypočtený pomocí EFM (modře). Tmavě šedou barvou jsou zakresleny vrstvy GaAs a světlejší šedou jsou vrstvy AlGaAs. Červeně a hnědě je vyznačena zesilující a absorbující vrstva. Černý pruh je oxidová apertura se světle šedým AlAs otvorem uprostřed. Pole bylo počítáno v ose válcové symetrie v dutině a sousedící oxidové struktuře, obdobně Obr. 5.9. Vlevo je pole pro $X = 0,0 \text{ nm}$ tj. oxid umístěný do kmitny, vpravo pro $X = 63,71 \text{ nm}$ pro oxid v uzlu vlny.

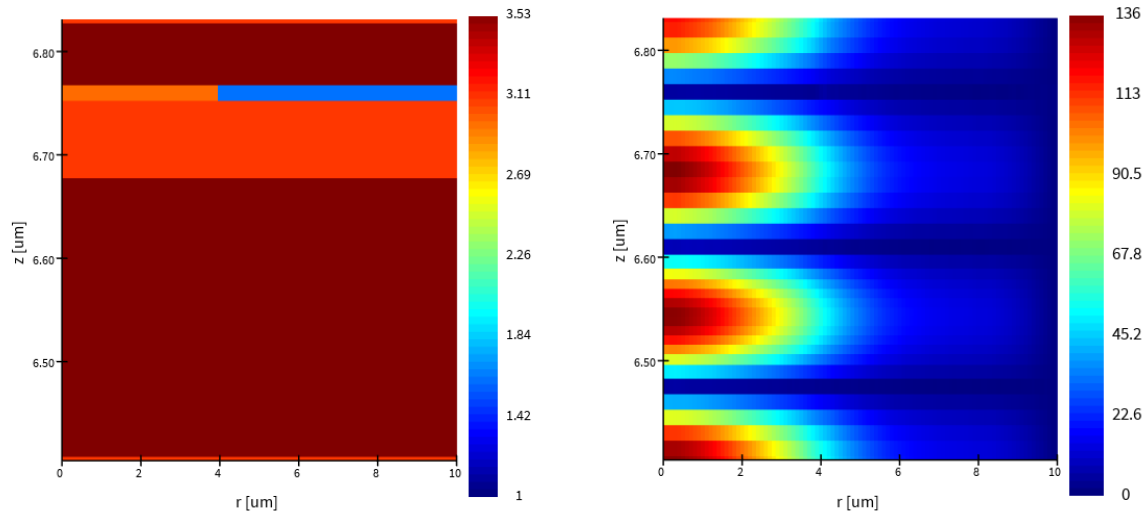
5.5.2 Analýza pomocí FDTD

Pomocí FDTD byla struktura simulována ve třech rozměrech beze zjednodušení ze sekce 5.3.2. Válcově symetrická struktura o zvoleném poloměru $10 \mu\text{m}$ byla umístěna na nekonečně vysokém válci GaAs, který sloužil jako substrát.¹ Z horní a bočních stran je struktura obklopena vzduchem a vrstvou PML (perfectly matched layer) ve vzdálenosti $1 \mu\text{m}$ ve směru x, y a $0,76 \mu\text{m}$ nad strukturou. Ve vzdálenosti $0,39 \mu\text{m}$ nad strukturou byl umístěn detektor emitovaného záření ve frekvenční doméně. Dále bylo dvojicí detektorů zaznamenáváno pole v rovině xz a yz opět ve frekvenční doméně. Stejným způsobem jako v jednorozměrném případě (viz sekci 4.1.2) byla počítána rezonanční vlnová délka a Q faktor dutiny. Dutina byla excitována zdrojem rovinné vlny v rozsahu vlnových délek $930\text{--}1030 \text{ nm}$.

Na Obr. 5.14 je zakreslena velikost intenzity elektrického pole v rovině xz pro nejvyšší polohu apertury $X = 63,71 \text{ nm}$. Pole je bráno ve frekvenční doméně na vlnové délce $\lambda = 984,986 \text{ nm}$, při které nastává maximum intenzity ve středu dutiny. Na Obr. 5.13 vpravo je detail obdobného grafu v rovině yz , který je podélně (tj. vertikálně) omezený jen na dutinu a oxidovou strukturu a příčně mezi osou symetrie a okrajem struktury. Na obou grafech je v příčném směru vidět jen jedno místo s vysokou intenzitou. Tím je ověřeno, že byl excitován základní optický mód dutiny. Na Obr. 5.13 vlevo je diagram indexu lomu v dutině a oxidové struktuře opět mezi osou symetrie a okrajem struktury. Světle modře je označena oxidová apertura. Porovnáním s detailem intenzity je potvrzeno, že je v tomto případě apertura v minimu intenzity.

Na Obr. 5.16 je uvedena rezonanční vlnová délka λ_r a Q faktor dutiny vypočtená v závislosti na poloze apertury. Prázdnými čtverci jsou zakresleny údaje vypočtené podle sekce 4.1.2, modrými body je vyznačena vlnová délka odpovídající maximu emisního spektra. I zde pozorujeme růst vlnové délky s posunem apertury k uzlu stojaté vlny. Podle očekávání se vlnové délky vypočtené oběma způsoby dobře shodují. Je pozoruhodný druhý bod zleva poblíž $X = 7 \text{ nm}$, který má oproti sousedním bodům vlnovou délku zkrácenou o přibližně $0,75 \text{ nm}$. Jelikož i zde obě metody dávají stejný výsledek, zřejmě nedošlo k chybě při rozkladu podle sekce 4.1.2. Velmi pravděpodobně jde o nějaký artefakt způsobený konečnou diskretizací výpočetní sítě, který by bylo možné odstranit jemnějším rozlišením za cenu značné výpočetní náročnosti. Dole na Obr. 5.16 je vyznačen Q faktor dutiny vypočtený podle sekce 4.1.2.² Ten je přibližně konstantní pro $X \leq 30 \text{ nm}$ a pak

¹Horní okraj tohoto substrátu nebyl umístěn v $z = 0 \mu\text{m}$. V následujících výsledcích je tedy souřadnice z přibližně o $2 \mu\text{m}$ posunutá oproti předchozím výsledkům.



(a) : Detail rozložení indexu lomu v radiálním směru. **(b)** : Detail intenzity elektrického pole v radiálním směru.

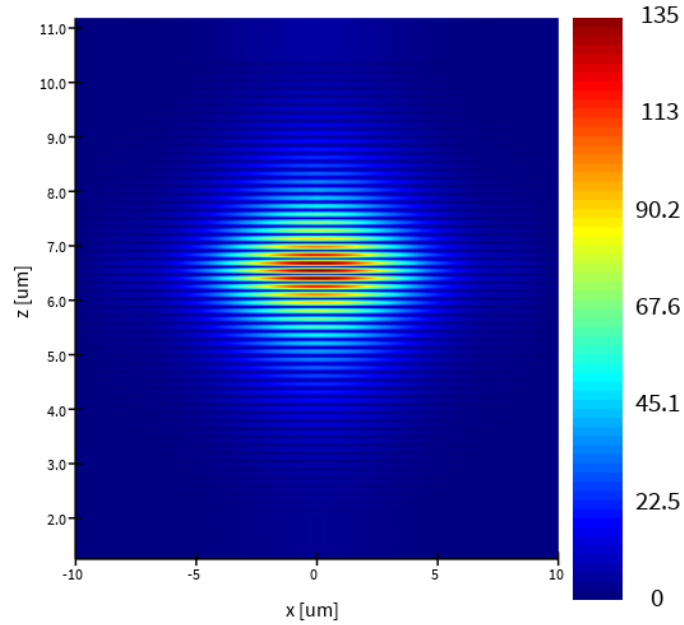
Obrázek 5.13: Vlevo: rozložení indexu lomu v dutině a oxidové struktuře v radiálním směru při výpočtu metodou FDTD ve třech rozměrech. Tmavě červeně jsou vyznačeny vrstvy GaAs, světlejší červenou barvou jsou vrstvy AlGaAs. Světle modrý pruh je AlOx apertura, na kterou navazuje oranžový pruh AlAs. Jde o případ s $X = 63,71$ nm, kde je AlOx/AlAs vrstva mezi AlGaAs a GaAs. Vpravo: detail intenzity elektrického pole v dutině a sousední oxidové struktuře v rovině yz pro $\lambda = 984,986$ nm ve frekvenční doméně. Na vodorovné ose je vzdálenost od osy válcové symetrie, podobně jako na obrázku vlevo.

dochází k výraznému poklesu pro vyšší X , když se apertura přibližuje k uzlu stojaté vlny.

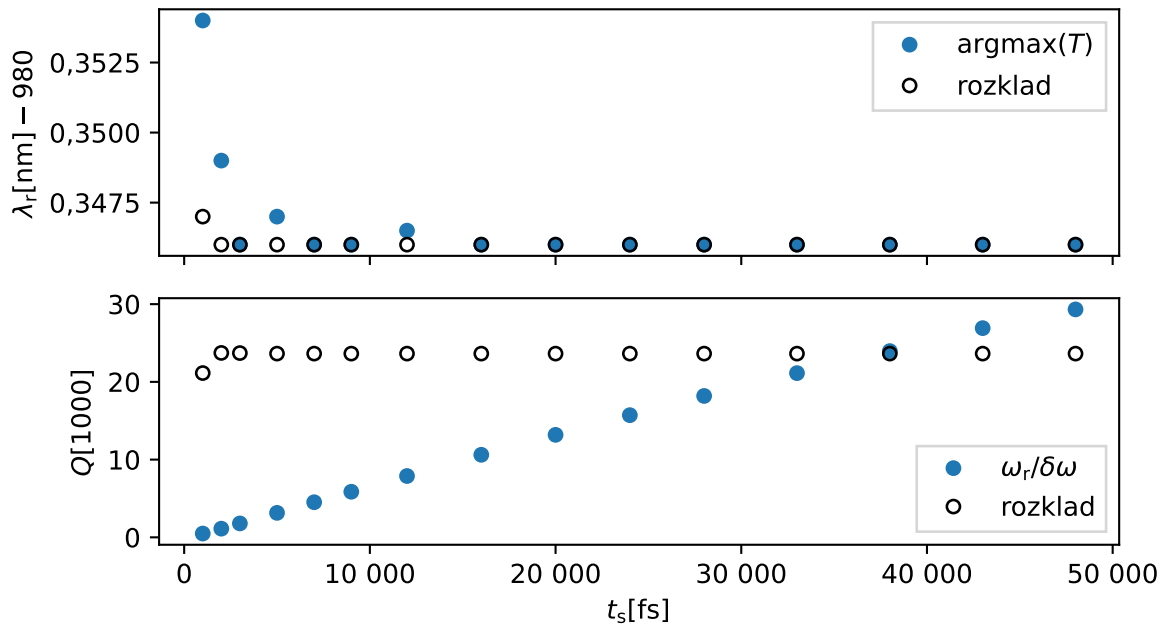
V porovnání s předchozím třírozměrným modelem založeným na EFM je na Obr. 5.16 pozorován podobný nárůst vlnové délky jako na Obr. 5.11, (s výjimkou druhého bodu zleva, který byl diskutován.) Celý graf rezonanční vlnové délky je ale posunutý o přibližně 4 nm výše. Něco podobného bylo pozorováno i v jednorozměrném případě na Obr. 5.7, kde FDTD rovněž dává delší vlnové délky. Naopak výsledek podle EFM ve třech rozměrech oproti TMM takto posunutý není. Je tedy zřejmé, že jde o vlastnost metody FDTD souvislou s diskretizací prostoru a času. Je zapotřebí zmínit, že rozlišení výpočetní sítě bylo použito 10–15 nm ve směru z a 100 nm ve směrech x, y . S takovou diskretizací trval výpočet jednoho bodu na Obr. 5.16 necelé tři hodiny na

²Výpočet Q faktoru podle emisního spektra není dobrý postup. Na rozdíl od polohy maxima závisí šířka píku na délce trvání simulace. To bylo ověřeno pomocí adaptovaného jednorozměrného výpočtu podle sekce 5.3.2 s různou délkou trvání simulace t_s v rozmezí 1000–48 000 fs. Emisní spektrum T bylo sestaveno způsobem popsaným v sekci 4.1.1 s pomocí detektoru umístěného nad horním zrcadlem. Zároveň byl prováděn rozklad pole v dutině na tlumené harmonické funkce podobně jako v sekci 4.1.2. Na procesoru Intel Core i3-7020U trval výpočet pro $t_s = 1000$ fs přibližně 10 s a pro $t_s = 48 000$ fs přibližně 8 min. Výsledky pro jednotlivé doby t_s vypočtené podle emisního spektra a rozkladu na tlumené harmonické funkce jsou na Obr. 5.15. Nahoře pozorujeme zanedbatelné změny vlnové délky, při které nastává maximum spektra. Oproti tomu Q faktor uvedený dole vypočtený podle šířky vrcholku spektra lineárně roste s dobou simulace.

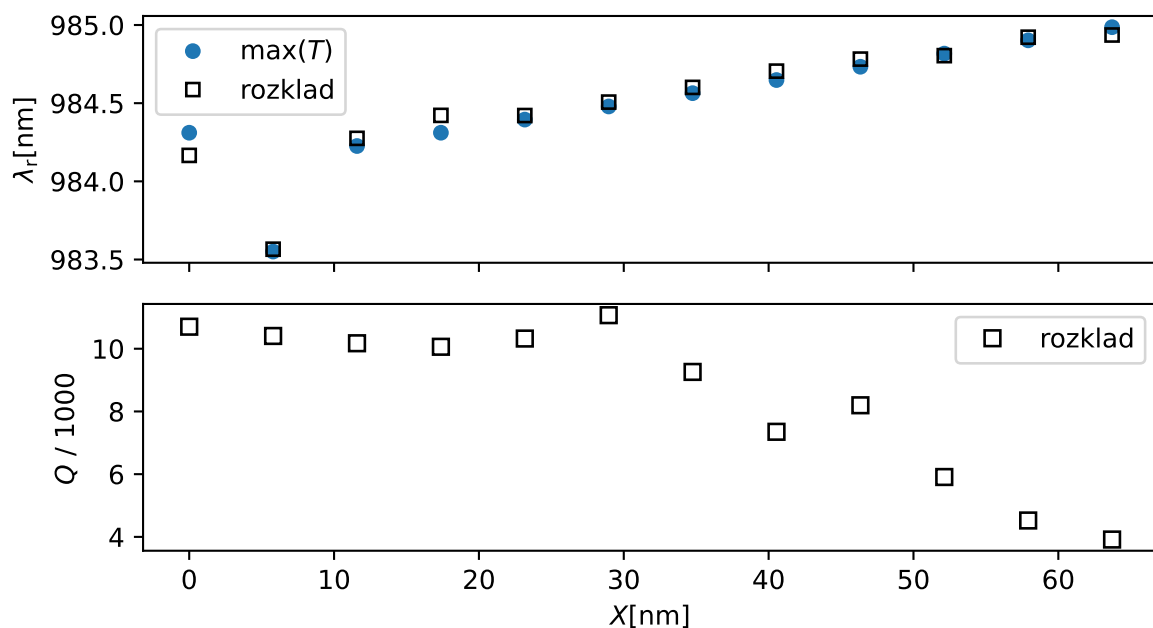
Zužování emisního spektra se simulačním časem t_s zřejmě souvisí s tím, že frekvence blízké rezonanci se nejdéle drží v dutině, kdežto vzdálenější frekvence se dříve vyžáří. Při použití rozkladu na tlumené harmonické vlny podle sekce 4.1.2 takový problém nevzniká, jelikož je vyšetřováno pole přímo v dutině. Pokud je signál dostatečně dlouhý a je vhodně odstraněn jeho začátek, ve kterém se zanedbatelně objevuje budící vlna, jsou výsledky dobré už pro relativně krátký čas $t_s \simeq 3000$ fs. Pro takový čas se také začínají shodovat rezonanční vlnové délky λ_r podle obou způsobů, jak je vidět z horního grafu na Obr. 5.15.



Obrázek 5.14: Intenzita elektrického pole ve struktuře v rovině xz pro $\lambda = 984,986$ nm ve frekvenční doméně. Jde o případ polohy apertury $X = 63,71$ nm. (Malé x je souřadnice, velké X je poloha apertury.)



Obrázek 5.15: Demonstrace nevhodnosti využití emisního spektra ke hledání Q faktoru optického rezonátoru pomocí FDTD. Nahoře je uvedena vlnová délka odpovídající maximu emisního spektra T pro jednorozměrný rezonátor a rezonanční vlnová délka vypočtená podle 4.1.2. Dole je nesprávně vypočtený Q faktor jako frekvence odpovídající maximu emise dělená šířkou (FWHM) píku emisního spektra a Q faktor vypočtený podle 4.1.2.



Obrázek 5.16: Rezonanční vlnová délka λ_r a Q faktor studené dutiny vypočtená pomocí FDTD ve třech rozměrech v závislosti na poloze oxidové apertury. Modrými body je vyznačena rezonanční vlnová délka nalezená jako argument maxima spektra emise T . Prázdnými čtverci jsou vyznačeny λ_r a Q faktor vypočtené rozkladem na exponenciálně tlumené harmonické vlny podle sekce 4.1.2.

procesoru Intel Core i7-12700K. S výrazně jemnější diskretizací by pravděpodobně byly nalezeny kratší vlnové délky a shoda s výsledky podle EFM a jednorozměrných výpočtů by byla přesnější. Vzhledem k velkému rozměru struktury by takový výpočet trval desítky hodin.

Je pozoruhodný náhlý pokles Q faktoru na Obr. 5.16 s parametrem X rostoucím nad přibližně 30 nm. Ten přibližně odpovídá nárůstu prahového koeficientu zesílení na Obr. 5.11. V [61] je v diskuzi podobných výsledků uvedeno, že v této struktuře má oxidová apertura kromě omezování proudu také efekt vlnovodu. Umístěním do minima stojaté vlny je vedení zeslabeno, vlna je více tlumena, a prahový koeficient zesílení stoupá. Snížení Q faktoru toto odráží jako zhoršení kvality rezonátoru. Jak bylo zmíněno v sekci 5.5.1, snížení Q faktoru neplyne z jednorozměrných výpočtů, (viz 5.7), protože v nich je „apertura“ modelována homogenní vrstvou AlAs.

Kapitola 6

Závěr

V této práci byly nejprve představeny základní vlastnosti VCSEL a spin-VCSEL laserů, jejich typická struktura a důležité fyzikální jevy, které v nich nastávají. Byl také uveden jejich technologický význam. Dále byly představeny některé metody optického modelování VCSEL struktur. Speciálně byla popsána semianalytická metoda přenosové matice, která je založena na formulaci, kde je struktura tvořena nekonečně širokými homogenními dielektrickými vrstvami. Kromě TMM byla představena i metoda efektivní frekvence a univerzální metoda FDTD. Nakonec byly uvedené metody (TMM podle vlastní implementace, EFM v softwaru PLaSK a FDTD v softwaru Ansys Lumerical) demonstrovány při výpočtu některých optických vlastností zvolené vzorové struktury.

K demonstraci byl zvolen VCSEL s návrhovou vlnovou délkou emitovaného světla $\lambda = 980$ nm převzatý z [61]. Skládá se z vrstev GaAs a AlGaAs a obsahuje kruhovou aperturu tvořenou tenkou vrstvou AlOx, která slouží k vedení optických vln a v reálném laseru také k omezování čerpacího proudu, viz sekci 2.2.3.

Nejprve byly vyšetřeny vlastnosti Braggovských zrcadel laseru pomocí TMM a FDTD v jedné dimenzi. Bylo ověřeno, že v okolí návrhové vlnové délky 980 nm se skutečně nachází zakázaný pás, tedy široký pás frekvencí, kde mají zrcadla vysokou reflektanci. Dále byly vyšetřovány rezonanční vlastnosti struktury v závislosti na poloze oxidového okna. Ve všech výsledcích byl pozorován nárůst rezonanční vlnové délky při posunu oxidové vrstvy směrem k uzlu rezonanční stojaté vlny v dutině (tj. při zvětšování parametru X ve smyslu kapitoly 5). Ve třírozměrných modelech, které obsahují nehomogenní vrstvy, bylo navíc pozorováno zhoršení rezonance. Tyto výsledky jsou ve shodě s [61].

Uvedené metody jsou založeny na různých principech a každá z nich je vhodná k různým účelům při modelování vrstevnatých optických struktur. I přes radikální zjednodušení je metoda přenosové matice použitelná k prvotním návrhům a úvahám o rezonanci, zvláště proto, že VCSEL multivrstvy jsou běžně široké v porovnání s tloušťkou vrstev (jednotky až desítky μm oproti desítkám nm). V použité formulaci samozřejmě nelze pomocí TMM popsat nehomogenní vrstvy, takže efekty spojené s prostorovým omezením struktur nebo například oxidovým oknem nejsou zahrnuty. Naproti tomu některé výpočty jsou značně zjednodušeny, například zmíněné zakázané pásy Braggovských zrcadel. Ve třírozměrných modelech rovněž figurují různá zjednodušení a omezení. Skalární metoda efektivní frekvence například předpokládá stejnou závislost všech složek elektromagnetického pole, což ve skutečné struktuře není nutně pravda. Navíc v použité formulaci pracuje s válcově symetrickou geometrií, která se vyskytuje v běžných strukturách. Nelze tak ovšem modelovat komplikovanější objekty, kde například není oxidová apertura kruhová, nebo které obsahují difrakční mřížky. Metoda FDTD dovoluje výpočty s teoreticky libovolným objektem, například bez význačných symetrií nebo jiným způsobem komplikovaným, avšak za cenu značné výpočetní náročnosti. Každá metoda tedy má svou roli při návrhu a modelování fotonických struktur.



Literatura

- [1] Michalzik, R. (editor). *VCSELs*. Heidelberg: Springer-Verlag, 2013, ISBN 978-3-642-24986-0.
- [2] Koyama, F. Advances and New Functions of VCSEL Photonics. *Optical Review*, ročník 21, č. 6, 2014: s. 893–904, doi:10.1007/S10043-014-0142-6.
- [3] Koyama, F. VCSEL Photonics: Current of the Art and Future Prospects. In *2021 27th International Semiconductor Laser Conference (ISLC)*, 2021, s. 1–2, doi:10.1109/ISLC51662.2021.9615842.
- [4] Iga, K. Surface-emitting laser-its birth and generation of new optoelectronics field. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, ročník 6, č. 6, 2000: s. 1201–1215, doi:10.1109/2944.902168.
- [5] Iga, K.; Koyama, F.; Kinoshita, S. Surface emitting semiconductor lasers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, ročník 24, č. 9, 1988: s. 1845–1855, doi:10.1109/3.7126.
- [6] Geels, R.; Corzine, S.; Scott, J.; Young, D.; Coldren, L. Low threshold planarized vertical-cavity surface-emitting lasers. *IEEE Photonics Technology Letters*, ročník 2, č. 4, 1990: s. 234–236, doi:10.1109/68.53246.
- [7] Jewell, J.; Scherer, A.; McCall, S.; Lee, Y.; Walker, S.; a kol. Low-threshold electrically pumped vertical-cavity surface-emitting microlasers. *Electronics Letters*, ročník 25, 1989: s. 1123–1124, doi:10.1364/OAM.1989.TUP6.
- [8] Huffaker, D.; Deppe, D.; Kumar, K.; Rogers, T. Native-oxide defined ring contact for low threshold vertical-cavity lasers. *Applied Physics Letters*, ročník 65, 1994: s. 97–99, doi:10.1063/1.113087.
- [9] Numai, T.; Kawakami, T.; Yoshikawa, T.; Sugimoto, M.; Sugimoto, Y.; a kol. Record Low Threshold Current in Microcavity Surface-Emitting Laser. *Japanese Journal of Applied Physics*, ročník 32, č. 10B, Říjen 1993: s. L1533–L1534, doi:10.1143/JJAP.32.L1533.
- [10] Iga, K. Vertical-Cavity Surface-Emitting Laser: Its Conception and Evolution. *Japanese Journal of Applied Physics*, ročník 47, č. 1, Leden 2008: s. 1–10, doi:10.1143/JJAP.47.1.
- [11] Soda, H.; Motegi, Y.; Iga, K. GaInAsP/InP surface emitting injection lasers with short cavity length. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, ročník 19, č. 6, 1983: s. 1035–1041, doi:10.1109/JQE.1983.1072000.
- [12] Saleh, B.; Teich, M. *Fundamentals of Photonics*. Hoboken NJ USA: Wiley, třetí vydání, 2019, ISBN 9781119506874.

- [26] Ostermann, J. M.; Debernardi, P.; Michalzik, R. Optimization of polarization-stable single- and multi-mode surface grating VCSELs towards high fabrication tolerance and superior performance. In *Semiconductor Lasers and Laser Dynamics II*, ročník 6184, editace D. Lenstra; M. Pessa; I. H. White, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2006, str. 618410, doi:10.1117/12.661632.
- [27] Gustavsson, J.; Vukusic, J.; Bengtsson, J.; Larsson, A. A comprehensive model for the modal dynamics of vertical-cavity surface-emitting lasers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, ročník 38, č. 2, 2002: s. 203–212, doi:10.1109/3.980274.
- [28] Wilson, G.; Kuchta, D.; Walker, J.; Smith, J. Spatial hole burning and self-focusing in vertical-cavity surface-emitting laser diodes. *Applied Physics Letters*, ročník 64, Únor 1994: s. 542 – 544, doi:10.1063/1.111097.
- [29] Xun, M.; Pan, G.; Zhao, Z.; Sun, Y.; Yang, C.; a kol. Analysis of Thermal Properties of 940-nm Vertical Cavity Surface Emitting Laser Arrays. *IEEE Transactions on Electron Devices*, ročník 68, č. 1, 2021: s. 158–163, doi:10.1109/TED.2020.3039934.
- [30] Abussa, M. Dynamical and Thermal Properties of 850 nm Vertical Cavity Surface Emitting Laser (VCSEL). *Journal of the Arab American University*, ročník 3, č. 2, 2017. <https://www.aaup.edu/research/arab-american-university-journal-research/submit-article/journal-arab-american-123>
- [31] Farzaneh, M.; Amatya, R.; Luerben, D.; Greenberg, K. J.; Rockwell, W. E.; a kol. Temperature Profiling of VCSELs by Thermorefectance Microscopy. *IEEE Photonics Technology Letters*, ročník 19, č. 8, 2007: s. 601–603, doi:10.1109/LPT.2007.894348.
- [32] Cho, Y.; Yamaguchi, A.; Uehara, R.; Yasuhara, S.; Hoshina, T.; a kol. Temperature dependence on bandgap of semiconductor photocatalysts. *The Journal of Chemical Physics*, ročník 152, č. 23, Červen 2020: str. 231101, doi:10.1063/5.0012330.
- [33] O'Donnell, K.; Chen, X. Temperature Dependence of Semiconductor Band Gaps. *Applied Physics Letters*, ročník 58, Července 1991: s. 2924 – 2926, doi:10.1063/1.104723.
- [34] Andrekson, P.; Kazarinov, R.; Olsson, N.; Tanbun-Ek, T.; Logan, R. Effect of thermionic electron emission from the active layer on the internal quantum efficiency of InGaAsP lasers operating at 1.3 μm . *IEEE Journal of Quantum Electronics*, ročník 30, č. 2, 1994: s. 219–221, doi:10.1109/3.283762.
- [35] Gfroerer, T. H.; Priestley, L. P.; Fairley, M. F.; Wanlass, M. W. Temperature dependence of nonradiative recombination in low-band gap $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{InAsyP}_{1-y}$ double heterostructures grown on InP substrates. *Journal of Applied Physics*, ročník 94, č. 3, Srpen 2003: s. 1738–1743, doi:10.1063/1.1586468.
- [36] Grantová agentura České republiky. Oznámení o výsledcích veřejné soutěže na podporu grantových projektů Standardní projekty – 2025. Online. (cit. 18. 7. 2025). https://gacr.cz/wp-content/uploads/2024/11/Oznamení_o_vysledcich_STD_2025.pdf
- [37] Gerhardt, N. C.; Hofmann, M. R. Spin-Controlled Vertical-Cavity Surface-Emitting Lasers. *Advances in Optical Technologies*, ročník 2012, 2012, doi:10.1155/2012/268949.
- [38] Fördös, T. *Coherent light sources with spin-polarized current*. Dizertační práce, Université Paris-Saclay; VŠB — Technická univerzita Ostrava, 2018. <https://pastel.hal.science/te1-01905188v1>

- [54] Slanina, P. TMM. git repozitář. Gitlab FJFI. Publikováno 13. 7. 2025. Licence MIT. <https://gitlab.fjfi.cvut.cz/slanipav/tmm>
- [55] Gregersen, N.; Reitzenstein, S.; Kistner, C.; Strauss, M.; Schneider, C.; a kol. Numerical and Experimental Study of the Q Factor of High-Q Micropillar Cavities. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, ročník 46, Říjen 2010: s. 1470–1483, doi:JQE.2010.2052095.
- [56] PLaSK. Photonic Laser Simulation Kit. Online. (cit. 16. 7. 2025). <https://plask.app/>
- [57] Dems, M.; Beling, P.; Gębski, M.; Piskorski, L.; Walczak, J.; a kol. VCSEL modeling with self-consistent models: From simple approximations to comprehensive numerical analysis. In *Vertical-Cavity Surface-Emitting Lasers XIX*, ročník 9381, editace C. Lei; K. D. Choquette, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2015, str. 93810K, doi:10.1117/12.2078321.
- [58] Ansys Optics. VCSEL Solver Introduction. Online. (cit. 18. 7. 2025). <https://optics.ansys.com/hc/en-us/articles/38067782408083-VCSEL-Solver-Introduction>
- [59] PLaSK. Optical Analysis of a Step-Profile VCSEL. Online. (cit. 7. 7. 2025). <https://docs.plask.app/tutorial2>
- [60] Wenzel, H.; Wünsche, H.-J. The Effective Frequency Method in the Analysis of Vertical-Cavity Surface-Emitting Lasers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, ročník 33, č. 7, 1997, doi:10.1109/3.594878.
- [61] Bienstman, P.; Baets, R.; Vukusic, J.; Larsson, A.; Noble, M. J.; a kol. Comparison of Optical VCSEL Models on the Simulation of Oxide-Confined Devices. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, ročník 37, č. 12, 2001, doi:10.1109/3.970909.

Příloha A

Některá matematická odvození

A.1 Odvození hlavní diferenciální rovnice

Při odvození hlavní diferenciální rovnice (4.11) vycházíme z Maxwellových rovnic

$$\text{rot } \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}$$

a předpokládaného tvaru polí

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}(z) \exp(ik_x x + ik_y y - i\omega t).$$

Provedeme normalizaci magnetického pole

$$\vec{\mathcal{H}} = i\eta_0 \vec{\mathcal{H}} = i\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \vec{\mathcal{H}}$$

a Maxwellovy rovnice získají tvar

$$\text{rot } \vec{\mathcal{E}} = -\mu_0 \mu \frac{1}{i\eta_0} \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} = i\frac{1}{c} \mu \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t}, \quad (\text{A.1})$$

$$\text{rot } \vec{\mathcal{H}} = i\eta_0 \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = i\frac{1}{c} \varepsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}. \quad (\text{A.2})$$

Provedením derivací získáme

$$\begin{pmatrix} ik_y \mathcal{E}_z - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - ik_x \mathcal{E}_z \\ ik_x \mathcal{E}_y - ik_y \mathcal{E}_x \end{pmatrix} = \frac{\omega}{c} \mu \vec{\mathcal{H}} = k_0 \mu \vec{\mathcal{H}}, \quad (\text{A.3})$$

kde ze třetí složky lze vyjádřit $\tilde{\mathcal{H}}_z$

$$ik_x \mathcal{E}_y - ik_y \mathcal{E}_x = k_0 \left[\mu_{zx} \tilde{\mathcal{H}}_x + \mu_{zy} \tilde{\mathcal{H}}_y + \mu_{zz} \tilde{\mathcal{H}}_z \right],$$
$$\tilde{\mathcal{H}}_z = \frac{1}{\mu_{zz}} \left(i\tilde{k}_x \mathcal{E}_y - i\tilde{k}_y \mathcal{E}_x - \mu_{zx} \tilde{\mathcal{H}}_x - \mu_{zy} \tilde{\mathcal{H}}_y \right).$$

Vzhledem k symetrii rovnic (A.1) a (A.2) na záměnu symbolů $\mathcal{E} \longleftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}, \varepsilon \longleftrightarrow \mu$ platí

$$\mathcal{E}_z = \frac{1}{\varepsilon_{zz}} \left(i\tilde{k}_x \tilde{\mathcal{H}}_y - i\tilde{k}_y \tilde{\mathcal{H}}_x - \varepsilon_{zx} \mathcal{E}_x - \varepsilon_{zy} \mathcal{E}_y \right).$$

Z Maxwellovy rovnice (A.3) odvodíme diferenciální rovnici pro tečné složky elektrického pole. V první složce (A.3) provedeme transformaci souřadnice $z' = k_0 z$, $\frac{\partial}{\partial z} = k_0 \frac{\partial}{\partial z'}$ a dosadíme za $\mathcal{E}_z, \tilde{\mathcal{H}}_z$

$$\begin{aligned}
ik_y \mathcal{E}_z - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} &= k_0 \sum_{j=x,y,z} \mu_{xj} \tilde{\mathcal{H}}_j, \\
i\tilde{k}_y \mathcal{E}_z - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z'} &= \sum_{j=x,y,z} \mu_{xj} \tilde{\mathcal{H}}_j, \\
\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z'} &= i\tilde{k}_y \mathcal{E}_z - \sum_{j=x,y,z} \mu_{xj} \tilde{\mathcal{H}}_j \\
&= i \frac{\tilde{k}_y}{\varepsilon_{zz}} \left(i\tilde{k}_x \tilde{\mathcal{H}}_y - i\tilde{k}_y \tilde{\mathcal{H}}_x - \varepsilon_{zx} \mathcal{E}_x - \varepsilon_{zy} \mathcal{E}_y \right) \\
&\quad - \mu_{xx} \tilde{\mathcal{H}}_x - \mu_{xy} \tilde{\mathcal{H}}_y - \frac{\mu_{xz}}{\mu_{zz}} \left(i\tilde{k}_x \mathcal{E}_y - i\tilde{k}_y \mathcal{E}_x - \mu_{zx} \tilde{\mathcal{H}}_x - \mu_{zy} \tilde{\mathcal{H}}_y \right) \\
&= \mathcal{E}_x \left(-i \frac{\tilde{k}_y \varepsilon_{zx}}{\varepsilon_{zz}} + i \frac{\tilde{k}_y \mu_{xz}}{\mu_{zz}} \right) + \mathcal{E}_y \left(-i \frac{\tilde{k}_y \varepsilon_{zy}}{\varepsilon_{zz}} - i \frac{\tilde{k}_x \mu_{xz}}{\mu_{zz}} \right) \\
&\quad + \tilde{\mathcal{H}}_x \left(\frac{\tilde{k}_y^2}{\varepsilon_{zz}} - \mu_{xx} + \frac{\mu_{xz} \mu_{zx}}{\mu_{zz}} \right) + \tilde{\mathcal{H}}_y \left(-\frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\varepsilon_{zz}} - \mu_{xy} + \frac{\mu_{xz} \mu_{zy}}{\mu_{zz}} \right).
\end{aligned}$$

Podobně podle druhé složky (A.3)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - i\tilde{k}_x \mathcal{E}_z &= k_0 \sum_{j=x,y,z} \mu_{yj} \tilde{\mathcal{H}}_j, \\
\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z'} &= i\tilde{k}_x \mathcal{E}_z + \sum_{j=x,y,z} \mu_{yj} \tilde{\mathcal{H}}_j \\
&= i \frac{\tilde{k}_x}{\varepsilon_{zz}} \left(i\tilde{k}_x \tilde{\mathcal{H}}_y - i\tilde{k}_y \tilde{\mathcal{H}}_x - \varepsilon_{zx} \mathcal{E}_x - \varepsilon_{zy} \mathcal{E}_y \right) \\
&\quad + \mu_{yx} \tilde{\mathcal{H}}_x + \mu_{yy} \tilde{\mathcal{H}}_y + \frac{\mu_{yz}}{\mu_{zz}} \left(i\tilde{k}_x \mathcal{E}_y - i\tilde{k}_y \mathcal{E}_x - \mu_{zx} \tilde{\mathcal{H}}_x - \mu_{zy} \tilde{\mathcal{H}}_y \right) \\
&= \mathcal{E}_x \left(-i \frac{\tilde{k}_x \varepsilon_{zx}}{\varepsilon_{zz}} - i \frac{\tilde{k}_y \mu_{yz}}{\mu_{zz}} \right) + \mathcal{E}_y \left(-i \frac{\tilde{k}_x \varepsilon_{zy}}{\varepsilon_{zz}} + i \frac{\tilde{k}_x \mu_{yz}}{\mu_{zz}} \right) \\
&\quad + \tilde{\mathcal{H}}_x \left(\frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\varepsilon_{zz}} + \mu_{yx} - \frac{\mu_{yz} \mu_{zx}}{\mu_{zz}} \right) + \tilde{\mathcal{H}}_y \left(-\frac{\tilde{k}_x^2}{\varepsilon_{zz}} + \mu_{yy} - \frac{\mu_{yz} \mu_{zy}}{\mu_{zz}} \right).
\end{aligned}$$

Derivace tečných složek elektrického pole je rovna

$$\frac{\partial}{\partial z'} \mathbf{E} = \mathbb{M}_{11} \mathbf{E} + \mathbb{M}_{12} \mathbf{H}, \quad (\text{A.4})$$

kde platí definice (4.10) a matice $\mathbb{M}_{11}, \mathbb{M}_{12}$ jsou rovny

$$\mathbb{M}_{11} = \begin{pmatrix} -i \frac{\tilde{k}_x \varepsilon_{zx}}{\varepsilon_{zz}} - i \frac{\tilde{k}_y \mu_{yz}}{\mu_{zz}} & -i \frac{\tilde{k}_x \varepsilon_{zy}}{\varepsilon_{zz}} + i \frac{\tilde{k}_x \mu_{yz}}{\mu_{zz}} \\ -i \frac{\tilde{k}_y \varepsilon_{zx}}{\varepsilon_{zz}} + i \frac{\tilde{k}_y \mu_{xz}}{\mu_{zz}} & -i \frac{\tilde{k}_y \varepsilon_{zy}}{\varepsilon_{zz}} - i \frac{\tilde{k}_x \mu_{xz}}{\mu_{zz}} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbb{M}_{12} = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\varepsilon_{zz}} + \mu_{yx} - \frac{\mu_{yz} \mu_{zx}}{\mu_{zz}} & -\frac{\tilde{k}_x^2}{\varepsilon_{zz}} + \mu_{yy} - \frac{\mu_{yz} \mu_{zy}}{\mu_{zz}} \\ \frac{\tilde{k}_y^2}{\varepsilon_{zz}} - \mu_{xx} + \frac{\mu_{xz} \mu_{zx}}{\mu_{zz}} & -\frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\varepsilon_{zz}} - \mu_{xy} + \frac{\mu_{xz} \mu_{zy}}{\mu_{zz}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Přeuspořádáním členů lze ověřit, že se rovnají maticím (4.12) a (4.13).

Díky symetrii rovnic (A.1) a (A.2) lze snadno zkonstruovat rovnici pro derivaci \mathbf{H} . Tato rovnice plyne z (A.2) stejným způsobem, jako (A.4) plyne z (A.1). Pomocí záměny $\mathbf{E} \longleftrightarrow \mathbf{H}$ v (A.4) a záměny $\varepsilon \longleftrightarrow \mu$ v maticích (A.5), (A.6) získáme rovnici

$$\frac{\partial}{\partial z'} \mathbf{H} = \mathbb{M}_{22} \mathbf{H} + \mathbb{M}_{21} \mathbf{E}, \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbb{M}_{22} = \begin{pmatrix} -i \frac{\tilde{k}_x \mu_{zx}}{\mu_{zz}} - i \frac{\tilde{k}_y \varepsilon_{yz}}{\varepsilon_{zz}} & -i \frac{\tilde{k}_x \mu_{zy}}{\mu_{zz}} + i \frac{\tilde{k}_x \varepsilon_{yz}}{\varepsilon_{zz}} \\ -i \frac{\tilde{k}_y \mu_{zx}}{\mu_{zz}} + i \frac{\tilde{k}_y \varepsilon_{xz}}{\varepsilon_{zz}} & -i \frac{\tilde{k}_y \mu_{zy}}{\mu_{zz}} - i \frac{\tilde{k}_x \varepsilon_{xz}}{\varepsilon_{zz}} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbb{M}_{21} = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\mu_{zz}} + \varepsilon_{yx} - \frac{\varepsilon_{yz} \varepsilon_{zx}}{\varepsilon_{zz}} & -\frac{\tilde{k}_x^2}{\mu_{zz}} + \varepsilon_{yy} - \frac{\varepsilon_{yz} \varepsilon_{zy}}{\varepsilon_{zz}} \\ \frac{\tilde{k}_y^2}{\mu_{zz}} - \varepsilon_{xx} + \frac{\varepsilon_{xz} \varepsilon_{zx}}{\varepsilon_{zz}} & -\frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_y}{\mu_{zz}} - \varepsilon_{xy} + \frac{\varepsilon_{xz} \varepsilon_{zy}}{\varepsilon_{zz}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Přeuspořádáním členů opět lze ověřit, že matice (A.9) a (A.8) jsou rovny (4.14) a (4.15).

A.2 Odvození bloků S-matice jedné vrstvy

S-matice jedné vrstvy je odvozena z podmínky spojitosti (4.19). Ta má ve smyslu definic (4.20) tvar

$$\overline{\mathbb{A}} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_2^+ \\ \mathbf{c}_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{X} & \Theta \\ \Theta & \mathbb{Y}^{-1} \end{pmatrix} \overline{\mathbb{B}} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^+ \\ \mathbf{c}_1^- \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Pro hledanou S-matici platí

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1^- &= \mathbb{S}_{11} \mathbf{c}_1^+ + \mathbb{S}_{12} \mathbf{c}_2^-, \\ \mathbf{c}_2^+ &= \mathbb{S}_{21} \mathbf{c}_1^+ + \mathbb{S}_{22} \mathbf{c}_2^-. \end{aligned}$$

Dosazením za $\mathbf{c}_1^-, \mathbf{c}_2^+$ do (A.10) získáváme dvojici rovnic

$$\mathbb{A}_{11} \mathbb{S}_{21} \mathbf{c}_1^+ + \mathbb{A}_{11} \mathbb{S}_{22} \mathbf{c}_2^- + \mathbb{A}_{12} \mathbf{c}_2^- = \mathbb{X} [\mathbb{B}_{11} \mathbf{c}_1^+ + \mathbb{B}_{12} \mathbb{S}_{11} \mathbf{c}_1^+ + \mathbb{B}_{12} \mathbb{S}_{12} \mathbf{c}_2^-], \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbb{A}_{21} \mathbb{S}_{21} \mathbf{c}_1^+ + \mathbb{A}_{21} \mathbb{S}_{22} \mathbf{c}_2^- + \mathbb{A}_{22} \mathbf{c}_2^- = \mathbb{Y}^{-1} [\mathbb{B}_{21} \mathbf{c}_1^+ + \mathbb{B}_{22} \mathbb{S}_{11} \mathbf{c}_1^+ + \mathbb{B}_{22} \mathbb{S}_{12} \mathbf{c}_2^-]. \quad (\text{A.12})$$

Jelikož koeficienty dopadajících vln $\mathbf{c}_1^+, \mathbf{c}_2^-$ jsou nezávislé, musí se v rovnicích (A.11) a (A.12) rovnat matice, které je na obou stranách násobí. Proto podle (A.11) platí

$$\mathbb{A}_{11} \mathbb{S}_{21} = \mathbb{X} [\mathbb{B}_{11} + \mathbb{B}_{12} \mathbb{S}_{11}], \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbb{A}_{11} \mathbb{S}_{22} + \mathbb{A}_{12} = \mathbb{X} \mathbb{B}_{12} \mathbb{S}_{12} \quad (\text{A.14})$$

a podle (A.12) platí

$$\mathbb{A}_{21} \mathbb{S}_{21} = \mathbb{Y}^{-1} [\mathbb{B}_{21} + \mathbb{B}_{22} \mathbb{S}_{11}], \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbb{A}_{21} \mathbb{S}_{22} + \mathbb{A}_{22} = \mathbb{Y}^{-1} \mathbb{B}_{22} \mathbb{S}_{12}. \quad (\text{A.16})$$

Tyto podmínky je vhodné upravit na tvar s lepší symetrií. Rovnice (A.13), (A.15), (A.16) a (A.14) triviálně přejdou na

$$\mathbb{X}^{-1} \mathbb{A}_{11} \mathbb{S}_{21} = \mathbb{B}_{12} \mathbb{S}_{11} + \mathbb{B}_{11}, \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbb{Y} \mathbb{A}_{21} \mathbb{S}_{21} = \mathbb{B}_{22} \mathbb{S}_{11} + \mathbb{B}_{21}, \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbb{Y}^{-1} \mathbb{B}_{22} \mathbb{S}_{12} = \mathbb{A}_{21} \mathbb{S}_{22} + \mathbb{A}_{22}, \quad (\text{A.19})$$

$$\mathbb{X} \mathbb{B}_{12} \mathbb{S}_{12} = \mathbb{A}_{11} \mathbb{S}_{22} + \mathbb{A}_{12}, \quad (\text{A.20})$$

kde je patrné, že rovnice (A.17), (A.18) přechází na rovnice (A.19), (A.20) pomocí symbolické záměny $\mathbb{A} \longleftrightarrow \mathbb{B}$, $\mathbb{X} \longleftrightarrow \mathbb{Y}$ a záměny indexů bloků matic $1 \longleftrightarrow 2$.

Z rovnic (A.17) a (A.18) lze odvodit matice $\mathbb{S}_{11}, \mathbb{S}_{21}$. Vyjádřeme z (A.17)

$$\mathbb{S}_{21} = \mathbb{A}_{11}^{-1} \mathbb{X} [\mathbb{B}_{12} \mathbb{S}_{11} + \mathbb{B}_{11}]$$

a dosadíme do (A.18)

$$\begin{aligned} \mathbb{Y} \mathbb{A}_{21} \mathbb{A}_{11}^{-1} \mathbb{X} [\mathbb{B}_{12} \mathbb{S}_{11} + \mathbb{B}_{11}] &= \mathbb{B}_{22} \mathbb{S}_{11} + \mathbb{B}_{21}, \\ [\mathbb{Y} \mathbb{A}_{21} \mathbb{A}_{11}^{-1} \mathbb{X} \mathbb{B}_{12} - \mathbb{B}_{22}] \mathbb{S}_{11} &= \mathbb{B}_{21} - \mathbb{Y} \mathbb{A}_{21} \mathbb{A}_{11}^{-1} \mathbb{X} \mathbb{B}_{11}, \\ [\mathbb{B}_{22} - \mathbb{Y} \mathbb{A}_{21} \mathbb{A}_{11}^{-1} \mathbb{X} \mathbb{B}_{12}] \mathbb{S}_{11} &= \mathbb{Y} \mathbb{A}_{21} \mathbb{A}_{11}^{-1} \mathbb{X} \mathbb{B}_{11} - \mathbb{B}_{21}, \\ \mathbb{S}_{11} &= [\mathbb{B}_{22} - \mathbb{Y} \mathbb{A}_{21} \mathbb{A}_{11}^{-1} \mathbb{X} \mathbb{B}_{12}]^{-1} [\mathbb{Y} \mathbb{A}_{21} \mathbb{A}_{11}^{-1} \mathbb{X} \mathbb{B}_{11} - \mathbb{B}_{21}]. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Podobně lze z (A.17) vyjádřit

$$\mathbb{S}_{11} = \mathbb{B}_{12}^{-1} [\mathbb{X}^{-1} \mathbb{A}_{11} \mathbb{S}_{21} - \mathbb{B}_{11}]$$

a dosadit do (A.18)

$$\begin{aligned} \mathbb{Y} \mathbb{A}_{21} \mathbb{S}_{21} &= \mathbb{B}_{22} \mathbb{B}_{12}^{-1} [\mathbb{X}^{-1} \mathbb{A}_{11} \mathbb{S}_{21} - \mathbb{B}_{11}] + \mathbb{B}_{21}, \\ \mathbb{B}_{12} \mathbb{B}_{22}^{-1} \mathbb{Y} \mathbb{A}_{21} \mathbb{S}_{21} &= \mathbb{X}^{-1} \mathbb{A}_{11} \mathbb{S}_{21} - \mathbb{B}_{11} + \mathbb{B}_{12} \mathbb{B}_{22}^{-1} \mathbb{B}_{21}, \\ [\mathbb{B}_{12} \mathbb{B}_{22}^{-1} \mathbb{Y} \mathbb{A}_{21} - \mathbb{X}^{-1} \mathbb{A}_{11}] \mathbb{S}_{21} &= \mathbb{B}_{12} \mathbb{B}_{22}^{-1} \mathbb{B}_{21} - \mathbb{B}_{11}, \\ [\mathbb{A}_{11} - \mathbb{X} \mathbb{B}_{12} \mathbb{B}_{22}^{-1} \mathbb{Y} \mathbb{A}_{21}] \mathbb{S}_{21} &= \mathbb{X} [\mathbb{B}_{11} - \mathbb{B}_{12} \mathbb{B}_{22}^{-1} \mathbb{B}_{21}], \\ \mathbb{S}_{21} &= [\mathbb{A}_{11} - \mathbb{X} \mathbb{B}_{12} \mathbb{B}_{22}^{-1} \mathbb{Y} \mathbb{A}_{21}]^{-1} \mathbb{X} [\mathbb{B}_{11} - \mathbb{B}_{12} \mathbb{B}_{22}^{-1} \mathbb{B}_{21}]. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Vzhledem ke zmíněné symetrii rovnic (A.17), (A.18) a (A.19), (A.20) lze symbolickou záměnou určit zbývající bloky S-matice

$$\mathbb{S}_{12} = [\mathbb{B}_{22} - \mathbb{Y} \mathbb{A}_{21} \mathbb{A}_{11}^{-1} \mathbb{X} \mathbb{B}_{12}]^{-1} \mathbb{Y} [\mathbb{A}_{22} - \mathbb{A}_{21} \mathbb{A}_{11}^{-1} \mathbb{A}_{12}], \quad (\text{A.23})$$

$$\mathbb{S}_{22} = [\mathbb{A}_{11} - \mathbb{X} \mathbb{B}_{12} \mathbb{B}_{22}^{-1} \mathbb{Y} \mathbb{A}_{21}]^{-1} [\mathbb{X} \mathbb{B}_{12} \mathbb{B}_{22}^{-1} \mathbb{Y} \mathbb{A}_{22} - \mathbb{A}_{12}]. \quad (\text{A.24})$$

■ A.3 Odvození Redhefferova součinu

Nechť jsou dvě vrstvy oddělené virtuální mezerou a popsány S-maticemi $\bar{\mathbb{S}}^{(1)}, \bar{\mathbb{S}}^{(2)}$. Pak pro koeficienty \mathbf{c}_1^\pm vlevo, \mathbf{c}_2^\pm v mezeře a \mathbf{c}_3^\pm vpravo platí

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^- \\ \mathbf{c}_2^+ \end{pmatrix} = \bar{\mathbb{S}}^{(1)} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^+ \\ \mathbf{c}_2^- \end{pmatrix}, \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_2^- \\ \mathbf{c}_3^+ \end{pmatrix} = \bar{\mathbb{S}}^{(2)} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_2^+ \\ \mathbf{c}_3^- \end{pmatrix}, \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^- \\ \mathbf{c}_3^+ \end{pmatrix} = \bar{\mathbb{S}} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^+ \\ \mathbf{c}_3^- \end{pmatrix}, \quad (\text{A.27})$$

kde $\bar{\mathbb{S}} = \bar{\mathbb{S}}^{(1)} \otimes \bar{\mathbb{S}}^{(2)}$ je hledaná matice obou vrstev dohromady. Ze druhého řádku (A.25) a prvního řádku (A.26) vyjádříme \mathbf{c}_2^-

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_2^+ &= \mathbb{S}_{21}^{(1)} \mathbf{c}_1^+ + \mathbb{S}_{22}^{(1)} \mathbf{c}_2^-, \\ \mathbf{c}_2^- &= \mathbb{S}_{11}^{(2)} \mathbf{c}_2^+ + \mathbb{S}_{12}^{(2)} \mathbf{c}_3^- \\ &= \mathbb{S}_{11}^{(2)} \left[\mathbb{S}_{21}^{(1)} \mathbf{c}_1^+ + \mathbb{S}_{22}^{(1)} \mathbf{c}_2^- \right] + \mathbb{S}_{12}^{(2)} \mathbf{c}_3^-, \\ \left[\mathbb{1} - \mathbb{S}_{11}^{(2)} \mathbb{S}_{22}^{(1)} \right] \mathbf{c}_2^- &= \mathbb{S}_{11}^{(2)} \mathbb{S}_{21}^{(1)} \mathbf{c}_1^+ + \mathbb{S}_{12}^{(2)} \mathbf{c}_3^-, \\ \mathbf{c}_2^- &= \left[\mathbb{1} - \mathbb{S}_{11}^{(2)} \mathbb{S}_{22}^{(1)} \right]^{-1} \left[\mathbb{S}_{11}^{(2)} \mathbb{S}_{21}^{(1)} \mathbf{c}_1^+ + \mathbb{S}_{12}^{(2)} \mathbf{c}_3^- \right].\end{aligned}$$

Následně \mathbf{c}_2^- dosadíme do druhého řádku (A.25)

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_1^- &= \mathbb{S}_{11}^{(1)} \mathbf{c}_1^+ + \mathbb{S}_{12}^{(1)} \mathbf{c}_2^- \\ &= \mathbb{S}_{11}^{(1)} \mathbf{c}_1^+ + \mathbb{S}_{12}^{(1)} \left[\mathbb{1} - \mathbb{S}_{11}^{(2)} \mathbb{S}_{22}^{(1)} \right]^{-1} \left[\mathbb{S}_{11}^{(2)} \mathbb{S}_{21}^{(1)} \mathbf{c}_1^+ + \mathbb{S}_{12}^{(2)} \mathbf{c}_3^- \right] \\ &= \left(\mathbb{S}_{11}^{(1)} + \mathbb{S}_{12}^{(1)} \left[\mathbb{1} - \mathbb{S}_{11}^{(2)} \mathbb{S}_{22}^{(1)} \right]^{-1} \mathbb{S}_{11}^{(2)} \mathbb{S}_{21}^{(1)} \right) \mathbf{c}_1^+ + \mathbb{S}_{12}^{(1)} \left[\mathbb{1} - \mathbb{S}_{11}^{(2)} \mathbb{S}_{22}^{(1)} \right]^{-1} \mathbb{S}_{12}^{(2)} \mathbf{c}_3^-.\end{aligned}\tag{A.28}$$

Analogicky vyjádříme \mathbf{c}_2^+

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_2^- &= \mathbb{S}_{11}^{(2)} \mathbf{c}_2^+ + \mathbb{S}_{12}^{(2)} \mathbf{c}_3^-, \\ \mathbf{c}_2^+ &= \mathbb{S}_{21}^{(1)} \mathbf{c}_1^+ + \mathbb{S}_{22}^{(1)} \mathbf{c}_2^- \\ &= \mathbb{S}_{21}^{(1)} \mathbf{c}_1^+ + \mathbb{S}_{22}^{(1)} \left[\mathbb{S}_{11}^{(2)} \mathbf{c}_2^+ + \mathbb{S}_{12}^{(2)} \mathbf{c}_3^- \right], \\ \left[\mathbb{1} - \mathbb{S}_{22}^{(1)} \mathbb{S}_{11}^{(2)} \right] \mathbf{c}_2^+ &= \mathbb{S}_{21}^{(1)} \mathbf{c}_1^+ + \mathbb{S}_{22}^{(1)} \mathbb{S}_{12}^{(2)} \mathbf{c}_3^-, \\ \mathbf{c}_2^+ &= \left[\mathbb{1} - \mathbb{S}_{22}^{(1)} \mathbb{S}_{11}^{(2)} \right]^{-1} \left[\mathbb{S}_{21}^{(1)} \mathbf{c}_1^+ + \mathbb{S}_{22}^{(1)} \mathbb{S}_{12}^{(2)} \mathbf{c}_3^- \right],\end{aligned}$$

a dosadíme do druhého řádku (A.26)

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_3^+ &= \mathbb{S}_{21}^{(2)} \mathbf{c}_2^+ + \mathbb{S}_{22}^{(2)} \mathbf{c}_3^- \\ &= \mathbb{S}_{21}^{(2)} \left[\mathbb{1} - \mathbb{S}_{22}^{(1)} \mathbb{S}_{11}^{(2)} \right]^{-1} \left[\mathbb{S}_{21}^{(1)} \mathbf{c}_1^+ + \mathbb{S}_{22}^{(1)} \mathbb{S}_{12}^{(2)} \mathbf{c}_3^- \right] + \mathbb{S}_{22}^{(2)} \mathbf{c}_3^- \\ &= \mathbb{S}_{21}^{(2)} \left[\mathbb{1} \mathbb{S}_{22}^{(1)} \mathbb{S}_{11}^{(2)} \right] \mathbb{S}_{21}^{(1)} \mathbf{c}_1^+ + \left(\mathbb{S}_{21}^{(2)} \left[\mathbb{1} - \mathbb{S}_{22}^{(1)} \mathbb{S}_{11}^{(2)} \right]^{-1} \mathbb{S}_{22}^{(1)} \mathbb{S}_{12}^{(2)} + \mathbb{S}_{22}^{(2)} \right) \mathbf{c}_3^-.\end{aligned}\tag{A.29}$$

Složky matice $\bar{\mathbb{S}} = \bar{\mathbb{S}}^{(1)} \otimes \bar{\mathbb{S}}^{(2)}$ jsou ty matice, které v rovnicích (A.28) a (A.29) násobí vektory \mathbf{c}_1^+ a \mathbf{c}_3^- analogicky definičnímu vztahu (A.27)

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_{11} &= \mathbb{S}_{11}^{(1)} + \mathbb{S}_{12}^{(1)} \left[\mathbb{1} - \mathbb{S}_{11}^{(2)} \mathbb{S}_{22}^{(1)} \right]^{-1} \mathbb{S}_{11}^{(2)} \mathbb{S}_{21}^{(1)}, \\ \mathbb{S}_{12} &= \mathbb{S}_{12}^{(1)} \left[\mathbb{1} - \mathbb{S}_{11}^{(2)} \mathbb{S}_{22}^{(1)} \right]^{-1} \mathbb{S}_{12}^{(2)}, \\ \mathbb{S}_{21} &= \mathbb{S}_{21}^{(1)} \left[\mathbb{1} \mathbb{S}_{22}^{(1)} \mathbb{S}_{11}^{(2)} \right] \mathbb{S}_{21}^{(1)}, \\ \mathbb{S}_{22} &= \mathbb{S}_{21}^{(2)} \left[\mathbb{1} - \mathbb{S}_{22}^{(1)} \mathbb{S}_{11}^{(2)} \right]^{-1} \mathbb{S}_{22}^{(1)} \mathbb{S}_{12}^{(2)} + \mathbb{S}_{22}^{(2)}.\end{aligned}$$

A.4 Odvození reflektance a transmittance multivrstvy

Transmittance a reflektance multivrstvy ve frekvenční doméně je poměr intenzity prošlé resp. odražené vlny oproti dopadající vlně. Ve třech rozměrech je optická intenzita rovna velikosti

Poyntingova vektoru

$$\vec{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}},$$

který je v LHI prostředí násobkem vlnového vektoru \vec{k} . Jejich velikosti jsou

$$|\vec{k}| = \frac{2\pi n}{\lambda}, \quad |\mathcal{S}| = \frac{|\mathcal{E}|^2}{2\eta},$$

kde ve druhé rovnosti byla použita definice impedance $|\mathcal{H}| = |\mathcal{E}|/\eta$. Pokud platí kolinearita

$$\vec{\mathcal{S}} = A\vec{k},$$

pak platí také

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}| &= A |\mathcal{E}|, \\ \frac{|\mathcal{E}|^2}{2\eta} &= A \frac{2\pi n}{\lambda}, \\ \frac{|\mathcal{E}|^2 \sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{\mu}} &= A \frac{2\pi \sqrt{\varepsilon\mu}}{\lambda}, \\ A &= \frac{\lambda |\mathcal{E}|^2}{4\pi\mu}. \end{aligned}$$

V použité formulaci TMM je optická intenzita vln úměrná jen velikosti složky \mathcal{S}_z Poyntingova vektoru. Rovinné vlny jsou uvažovány nekonečně rozlehlé ve směrech \vec{x}, \vec{y} a propagují se jen směrem \vec{z} , stejně jako vrstvy jsou uvažovány homogenní a nekonečné ve směrech \vec{x}, \vec{y} . Navíc imaginární část \mathcal{S}_z odpovídá evanescentní vlně, která ve směru z nenese energii. Výsledná intenzita je tedy rovna

$$|\Re(\mathcal{S}_z)| = |\Re(Ak_z)| = \frac{\lambda}{4\pi} \left| \Re\left(\frac{k_z}{\mu}\right) \right| |\mathcal{E}|^2. \quad (\text{A.30})$$

Se znalostí elektrického pole dopadající, odražené a prošlé vlny (ozn. $\vec{\mathcal{E}}^{\text{inc}}, \vec{\mathcal{E}}^{\text{ref}}, \vec{\mathcal{E}}^{\text{trn}}$) lze aplikací (A.30) odvodit vztah pro reflektanci a transmitanci dané multivrstvy. Jelikož dopadající a odražená vlna jsou ve stejném prostředí, je faktor násobící $|\mathcal{E}|^2$ v rovnici (A.30) pro obě vlny stejný a reflektance je rovna

$$R = \frac{I^{\text{ref}}}{I^{\text{inc}}} = \frac{|\mathcal{E}^{\text{ref}}|^2}{|\mathcal{E}^{\text{inc}}|^2}.$$

Prostředí na transmisní straně však obecně může být různé, takže relativní permeability $\mu^{\text{inc}}, \mu^{\text{trn}}$ a složky vlnového vektoru $k_z^{\text{inc}}, k_z^{\text{trn}}$ se mohou lišit. Pro transmitanci platí složitější vztah

$$T = \frac{I^{\text{trn}}}{I^{\text{inc}}} = \frac{\Re(\mathcal{S}_z^{\text{trn}})}{\Re(\mathcal{S}_z^{\text{inc}})} = \frac{|\mathcal{E}^{\text{trn}}|^2 \Re(k_z^{\text{trn}}/\mu^{\text{trn}})}{|\mathcal{E}^{\text{inc}}|^2 \Re(k_z^{\text{inc}}/\mu^{\text{inc}})}.$$

A.5 Odvození problému vlastních čísel při výpočtu Blochových módů fotonického krystalu

Označme \mathbb{S} S-matici jedné periody fotonického krystalu. Pro koeficienty $\mathbf{c}_{g,n}^{\pm}, \mathbf{c}_{g,n+1}^{\pm}$ ve virtuálních mezerách vlevo a vpravo od n -té periody platí

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{g,n}^{-} &= \mathbb{S}_{11} \mathbf{c}_{g,n}^{+} + \mathbb{S}_{12} \mathbf{c}_{g,n+1}^{-}, \\ \mathbf{c}_{g,n+1}^{+} &= \mathbb{S}_{21} \mathbf{c}_{g,n}^{+} + \mathbb{S}_{22} \mathbf{c}_{g,n+1}^{-}, \\ -\mathbb{S}_{12} \mathbf{c}_{g,n+1}^{-} &= \mathbb{S}_{11} \mathbf{c}_{g,n}^{+} - \mathbf{c}_{g,n}^{-}, \\ \mathbf{c}_{g,n+1}^{+} - \mathbb{S}_{22} \mathbf{c}_{g,n+1}^{-} &= \mathbb{S}_{21} \mathbf{c}_{g,n}^{+}, \\ \begin{pmatrix} \Theta & -\mathbb{S}_{12} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{S}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{g,n+1}^{+} \\ \mathbf{c}_{g,n+1}^{-} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbb{S}_{11} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{S}_{21} & \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{g,n}^{+} \\ \mathbf{c}_{g,n}^{-} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{g,n+1}^{+} \\ \mathbf{c}_{g,n+1}^{-} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Theta & -\mathbb{S}_{12} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{S}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{S}_{11} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{S}_{21} & \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{g,n}^{+} \\ \mathbf{c}_{g,n}^{-} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Blochova podmínka pro délku periody Λ je

$$\mathbf{c}_{g,n+1}^{\pm} = \exp(iK\Lambda) \mathbf{c}_{g,n+1}^{\pm},$$

což po dosazení za $\mathbf{c}_{g,n+1}^{\pm}$ dává problém vlastních čísel

$$\begin{pmatrix} \Theta & -\mathbb{S}_{12} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{S}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{S}_{11} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{S}_{21} & \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{g,n}^{+} \\ \mathbf{c}_{g,n}^{-} \end{pmatrix} = \exp(iK\Lambda) \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{g,n}^{+} \\ \mathbf{c}_{g,n}^{-} \end{pmatrix}.$$

A.6 Odvození vztahu pro Q faktor optického rezonátoru

Optická intenzita vln v optickém rezonátoru je podle sekce 4.2.6.4 přibližně rovna

$$I(\omega) = \frac{I_{\max}}{1 + \mathcal{F}^2 \sin^2 \frac{\varphi(\omega)}{2}}, \quad \text{kde } I_{\max} = I(\omega_r) = \frac{|\mathbf{c}_0|^2}{(1 - |\alpha|)^2}, \quad \mathcal{F} = \frac{2\sqrt{|\alpha|}}{1 - |\alpha|}. \quad (\text{A.31})$$

Číslo $\alpha = |\alpha| \exp(i\varphi)$ je faktor, kterým se násobí fázor vlny při dvojím odrazu v dutině. Uvažujeme, že $|\alpha|$ se v okolí rezonanční frekvence ω_r málo mění, a závislost $\varphi(\omega)$ budeme považovat za přibližně lineární.

Hledejme takový úhel φ , aby intenzita (A.31) nabyla poloviny maxima. To dává podmínku

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{1}{1 + \mathcal{F}^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}, \\ 2 &= 1 + \mathcal{F}^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \\ 1 &= \mathcal{F} \sin \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Pro malý úhel φ dále platí

$$\varphi = \frac{2}{\mathcal{F}}. \quad (\text{A.32})$$

Úhel je dostatečně malý, pokud $1/\mathcal{F} = \sin(\varphi/2) \ll 1$. Dosazením za \mathcal{F} podle definice (A.31) lze sestavit kvadratickou nerovnici $|\alpha|^2 - 6|\alpha| + 1 \ll 0$, jejíž kořeny jsou $|\alpha| = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Podmínka malého úhlu φ je tedy $|\alpha| \gg 3 - 2\sqrt{2} \doteq 0,17$.

Za předpokladu konstantní amplitudy $|\alpha|$ rozvineme podmínku (A.32) do prvního řádu mocninné řady v okolí rezonanční frekvence ω_r , kde je úhel roven nule.

$$\frac{2}{\mathcal{F}} \approx (\omega - \omega_r) \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \right|_{\omega_r}.$$

Zde ω je frekvence odpovídající polovině maximální intenzity. Pro šířku píku (FWHM) pak platí

$$\Delta\omega = 2(\omega - \omega_r) = \frac{4}{\mathcal{F}} \left(\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \right|_{\omega_r} \right)^{-1}$$

a Q faktor je roven

$$Q^{(\text{FP})} = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} = \frac{\omega_r \sqrt{|\alpha|}}{2(1 - |\alpha|)} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \right|_{\omega_r}.$$

A.7 Odvození vztahu mezi koeficientem zesílení a imaginární složkou indexu lomu

Uvažujme tlumenou resp. zesílenou harmonickou vlnu šířící se ve směru \vec{x} prostředím s komplexním indexem lomu $n = \Re(n) + i\Im(n) = n_r + in_i$. Taková vlna má tvar

$$\vec{\mathcal{E}}(x, t) = \mathcal{A} \exp(ik_0 n x - i\omega t),$$

kde \mathcal{A} je komplexní amplituda, $k_0 = 2\pi/\lambda$ je vlnčet ve vakuu a ω je frekvence vlny. Dosazením za n získáme

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(x, t) &= \mathcal{A} \exp(ik_0 (n_r + in_i) x - i\omega t) \\ &= \mathcal{A} \exp(ik_0 n_r x) \exp(-k_0 n_i x) \exp(-i\omega t) \\ &= \mathcal{A} \exp(ik_0 n_r x - i\omega t) \exp(-k_0 n_i x). \end{aligned}$$

Netlumenou část takové vlny označíme $\vec{\mathcal{E}}_0$ a máme

$$\vec{\mathcal{E}}(x, t) = \vec{\mathcal{E}}_0(x, t) \exp(-k_0 n_i x). \quad (\text{A.33})$$

Optická intenzita takové vlny je úměrná veličině

$$|\mathcal{E}(x)|^2 = |\mathcal{E}_0|^2 \exp(-2k_0 n_i x). \quad (\text{A.34})$$

Pokud popisujeme útlum, resp. zesílení pomocí koeficientu zisku g , rozumíme jím exponenciální růst intenzity

$$|\mathcal{E}(x)|^2 = |\mathcal{E}(x=0)| \exp(gx) \quad (\text{A.35})$$

Porovnáním (A.34) a (A.35) je odvozeno

$$g = -2k_0 n_i,$$

odkud plyne rovnice (5.1)

$$n_i = -\frac{g}{2k_0} = -\frac{g\lambda}{4\pi}.$$