

# Vlnění, optika a atomová fyzika

Josef Schmidt<sup>1</sup>

23. září 2024

<sup>1</sup>[schmijos@fjfi.cvut.cz](mailto:schmijos@fjfi.cvut.cz)

Tento materiál slouží jako podklad pro sledování přednášky z předmětu 02VOAF na FJFI ČVUT v Praze.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Kmity soustav s konečným počtem stupňů volnosti</b>	<b>7</b>
1.1	Harmonický oscilátor . . . . .	7
1.2	Matematická vsuvka: Komplexní čísla a exponenciála . . . . .	7
1.3	Matematická vsuvka: Obyčejné lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty . . . . .	9
1.4	Matematická vsuvka: Střední hodnoty . . . . .	10
1.5	Tlumený harmonický oscilátor . . . . .	11
1.6	Buzený harmonický oscilátor . . . . .	12
1.7	Kmity soustav s $n$ stupni volnosti . . . . .	14
1.7.1	Aproximace malých kmitů . . . . .	16
1.7.2	Metoda módů . . . . .	17
1.7.3	Kuchařka . . . . .	18
1.8	Normální souřadnice . . . . .	19
1.9	*Malé kmity teoreticky . . . . .	21
1.10	*Tlumené malé kmity . . . . .	23
1.11	*Buzené malé kmity . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Kmity struny a postupné vlnění</b>	<b>27</b>
2.1	Řetízek atomů . . . . .	27
2.1.1	Řešení řetízku . . . . .	28
2.1.2	Spojité limita . . . . .	29
2.2	Kmity struny a vlnová rovnice . . . . .	31
2.3	Podélné kmity . . . . .	33
2.4	Zvuk . . . . .	33
2.5	Kmity struny s pevnými konci . . . . .	35
2.5.1	Podmínka volného konce . . . . .	38
2.6	Matematická vsuvka: Fourierovy řady . . . . .	38
2.6.1	Sudé a liché prodloužení . . . . .	39
2.7	Počáteční úloha pro pevné konce . . . . .	40
2.8	d'Alembertovo řešení vlnové rovnice . . . . .	41
2.8.1	Vyzařování postupných vln . . . . .	44
2.8.2	Harmonická postupná vlna . . . . .	44
2.8.3	Počáteční úloha pro d'Alembertovo řešení . . . . .	45
2.9	Energie vlnění . . . . .	45
2.9.1	Energie v postupné vlně . . . . .	49
2.9.2	Příklad: Harmonická postupná vlna . . . . .	49

<b>3</b>	<b>Disperzní vztah, vlnové balíky, grupová rychlost</b>	<b>51</b>
3.1	Fázová rychlost, disperzní vztah . . . . .	51
3.1.1	Postupné vlnění . . . . .	51
3.1.2	Disperzní vztah . . . . .	52
3.1.3	Reaktivní prostředí . . . . .	53
3.2	Matematická vsuvka: Fourierova transformace . . . . .	55
3.2.1	Fourierova transformace v komplexním zápisu . . . . .	56
3.3	Vlnové balíky a relace neurčitosti . . . . .	57
3.4	Grupová rychlost . . . . .	61
3.4.1	Superpozice dvou postupných harmonických vln . . . . .	61
3.4.2	Obecný vlnový balík . . . . .	63
3.4.3	Rozplývání vlnového balíku . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Odrazy vln</b>	<b>67</b>
4.1	Zakončení struny . . . . .	67
4.2	Napojení dvou strun . . . . .	69
4.2.1	Harmonická dopadající vlna . . . . .	72
4.3	Energetické poměry . . . . .	72
4.4	Koeficienty průchodu a odrazu závislé na frekvenci . . . . .	73
4.5	Matice přenosu . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Vlny v prostoru</b>	<b>79</b>
5.1	Rovinné vlny . . . . .	79
5.2	Sférické vlny . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Elektromagnetické vlnění</b>	<b>85</b>
6.1	Rovinné elektromagnetické vlny . . . . .	85
6.2	Vyzařování elektromagnetických vln . . . . .	88
6.3	Energetické veličiny v elektromagnetickém poli . . . . .	94
6.3.1	Hustota energie . . . . .	94
6.3.2	Tok energie . . . . .	95
6.3.3	Hustota hybnosti . . . . .	96
6.3.4	Energetické veličiny v rovinné vlně . . . . .	98
6.3.5	Tlak záření . . . . .	98
6.3.6	Energie vyzařované vlny . . . . .	100
6.4	Index lomu v látce a v plazmatu . . . . .	101
6.5	Vlnovod . . . . .	104
6.6	Podmínky napojení EM pole na rozhraní nevodivých prostředí . . . . .	109
<b>7</b>	<b>Polarizace</b>	<b>113</b>
7.1	Polarizátor a vlnová destička . . . . .	118
7.1.1	Polarizátor . . . . .	118
7.1.2	Vlnová destička . . . . .	119
7.2	Měření polarizace . . . . .	121
7.3	Nepolarizované světlo . . . . .	122
7.4	Úloha odrazu EM vlny na rovinném rozhraní . . . . .	125
7.4.1	Zákon odrazu a lomu, kritický úhel a totální odraz . . . . .	127
7.4.2	Podmínky napojení pro jednotlivé polarizace . . . . .	129
7.4.3	Koeficienty průchodu a odrazu – Fresnelovy vzorce . . . . .	131
7.4.4	Brewsterův úhel, polarizace odrazem . . . . .	133



<b>8</b>	<b>Interference a difrakce</b>	<b>137</b>
8.1	Michelsonův interferometr . . . . .	137
8.1.1	Vliv časové a prostorové koherence na viditelnost interference . . . . .	139
8.2	Difrakce . . . . .	141
8.2.1	Babinetův princip . . . . .	141
8.2.2	Komplementární přepážky . . . . .	143
8.2.3	Huygensův-Fresnelův princip . . . . .	144
8.2.4	Fraunhoferova difrakce . . . . .	146
8.2.5	Youngův pokus . . . . .	148
8.2.6	Difrakční mřížka . . . . .	150
8.2.7	Štěrba konečné šířky . . . . .	154
8.2.8	Difrakce na kruhovém otvoru . . . . .	155
8.2.9	Vliv koherence na viditelnost difrakčního obrazce . . . . .	156
<b>9</b>	<b>*Geometrická optika</b>	<b>159</b>
9.1	*Přechod od vlnové optiky k optice geometrické . . . . .	159
9.2	*Nehomogenní prostředí . . . . .	162
9.3	*Fermatův princip . . . . .	165
<b>10</b>	<b>Limity klasické fyziky</b>	<b>169</b>
10.1	Fotoelektrický jev . . . . .	169
10.2	Energie, hybnost a hmotnost fotonu . . . . .	171
10.3	Comptonův rozptyl . . . . .	172
10.4	Stabilita atomů . . . . .	175
10.4.1	Bohrův model atomu . . . . .	176
10.4.2	Schrödingerův kvantový model atomu . . . . .	177
10.5	Záření černého tělesa . . . . .	178
10.5.1	Planckův vyzařovací zákon . . . . .	179
10.5.2	Spektrální hustota v jiných proměnných . . . . .	180
10.5.3	Limity Planckova zákona . . . . .	181
10.5.4	Wienův posunovací zákon . . . . .	183
10.5.5	Stefan-Boltzmannův zákon . . . . .	184



# Kapitola 1

## Kmity soustav s konečným počtem stupňů volnosti

### 1.1 Harmonický oscilátor

Systém popsaný rovnicí harmonického oscilátoru,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (1.1)$$

kde  $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , je nejjednodušším systémem vykazující kmitavý pohyb. Tento matematický model slouží k více či méně přesnému popisu řady fyzikálních systémů. Například pro popis kmitání závaží hmotnosti  $m$  na pružině tuhosti  $k$ ,

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (1.2)$$

anebo pro popis pohybu matematického kyvadla v blízkosti rovnovážné polohy,

$$ml\ddot{\varphi} + mg\varphi = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (1.3)$$

či pro popis průběhu proudu v LC obvodu,

$$L\ddot{I} + \frac{1}{C}I = 0, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (1.4)$$

Různé fyzikální systémy tedy vedou na stejný matematický popis jejich chování. To je charakteristické pro celou řadu vlnových jevů, kterými se budeme zabývat. Typicky budeme uvažovat nějaký konkrétní fyzikální systém, často mechanický, vytvoříme jeho matematický model a budeme zkoumat vlnové jevy, které z něho plynou. Získané poznatky pak budou mít obecnou platnost pro jakýkoliv systém chovající se dle stejného matematického modelu.

### 1.2 Matematická vsuvka: Komplexní čísla a exponenciála

**Komplexní číslo**  $z \in \mathbb{C}$  je číslo tvaru  $z = a + ib$ , kde  $a, b \in \mathbb{R}$  a  $i$  je komplexní jednotka s vlastností  $i^2 = -1$ . Sčítání a násobení těchto čísel je definováno „přirozeným způsobem“.

Komplexně sdružené číslo  $\bar{z}$  je číslo  $\bar{z} = a - ib$ . Platí vzorec  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ . Velikost komplexního čísla je definována jako  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ , tento výraz je možno zapsat jako  $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ .

**Reálná a imaginární část.** Definujeme funkce  $\operatorname{Re} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  a  $\operatorname{Im} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  zvané reálná a imaginární část pomocí předpisů

$$\operatorname{Re} z = a, \quad \operatorname{Im} z = b$$

(pozor, imaginární část neobsahuje komplexní jednotku!). Pokud je reálná část nulová, nazveme číslo *ryze imaginárním*. Funkce  $\operatorname{Re}$  a  $\operatorname{Im}$  jsou *reálně* lineární, tzn. platí

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2, \quad \operatorname{Re}(\alpha z) = \alpha \operatorname{Re} z, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

stejně pro  $\operatorname{Im}$ . Pozor,  $\operatorname{Re}(z_1 z_2) \neq (\operatorname{Re} z_1)(\operatorname{Re} z_2)$  (stejně pro  $\operatorname{Im}$ ). Tyto funkce lze jednoduše vyjádřit pomocí komplexního sdružení:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

**Komplexní exponenciála.** Uvažujme  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . Definujeme komplexní exponenciálu následující vztahem:

$$e^z := e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b).$$

Speciální případ pro  $a = 0$ ,

$$e^{ib} = \cos b + i \sin b, \quad b \in \mathbb{R},$$

se nazývá Eulerův vzorec<sup>1</sup>. Platí  $|e^{ib}| = 1$  a můžeme tedy psát  $|e^z| = e^a$ .

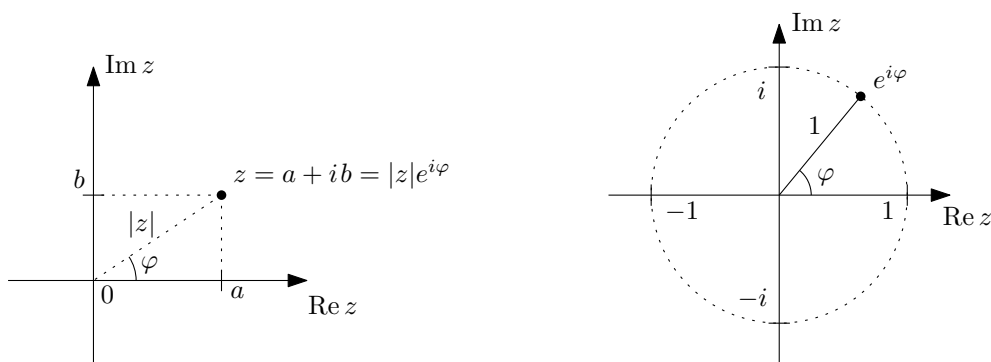
**Goniometrický tvar** komplexního čísla. Každé komplexní číslo  $z \in \mathbb{C}$  můžeme zapsat ve tvaru  $z = |z|e^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Číslu  $\varphi$  říkáme *argument* komplexního čísla (toto číslo není dané jednoznačně, lze přičíst libovolný celočíselný násobek  $2\pi$ ). Argument  $\varphi$  je řešením rovnic

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Tyto rovnice se často formálně<sup>2</sup> sdružují do rovnice

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}.$$

**Gaussova (komplexní) rovina.** Komplexní čísla můžeme reprezentovat jako body (dvou-  
rozměrné) roviny, kde kartézské osy tvoří reálná a imaginární část komplexních čísel, viz obrázek 1.1.



(a) Kartézská a goniometrická reprezentace komplexního čísla  $z$  znázorněná v Gaussově rovině.

(b) Jednotková kružnice v Gaussově rovině tvořená komplexními čísly tvaru  $e^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

Obrázek 1.1: Gaussova rovina slouží ke grafickému znázornění komplexních čísel, kde na vodorovnou osu vynášíme reálnou část a na svislou osu imaginární část.

<sup>1</sup>Jehož speciálním případem je „nejkrásnější matematická identita“  $e^{i\pi} = -1$ .

<sup>2</sup>V tomto zápisu ztrácíme informaci o tom, zda  $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$  anebo  $\varphi \in \langle \pi, 2\pi \rangle$ .

Sčítání komplexních čísel má pak geometrický význam sčítání dvourozměrných vektorů v Gaussově rovině. Číslo  $e^{i\varphi}$  představuje číslo na jednotkové kružnici. Intuitivní představa o násobení komplexních čísel se získá z goniometrického zápisu:

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{i\varphi_1} |z_2| e^{i\varphi_2} = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Násobení číslem  $e^{i\varphi}$  tedy představuje rotaci o úhel  $\varphi$  v komplexní rovině. Násobení číslem  $|z|$  představuje škálování v této rovině.

**Komplexní zápis goniometrických funkcí.** Z Eulerova vzorce přímo plynou následující vztahy:

$$\cos \varphi = \operatorname{Re} e^{i\varphi} = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \operatorname{Im} e^{i\varphi} = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

### 1.3 Matematická vsuvka: Obyčejné lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Uvažujme následující diferenciální rovnici pro funkci  $x(t)$

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0, \quad (1.5)$$

kde koeficienty  $a_i \in \mathbb{R}$  jsou **reálné konstanty**,  $a_n \neq 0$ . Řešení hledíme ve tvaru  $x(t) = e^{\lambda t}$ . Po dosazení do (1.5) (a vykrácení  $e^{\lambda t}$ ) obdržíme tzv. *charakteristický polynom* této rovnice

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (1.6)$$

Nechť  $\lambda$  je kořen tohoto polynomu s *reálnými koeficienty*, pak i  $\bar{\lambda}$  je kořen. Tzn. buď je  $\lambda \in \mathbb{R}$  anebo jsou kořeny komplexně sdružená dvojice  $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ .

Pokud jsou všechny kořeny navzájem různé (mají násobnost jedna) dostáváme tzv. *fundamentální systém řešení*

$$\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}, \quad (1.7)$$

jelikož je polynom (1.6) stupně  $n$ , máme  $n$  fundamentálních řešení<sup>3</sup>.

*Princip superpozice.* Je-li  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  řešení rovnice (1.5), pak je řešením i  $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ , kde  $c_1$  a  $c_2$  jsou libovolné konstanty (obecně komplexní). Princip superpozice platí pouze pro lineární diferenciální rovnice.

Obecné řešení rovnice (1.5) je obecná komplexní lineární kombinace fundamentálních řešení:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}. \quad (1.8)$$

*Komplexní a reálná řešení.* Je-li  $x(t)$  řešení rovnice (1.5), pak je řešením i  $\bar{x}(t)$ ,  $\operatorname{Re} x(t)$  a  $\operatorname{Im} x(t)$ <sup>4</sup>. Pokud tedy máme komplexní fundamentální řešení (příslušné komplexně sdruženým kořenům  $\lambda = a + ib, \bar{\lambda} = a - ib$ )  $e^{\lambda t}$  a  $e^{\bar{\lambda} t}$ , můžeme přejít k reálným fundamentálním řešením:

$$\operatorname{Re} e^{\lambda t} = \frac{e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda} t}}{2} = e^{at} \cos bt, \quad \operatorname{Im} e^{\lambda t} = \frac{e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda} t}}{2i} = e^{at} \sin bt. \quad (1.9)$$

<sup>3</sup>Pokud je  $\lambda$  kořen s násobností  $k$ , pak tomuto kořenu přísluší  $k$  fundamentálních řešení tvaru

$$\{e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}\}.$$

<sup>4</sup>Napišeme-li si komplexně sdruženou rovnici k (1.5), pak bylo-li  $x(t)$  řešením původní rovnice (1.5), pak z reálnosti koeficientů  $a_i$ , tzn.  $a_i = \bar{a}_i$ , je řešením i  $\bar{x}(t)$ . Je-li řešením  $x(t)$  a  $\bar{x}(t)$ , pak je z principu superpozice zjevně řešením i  $\operatorname{Re} x(t) = \frac{1}{2}(x(t) + \bar{x}(t))$  a  $\operatorname{Im} x(t) = \frac{1}{2i}(x(t) - \bar{x}(t))$

Toto je ekvivalentní restrikcí komplexních integračních konstant podmínkou  $c_2 = \bar{c}_1$  v lineární kombinaci  $c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\bar{\lambda} t}$ .

Obecné reálné řešení je pak reálnou lineární kombinací reálných fundamentálních řešení.

*Počáteční podmínky.* Obecné řešení obyčejné diferenciální rovnice  $n$ -tého řádu (tzn. nejvyšší obsažená derivace je  $n$ -tého řádu) je závislé na  $n$  integračních konstantách. Tyto se určují z počátečních podmínek. Typicky zadáním hodnot nulté až  $n - 1$  derivace v daném čase  $t_0$ :

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}. \quad (1.10)$$

*Nehomogenní rovnice.* Obecné řešení, které jsme napsali, bylo řešení tzv. *homogenní rovnice* – rovnice s nulovou pravou stranou. Pokud na pravou stranu přidáme zadanou funkci  $f(t)$ ,

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = f(t), \quad (1.11)$$

hovoříme o tzv. *nehomogenní rovnici*. Řešení nehomogenní rovnice se z linearity dá rozdělit na dvě části:

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{part}}(t). \quad (1.12)$$

Část  $x_{\text{hom}}(t)$  je řešení původní rovnice s nulovou pravou stranou. Část  $x_{\text{part}}(t)$  je libovolné (konkrétní) řešení splňující rovnici s pravou stranou (1.11), funkci  $x_{\text{part}}(t)$  nazýváme *partikulární řešení*.

**Harmonický oscilátor.** Pro rovnici harmonického oscilátoru (1.1) je charakteristický polynom tvaru

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad (1.13)$$

s kořeny  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$  a fundamentálním systémem řešení

$$\{e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}\}. \quad (1.14)$$

Obecné komplexní řešení je tedy tvaru

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}. \quad (1.15)$$

K reálnému řešení přejdeme aplikací  $\text{Re}$  a  $\text{Im}$  na jedno z řešení (např.  $e^{i\omega t}$ ) anebo restrikcí konstant  $c_1$  a  $c_2$  podmínkou  $c_1 = \frac{a-ib}{2}$ :

$$x(t) = a \text{Re} e^{i\omega t} + b \text{Im} e^{i\omega t} = a \cos \omega t + b \sin \omega t = \frac{1}{2}(a - ib)e^{i\omega t} + \frac{1}{2}(a + ib)e^{-i\omega t}. \quad (1.16)$$

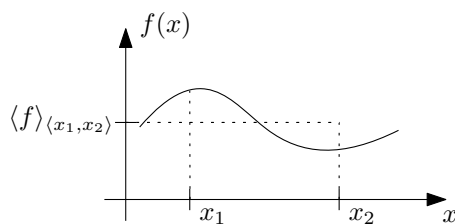
Počáteční podmínky vedoucí na konkrétní řešení jsou obvykle počáteční poloha a počáteční rychlost v čase  $t = 0$ :

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \quad (1.17)$$

## 1.4 Matematická vsuvka: Střední hodnoty

Mějme funkci  $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Její střední hodnota v intervalu  $\langle x_1, x_2 \rangle$  je definována jako

$$\langle f \rangle_{\langle x_1, x_2 \rangle} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$



Obrázek 1.2: Ilustrace střední hodnoty funkce. Obsah plochy pod grafem funkce  $f$  mezi body  $x_1$  a  $x_2$ ,  $S_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ , je stejný jako obsah obdélníka  $S_2 = \langle f \rangle_{\langle x_1, x_2 \rangle} (x_2 - x_1)$ .

Lze definovat střední hodnotu přes celé  $\mathbb{R}$  limitním přechodem

$$\langle f \rangle \equiv \langle f \rangle_{\langle -\infty, \infty \rangle} = \lim_{x' \rightarrow \infty} \frac{1}{2x'} \int_{-x'}^{x'} f(x) dx.$$

Pokud je funkce  $f$  periodická s periodou  $L$ , je její střední hodnota dána jako střední hodnota přes libovolný interval délky  $L$ :

$$\langle f \rangle = \langle f \rangle_{\langle x, x+L \rangle} = \frac{1}{L} \int_x^{x+L} f(x') dx', \quad \text{kde } x \in \mathbb{R} \text{ je libovolné.}$$

Pro goniometrické funkce platí následující vztahy:

$$\langle \sin \omega t \rangle = \langle \cos \omega t \rangle = 0, \quad \langle \sin^2 \omega t \rangle = \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}. \quad (1.18)$$

Pro funkce více proměnných je nutné specifikovat, v jaké proměnné středování provádíme. V tomto textu budeme provádět výhradně časové střední hodnoty, proto to často nebudeme explicitně zmiňovat. Máme-li například funkci  $f(\vec{r}, t)$ , pak po středování v čase nám zůstane funkce pouze polohového vektoru  $\vec{r}$ :  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\langle f \rangle : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

## 1.5 Tlumený harmonický oscilátor

Rovnice harmonického oscilátoru s tlumením je

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.19)$$

Někdy se zavádí označení  $\Gamma = 2\delta$ , kde  $\delta$  je tzv. *dekrement útlumu*. Předpokládáme řešení tvaru  $x(t) = e^{\lambda t}$ , charakteristický polynom je pak tvaru

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (1.20)$$

Uvažujeme-li malé (tzv. *podkritické*) tlumení  $\delta < \omega_0$ , potom řešením (1.20) je dvojice komplexně sdružených kořenů

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (1.21)$$

Výsledné komplexní a reálné řešení tedy je

$$x(t) = e^{-\delta t} (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}), \quad x(t) = e^{-\delta t} (a \cos \omega t + b \sin \omega t), \quad (1.22)$$

kde jsme definovali  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ .

## 1.6 Buzený harmonický oscilátor

Rovnici buzeného harmonického oscilátoru získáme přidáním budící síly na pravou stranu rovnice tlumeného oscilátoru:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = B(t) \quad (1.23)$$

Uvažujme harmonickou budící „sílu“<sup>5</sup>  $B(t) = B \cos(\Omega t)$ , resp. její komplexní tvar

$$\hat{B}(t) = B e^{i\Omega t}, \quad B \in \mathbb{R}. \quad (1.24)$$

Hledejme pouze partikulární řešení této rovnice, které bude představovat ustálený stav kmitání buzeného harmonického oscilátoru. Vzhledem ke komplexifikaci budící síly bude toto řešení také komplexní. Pokud vezmeme jeho reálnou část, dostaneme řešení pro původní reálnou budící sílu. Předpokládejme řešení ve tvaru

$$\hat{x}(t) = A e^{i\Omega t}, \quad (1.25)$$

kde  $A \in \mathbb{C}$ . Můžeme psát číslo  $A$  v goniometrickém tvaru,  $A = |A|e^{-i\varphi}$ , a tedy

$$\hat{x}(t) = |A|e^{i(\Omega t - \varphi)}, \quad (1.26)$$

kde  $|A|$  představuje amplitudu vynucených kmitů a  $\varphi$  je fázové zpoždění kmitů za budící silou.

Po dosazení našeho *ansatzu* (1.25) do rovnice (1.23) dostaneme

$$A(i\Omega)^2 + 2\delta A(i\Omega) + \omega_0^2 A = B, \quad (1.27)$$

z tohoto vztahu triviálně vyjádříme komplexní amplitudu  $A$ :

$$A = \frac{B}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\delta\Omega}. \quad (1.28)$$

Amplituda vynucených kmitů  $|A|$  je

$$|A| = \sqrt{A\bar{A}} = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}. \quad (1.29)$$

Dále označíme  $C$  a  $-D$  jako reálnou a imaginární část  $A$ ,  $A = C - iD$ . Výraz pro  $A$  rozšíříme komplexně sdruženým jmenovatelem a obdržíme

$$A = B \frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} = C - iD. \quad (1.30)$$

Nyní snadno zapíšeme koeficienty  $C$  a  $D$ :

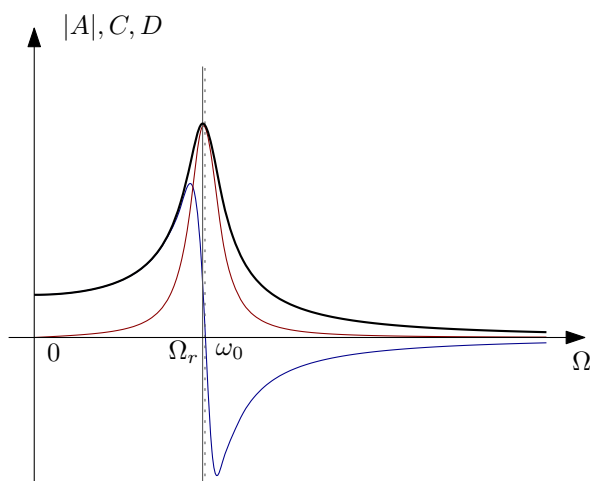
$$C = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} B, \quad D = \frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} B. \quad (1.31)$$

Koeficient  $C$  se nazývá *elastická amplituda* a koeficient  $D$  *absorpční amplituda*. Reálné řešení je pak tvaru

$$x(t) = \text{Re}[\hat{x}(t)] = \text{Re}[(C - iD)e^{i\Omega t}] = |A| \cos(\Omega t - \varphi) = C \cos \Omega t + D \sin \Omega t. \quad (1.32)$$

<sup>5</sup>Slovo síla je v uvozovkách, jelikož veličina  $B(t)$  má rozměr zrychlení, jelikož v diferenciální rovnici máme osamostatněn člen  $\ddot{x}$ .





Obrázek 1.3: Na obrázku jsou znázorněny rezonanční křivky harmonického oscilátoru buzeného harmonickou budící silou. Černě je zobrazena celková amplituda  $|A|$ , červeně absorpční amplituda  $D$ , modře elastická amplituda  $C$ . Maximum amplitudy  $|A|$  je označeno  $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} < \omega_0$ .

Pro fázové zpoždění vybuzených kmitů máme vztah

$$\operatorname{tg}(-\varphi) = \frac{-D}{C} \quad \rightarrow \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{D}{C} = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (1.33)$$

*Výkon dodávaný budící silou.* Proč mají koeficienty  $C$  a  $D$  název elastická a absorpční amplituda? Studujme výkon, který do systému dodává budící síla. Necht' je uvažovaný fyzikální systém kmitajícího závaží na pružině s tlumením. Okamžitá hodnota mechanického výkonu je  $P(t) = F(t)v(t)$ , kde  $F(t) = mB(t)$ . Po dosazení výrazů pro  $B(t)$  a  $v(t)$  máme

$$P(t) = F(t)v(t) = mB \cos \Omega t (-C\Omega \sin \Omega t + D\Omega \cos \Omega t). \quad (1.34)$$

Pokud nyní spočteme časovou střední hodnotu tohoto výkonu (přes jednu periodu) dostaneme výsledek

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} m B \Omega D. \quad (1.35)$$

Časová střední hodnota dodávaného výkonu je tedy úměrná pouze absorpční amplitudě  $D$ . Výkon odpovídající elastické amplitudě  $C$  se pouze přelévá ze zdroje budící síly do buzeného systému a zpět tak, že v průměru nedochází k přenosu energie. Chceme-li do systému dodávat co nejvíce energie, budíme systém na frekvenci, která odpovídá maximu absorpční amplitudy  $D$ .

*Celková energie oscilátoru.* Okamžitá hodnota energie oscilátoru je dána součtem jeho kinetické a potenciální energie:

$$E(t) = \frac{1}{2} m v(t)^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x(t)^2 = \frac{1}{2} m |A|^2 (\Omega^2 \sin^2(\Omega t - \alpha) + \omega_0^2 \cos^2(\Omega t - \alpha)). \quad (1.36)$$

Pokud opět vypočteme časovou střední hodnotu přes jednu periodu získáme

$$\langle E \rangle = \frac{1}{4} m |A|^2 (\Omega^2 + \omega_0^2). \quad (1.37)$$

Vidíme tedy, že celková energie je úměrná celkové amplitudě kmitání. Chceme-li naakumulovat co největší energii v oscilátoru (jev rezonance), budíme systém na frekvenci, která odpovídá maximu celkové amplitudy  $|A|$ .

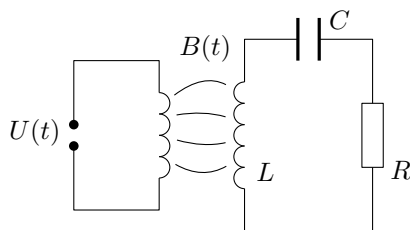
Maximum amplitudy  $|A|$  se nachází v bodě  $\Omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ , přibližná hodnota maxima amplitudy  $D$  je v bodě<sup>6</sup>  $\Omega_D \approx \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ . Pro malé hodnoty tlumení  $\delta$  můžeme uvažovat  $\Omega_A \approx \Omega_D \approx \omega_0$ .

*Faktor kvality (činitel jakosti).* Často se zavádí veličina tzv. faktoru kvality,

$$Q = 2\pi \frac{\langle E \rangle}{\langle P \rangle T_0} = 2\pi \frac{\langle E \rangle}{\langle E_0 \rangle}, \quad (1.38)$$

kteřá (až na násobek  $2\pi$ ) udává, kolika násobek energie dodané za jednu periodu kmitání  $\langle E_0 \rangle$  je uloženo v kmitajícím systému.

**Příklad. Bezdrátové nabíjení.** Schéma bezdrátového nabíjecího obvodu je na obrázku 1.4. Budící síla je vytvářena nabíjecí stanicí s vysílací cívku, která vlivem vzájemné indukčnosti budí napětí v cívce  $L$  v nabíjecím RLC obvodu. Odpor  $R$  reprezentuje nabíjený spotřebič. Vyladěním budící frekvence napětí  $U(t)$  do blízkosti rezonance v nabíjecím obvodu způsobí nejen největší přenos energie (maximum absorpční amplitudy  $D$ ) ale také největší amplitudu napětí v nabíjecím obvodu (maximum celkové amplitudy  $|A|$ ).

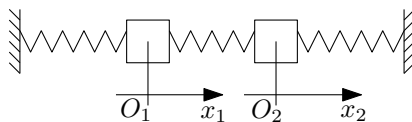


Obrázek 1.4: Princip bezdrátového nabíjení.

## 1.7 Kmity soustav s $n$ stupni volnosti

Přejdeme nyní k soustavám s více stupni volnosti. Harmonický oscilátor měl jeden stupeň volnosti – jeho poloha byla popsána jedinou souřadnicí  $x$ . Pro systém s  $n$  stupni volnosti popíšeme jeho polohu kartézskými souřadnicemi  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ .

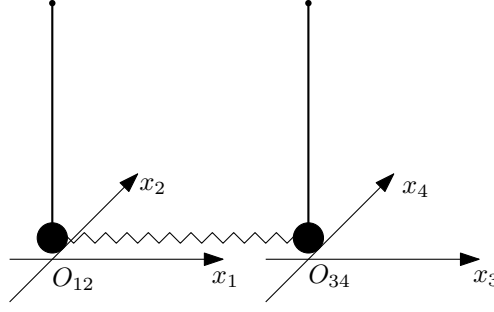
Opět budeme uvažovat jednoduché mechanické modely jako například systém dvou závaží na pružinách jako na obrázku 1.5 popsaný dvojicí souřadnic  $\vec{x} = (x_1, x_2)$ . Anebo dvojicí kyvadel spojenou pružinou jako na obrázku 1.6 vyžadující čtyři souřadnice  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ .



Obrázek 1.5: Dvě podélně kmitající závaží na pružinách.

<sup>6</sup>Přesná hodnota je daná řešením rovnice  $\frac{dD}{d\Omega} = 0$  s výsledkem

$$\Omega_D = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2 + 2\sqrt{\omega_0^4 - \delta^2\omega_0^2 + \delta^4}}}{\sqrt{3}}.$$



Obrázek 1.6: Dvě kyvadla spojená pružinou.

Uvažujme Newtonovy pohybové rovnice obecného systému tvaru

$$m_i \ddot{x}_i = F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (1.39)$$

kde  $m_i$  je vždy hmotnost tělesa příslušná souřadnici  $x_i$  a kde síly v systému jsou popsány potenciální funkcí  $U(x_1, \dots, x_n)$ .

Budeme se zabývat pohybem (tzn. řešením pohybových rovnic) těchto soustav v okolí *stabilní rovnovážné polohy*.

**Definice.** *Rovnovážná poloha* je taková poloha  $\vec{x}_0$  systému, pro níž platí  $F_i(\vec{x}_0) = 0$  pro  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ , tzn. v této poloze nepůsobí žádné síly (byl-li systém v bodě  $\vec{x}_0$  v klidu, tak na této pozici setrvá nadále). Síly jsou nulové právě tehdy, když má potenciál v bodě  $\vec{x}_0$  *stacionární bod*, tzn.

$$-F_i(\vec{x}_0) = \left. \frac{\partial U}{\partial x_i} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.40)$$

**Definice.** *Stabilní rovnovážná poloha* je taková rovnovážná poloha, kde je matice

$$\mathbb{U}_{ij} := \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \quad (1.41)$$

*pozitivně definitní*. Jinými slovy má potenciál v bodě  $\vec{x}_0$  *lokální minimum*. Ze záměnnosti parciálních derivací je tato matice symetrická  $\mathbb{U}_{ij} = \mathbb{U}_{ji}$ .

Metoda na řešení pohybových rovnic, která bude popsána níže, má jeden technický požadavek – je třeba, aby rovnovážná poloha ležela v počátku souřadnic. Toho docílíme zavedením nových souřadnic  $\vec{\xi}$  substitucí  $\vec{\xi} = \vec{x} - \vec{x}_0$ , kde  $\vec{x}_0$  jsou konstantní souřadnice zvolené stabilní rovnovážné polohy. Dosazením této substituce do rovnic (1.39) máme na levé straně triviálně

$$m_i \ddot{x}_i = m_i \frac{d^2}{dt^2} (\xi_i + x_{0i}) = m_i \ddot{\xi}_i. \quad (1.42)$$

Na pravé straně musíme provést substituci ve funkci potenciálu  $U(\vec{x})$ :

$$\tilde{U}(\vec{\xi}) := U \circ \vec{x}(\vec{\xi}) = U(\vec{\xi} + \vec{x}_0), \quad (1.43)$$

kde jsme definovali novou funkci  $\tilde{U}$  proměnných  $\vec{\xi}$ . Inverzní vztah je  $U(\vec{x}) = \tilde{U}(\vec{x} - \vec{x}_0)$ , po derivaci této rovnosti (kde na pravé straně máme derivaci složené funkce) dostaneme<sup>7</sup> (s využitím Einsteinova sumačního pravidla)

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_j} \delta_{ij} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_i}. \quad (1.44)$$

<sup>7</sup>Mějme funkci  $f(x_1, \dots, x_k) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  a  $k$ -tici funkcí  $g_i(y_1, \dots, y_l) : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ . Funkci  $h(y_1, \dots, y_l) : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$  získáme složením

$$h(y_1, \dots, y_l) = f(g_1(y_1, \dots, y_l), \dots, g_k(y_1, \dots, y_l))$$

Pohybová rovnice má tedy stejný tvar jako v původních souřadnicích  $\vec{x}$ :

$$m_i \ddot{\xi}_i = - \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_i}. \quad (1.45)$$

### 1.7.1 Aproximace malých kmitů

Pro obecný potenciál mohou být rovnice (1.45) velmi obtížně řešitelné. My se uchýlíme k aproximaci tzv. *malých kmitů* – budeme studovat chování systému v blízkosti rovnovážné polohy. Toho docílíme rozvojem funkce potenciálu  $\tilde{U}$  do Taylorovy řady<sup>8</sup> (okolo rovnovážné polohy, tedy okolo bodu  $\vec{\xi} = 0$ ) a ponecháme si pouze první nenulový člen.

$$\tilde{U}(\vec{\xi}) = \tilde{U}(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_i} \Big|_{\vec{\xi}=0} \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \Big|_{\vec{\xi}=0} \xi_i \xi_j + \dots \quad (1.46)$$

Zkoumejme nyní jednotlivé řády rozvoje. Nultý řád představuje hodnotu potenciálu v rovnovážné poloze  $U_0 = \tilde{U}(0)$ . Tuto můžeme volit nulovou,  $U_0 := 0$ , jelikož posun potenciálu o konstantu nijak nevstupuje do pohybových rovnic. Derivace v prvním řádu představuje (minus) sílu vyčíslenou v rovnovážné poloze,

$$F_i(0) = - \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_i} \Big|_{\vec{\xi}=0}, \quad (1.47)$$

ale ta je z definice rovnovážné polohy nulová! První nenulový řád je tedy ten druhý. Označíme-li matici  $\mathbb{U}$  jako

$$\mathbb{U}_{ij} = \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \Big|_{\vec{\xi}=0} \quad (1.48)$$

(což je konstantní číselná matice), kterou budeme nazývat *maticí potenciální energie*, můžeme potenciál  $\tilde{U}$  psát ve tvaru

$$\tilde{U}(\vec{\xi}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \mathbb{U}_{ij} \xi_i \xi_j + \dots, \quad (1.49)$$

kde třemi tečkami naznačujeme vyšší řády Taylorova rozvoje, které v aproximaci *malých kmitů* zanedbáváme. Matice  $\mathbb{U}$  je vlivem záměnnosti parciálních derivací symetrická,  $\mathbb{U}_{ij} = \mathbb{U}_{ji}$ . Libovolně složitou funkci potenciálu  $\tilde{U}$  jsme nahradili kvadratickým polynomem ve výchylkách z rovnovážné polohy  $\vec{\xi}$ .

Dosaďme nyní aproximovaný potenciál (1.49) do pravé strany pohybových rovnic (1.47) a upravujme (za použití Einsteinova sumačního pravidla):

$$-F_i = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_i} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( \frac{1}{2} \mathbb{U}_{jk} \xi_j \xi_k \right) = \frac{1}{2} \mathbb{U}_{jk} (\delta_{ij} \xi_k + \xi_j \delta_{ik}) = \frac{1}{2} (\mathbb{U}_{ik} \xi_k + \mathbb{U}_{ji} \xi_j) = \mathbb{U}_{ij} \xi_j, \quad (1.50)$$

---

Potom platí *řetězové pravidlo*

$$\frac{\partial h}{\partial y_i} = \sum_{m=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial g_m}{\partial y_i}.$$

Toto pravidlo je rozšířením pravidla o derivování složené funkce,  $[f(g(x))] = f'(g(x)) g'(x)$ , do více proměnných. Zde máme  $\tilde{U}(\vec{\xi}) \sim f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\xi_i(\vec{x}) \sim g_i(y_1, \dots, y_n)$ .

<sup>8</sup>Srovnej s Taylorovým rozvojem funkce jedné proměnné! Pro funkci  $f(x)$  okolo bodu 0 má následující tvar:

$$f(x) = f(0) + \frac{df}{dx} \Big|_{x=0} x + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x=0} x^2 + \dots$$

kde jsme v poslední rovnosti použili symetrii matice  $\mathbb{U}$  (a přejmenování sčítacího indexu). Aproximací potenciálu jsme docílili toho, že jsou pohybové rovnice *lineární*!

$$m_i \ddot{\xi}_i + \sum_{j=1}^n \mathbb{U}_{ij} \xi_j = 0. \quad (1.51)$$

Zavedeme-li ještě matici  $\mathbb{T} = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$ , kterou budeme nazývat *maticí kinetické energie*<sup>9</sup>, můžeme psát

$$\sum_{j=1}^n \left( \mathbb{T}_{ij} \ddot{\xi}_j + \mathbb{U}_{ij} \xi_j \right) = 0,$$

nebo zapsáno maticově

$$\boxed{\mathbb{T} \ddot{\vec{\xi}} + \mathbb{U} \vec{\xi} = 0.} \quad (1.52)$$

Toto je finální tvar<sup>10</sup> pohybových rovnic, které nyní budeme řešit. Matice  $\mathbb{T}$  a  $\mathbb{U}$  jsou symetrické pozitivně definitní konstantní matice.

## 1.7.2 Metoda módů

Intuitivně očekáváme, že při malém vychýlení systému ze stabilní rovnovážné polohy bude systém okolo této polohy oscilovat. Zkusme předpokládat řešení obsahující harmonické kmitání  $e^{i\omega t}$  (pro zatím neurčenou úhlovou frekvenci  $\omega$ ). Uvažujme vektorovou funkci tvaru

$$\vec{\xi}(t) = \vec{a} e^{i\omega t}, \quad (1.53)$$

kde  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  je konstantní vektor. Tomuto tvaru řešení se říká *mód*. Všechny části systému kmitají se stejnou úhlovou frekvencí  $\omega$  a se stejnou fází. Reálná řešení pak dostaneme např. zapůsobením  $\text{Re}$  a  $\text{Im}$  na získané komplexní řešení. Dosazením do rovnic (1.52) dostaneme

$$(\mathbb{T} \vec{a} (i\omega)^2 + \mathbb{U} \vec{a}) e^{i\omega t} = 0. \quad (1.54)$$

Po úpravě a vykrácení  $e^{i\omega t}$ :

$$(\mathbb{U} - \omega^2 \mathbb{T}) \vec{a} = 0. \quad (1.55)$$

Samozřejmě požadujeme netriviální (nenulové) řešení, takže hledáme takové frekvence  $\omega$ , aby úloha měla za řešení nenulový vektor  $\vec{a}$ . Pokud rovnici vynásobíme  $\mathbb{T}^{-1}$  a označíme  $\mathbb{A} = \mathbb{T}^{-1} \mathbb{U}$  a  $\lambda = \omega^2$ , dostaneme tvar

$$(\mathbb{A} - \lambda) \vec{a} = 0. \quad (1.56)$$

Jedná se tedy o úlohu nalezení vlastních čísel a k nim příslušných vlastních vektorů matice  $\mathbb{A}$ . Postupujeme tedy stejně jako v lineární algebře. Požadavek nenulovosti vektoru  $\vec{a}$  je požadavek na nenulovost jádra operátoru  $\mathbb{U} - \omega^2 \mathbb{T}$ , který je ekvivalentní s jeho singularností, kterou snadno zajistíme nulovým determinanem:

$$\det(\mathbb{U} - \omega^2 \mathbb{T}) = 0. \quad (1.57)$$

<sup>9</sup>Kinetickou energii systému můžeme psát jako

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\xi}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \mathbb{T}_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j.$$

<sup>10</sup>Ještě bychom rovnice mohli vynásobit  $\mathbb{T}^{-1}$  a dostat tvar  $\ddot{\vec{\xi}} + (\mathbb{T}^{-1} \mathbb{U}) \vec{\xi} = 0$ .

Této rovnici se říká *sekulární rovnice*. Na levé straně je polynom  $n$ -tého stupně v proměnné  $\omega^2$ . Kořeny tohoto polynomu označme  $\omega_k^2$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Příslušné vektory jádra k těmto vlastním číslům označíme  $\vec{a}_k$ , tzn. řešíme rovnice

$$(\mathbb{U} - \omega_k^2 \mathbb{T}) \vec{a}_k = 0. \quad (1.58)$$

Pro daný mód je obecným řešením lineární superpozice

$$\vec{\xi}_k(t) = \vec{a}_k (c_1 e^{i\omega_k t} + c_2 e^{-i\omega_k t}). \quad (1.59)$$

Přejdeme-li k reálnému řešení (volbou  $c_2 = \bar{c}_1$ ):

$$\vec{\xi}_k(t) = A_k \vec{a}_k \cos(\omega_k t + \varphi_k). \quad (1.60)$$

Obecné řešení nalezené metodou módů je pak lineární superpozice všech módů:

$$\vec{\xi}(t) = \sum_{k=1}^n A_k \vec{a}_k \cos(\omega_k t + \varphi_k). \quad (1.61)$$

Konstanty úhlových rychlostí  $\omega_k$  a vektorů amplitud  $\vec{a}_k$  jsou dané fyzikálním systémem, tzn. například hmotnostmi jednotlivých závaží a tuhostmi jednotlivých pružin. Integrační konstanty amplitudy módů  $A_k$  a fázových posuvů  $\varphi_k$  jsou dané počátečními podmínkami, tzn. například počátečními polohami a rychlostmi jednotlivých závaží.

Našli jsme metodou módů úplné řešení pohybových rovnic (1.52)? Pohybových rovnic je celkem  $n$  a jsou druhého řádu. Očekáváme tedy, že úplné řešení bude záviset na  $2n$  integračních konstantách. Nalezených módů je celkem  $n$  a každý obsahuje integrační konstanty amplitudy módu a jeho fázového posunu, celkem tedy  $2n$  integračních konstant. Můžeme tedy konstatovat, že jsme našli úplné (obecné) řešení rovnic (1.52).

Jelikož hledáme kořeny tvaru  $\omega^2$ , potřebujeme, aby tyto vycházely kladné. To je zajištěno, pokud jsou matice  $\mathbb{T}$  a  $\mathbb{U}$  pozitivně definitní. Pro fyzikální systémy, které vychylujeme ze stabilní rovnovážné polohy, je toto vždy splněno; podrobně viz sekce 1.9.

Může se stát, že některé  $\omega_k$  je násobným kořenem sekulární rovnice. Pak se jedná o tzv. degenerovanou úlohu. Nestane se ovšem nic jiného než to, že příslušné úhlové frekvenci  $\omega_k$  přísluší více lineárně nezávislých vektorů poměrů amplitud  $\vec{a}$  (tzn. pro dané  $\omega_k$  je jádro matice  $\mathbb{U} - \omega_k^2 \mathbb{T}$  vícedimenzionální).

### 1.7.3 Kuchařka

Rychle zopakujme kroky, kterými se dostaneme k obecnému řešení metodou módů.

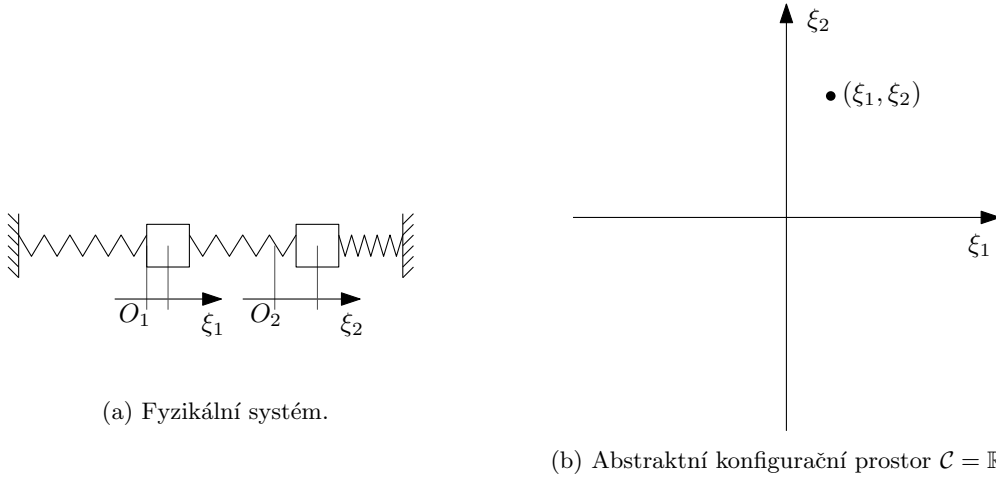
1. Zavedu souřadnice  $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ , které odměřují výchylku z rovnovážné polohy.
2. Napíši pohybové rovnice ve tvaru  $\mathbb{T}\ddot{\vec{\xi}} + \mathbb{U}\vec{\xi} = 0$ , kde  $\mathbb{T}, \mathbb{U} \in \mathbb{R}^{n,n}$  jsou symetrické konstantní matice. Pokud nutno, použiji aproximaci malých kmitů.
3. Předpokládám řešení ve tvaru  $\vec{\xi}(t) = \vec{a}e^{i\omega t}$ ,  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  je konstantní vektor poměrů amplitud.
4. Dosadím do pohybových rovnic a požaduji netrivialitu řešení, tzn.  $\vec{a} \neq 0$ . Dostanu  $(\mathbb{U} - \omega^2 \mathbb{T}) \vec{a} = 0$ . Tyto podmínky vedou na tzv. sekulární rovnici  $|\mathbb{U} - \omega^2 \mathbb{T}| = 0$ .
5. Sekulární rovnice je polynom  $n$ -tého stupně v  $\omega^2$ . Najdu příslušné kořeny  $\omega_k^2$ . K nim najdu příslušné vlastní vektory  $\vec{a}_k$  jako řešení rovnice  $(\mathbb{U} - \omega_k^2 \mathbb{T}) \vec{a}_k = 0$ .
6. Obecné řešení pohybu je pak tvaru

$$\vec{\xi}(t) = \sum_{k=1}^n A_k \vec{a}_k \cos(\omega_k t + \varphi_k).$$

## 1.8 Normální souřadnice

Polohu našeho fyzikálního systému reprezentujeme  $n$ -ticí souřadnic  $\vec{\xi}$ . Místo toho, abychom si tuto polohu představovali například u mechanického systému jako konkrétní pozici jednotlivých těles, zavedeme si abstraktní pojem *konfiguračního prostoru*  $\mathcal{C}$ . Ten bude představovat abstraktní množinu všech možných poloh daného fyzikálního systému. Každý bod  $p \in \mathcal{C}$  pak představuje konkrétní polohu například závaží a pružinek.

V našem případě je situace poměrně jednoduchá. Naše souřadnice  $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$  odměří kartézské výchylky těles z rovnovážné pozice a tím jednoznačně určují polohu těchto těles. Za konfigurační prostor tedy můžeme považovat přímo prostor souřadnic<sup>11</sup>,  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$ . Na obrázku 1.7 je jako příklad znázorněn konfigurační prostor pro jednoduchý mechanický systém.



Obrázek 1.7: Konfigurační prostor pro podélně kmitající systém dvou závaží a tří pružinek.

Normální souřadnice  $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^n$  jsou definované tak, že kmitá-li systém v  $i$ -tém módu platí

$$\eta_i = A \cos(\omega_i t + \varphi), \quad \eta_k = 0, \quad k \neq i. \quad (1.62)$$

Tohoto chování docílíme, namíříme-li nové souřadné osy  $\eta_i$  ve směrech vektorů  $\vec{a}_i$  (původní souřadné osy míří ve směrech vektorů standardní báze  $\vec{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ). Reprezentace  $i$ -tého módu v původních a normálních souřadnicích tedy je

$$\vec{\xi}(t) = A \vec{a}_i \cos(\omega_i t + \varphi), \quad \vec{\eta}(t) = A \vec{e}_i \cos(\omega_i t + \varphi). \quad (1.63)$$

Transformační vztah mezi původními souřadnicemi  $\vec{\xi}$  a normálními souřadnicemi  $\vec{\eta}$  vypadá následovně:

$$\vec{\xi} = \mathbb{A} \vec{\eta}, \quad (1.64)$$

kde matice  $\mathbb{A}$ ,

$$\mathbb{A} = \left( \left( \vec{a}_1 \right) \quad \dots \quad \left( \vec{a}_n \right) \right), \quad (1.65)$$

je matice tvořená sloupcovými vektory  $\vec{a}_i$ . Tento transformační vztah má přesně vlastnost popsanou výše – převádí řešení tvaru (1.63) pro  $\vec{\eta}(t)$  na  $\vec{\xi}(t)$ .

<sup>11</sup>Samozřejmě záleží, jestli dává smysl volit zcela libovolnou polohu  $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$ . Např. v aproximaci malých kmitů vyžadujeme, aby  $\vec{\xi}$  bylo blízko 0. Můžeme se na to ale také dívat tak, že v aproximaci malých kmitů jsme dostali matematické pohybové rovnice, které dávají (matematický) smysl pro jakékoliv  $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$ .

V normálních souřadnicích jsou pohybové rovnice tvaru

$$\ddot{\eta}_k + \omega_k^2 \eta_k = 0, \quad (1.66)$$

tzn. systém se z matematického hlediska jeví jako soubor  $n$  nezávislých harmonických oscilátorů.

K definici normálních souřadnic se často ještě přidává následující normalizační podmínka

$$\vec{a}_i^T \mathbb{T} \vec{a}_i = 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.67)$$

Tato nám fixuje velikost vektorů  $\vec{a}_i$  – tedy měřítko na nových souřadnicových osách  $\eta_i$ . Tyto souřadnice stále nejsou definovány jednoznačně. Máme volnost ve výběru znamének vektorů  $\vec{a}_i$  a také v případě degenerované úlohy máme volnost ve výběru báze příslušného více dimenzionálního vlastního podprostoru. Nicméně, formální definice je následující:

**Definice:** Nechtě  $\vec{a}_i, i \in \{1, \dots, n\}$  jsou vlastní vektory úlohy  $(\mathbb{U} - \omega^2 \mathbb{T})\vec{a} = 0$  normalizované podmínkou  $\vec{a}_i^T \mathbb{T} \vec{a}_i = 1, i \in \{1, \dots, n\}$ . Normální souřadnice  $\vec{\eta}$  jsou definované vztahem

$$\vec{\xi} = \mathbb{A} \vec{\eta}, \quad (1.68)$$

kde  $\mathbb{A}$  je matice definovaná v (1.65).

V těchto souřadnicích platí

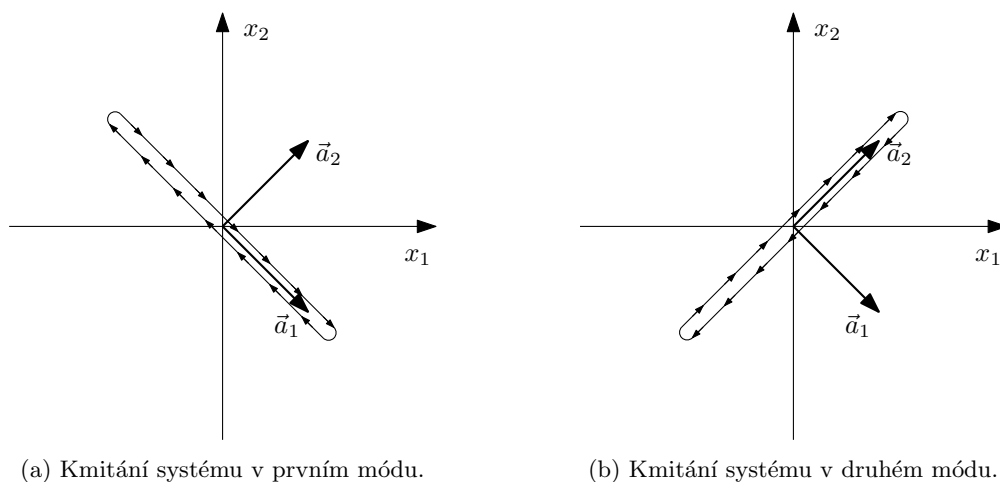
$$\mathbb{A}^T \mathbb{T} \mathbb{A} = \mathbb{I}, \quad \mathbb{A}^T \mathbb{U} \mathbb{A} = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2), \quad (1.69)$$

viz další kapitola. Dosazením definice (1.68) do pohybových rovnic (1.52) (a vynásobením maticí  $\mathbb{A}^T$ ) dospějeme za použití vztahů (1.69) k již zmíněnému tvaru pohybových rovnic v normálních souřadnicích (1.66).

**Příklad.** Ilustrujme pojem normálních souřadnic na příkladě podélných kmitů dvou závaží na třech pružinkách (viz obrázek 1.7). Obecné řešení je tvaru (pro  $m_1 = m_2 = m, k_1 = k_2 = k_3 = k$ ):

$$\vec{x}(t) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (1.70)$$

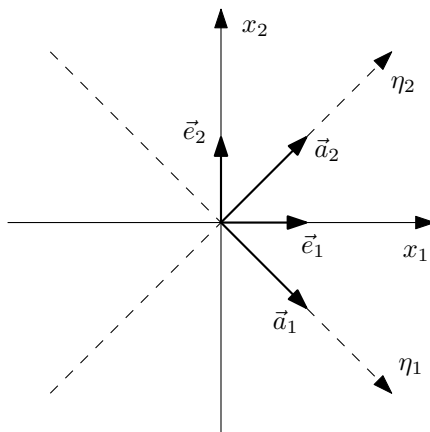
Pokud vybudíme první mód, bude systém opisovat úsečku ve směru vektoru  $\vec{a}_1$ ; analogicky pokud vybudíme druhý mód. Viz obrázek 1.8.



Obrázek 1.8: Schematicky zakreslené trajektorie v konfiguračním prostoru systému kmitajícím v jednotlivých módech.



Chtěli bychom nyní zavést nové souřadnice  $(\eta_1, \eta_2)$ , které budou mít takovou vlastnost, že kmitá-li systém v prvním módu, tak celý pohyb bude popisovat pouze souřadnice  $\eta_1$  a druhá souřadnice  $\eta_2$  bude nulová. Analogicky pro systém vybuzený do druhého módu, pak chceme  $\eta_1 = 0$  a pouze  $\eta_2$  popisující polohu systému. Podíváme-li se znovu na obrázek 1.8, vidíme, že stačí vést nové souřadné osy ve směrech vektorů  $\vec{a}_1$  a  $\vec{a}_2$ , což je znázorněno na obrázku 1.9.



Obrázek 1.9: Normální souřadnice  $(\eta_1, \eta_2)$  míří ve směrech vektorů poměru amplitud  $\vec{a}_1$  a  $\vec{a}_2$ . Bazické vektory  $\vec{e}_1$  a  $\vec{e}_2$  míří ve směrech os  $x_1$  a  $x_2$ .

Chceme tedy přejít od souřadnic  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  k novým souřadnicím  $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$  pomocí matice přechodu  $\mathbb{A}$  definované jako  $\vec{x} = \mathbb{A} \vec{\eta}$  (a tedy také  $\vec{\eta} = \mathbb{A}^{-1} \vec{x}$ ).

Potřebujeme matici  $\mathbb{A}$  takovou, že když jí předhodíme souřadnice  $\vec{\eta} = (1, 0)^T$ , tak dostaneme vektor  $\vec{a}_1$  a když vektor  $\vec{\eta} = (0, 1)^T$ , tak dostaneme vektor  $\vec{a}_2$ . Tuto podmínku zjevně splňuje následující matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} (\vec{a}_1) & (\vec{a}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.71)$$

tzn. do sloupců dáme jednotlivé vektory  $\vec{a}_i$ . Rozepsáno po složkách (do jednotlivých souřadnic) máme

$$x_1 = \eta_1 + \eta_2, \quad x_2 = -\eta_1 + \eta_2, \quad \eta_1 = \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad \eta_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (1.72)$$

V těchto normálních souřadnicích vypadá pohyb systému následovně:

$$\vec{\eta}(t) = \begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = \begin{pmatrix} A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{pmatrix}. \quad (1.73)$$

V tomto příkladu jsme pro jednoduchost vynechali krok s normalizací vektorů  $\vec{a}$ .

## 1.9 \*Malé kmity teoreticky

V této kapitole odpovíme na několik vtíravých otázek. Budou vlastní čísla  $\lambda_k = \omega_k^2$  vždy reálná a kladná? Budeme mít vždy tolik vlastních vektorů, aby vytvořily bázi  $\mathbb{R}^n$ ? Jaktože přechod k normálním souřadnicím současně diagonalizuje matice  $\mathbb{T}$  a  $\mathbb{U}$ ?

V úloze malých kmitů pracujeme se souřadnicemi  $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$ . Uvažujme tento prostor jako vektorový prostor  $V = \mathbb{R}^n$  dimenze  $n$ . V něm máme standardní bázi  $\mathcal{E} = (\vec{e}_i)_{i=1}^n$ , kde

$$\vec{e}_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-tá složka}}, 0, \dots, 0)^T. \quad (1.74)$$

Definujme nyní bilineární formy  $T$  a  $U$ ,

$$T : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad U : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.75)$$

tak, že  $(T)_{\mathcal{E}} = \mathbb{T}$  a  $(U)_{\mathcal{E}} = \mathbb{U}$ , tzn. aby matice těchto bilineárních forem<sup>12</sup> ve standardní bázi  $\mathcal{E}$  byly právě matice kinetické a potenciální energie. Jelikož matice  $\mathbb{T}$  je pozitivně definitní, tak je pozitivně definitní i forma  $T$ . Symetrická pozitivně definitní bilineární forma  $T$  definuje skalární součin na  $V$ ,  $\langle \bullet, \bullet \rangle_T$ . Označme libovolnou<sup>13</sup> ortonormální bázi (dle skalárního součinu  $T$ )  $\mathcal{F} = (\vec{f}_i)_{i=1}^n$ . Tzn.  $\langle \vec{f}_i, \vec{f}_j \rangle_T = T(\vec{f}_i, \vec{f}_j) = \delta_{ij}$ .

Vztah mezi bázemi  $\mathcal{E}$  a  $\mathcal{F}$  je daný následovně pomocí regulární matice přechodu  $\mathbb{S}$ ,

$$\vec{f}_i = \sum_{j=1}^n \mathbb{S}_{ji} \vec{e}_j \quad (1.76)$$

(tento vztah definuje matici  $\mathbb{S}$ ). Při přechodu mezi bázemi se matice bilineárních forem transformují

$$(B)_{\mathcal{F}} = \mathbb{S}^T (B)_{\mathcal{E}} \mathbb{S}. \quad (1.77)$$

Konkrétně pro bilineární formy  $T$  a  $U$ :

$$(T)_{\mathcal{F}} = \mathbb{S}^T \mathbb{T} \mathbb{S} = \mathbb{I}, \quad (U)_{\mathcal{F}} = \mathbb{S}^T \mathbb{U} \mathbb{S}. \quad (1.78)$$

Jelikož  $\mathcal{F}$  je ON báze vzhledem k  $T$ , je matice  $(T)_{\mathcal{F}}$  jednotková. Z transformačního vztahu formy  $T$  můžeme vyjádřit  $\mathbb{T}^{-1} = \mathbb{S} \mathbb{S}^T$ . Označme  $\tilde{\mathbb{U}} = (U)_{\mathcal{F}}$ , tato matice je symetrická:

$$\tilde{\mathbb{U}}^T = (\mathbb{S}^T \mathbb{U} \mathbb{S})^T = \mathbb{S}^T \mathbb{U}^T \mathbb{S} = \mathbb{S}^T \mathbb{U} \mathbb{S} = \tilde{\mathbb{U}}, \quad (1.79)$$

(a reálná). Teorie lineární algebry říká, že symetrická matice má reálná vlastní čísla  $\lambda_k$  a lze zvolit vektory  $\vec{a}_k$  z vlastních podprostorů tak, aby tvořily ortonormální bázi  $\mathcal{A} = (\vec{a}_i)_{i=1}^n$  vektorového prostoru  $V$  vzhledem ke skalárnímu součinu  $T$ . Jelikož je forma  $U$  pozitivně definitní, všechna její vlastní čísla musí být kladná,  $\lambda_i = \omega_{i\tilde{}}^2 > 0$ .

Zde jsme hledali vlastní čísla matice  $\tilde{\mathbb{U}}$ , tzn. řešili jsme úlohu

$$\tilde{\mathbb{U}}(\vec{a})_{\mathcal{F}} = \lambda(\vec{a})_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{S}^T \mathbb{U} \mathbb{S}(\vec{a})_{\mathcal{F}} = \lambda(\vec{a})_{\mathcal{F}}. \quad (1.80)$$

(symbolem  $(\vec{a})_{\mathcal{F}}$  vyznačujeme, že řešením těchto lineárních rovnic jsou složky vektorů  $\vec{a}$  v bázi  $\mathcal{F}$ ). Po vynásobení této rovnice maticí  $\mathbb{S}$  máme

$$\mathbb{S} \mathbb{S}^T \mathbb{U} (\mathbb{S}(\vec{a})_{\mathcal{F}}) = \lambda (\mathbb{S}(\vec{a})_{\mathcal{F}}) \rightarrow \mathbb{T}^{-1} \mathbb{U} (\mathbb{S}(\vec{a})_{\mathcal{F}}) = \lambda (\mathbb{S}(\vec{a})_{\mathcal{F}}). \quad (1.81)$$

Pro transformační vztah vektorů mezi bázemi  $\mathcal{E}$  a  $\mathcal{F}$  platí  $(\vec{v})_{\mathcal{F}} = \mathbb{S}^{-1}(\vec{v})_{\mathcal{E}}$ . Složky vektorů ve standardní bázi  $\mathbb{R}^n$  budeme značit pouze  $\vec{v}$ . Tzn.  $\mathbb{S}(\vec{a})_{\mathcal{F}} = \vec{a}$  a z rovnice (1.80) tedy plyne

$$\mathbb{T}^{-1} \mathbb{U} \vec{a} = \lambda \vec{a} \leftrightarrow (\mathbb{U} - \lambda \mathbb{T}) \vec{a} = 0. \quad (1.82)$$

Tím jsme ukázali, že vektory  $\vec{a}$  nalezené v metodě módů nejsou nic jiného než složkové vyjádření abstraktních vektorů  $\vec{a}$  ve standardní bázi  $\mathcal{E}$  ve vektorovém prostoru vybaveném formami  $T$  a  $U$ .

V bázi  $\mathcal{A} = (\vec{a}_i)_{i=1}^n$  je  $(T)_{\mathcal{A}} = \mathbb{I}$ , jelikož je to ON báze ( $\langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle_T = \delta_{ij}$ ), a zároveň  $(U)_{\mathcal{A}} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , jelikož je to báze tvořená vlastními vektory formy  $U$ . Definujeme-li matici přechodu  $\mathbb{A}$  jako

$$\vec{a}_i = \sum_{j=1}^n \mathbb{A}_{ji} \vec{e}_j, \quad (1.83)$$

<sup>12</sup>Matice bilineární formy  $B$  v bázi  $\mathcal{E} = (\vec{e}_i)_{i=1}^n$  je definována jako  $(B)_{\mathcal{E}} = \mathbb{B}_{ij} = B(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ .

<sup>13</sup>Libovolnou, ale danou. Tato báze bude pouze pomocná v našem snažení.

pak bude platit

$$\mathbb{A}^T \mathbb{T} \mathbb{A} = \mathbb{I}, \quad \mathbb{A}^T \mathbb{U} \mathbb{A} = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2). \quad (1.84)$$

Standardní báze má složky  $(\vec{e}_i)_k = \delta_{ik}$ , po dosazení do definice matice přechodu  $\mathbb{A}$  (1.83) máme

$$(\vec{a}_i)_k = \mathbb{A}_{ki}, \quad (1.85)$$

tedy že matici  $\mathbb{A}$  získáme tak, že vektory  $\vec{a}$  (resp. jejich složky ve standardní bázi) naskládáme vedle sebe do sloupců:

$$\mathbb{A} = \left( \left( \begin{array}{c} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{array} \right) \right). \quad (1.86)$$

## 1.10 \*Tlumené malé kmity

Pohybové rovnice s tlumením

$$\mathbb{T} \ddot{\xi} + \mathbb{I} \dot{\xi} + \mathbb{U} \xi = 0, \quad (1.87)$$

kde **matice tlumení**  $\mathbb{I}$  je symetrická,  $\mathbb{I}^T = \mathbb{I}$ , pozitivně definitní (a reálná). Typicky  $\mathbb{I} = \text{diag}(2\delta_1, \dots, 2\delta_n)$ .

Uvažujme opět *ansatz* v podobě módu  $\vec{\xi}(t) = \vec{a} e^{\lambda t}$ , kde  $\vec{a} \in \mathbb{C}^n$  je konstantní (obecně komplexní) vektor. Dosazením dostanu tzv. kvadratickou úlohu vlastních čísel

$$(\lambda^2 \mathbb{T} + \lambda \mathbb{I} + \mathbb{U}) \vec{a} = 0 \quad (1.88)$$

vedoucí na sekulární rovnici

$$\det(\lambda^2 \mathbb{T} + \lambda \mathbb{I} + \mathbb{U}) = 0, \quad (1.89)$$

kde levá strana je polynom stupně  $2n$ . Při dostatečně slabém tlumení jsou kořeny komplexní. Jelikož máme polynom s reálnými koeficienty, jsou kořeny tvořené dvojicemi komplexně sdružených kořenů (je-li  $\lambda$  kořen, pak je i  $\bar{\lambda}$  kořen). Ke komplexně sdruženému kořenu  $\bar{\lambda}$  přísluší komplexně sdružený vektor  $\bar{\vec{a}}$ . Máme tedy vždy dvojice řešení

$$\vec{\xi}_1(t) = \vec{a} e^{\lambda t}, \quad \vec{\xi}_2(t) = \bar{\vec{a}} e^{\bar{\lambda} t}. \quad (1.90)$$

Uvažujme obecnou lineární kombinaci těchto řešení (která je z linearity pohybových rovnic také řešením) pro daný kořen  $\lambda$  (a k němu komplexně sdružený  $\bar{\lambda}$ ):

$$\vec{\xi}(t) = c_1 \vec{a} e^{\lambda t} + c_2 \bar{\vec{a}} e^{\bar{\lambda} t}. \quad (1.91)$$

Zapíšeme-li nyní  $\lambda = -\kappa + i\omega$ , kde  $\kappa > 0$ , a složky vektoru  $a_j \in \mathbb{C}$  v goniometrickém tvaru jako  $a_j = |a_j| e^{i\alpha_j}$  dostaneme

$$\xi_j(t) = |a_j| e^{-\kappa t} \left( c_1 e^{i(\omega t + \alpha_j)} + c_2 e^{-i(\omega t + \alpha_j)} \right). \quad (1.92)$$

Požadujeme-li reálné řešení, pak opět platí podmínka  $c_2 = \bar{c}_1$ . Stejným způsobem jako u řešení rovnice harmonického oscilátoru můžeme přejít k řešení tvaru

$$\xi_j(t) = A |a_j| e^{-\kappa t} \cos(\omega t + \alpha_j + \varphi), \quad (1.93)$$

kde konstanty  $A$  a  $\varphi$  (vzniklé z konstanty  $c_1 = a - ib$ ) jsou dané počátečními podmínkami. Vidíme, že pro tlumený systém obecně nekmitají všechny části systému ve fázi! Každý stupeň volnosti je fázově posunut o úhel  $\alpha_j$ !

Obecné řešení je pak dáno superpozicí všech módů (kterých je  $n$ ):

$$\xi_j(t) = \sum_{k=1}^n A_k |a_j^{(k)}| e^{-\kappa_k t} \cos(\omega_k t + \alpha_j^{(k)} + \varphi_k), \quad (1.94)$$

kde jsme označili jednotlivé kořeny jako  $\lambda_k = -\kappa_k + i\omega_k$  a k nim příslušné vlastní vektory jako  $\vec{a}^{(k)}$  a jejich složky  $a_j^{(k)} = |a_j^{(k)}| e^{i\alpha_j^{(k)}}$ .

## 1.11 \*Buzené malé kmity

Nyní uvažujeme pohybové rovnice tlumených malých kmitů s nenulovou pravou tvarou ve tvaru harmonické budící síly

$$\mathbb{T}\ddot{\xi} + \mathbf{\Gamma}\dot{\xi} + \mathbb{U}\xi = \vec{F}e^{i\Omega t}, \quad (1.95)$$

kde  $\vec{F} \in \mathbb{C}^n$ . Zapišeme-li  $F_j = |F_j|e^{i\beta_j}$  můžeme interpretovat čísla  $|F_j|$  jako amplitudy budící síly na jednotlivých stupních volnosti a  $\beta_j$  jako fázový posun harmonické budící síly na jednotlivých stupních volnosti.

Uvažujme nyní *ansatz*

$$\vec{\xi}(t) = \vec{a}e^{i\Omega t}, \quad (1.96)$$

který je kombinací *ansatzů* z buzených kmitů harmonického oscilátoru a z metody módů,  $\vec{a} \in \mathbb{C}^n$ . Po dosazení do pohybových rovnic dostaneme

$$(-\Omega^2\mathbb{T} + i\Omega\mathbf{\Gamma} + \mathbb{U})\vec{a} = \vec{F}. \quad (1.97)$$

Vektor  $\vec{a}$  pak z předchozí rovnice získáme jednoduše inverzí matice  $\mathbb{A} = -\Omega^2\mathbb{T} + i\Omega\mathbf{\Gamma} + \mathbb{U}$ :

$$\vec{a} = (-\Omega^2\mathbb{T} + i\Omega\mathbf{\Gamma} + \mathbb{U})^{-1}\vec{F}. \quad (1.98)$$

Tato inverze existuje, jelikož determinant matice  $\mathbb{A}$  je nenulový. Proč tomu tak je? Matice  $\mathbb{A}$  je vlastně matice v rovnici (1.89), když nahradíme  $\lambda = i\Omega$ . Pro slabé tlumení existují pouze komplexní kořeny  $\lambda$  s nenulovou reálnou částí. Reálné  $\Omega$  (tzn. ryze imaginární  $\lambda$ ) tedy nemůže být kořenem a tudíž musí být  $\det \mathbb{A}$  nenulový.

Vlastní řešení pro reálnou budící sílu je pak

$$\xi_j(t) = \text{Re} [|a_j|e^{i\alpha_j}e^{i\Omega t}] = |a_j| \cos(\Omega t + \alpha_j), \quad (1.99)$$

kde jsme opět zapsali složky vektoru  $\vec{a}$  v goniometrickém tvaru jako  $a_j = |a_j|e^{i\alpha_j}$ . Čísla  $|a_j|$  pak představují vybuzené amplitudy v jednotlivých stupních volnosti a čísla  $\alpha_j$  pak fázové posunutí oproti budící síle (která sama o sobě mohla být různě posunutá v jednotlivých stupních volnosti pomocí konstant  $\beta_j$ ).

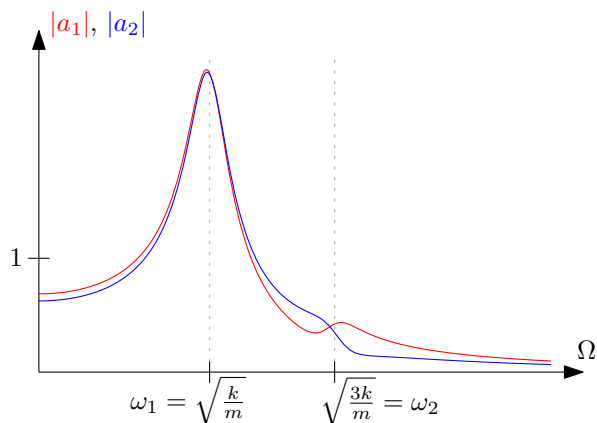
**Příklad.** Uvažujme opět podélné kmity dvou závaží na pružinách se stejnými hmotnostmi těles a stejnými tuhostmi pružin. Tlumící matice buď  $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(\gamma, \gamma)$ . Máme dva stupně volnosti a budící síla má dvě složky  $\vec{F} = (F_1, F_2)$ . Uvažujme  $\beta_i = 0$  a tedy  $F_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .

Na obrázcích 1.10, 1.11 a 1.12 jsou rezonanční křivky pro tři různé tvary budící síly  $\vec{F}$ . Na obrázcích jsou vyneseny absolutní hodnoty jednotlivých složek vektoru  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ . Červeně je znázorněna složka  $|a_1|$  a modře složka  $|a_2|$ .

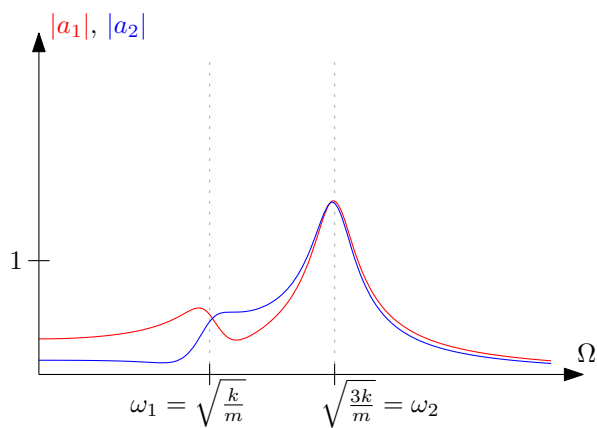
Uvědomme si, že dva módy nebuzeného netlumeného systému mají tvary  $\vec{a} = (1, 1)$  a  $\vec{a} = (1, -1)$ . V závislosti na tvaru „budícího vektoru“  $\vec{F}$  se mohou vyskytovat anebo naopak chybět rezonanční peaky nad jednotlivými vlastními frekvencemi buzeného systému.

Toto odlišuje jednotlivé obrázky. Na prvním je budící síla nastavená tak, že budí primárně mód s vektorem  $\vec{a} = (1, 1)$ . Na druhém naopak pozorujeme rezonanční peak nad módem s

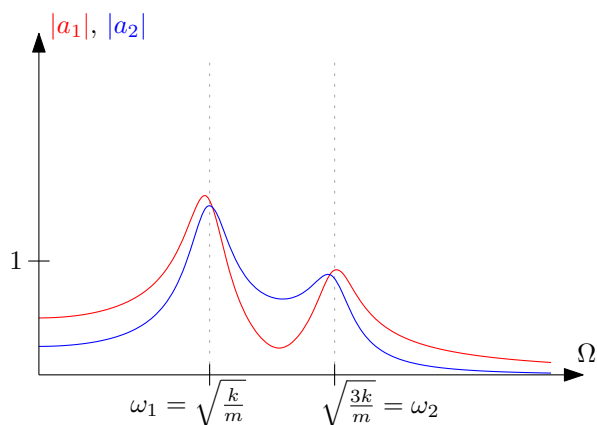
$\vec{a} = (1, -1)$ . Třetí obrázek znázorňuje situaci s budící silou, která „nepreferuje“ ani jeden z módů.



Obrázek 1.10: Budící síla tvaru  $\vec{F} = (1; 0, 75)$  má rezonanční peak v blízkosti frekvence prvního módu.



Obrázek 1.11: Budící síla tvaru  $\vec{F} = (1; -0.75)$  má rezonanční peak v blízkosti frekvence druhého módu.



Obrázek 1.12: Síla tvaru  $\vec{F} = (1; 0)$  dokáže vybudit oba módy.

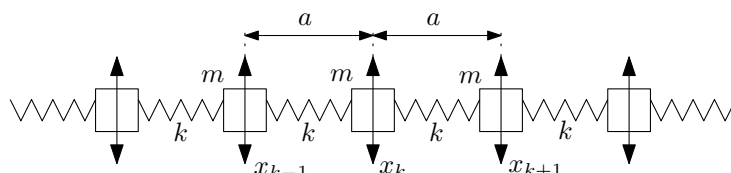


## Kapitola 2

# Kmity struny a postupné vlnění

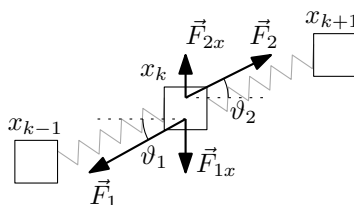
### 2.1 Řetízek atomů

Zkoumejme nejprve chování řady závaží o hmotnostech  $m$  spojené pružinami tuhosti  $k$ , viz obrázek 2.1. Tento model se dá považovat za 1D krystal – tzv. řetízek atomů. Také se na tento fyzikální systém dá pohlížet jako na diskrétně modelovanou strunu, lano, atp.



Obrázek 2.1: Řetízek atomů alias příčné kmity řady závaží.

Uvažujme příčné kmity tohoto systému a sestavme pohybové rovnice pro příčnou výchylku  $k$ -tého závaží  $x_k$ . Na obrázku 2.2 jsou znázorněné síly  $\vec{F}_1$  a  $\vec{F}_2$  od sousedních závaží, včetně jejich příčných průmětů  $\vec{F}_{1x}$ ,  $\vec{F}_{2x}$ .



Obrázek 2.2: Síly působící na  $k$ -té závaží.

Pohybová rovnice bude tvaru

$$m\ddot{x}_k = F_{1x} + F_{2x} = -|F_1|\sin\vartheta_1 + |F_2|\sin\vartheta_2, \quad (2.1)$$

kde úhly  $\vartheta_1$  a  $\vartheta_2$  svírají pružiny s vodorovným směrem. Délka nenatažené pružiny nechť je  $a_0$  a v rovnovážném stavu jsou tedy pružiny napjaté na napětí  $T = k(a - a_0)$ . V aproximaci malých výchylek můžeme uvažovat<sup>1</sup>, že  $|F_1| \approx |F_2| \approx T$  a že  $\sin\vartheta \approx \text{tg}\vartheta = \frac{\Delta x}{a}$ , kde  $\Delta x$  označuje rozdíl

<sup>1</sup>Stejného výsledku bychom bez velkých geometrických úvah dosáhli rozvinutím potenciálu

$$U(\Delta x) = \frac{1}{2}k \left( \sqrt{a^2 + \Delta x^2} - a_0 \right)^2$$

do druhého řádu Taylorova rozvoje.

sousedních poloh závaží spojených danou pružinou. Dosazením těchto předpokladů do rovnice (2.1) obdržíme

$$m\ddot{x}_k = \frac{T}{a}(x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}), \quad (2.2)$$

kde

$$\frac{T}{a} = k \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) = k' \quad (2.3)$$

představuje „efektivní“ tuhost pružin při příčných kmitech. Pokud bychom napsali příslušné matice kinetické a potenciální energie, měly by následující tvar:

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & m & & & \\ & & m & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathbb{U} = \frac{T}{a} \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

kde v případě konečného počtu závaží v řetízku bychom museli doplnit příslušné okrajové podmínky např. pevných konců, tj.  $x_0 = 0$  a  $x_{N+1} = 0$  (kde  $N$  je počet závaží).

### 2.1.1 Řešení řetízku

Hledejme řešení pohybových rovnic (2.2) pro nekonečný řetízek atomů, tzn. máme nekonečnou sadu rovnic pro každý index  $k \in \mathbb{Z}$ . Vezmeme si inspiraci z metody módů, kde se předpokládá řešení ve tvaru

$$\vec{x}(t) = \vec{a} e^{i\omega t}. \quad (2.5)$$

V našem případě má vektor  $\vec{a}$  nekonečně mnoho složek. Derivace složek *ansatzu* (2.5) vypadají takto

$$x_l(t) = a_l e^{i\omega t}, \quad \dot{x}_l(t) = i a_l \omega e^{i\omega t}, \quad \ddot{x}_l(t) = -\omega^2 a_l e^{i\omega t}, \quad (2.6)$$

a po dosazení do pohybových rovnic (a vykrácení exponenciály):

$$-m\omega^2 a_l = \frac{T}{a}(a_{l+1} - 2a_l + a_{l-1}). \quad (2.7)$$

Prostorový *ansatz*. Zkusme tvary módů  $\vec{a}$  najít na základě předpokladu, že na řetízku půjdou vybudit harmonické vlny. V komplexním zápisu uvažujme  $\text{Re } e^{i(kz+\varphi)}$ , kde za souřadnici  $z$  dosadíme příslušné (vodorovné) polohy jednotlivých závaží,  $z = la$ :

$$a_l = \text{Re } e^{i(kla+\varphi)} = \cos(kla + \varphi), \quad (2.8)$$

zatím neurčená konstanta  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  se nazývá *vlnové číslo*. Po dosazení *ansatzu* (2.8) do (2.7):

$$\text{Re} \left[ \left(2 - \frac{am}{T}\omega^2\right) e^{i(kla+\varphi)} \right] = \text{Re} \left[ e^{i(kla+\varphi)} \underbrace{\left(e^{ika} + e^{-ika}\right)}_{2 \cos ka} \right]. \quad (2.9)$$

Po vykrácení  $e^{i(kla+\varphi)}$  a vyjádření úhlové frekvence  $\omega$  máme

$$\frac{1 - \cos ka}{2} = \frac{am}{4T}\omega^2. \quad (2.10)$$

Člen s cosinem přepíšeme pomocí goniometrického vzorce pro dvojnásobný úhel a dostaneme vztah mezi úhlovou frekvencí  $\omega$  a vlnovým číslem  $k$ :

$$\omega^2 = \frac{4T}{am} \sin^2 \frac{ka}{2}. \quad (2.11)$$



Tomuto vztahu se obecně říká *disperzní vztah*. Dvojice parametrů  $\omega$  a  $k$  musí splňovat vztah (2.11), aby výraz

$$x_l(t) = (\operatorname{Re} e^{i(kla+\varphi)})(\operatorname{Re} e^{i\omega t}) = \cos(kla + \varphi) \cos \omega t \quad (2.12)$$

byl řešením pohybových rovnic (2.2). Řešení (2.12) je ve tvaru *stojaté vlny*,  $X(z) \cos(\omega t + \phi)$ , tzn. amplituda stálého tvaru vlny  $X(z)$  se harmonicky mění.

Disperzní vztah (2.11) má řešení pouze pro omezený rozsah úhlových frekvencí:

$$\omega \in \left\langle 0, \sqrt{\frac{4T}{am}} \right\rangle. \quad (2.13)$$

V řeči vlnových čísel  $k$  (a vlnových délek  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  vybuzených vln) to odpovídá intervalu:

$$\frac{ka}{2} \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \leftrightarrow k \in \left\langle 0, \frac{\pi}{a} \right\rangle \leftrightarrow \lambda \in \langle 2a, +\infty \rangle. \quad (2.14)$$

Na nekonečném řetízku atomů tedy můžeme vybudit stojaté vlny se spojitým rozsahem vlnových délek (a k nim je vždy příslušná daná úhlová frekvence taktéž ze spojitého rozsahu). Nelze ale vybudit stojatou vlnu s vlnovou délkou kratší než je dvojnásobek vzdálenosti mezi závažími  $2a$  (a zároveň s úhlovou frekvencí větší než  $\sqrt{\frac{4T}{am}}$ ).

Pro oblast frekvencí (a vlnových délek), pro která jsme našli řešení pohybových rovnic, říkáme, že je řetízek atomů *transparentní prostředí* – vlny daných parametrů v tomto prostředí mohou existovat (šířit se). Pro frekvence (a vlnové délky) mimo tuto oblast se prostředí nazývá *reaktivní*. Více o těchto dvou typech prostředí se dozvíte v kapitole věnované disperzním vztahům.

## 2.1.2 Spojitá limita

Model řetízku závaží je dobrým mikroskopickým modelem pro strunu. Nyní bychom chtěli přejít ke spojitému popisu tak, že budeme přibližovat atomy k sobě (zahušťovat je) – budeme limitně zmenšovat vzdálenost  $a$ ,  $a \rightarrow 0$ .

Uvažujme konečnou délku řetízku  $L$ , potom počet závaží je přibližně  $N = \frac{L}{a}$ . Rádi bychom drželi napětí na řetízku konstantní,  $T = \text{konst.}$ , musíme tedy příslušně zvyšovat tuhost pružin<sup>2</sup>  $k' = \frac{T}{a}$ . Také chceme zachovat celkovou hmotnost struny  $M$ , takže zmenšujeme hmotnost jednotlivých závaží  $\text{konst.} = \rho L = M = mN$ , tzn.  $m = \frac{M}{N}$  (zavedli jsme označení  $\rho$  jakožto délkové hustoty řetízku,  $[\rho] = \text{kg.m}^{-1}$ ).

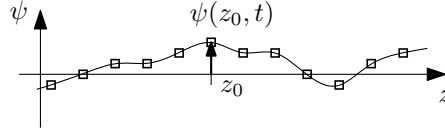
Dále zavedeme spojitý popis polohy, kdy od diskrétní sady funkcí polohy jednotlivých závaží  $x_l(t)$ , přejdeme k funkci dvou proměnných  $\psi(z, t)$ , která popisuje příčnou výchylku závaží na místě  $z$  v čase  $t$ . Závaží jsou jen na souřadnicích  $z = la, l \in \mathbb{Z}$ ,

$$x_l(t) = \psi(la, t), \quad (2.15)$$

pro ostatní body  $z$  může funkce  $\psi$  nabývat libovolných hodnot<sup>3</sup>. Pro ilustraci také viz obrázek 2.3.

<sup>2</sup>Je dobré si uvědomit, že toto není nějaká magie typu „aby to vyšlo“. Pokud vezmete pružinu délky  $a$  a tuhosti  $k$  a tuto rozpůlíte, vzniknou Vám dvě pružiny délky  $\frac{a}{2}$  a tuhosti  $2k$ ! Zvyšování tuhosti pružin předpisem  $\frac{T}{a}$  tedy jen znamená, že necháváme pružiny stejného typu, jen je zkracujeme. Toto je jednoduchý důsledek definice tuhosti  $k$  jako síly na jednotku vychýlení pružiny. Jdou snadno odvodit „zákony skládání pružin“ pro výsledné tuhosti paralelního a sériového zapojení pružin.

<sup>3</sup>Budeme potřebovat alespoň dvojnásobnou diferencovatelnost.



Obrázek 2.3: Funkce  $\psi(z, t)$  popisující výchylku závaží.

Po dosazení (2.15) do pohybových rovnic (2.2), přepisu  $m = \rho a$  a označení  $z = la$ :

$$(\rho a)\ddot{\psi}(z, t) = T \left( \frac{\psi(z+a, t) - \psi(z, t)}{a} - \frac{\psi(z, t) - \psi(z-a, t)}{a} \right), \quad (2.16)$$

kde symbolem  $\dot{\psi}$  rozumíme  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  (a obdobně symbolem  $\psi'$  budeme rozumět  $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ ). Zavedeme-li novou funkci  $\phi(z, t) = \frac{\psi(z+a, t) - \psi(z, t)}{a}$ , můžeme pohybové rovnice dále zapsat jako

$$\rho \ddot{\psi}(z, t) = T \frac{\phi(z, t) - \phi(z-a, t)}{a} \quad (2.17)$$

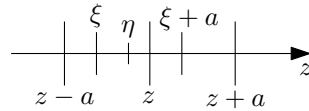
Nyní použijeme na pravé straně Lagrangeovu větu o střední hodnotě<sup>4</sup>:

$$\rho \ddot{\psi}(z, t) = T \phi'(\xi, t) = T \frac{\psi'(\xi+a, t) - \psi'(\xi, t)}{a}, \quad (2.18)$$

kde  $\xi \in (z-a, z)$ . Použijeme-li Lagrangeovu větu ještě jednou na nový zlomek na pravé straně vzniklý po dosazení z definice funkce  $\phi(z, t)$ , dostaneme

$$\rho \ddot{\psi}(z, t) = T \psi''(\eta, t), \quad (2.19)$$

kde  $\eta \in (\xi, \xi+a)$  a celkově  $\eta \in (z-a, z+a)$ . Schematicky je poloha bodů  $\xi$  a  $\eta$  znázorněna na obrázku 2.4.



Obrázek 2.4: Polohy bodů  $\xi$  a  $\eta$  na číselné ose. Lagrangeova věta říká, že  $\xi \in (z-a, z)$  a  $\eta \in (\xi, \xi+a)$ . Celkově můžeme říct, že  $\eta \in (z-a, z+a)$ .

V limitě  $a \rightarrow 0$  jde  $\eta \rightarrow z$  a výsledná rovnice tedy je<sup>5</sup>

$$\boxed{\rho \ddot{\psi}(z, t) = T \psi''(z, t), \quad \text{neboli} \quad \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(z, t) = T \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(z, t).} \quad (2.20)$$

<sup>4</sup>Pro funkci  $f$  diferencovatelnou na intervalu  $\langle a, b \rangle$  existuje bod  $c \in (a, b)$  takový, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

<sup>5</sup>Alternativně můžeme funkci  $\psi(z, t)$  rozvinout do Taylorovy řady

$$\psi(z + \Delta z, t) = \psi(z, t) + \frac{\partial \psi}{\partial z}(z, t) \Delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(z, t) \Delta z^2 + O(\Delta z^3).$$

Dosazením tohoto rozvoje do (2.16) (pro  $\Delta z \in \{a, -a\}$ ) dostaneme

$$\rho \ddot{\psi}(z, t) = T \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(z, t) + \frac{O(a^3)}{a^2} \right).$$

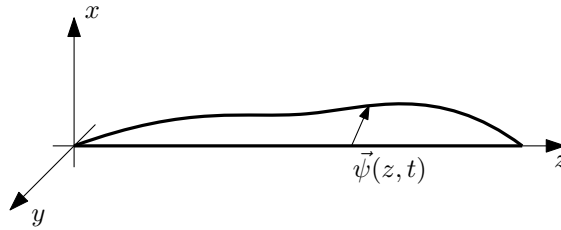
V limitě  $a \rightarrow 0$  člen  $O(a^3)$  vymizí (zbytek v Taylorově rozvoji má tu vlastnost, že limita  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{O(a^3)}{a^3}$  je konečná).

Tato rovnice se nazývá *vlnová rovnice* a budeme se s ní setkávat po celý zbytek semestru (skript).

Povšimněte si, že původní diskrétní rovnice (2.16) určovala hodnotu funkce  $\psi(z, t)$  pouze v bodech  $z = la$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . V limitě  $a \rightarrow 0$  se tyto body zahustily a výsledkem je rovnice pro všechna  $z \in \mathbb{R}$ .

## 2.2 Kmity struny a vlnová rovnice

Odvoďme vlnovou rovnici pro strunu ještě jednou, ale nyní rovnou ze spojitého popisu. Nechť je struna v klidu natažena podél osy  $z$  na napětí  $T$ . Výchylku bodu  $(z, 0, 0)$  budeme popisovat vektorem  $\vec{\psi}(z, t) = (\psi_x, \psi_y, \psi_z)$ , viz obrázek (2.5).



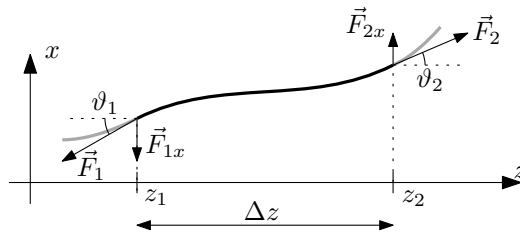
Obrázek 2.5: Výchylka struny z rovnovážné polohy je popisována vektorem  $\vec{\psi}(z, t)$ .

Složky  $\psi_x$  a  $\psi_y$  představují dvě nezávislé složky příčných výchylek – hovoříme o dvou polarizacích příčného vlnění. Složka  $\psi_z$  představuje podélné kmity ve struně. My budeme uvažovat pouze příčné kmity v jednom směru, tzn. omezíme se na tvar vektoru  $\vec{\psi} = (\psi_x, 0, 0)$  (a přestaneme psát index  $x$ ).

Uvažujme úsek struny mezi body  $z_1$  a  $z_2$ . Dle první věty impulsové je změna celkové hybnosti tohoto kousku struny úměrná výslednici vnějších sil,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(e)} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_x, \quad (2.21)$$

kde síly  $\vec{F}_1$ , resp.  $\vec{F}_2$ , působí na levý, resp. pravý, konec zvoleného úseku struny. Viz obrázek 2.6.



Obrázek 2.6: Síly  $\vec{F}_1$  a  $\vec{F}_2$  působící na úsek struny. V místě  $z_1$ , resp.  $z_2$ , svírá struna s vodorovným směrem úhel  $\vartheta_1$ , resp.  $\vartheta_2$ .

Budeme uvažovat pouze malé příčné kmity – z tohoto předpokladu budou plynout následující aproximace. Zajímají nás pouze příčné průměty sil,  $\vec{F}_{1x}$  a  $\vec{F}_{2x}$ :

$$F_{x1} = -|F_1| \sin \vartheta_1 \approx -T \operatorname{tg} \vartheta_1 = -T \frac{\partial \psi}{\partial z}(z_1, t), \quad F_{x2} = |F_2| \sin \vartheta_2 \approx T \operatorname{tg} \vartheta_2 = T \frac{\partial \psi}{\partial z}(z_2, t), \quad (2.22)$$

kde jsme využili předpoklad, že při malých výchylkách se velikost sil  $F_i$  jen málo liší od napětí struny v rovnovážné poloze  $T$  a funkci sinus můžeme nahradit funkcí tangens, kterou dále nahradíme derivací funkce  $\psi$  ve směru  $z$ .<sup>6</sup>

Podélné síly se v aproximaci malých výchylek přesně vyruší:

$$F_{z1} = -|F_1| \cos \vartheta_1 \approx -T, \quad F_{z2} = |F_2| \cos \vartheta_2 \approx T. \quad (2.23)$$

V první větě impulsové (2.21) je netriviální tedy pouze složka  $x$ . Její pravou stranu můžeme psát jako

$$F_x^{(e)} = T \left( \frac{\partial \psi}{\partial z}(z_2, t) - \frac{\partial \psi}{\partial z}(z_1, t) \right) = T \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(\xi, t), \quad (2.24)$$

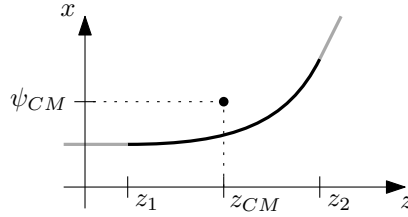
kde jsme použili Lagrangeovu větu o přírůstku funkce, tj.  $\xi \in (z_1, z_2)$  (podrobněji viz přechodí kapitola o spojitě limitě řetízku), a označili  $\Delta z = z_2 - z_1$ . Podívejme se dále podrobněji na levou stranu věty impulsové. Celkovou hybnost můžeme vyjádřit pomocí rychlosti těžiště  $\vec{V}_{CM}$ :

$$\vec{P} = M \vec{V}_{CM}, \quad \vec{V}_{CM} = (V_x, 0, 0), \quad (2.25)$$

kde  $M$  značí celkovou hmotnost vybraného úseku struny. Poloha těžiště je dána jako

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int_l \rho \vec{r} dl = \left( \psi_{CM}, 0, z_{CM} = \frac{z_1 + z_2}{2} \right), \quad (2.26)$$

kde  $\psi_{CM}$  jsme označili polohu těžiště na ose  $x$ , viz obrázek 2.7.



Obrázek 2.7: Těžiště úseku struny.

Výpočet  $\psi_{CM}$  dává

$$\psi_{CM}(t) = \frac{\rho}{M} \int_{z_1}^{z_2} \psi(z, t) dz = \frac{1}{\Delta z} \int_{z_1}^{z_2} \psi(z, t) dz = \psi(\eta, t) \frac{\Delta z}{\Delta z}, \quad (2.27)$$

kde jsme použili integrální větu o střední hodnotě<sup>7</sup>,  $\eta \in (z_1, z_2)$ . Levá strana věty impulsové tedy má tvar

$$\frac{dP_x}{dt} = M \frac{d^2}{dt^2} \psi_{CM} = M \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(\eta, t). \quad (2.28)$$

Celkový tvar první věty impulsové (její netriviální složka  $x$ ) v aproximaci malých výchylek je

$$\rho \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(\eta, t) = T \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(\xi, t). \quad (2.29)$$

Po vykrácení  $\Delta z$  můžeme provést limitu  $z_2 \rightarrow z_1$  a dospějeme k *vlnové rovnici*

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(z, t) = T \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(z, t)}. \quad (2.30)$$

<sup>6</sup>Kladné směry úhlů jsou voleny tak, aby korespondovaly s kladnou hodnotou derivace v daném bodě. Jelikož síla  $F_{1x}$  míří do záporného směru osy  $x$ , přidali jsme explicitní znaménko u jejího vyjádření.

<sup>7</sup>Pro funkci  $f$  spojitou na intervalu  $\langle a, b \rangle$  existuje bod  $c \in (a, b)$  takový, že

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) (b - a).$$

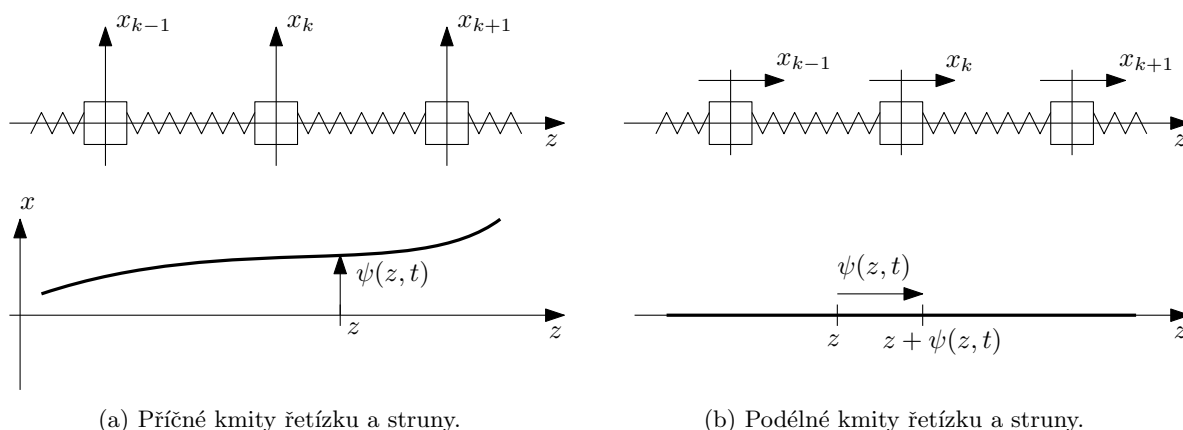
## 2.3 Podélné kmity

Porovnejme nyní příčné kmity s podélnými, které jsme u spojitého odvození vlnové rovnice rovnou vynechali. Pracujme znovu s diskretním modelem závaží a pružin a podívejme se na pravou stranu pohybových rovnic (2.2). U příčných kmitů zde vystupuje faktor  $k \left(1 - \frac{a_0}{a}\right)$ , pro podélné kmity by zde byl jednoduchý faktor  $k$ . Pro pružiny jejichž klidová délka  $a_0$  je blízká  $a$  bude platit

$$k \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) \ll k. \quad (2.31)$$

Tento předpoklad je pro model struny obvykle splněn. Při napínání struny je její prodloužení mnohem menší než její celková délka,  $\Delta l \ll l$ . Efektivní tuhost pružin pro příčné kmity je tedy daleko menší než tuhost pružin pro podélné kmity. Vybudit podélné kmity srovnatelné amplitudy je tedy daleko náročnější než u příčných kmitů. Proto jsme je v předchozím popisu mohli zanedbat.

Na závěr ještě srovnajme popisy výchylek pro podélné a příčné kmity pomocí funkce  $\psi(z, t)$  na obrázku 2.8.



(a) Příčné kmity řetízku a struny.

(b) Podélné kmity řetízku a struny.

Obrázek 2.8: Srovnání popisů podélných a příčných kmitů.

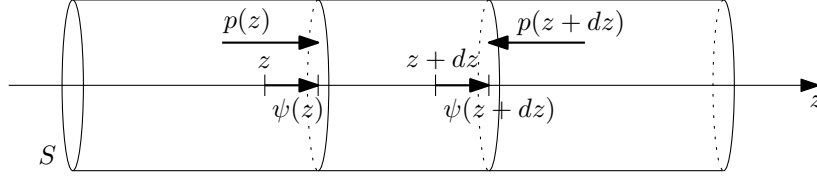
U příčných kmitů je poloha kousku struny dána vektorem  $(z, \psi(z, t))$ . U podélných kmitů je vychýlený kus struny na souřadnici  $z + \psi(z, t)$ .

## 2.4 Zvuk

Zvuk není nic jiného než podélné vlnění v materiálu. Odvodíme nyní vlnovou rovnici pro tlakové změny způsobené podélným vlněním v ideálním plynu. Uvažujme trubici plynu o průřezu  $S$  podél osy  $z$ . Podélné výchylky plynu z rovnovážné polohy opět popíšeme funkcí  $\psi(z, t)$ . Vezměme malý úsek trubice  $\langle z, z + dz \rangle$ , pak vlivem výchylek se plyn posune na pozici

$$\langle z + \psi(z, t), z + dz + \psi(z + dz, t) \rangle. \quad (2.32)$$

Na levý konec úseku plynu působí tlak  $p(z, t)$ , na pravý konec tlak  $p(z + dz, t)$ . Viz obrázek 2.9.



Obrázek 2.9: Trubice vzduchu a její malý úsek mezi body  $\langle z, z + dz \rangle$ . Funkce  $\psi(z, t)$  popisuje podélnou výchylku částic plynu z rovnovážné polohy. Funkce  $p(z, t)$  popisuje tlak v každém místě trubice.

Pohybová rovnice zvoleného úseku bude opět dána první větou impulsovou:

$$dM \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = p(z)S - p(z + dz)S, \quad (2.33)$$

kde  $dM = \rho dV = \rho_0 dV_0$ .  $dV_0$  označuje původní objem úseku,  $dV_0 = S dz$ ,  $dV$  je objem po posunutí o výchylku  $\psi(z, t)$ . Hmotnost sledovaného kousku zůstává konstantní, naše myšlená hranice se posouvá s přesunem molekul plynu. Objem  $dV$  se dá vyjádřit následujícím způsobem jako průřez krát délka:

$$dV = S \left( (z + dz + \psi(z + dz)) - (z + \psi(z)) \right) = S \left( 1 + \frac{\psi(z + dz) - \psi(z)}{dz} \right) dz = S \left( 1 + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dz. \quad (2.34)$$

Dalším důležitým předpokladem je, že děj v plynu je adiabatický – tedy, že se během změn tlaku nestihne vyměňovat teplo mezi jednotlivými částmi plynu<sup>8</sup>. Pro adiabatický děj v ideálním plynu platí

$$pV^\kappa = \text{konst.}, \quad (2.35)$$

kde  $\kappa$  je Poissonova konstanta příslušná danému plynu. V našem případě uvažujeme plyn v našem malém úseku o objemu  $dV$ , takže máme

$$p_0 (dV_0)^\kappa = p dV^\kappa, \quad (2.36)$$

kde  $p_0$  označuje tlak plynu v rovnovážné poloze. Vyjádříme-li tlak  $p$ :

$$p = p_0 \left( \frac{dV_0}{dV} \right)^\kappa = p_0 \left( 1 + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^{-\kappa} \approx p_0 \left( 1 - \kappa \frac{\partial \psi}{\partial z} \right), \quad (2.37)$$

kde jsme dosadili za  $dV$  z (2.34), za  $dV_0 = S dz$ , a v poslední rovnosti použili Taylorův rozvoj do prvního řádu funkce  $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ .

Rozdíl tlaků v různých místech na pravé straně rovnice (2.33) můžeme zapsat pomocí derivace:

$$\frac{p(z + dz) - p(z)}{dz} = \frac{\partial p}{\partial z} \approx -p_0 \kappa \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad (2.38)$$

kde jsme využili (2.37). Dosadíme-li nyní předchozí výsledek do pohybové rovnice (2.33) (po rozepsání  $dM = \rho_0 S dz$ ):

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = p_0 \kappa \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (2.39)$$

Toto je vlnová rovnice popisující podélné kmity v trubici s plynem. V případě, že bychom uvažovali izotermický děj (který splňuje  $pV = \text{konst.}$ ), chyběla by nám ve výsledku Poissonova konstanta  $\kappa$ .

V kapitole 2.8 uvidíme, že je-li vlnová rovnice zapsána ve tvaru  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$ , pak konstanta  $v$  představuje rychlost šíření vln v daném prostředí. Porovnáním s (2.39) můžeme psát, že

<sup>8</sup>Newton uvažoval děj izotermický. Rychlost zvuku ve vzduchu mu pak vyšla špatně.

rychlost zvuku je  $v = \sqrt{\frac{p_0 \kappa}{\rho_0}}$ . Po dosazení atmosférického tlaku  $p_0 = 101,325 \text{ kPa}$ , Poissonově konstantě  $\kappa = 1,4$  a hustotě suchého vzduchu při teplotě  $20^\circ\text{C}$   $\rho_0 = 1,2041 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  dostaneme  $v = 343,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Pro  $\kappa = 1$  by vyšlo  $v = 290,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

## 2.5 Kmity struny s pevnými konci

Uvažujme nyní strunu délky  $L$ , která je napjatá mezi body  $z = 0$  a  $z = L$ . Pohyb struny se řídí vlnovou rovnicí:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad z \in (0, L), t \in \mathbb{R}, \quad (2.40)$$

kde  $\rho_0$  je délková hustota a  $T_0$  je napětí na struně. Dále uvažujeme následující *okrajové podmínky* tzv. *pevných konců* – struna je na koncích nepohyblivě upevněna, tzn.

$$\psi(0, t) = 0, \quad \psi(L, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.41)$$

Řešení se pokusíme najít metodou *separace proměnných*. Předpokládáme řešení ve tvaru

$$\psi(z, t) = Z(z)T(t), \quad (2.42)$$

s neznámými funkcemi  $Z(z)$  a  $T(t)$  jedné proměnné. Pokud tento *ansatz* dosadíme do vlnové rovnice (2.40), obdržíme

$$Z(z)\ddot{T}(t) = \frac{T_0}{\rho_0} Z''(z)T(t), \quad (2.43)$$

pokud nyní tuto rovnici vydělíme  $Z(z)T(t)$  a vynásobíme  $\frac{\rho_0}{T_0}$ , obdržíme separovanou rovnici

$$\frac{Z''}{Z}(z) = \frac{\rho_0}{T_0} \frac{\ddot{T}}{T}(t), \quad \forall z, t \in \mathbb{R}, \quad (2.44)$$

kde levá strana je závislá pouze na proměnné  $z$  a pravá strana pouze na  $t$ . Jelikož tato rovnice musí být splněna pro všechna  $z, t \in \mathbb{R}$ , tak se levá a pravá strana musí rovnat společné konstantě<sup>9</sup>, označme ji  $C \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{Z''}{Z}(z) = C = \frac{\rho_0}{T_0} \frac{\ddot{T}}{T}(t). \quad (2.45)$$

Jednoduchou úpravou dospějeme ke dvěma obyčejným diferenciálním rovnicím pro funkce  $Z(z)$  a  $T(t)$  se zatím neurčenou konstantou  $C$ :

$$Z'' - CZ = 0, \quad \ddot{T} - C \frac{T_0}{\rho_0} T = 0. \quad (2.46)$$

Než se pustíme do řešení rovnic (2.46), podívejme se na okrajové podmínky (2.41), do kterých dosadíme *ansatz* (2.42):

$$\psi(0, t) = Z(0)T(t) = 0, \quad \psi(L, t) = Z(L)T(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.47)$$

<sup>9</sup>Zderivujeme-li rovnici (2.44) podle proměnné  $z$ , resp.  $t$ , obdržíme:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{Z''}{Z} \right) = 0, \quad 0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\rho_0}{T_0} \frac{\ddot{T}}{T} \right).$$

Pokud má funkce nulovou derivaci, musí tato funkce být konstantní:

$$\frac{Z''}{Z} = C_1, \quad \frac{\rho_0}{T_0} \frac{\ddot{T}}{T} = C_2.$$

Ukázali jsme tedy, že se levá, resp. pravá, strana rovnice (2.44) rovnají konstantě  $C_1$ , resp.  $C_2$ . Ale jelikož se levé strany výše napsaných rovnic rovnají pro  $\forall z, t$ , tak musí být  $C_1 = C_2$ .

Požadujeme-li netriviální  $T(t)$  (a tedy i nenulové řešení  $\psi(z, t)$ ), tak se okrajové podmínky (2.47) redukuje na:

$$Z(0) = 0, \quad Z(L) = 0. \quad (2.48)$$

Tyto tedy budeme muset splnit při řešení rovnice (2.46) pro funkci  $Z(z)$  se zatím neurčenou konstantou  $C$ . Řešení  $Z(z)$  je

$$Z(z) = c_1 e^{\sqrt{C}z} + c_2 e^{-\sqrt{C}z}, \quad (2.49)$$

kde  $c_1$  a  $c_2$  jsou integrační konstanty. Okrajové podmínky tedy vypadají následovně

$$Z(0) = c_1 + c_2 = 0, \quad Z(L) = c_1 e^{\sqrt{C}L} + c_2 e^{-\sqrt{C}L} = 0. \quad (2.50)$$

Po dosazení z první rovnice do druhé máme podmínku

$$c_1 e^{-\sqrt{C}L} (e^{2\sqrt{C}L} - 1) = 0 \quad (2.51)$$

Požadujeme netriviální řešení, tedy  $c_1 (= -c_2) \neq 0$ ; exponenciála  $e^{-\sqrt{C}L}$  je vždy nenulová; je tedy nutné, aby byl nulový výraz v závorce. To je možné pouze pro  $C < 0$ , tzn.  $\sqrt{C} = i\sqrt{|C|}$ , a tedy funkce  $Z(z)$  je tvaru

$$Z(z) = c_1 e^{i\sqrt{|C|}z} + c_2 e^{-i\sqrt{|C|}z} = a \cos(\sqrt{|C|}z) + b \sin(\sqrt{|C|}z), \quad (2.52)$$

kde v druhé rovnosti jsme přešli k reálnému řešení volbou  $c_2 = \bar{c}_1$ . Nyní nabývají okrajové podmínky (2.48) tvaru:

$$Z(0) = a = 0, \quad Z(L) = b \sin(\sqrt{|C|}L) = 0, \quad (2.53)$$

kde v druhé podmínce jsme již využili  $a = 0$ . Požadujeme-li netriviální řešení, je třeba  $b \neq 0$  a tím pádem musí být nulový sinus, což vede na podmínku:

$$\sqrt{|C|}L = m\pi, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.54)$$

To znamená, že přípustné konstanty  $C$ , pro které řešení splňuje okrajové podmínky, jsou číslované přirozenými čísly a konkrétně dané jako

$$C_m = -\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2. \quad (2.55)$$

Označme  $k_m = \frac{m\pi}{L}$ , pak můžeme psát  $\sqrt{|C_m|} = k_m = \frac{m\pi}{L}$  a tvar funkce  $Z(z)$  je

$$Z_m(z) = b_m \sin(k_m z). \quad (2.56)$$

Ještě nám ke každému přípustnému  $C_m$  (tzn. tomu splňujícímu okrajové podmínky) zbývá řešit příslušnou časovou rovnici pro  $T(t)$ , viz (2.46):

$$\ddot{T} + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \frac{T_0}{\rho_0} T = 0. \quad (2.57)$$

Tato má řešení tvaru:

$$T_m(t) = a_m \sin\left(\frac{m\pi}{L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} t + \varphi_m\right), \quad (2.58)$$



kde úhlová frekvence  $\omega_m$  lze napsat pomocí vlnového čísla  $k_m$  jako

$$\omega_m = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} k_m = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \frac{m\pi}{L}, \quad k_m = \frac{m\pi}{L}. \quad (2.59)$$

Výsledné řešení pohybu struny  $\psi_m(z, t)$  příslušející přípustné hodnotě konstanty  $C_m$  získáme dosazením do (2.42):

$$\psi_m(z, t) = Z_m(z)T_m(t) = A_m \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} t + \varphi_m\right), \quad (2.60)$$

kde jsme sdružili závislé integrační konstanty a pojmenovali je  $A_m = a_m b_m$ . Tyto řešení představují vibrační módy struny. Řešení vyšlo ve tvaru tzv. stojatých vln, tzn. ve tvaru  $\psi(z, t) = Z(z) \sin(\omega t + \varphi_0)$ , kde si vlna zachovává svůj tvar  $Z(z)$  a jen se mění její amplituda harmonickou funkcí.

Jelikož vlnová rovnice (2.40) je lineární, je řešením i lineární kombinace všech výše nalezených řešení:

$$\psi(z, t) = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m(z, t), \quad (2.61)$$

kde koeficienty lineární kombinace zastanou amplitudy  $A_m$  schované již ve funkcích  $\psi_m(z, t)$  (2.60). Výsledné obecné řešení nalezené metodou separace proměnných je

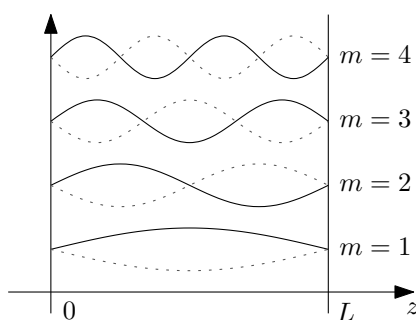
$$\psi(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(k_m z) \sin(\omega_m t + \varphi_m), \quad (2.62)$$

kde úhlová frekvence  $\omega$  a vlnové číslo  $k$  splňují následující disperzní vztah a přípustné hodnoty vlnových čísel  $k_m$  jsou

$$\omega = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} k, \quad k_m = \frac{m\pi}{L}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.63)$$

Konstanty  $A_m$  a  $\varphi_m$  jsou dány počátečními podmínkami, naproti tomu konstanty  $\omega_m$  a  $k_m$  jsou dány vlastnostmi fyzikálního systému, který zkoumáme, zde tedy délkou struny  $L$ , její hustotou  $\rho_0$  a napětím v ní  $T_0$  (a okrajovými podmínkami).

Na obrázku 2.10 jsou znázorněny první čtyři módy tohoto řešení (tzn. funkce  $\psi_1$  až  $\psi_4$ ).



Obrázek 2.10: První čtyři módy pohybu struny s pevnými konci. Tečkovaně jsou naznačeny tvary módů posunutě o polovinu časové periody.

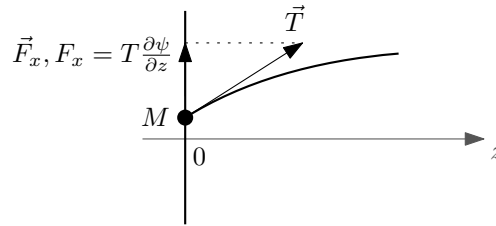
### 2.5.1 Podmínka volného konce

Druhým typem okrajové podmínky na struně konečné délky je okrajová podmínka volného konce. Fyzikálně to znamená, že konec struny může bez tření volně klouzat po tyči kolmé na osu  $z$ . V následujícím textu bez újmy na obecnosti zvolme  $z = 0$ .

Uvažujeme-li, že upevnění struny má hmotnost  $M$ , pak Newtonova pohybová rovnice pro konec struny bude mít podobu

$$M \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(0, t) = F_x = T \frac{\partial \psi}{\partial z}(0, t), \quad (2.64)$$

kde na pravé straně je příčná síla od struny působící na upevnění struny.



Obrázek 2.11: Příčná síla působící na závěs hmotnosti  $M$ .

Pro nehmotný závěs,  $M = 0$  dostáváme z pohybové rovnice okrajovou podmínku *volného konce* tvaru

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}(0, t) = 0, \quad (2.65)$$

tedy že na upevnění nepůsobí žádná příčná síla; geometricky – struna do místa upevnění přichází vodorovně.

## 2.6 Matematická vsuvka: Fourierovy řady

Mějme periodickou funkci  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s periodou  $2L$ . Pak Fourierovou řadou  $f_F$  funkce  $f$  nazveme následující funkci

$$f_F(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left( a_m \cos \frac{m\pi z}{L} + b_m \sin \frac{m\pi z}{L} \right), \quad (2.66)$$

kde koeficienty  $a_m$  a  $b_m$  jsou dané vztahy:

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(z) \cos \frac{m\pi z}{L} dz, \quad m \in \mathbb{N}_0; \quad b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(z) \sin \frac{m\pi z}{L} dz, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.67)$$

Pro po částech diferencovatelné funkce platí, že v bodech spojitosti Fourierova řada konverguje k původní funkci  $f$ ,  $f_F(z) = f(z)$ . Pro bod nespojitosti  $z_0$  platí

$$f_F(z_0) = \frac{1}{2} \left( \lim_{z \rightarrow z_0+} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0-} f(z) \right), \quad (2.68)$$

tedy Fourierova řada v tomto bodě konverguje k průměru jednostranných limit funkce  $f$ .

Fourierova řada představuje rozvoj periodické funkce  $f$  do diskrétní superpozice harmonických vln.

Pro sudé funkce ( $f(x) = f(-x)$ ), resp. liché funkce ( $f(x) = -f(-x)$ ), se Fourierova řada (2.66) a vzorce pro koeficienty  $a_m$  a  $b_m$  (2.67) zjednoduší. Pro **sudé funkce** dostaneme

$$a_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) \cos \frac{m\pi z}{L} dz, \quad b_m = 0, \quad f_F(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \cos \frac{m\pi z}{L}. \quad (2.69)$$

Pro **liché funkce**:

$$a_m = 0, \quad b_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) \sin \frac{m\pi z}{L} dz, \quad f_F(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \sin \frac{m\pi z}{L}. \quad (2.70)$$

\*Poznámka z pohledu lineární algebry: Fourierova řada je vlastně rozklad vektoru  $f$  z vektorového prostoru periodických funkcí  $\mathcal{F}$  do (nekonečné) báze

$$\mathcal{B} = \{(\cos k_m z)_{m=0}^{+\infty}, (\sin k_m z)_{m=1}^{+\infty}\}, \quad (2.71)$$

kde  $k_m = \frac{m\pi}{L}$ . Jestliže navíc zavedeme skalární součin dvou periodických funkcí  $f$  a  $g$  ( $f, g \in \mathcal{F}$ ) jako

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(z)g(z) dz, \quad (2.72)$$

potom koeficienty  $a_m$  a  $b_m$  nejsou nic jiného než koeficienty lineární kombinace získané jako projekce vektoru  $f$  na vektory báze pomocí skalárního součinu (2.72)<sup>10</sup>:

$$a_m = \langle f, \cos k_m z \rangle, \quad b_m = \langle f, \sin k_m z \rangle, \quad (2.73)$$

těmto koeficientům se v lineární algebře říká Fourierovy koeficienty.

### 2.6.1 Sudé a liché prodloužení

Mějme funkci  $f : \langle 0, L \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Definujme její tzv. *sudé a liché prodloužení*  $f_{\text{sudé}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a  $f_{\text{liché}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Nejprve definujeme funkce  $f_{\text{sudé}}$  a  $f_{\text{liché}}$  na intervalu  $\langle 0, L \rangle$  tak, aby souhlasily s původní funkcí  $f$ :

$$f_{\text{sudé}}|_{\langle 0, L \rangle} = f, \quad f_{\text{liché}}|_{\langle 0, L \rangle} = f. \quad (2.74)$$

Pak dodefinujeme funkce  $f_{\text{sudé}}$  a  $f_{\text{liché}}$  na intervalu  $\langle -L, 0 \rangle$  takto:

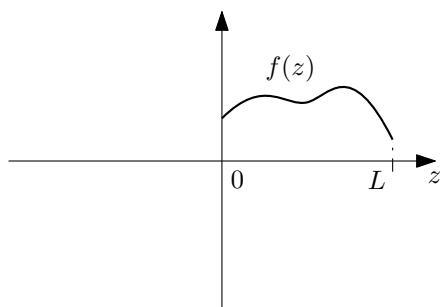
$$f_{\text{sudé}}(z) = f(-z), \quad f_{\text{liché}}(z) = -f(-z), \quad z \in \langle -L, 0 \rangle, \quad (2.75)$$

tzn. tak, aby funkce  $f_{\text{sudé}}$  byla sudá na intervalu  $\langle -L, L \rangle$  a funkce  $f_{\text{liché}}$  lichá<sup>11</sup> na  $\langle -L, L \rangle$ .

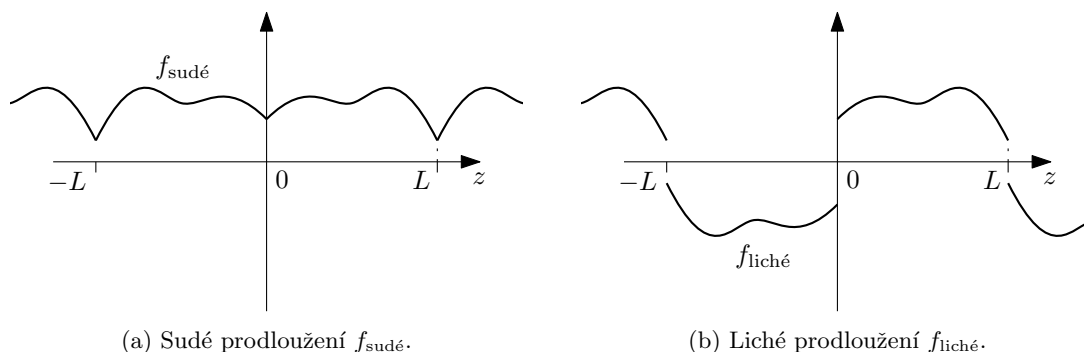
Na závěr funkce  $f_{\text{sudé}}$  a  $f_{\text{liché}}$  jednoznačně dodefinujeme na celé  $\mathbb{R}$  tak, aby se jednalo o periodické funkce s periodou  $2L$ . Výsledek těchto prodloužení pro konkrétní případ funkce  $f$  z obrázku 2.12 vidíte na obrázku 2.13.

<sup>10</sup>S výjimkou koeficientu  $a_0$ , kde nám vadí nenormovanost funkce  $f(z) = 1$ ,  $\langle f, f \rangle = 2$ .

<sup>11</sup>U lichého prodloužení může nastat problém pokud  $f(0) \neq 0$  a  $f(L) \neq 0$  (funkce pak nemůže být lichá, resp. periodická). Tento problém můžeme bez obav ignorovat, jelikož koeficienty Fourierovy řady  $a_m$  a  $b_m$  jsou dané integrálními vzorci a integrály nejsou citlivé na změnu funkční hodnoty integrované funkce v jednom bodě. Můžeme si tedy představovat, že při lichém prodloužení redefinujeme původní funkci  $f$  tak, že položíme  $f(0) = f(L) = 0$ .



Obrázek 2.12: Původní funkce  $f : \langle 0, L \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná pouze na intervalu  $\langle 0, L \rangle$ .



(a) Sudé prodloužení  $f_{\text{sudé}}$ .

(b) Liché prodloužení  $f_{\text{liché}}$ .

Obrázek 2.13: Sudé a liché prodloužení funkce  $f$ .

Ze zadané funkce  $f : \langle 0, L \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  jsme získali periodické sudé, resp. liché, funkce  $f_{\text{sudé}}$ , resp.  $f_{\text{liché}}$ . Můžeme tedy počítat jejich Fourierovy řady, které díky sudosti, resp. lichosti, vyjdou v následujících tvarech:

$$f_{\text{sudé}}(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \cos \frac{m\pi z}{L}, \quad f_{\text{liché}}(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \sin \frac{m\pi z}{L}, \quad (2.76)$$

kde koeficienty  $a_m$  a  $b_m$  jsou dle (2.69), resp. (2.70), dané jako

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{L} \int_0^L f_{\text{sudé}}(z) \cos \frac{m\pi z}{L} dz = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) \cos \frac{m\pi z}{L} dz, \\ b_m &= \frac{2}{L} \int_0^L f_{\text{liché}}(z) \sin \frac{m\pi z}{L} dz = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) \sin \frac{m\pi z}{L} dz, \end{aligned} \quad (2.77)$$

kde jsme využili toho, že  $f_{\text{sudé}}(z) = f_{\text{liché}}(z) = f(z)$  pro  $z \in \langle 0, L \rangle$ . Pak platí

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \cos \frac{m\pi z}{L} = \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \sin \frac{m\pi z}{L} \quad \text{pro } z \in \langle 0, L \rangle. \quad (2.78)$$

Podářilo se nám tedy funkci  $f$  na intervalu  $\langle 0, L \rangle$  vyjádřit jako lineární kombinaci buď pouze funkcí sinus anebo pouze funkcí cosinus.

## 2.7 Počáteční úloha pro pevné konce

Nyní chceme najít konkrétní pohyb struny, máme-li zadané příslušné počáteční podmínky. Napišme si postup této úlohy pro okrajové podmínky **pevných konců**.

Počáteční podmínky jsou tvořeny počáteční polohou struny a počáteční rychlostí struny (pro jednoduchost volíme, že jsou zadané v čase  $t = 0$ ). Tyto jsou zadané funkcí počáteční polohy  $f : \langle 0, L \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  (musíme zadat počáteční výchylku každého bodu struny) a funkcí počáteční rychlosti  $g : \langle 0, L \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  (to samé pro počáteční rychlost každého bodu struny). Naše hledané konkrétní řešení tedy musí splňovat:

$$\psi(z, 0) = f(z), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(z, 0) = g(z), \quad \forall z \in \langle 0, L \rangle. \quad (2.79)$$

Abychom tohoto dosáhli, máme k dispozici integrační konstanty  $A_m$  a  $\varphi_m$ , jejichž hodnotu chceme určit.

**Rozepsané počáteční podmínky.** Rozepišme levé strany rovnic (2.79), tzn. dosadíme čas  $t = 0$  do obecného řešení (2.62) a jeho časové derivace:

$$\begin{aligned} \psi(z, 0) &= \sum_{m=1}^{+\infty} (A_m \sin \varphi_m) \sin \frac{m\pi z}{L} = f(z), \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(z, 0) &= \sum_{m=1}^{+\infty} (A_m \omega_m \cos \varphi_m) \sin \frac{m\pi z}{L} = g(z). \end{aligned} \quad (2.80)$$

**Liché prodloužení funkcí  $f$  a  $g$ .** Nyní bychom potřebovali napsat funkce  $f$  a  $g$  jako Fourierovy řady, které budou obsahovat pouze funkce  $\sin \frac{m\pi z}{L}$ . Toho snadno dosáhneme, pokud si spočítáme řady funkcí  $f$  a  $g$  v **lichém prodloužení** (viz kapitola 2.6.1):

$$f(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} f_m \sin \frac{m\pi z}{L}, \quad g(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} g_m \sin \frac{m\pi z}{L}, \quad (2.81)$$

kde koeficienty  $f_m$  a  $g_m$  jsou dané následujícími vzorci:

$$f_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) \sin \left( \frac{m\pi z}{L} \right) dz, \quad g_m = \frac{2}{L} \int_0^L g(z) \sin \left( \frac{m\pi z}{L} \right) dz. \quad (2.82)$$

**Výsledné rovnice pro koeficienty  $A_m$ ,  $\varphi_m$ .** Vlastní rovnice pro koeficienty  $A_m$  a  $\varphi_m$  získáme porovnáním řad (2.80) a (2.81) člen po členu:

$$A_m \sin \varphi_m = f_m, \quad A_m \omega_m \cos \varphi_m = g_m. \quad (2.83)$$

Tyto rovnice můžeme (formálně<sup>12</sup>) vyřešit:

$$A_m = \sqrt{f_m^2 + \frac{g_m^2}{\omega_m^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi_m = \frac{f_m \omega_m}{g_m}. \quad (2.84)$$

## 2.8 d'Alembertovo řešení vlnové rovnice

Uvažujme vlnovou rovnici tvaru

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad (2.85)$$

kterou přepíšeme do následujícího tvaru tím, že se na parciální derivace začneme dívat jako na diferenciální operátory:

$$\left( \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = 0. \quad (2.86)$$

<sup>12</sup>Formální je druhá rovnice, která ve skutečnosti reprezentuje dvě rovnice  $\sin \varphi_m = \frac{f_m}{A_m}$  a  $\cos \varphi_m = \frac{g_m}{A_m \omega_m}$ , které jednoznačně definují úhel  $\varphi_m$  pro  $A_m \neq 0$ . Pokud  $A_m = 0$ , příslušný mód chybí a na jeho fázi nezáleží.

Diferenciální operátor na levé straně předchozí rovnice se nazývá *d'Alembertův operátor*<sup>13</sup> a značí se  $\square$ :

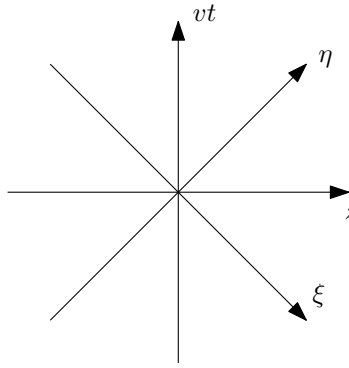
$$\square = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.87)$$

Díky záměnnosti parciálních derivací platí i pro derivace poučka  $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$  a můžeme psát

$$\square\psi = \left( \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi = 0. \quad (2.88)$$

Chtěli bychom nyní zavést nové proměnné tak, aby se zjednodušil tvar rovnice (2.88). Toho dosáhneme zavedením proměnných  $\xi$  a  $\eta$  dle následujících předpisů

$$\xi = z - vt, \quad \eta = z + vt, \quad \left( z = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad t = \frac{\eta - \xi}{2v} \right). \quad (2.89)$$



Obrázek 2.14: Původní souřadnice  $(z, vt)$  a nové souřadnice  $(\xi, \eta)$ .

Přepíšeme vlnovou rovnici v původních proměnných  $z, t$  do nových proměnných  $\xi, \eta$ . Definujeme novou funkci  $\tilde{\psi}(\xi, \eta)$  definovanou pomocí substituce:

$$\tilde{\psi}(\xi, \eta) := \psi(z(\xi, \eta), t(\xi, \eta)) = \psi\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\eta - \xi}{2v}\right). \quad (2.90)$$

Inverzní substituce bude pak vypadat následovně

$$\psi(z, t) = \tilde{\psi}(z - vt, z + vt) = \tilde{\psi}(\xi, \eta). \quad (2.91)$$

Tyto substituční vztahy nám umožňují transformovat derivace podle jednotlivých proměnných. Derivujeme-li  $\psi$  podle proměnných  $z$  a  $t$ , dostáváme podle řetězového pravidla<sup>14</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -v \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \xi} + v \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

<sup>13</sup>Jiná konvence zavádí d'Alembertův operátor s opačným znaménkem.

<sup>14</sup>Mějme funkci  $f(x_1, \dots, x_k) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  a  $k$ -tici funkcí  $g_i(y_1, \dots, y_l) : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ . Funkci  $h(y_1, \dots, y_l) : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$  získáme složením

$$h(y_1, \dots, y_l) = f(g_1(y_1, \dots, y_l), \dots, g_k(y_1, \dots, y_l))$$

Potom platí *řetězové pravidlo*

$$\frac{\partial h}{\partial y_i} = \sum_{m=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial g_m}{\partial y_i}.$$

Toto pravidlo je rozšířením pravidla o derivování složené funkce,  $[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$ , do více proměnných. Zde máme  $\tilde{\psi}(\xi, \eta) \sim f(x_1, x_2)$ ,  $\xi(z, t) \sim g_1(y_1, y_2)$ ,  $\eta(z, t) \sim g_2(y_1, y_2)$ .

Zkombinujeme-li tyto výsledky do tvaru operátorů vyskytujících se v (2.88)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\right) \psi &= \left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right) \tilde{\psi} = -2 \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\psi}, \\ \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \psi &= \left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right) \tilde{\psi} = 2 \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{\psi}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

V řeči diferenciálních operátorů tedy máme

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} = -2 \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} = 2 \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (2.94)$$

Dosadíme-li tyto výrazy do vlnové rovnice (2.88), máme

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (2.95)$$

Tato rovnice má řešení<sup>15</sup> v podobě

$$\tilde{\psi}(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta), \quad (2.96)$$

kde  $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jsou libovolné reálné funkce jedné reálné proměnné (příslušně diferencovatelné). Pomocí původních proměnných je funkce  $\psi(z, t)$  tvaru

$$\boxed{\psi(z, t) = F(z - vt) + G(z + vt)}, \quad (2.97)$$

tomuto řešení říkáme *d'Alembertovo řešení vlnové rovnice*. Jaký je fyzikální význam tohoto řešení? Uvažujme nejprve situaci s  $G \equiv 0$ . V čase  $t = 0$  představuje funkce  $F(z)$  prostě tvar vybuzené vlny. Dále se podívejme na vývoj místa konstantní fáze. *Fází* nazýváme argument funkce  $F$ , tzn.  $z - vt$ . Najdeme časovou závislost místa  $z_c(t)$  jako řešení rovnice  $z - vt = c$ , kde  $c$  je libovolná konstanta. Toto je triviálně

$$z_c(t) = c + vt. \quad (2.98)$$

(pro počáteční podmínku  $z_c(0) = z_0$  dostaneme  $z_c(t) = z_0 + vt$ ). Konkrétní místo na vlně se tedy *šíří rychlostí  $v$* ! Část řešení  $F(z - vt)$  tedy představuje vlnu (o tvaru funkce  $F(z)$ ) šířící se jako celek v kladném směru osy  $z$  rychlostí  $v$ , této rychlosti se říká *fázová rychlost*. Analogicky, pokud bychom se dívali na funkci  $G(z + vt)$ , tato představuje vlnu tvaru  $G(z)$  šířící se rychlostí  $v$  do záporného směru osy  $z$ .

<sup>15</sup>Pokud rovnici napíšeme v podobě

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \eta} \right) = 0,$$

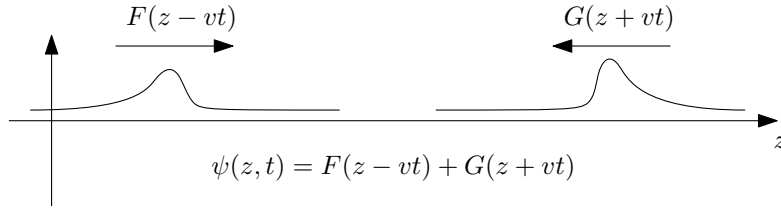
vidíme, že funkce  $\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \eta}$  je funkcí pouze proměnné  $\eta$ ,

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \eta} = g(\eta).$$

Tuto nyní zintegrujeme podle  $\eta$  a dostaneme

$$\tilde{\psi}(\xi, \eta) = \underbrace{\int g(\eta) d\eta}_{G(\eta)} + F(\xi),$$

kde  $F(\xi)$  je integrační konstantou vzhledem k integrování podle proměnné  $\eta$ .



Obrázek 2.15: d'Alembertovo řešení představující superpozici dvou proti sobě postupujících vln  $F(z - vt)$  a  $G(z + vt)$ .

### 2.8.1 Vyzařování postupných vln

Jakým způsobem můžeme tyto postupné vlny vybudit? Uvažujme, že naše prostředí, např. struna, má v  $z = 0$  kmitající zdroj, který svým pohybem udává výchylku v tomto bodě:

$$\psi(0, t) = y(t), \quad (2.99)$$

$y(t)$  je libovolná ale určená funkce. Podmínce tohoto typu, kdy udáváme stav systému pro danou polohu, se obecně říká *okrajová podmínka*. Určuje tvar řešení na okraji studovaného systému. Toto je konkrétně podmínka v  $z = 0$ . Abychom získali jednoznačné řešení tohoto problému vyzařování, je třeba předepsat ještě druhou okrajovou podmínku na druhém „okraji“ systému, zde  $z = +\infty$ . Požadujeme, aby z nekonečna nepřicházely žádné vlny, tzn. předepisujeme  $G \equiv 0$ . Této okrajové podmínce se říká *podmínka vyzařování*.

Teď již můžeme najít konkrétní tvar d'Alembertova řešení. Po dosazení  $\psi(z, t) = F(z - vt)$  do (2.99):

$$\psi(0, t) = F(-vt) = y(t) \quad \longrightarrow \quad F(x) = y\left(-\frac{x}{v}\right) \quad (2.100)$$

Známe-li konkrétní tvar funkce  $F(x)$  snadno již napíšeme

$$\psi(z, t) = F(z - vt) = y\left(-\frac{z - vt}{v}\right) = y\left(t - \frac{z}{v}\right). \quad (2.101)$$

Výsledné řešení je tedy tvaru

$$\boxed{\psi(z, t) = y\left(t - \frac{z}{v}\right)}. \quad (2.102)$$

Co představuje výraz v argumentu budící funkce  $y$ ? Zlomek  $\frac{z}{v}$  představuje dobu, kterou signálu vyzářenému v bodě  $z = 0$  trvá došít se do místa  $z$ . To znamená, že vlna, kterou pozorují v místě  $z$  v čase  $t$ , se ze zdroje vyzářila v čase  $t - \frac{z}{v}$ . Tomuto času říkáme *retardovaný čas*:

$$t_r = t - \frac{z}{v}. \quad (2.103)$$

Symbolicky můžeme psát

$$\psi(z, t) = y(t_r). \quad (2.104)$$

### 2.8.2 Harmonická postupná vlna

Pokud zdroj harmonicky kmitá dle předpisu

$$y(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (2.105)$$

pak je vyzářená vlna tvaru

$$F(x) = y\left(-\frac{x}{v}\right) = A \cos\left[\omega\left(-\frac{x}{v}\right) + \varphi\right] = A \cos\left(\frac{\omega}{v}x - \varphi\right), \quad (2.106)$$



resp.

$$\psi(z, t) = y\left(t - \frac{z}{v}\right) = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \varphi\right] = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}z + \varphi\right). \quad (2.107)$$

Označíme-li vlnové číslo  $k = \frac{\omega}{v}$  (disperzní vztah), dostáváme tvar *harmonické postupné vlny*

$$\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz + \varphi). \quad (2.108)$$

Pro funkci  $G(x) = A \cos(kx + \varphi)$  máme vlnu postupující opačným směrem

$$\psi(z, t) = G(z + vt) = A \cos(\omega t + kz + \varphi). \quad (2.109)$$

### 2.8.3 Počáteční úloha pro d'Alembertovo řešení

Uvažujeme strunu rozkládající se po celé ose  $z$ . Počáteční podmínky pro polohu a rychlost v čase  $t = 0$  mají podobu

$$\psi(z, 0) = f(z), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(z, 0) = g(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad (2.110)$$

kde  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jsou funkce počáteční polohy a rychlosti. Pokud do výše uvedených počátečních podmínek dosadíme d'Alembertovo řešení (2.97), dostaneme

$$\psi(z, 0) = F(z) + G(z) = f(z), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(z, 0) = (-v)F'(z) + vG'(z) = g(z), \quad (2.111)$$

kde symbolem  $F'$ , resp.  $G'$ , rozumíme  $\frac{dF}{dx}$ , resp.  $\frac{dG}{dx}$ . Zintegrujeme druhou z počátečních podmínek (podle proměnné  $z$ ),

$$G(z) - F(z) = \underbrace{\frac{1}{v} \int g(z) dz}_{{\tilde{g}}(z)} + c, \quad (2.112)$$

kde jsme označili primitivní funkci (včetně konstanty  $\frac{1}{v}$ ) jako  $\tilde{g}(z)$  a integrační konstantu jako  $c$ . Nyní stačí levou rovnici v (2.111) sečíst a odečíst s předchozí rovnicí a dostaneme

$$F(x) = \frac{f(x) - \tilde{g}(x) - c}{2}, \quad G(x) = \frac{f(x) + \tilde{g}(x) + c}{2}, \quad (2.113)$$

kde jsme navíc přejmenovali proměnnou na  $x$ . Výsledné konkrétní řešení splňující zadané počáteční podmínky dostaneme dosazením do d'Alembertova řešení:

$$\psi(z, t) = F(z - vt) + G(z + vt) = \frac{f(z - vt) - \tilde{g}(z - vt)}{2} + \frac{f(z + vt) + \tilde{g}(z + vt)}{2}, \quad (2.114)$$

konstanty  $\frac{c}{2}$  se odečty. Zopakujme, že  $\tilde{g}(x)$  je primitivní funkce k  $\frac{1}{v}g(x)$ ,  $\tilde{g}(x) = \frac{1}{v} \int g(x) dx$ . Povšimněme si, že výsledné řešení nezáleží na hodnotě integrační konstanty  $c$  – nezáleží tedy na výběru primitivní funkce – a je tedy jednoznačně určeno počátečními podmínkami.

## 2.9 Energie vlnění

Podívejme se nyní na vlnění na struně z energetického pohledu – nalezneme výrazy pro mechanickou energii v daném úseku struny. Pohybovou rovnici struny jsme odvodili z první věty impulsové,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(e)}. \quad (2.115)$$

Jelikož zákon zachování mechanické energie platí pro soustavy, kde nepůsobí vnější síly, a jelikož na zvolený úsek struny působí vnější síly od zbytku struny, nebude se energie v daném místě struny zachovávat, ale bude se přelévat z jednoho místa na druhé. Tyto úvahy nyní kvantifikujeme.

Celková energie je sumou kinetické a potenciální energie. Kinetická energie malého úseku struny  $\langle z, z + dz \rangle$  je

$$dT = \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 dz, \quad (2.116)$$

kde jsme dosadili  $dm = \rho dz$ .

Zavedeme obecně pojem *hustoty energie*  $\varepsilon$  následujícím způsobem. Je-li  $dE$  energie obsažená v úseku  $\langle z, z + dz \rangle$ , definujeme hustotu energie  $\varepsilon$  jako

$$dE = \varepsilon dz. \quad (2.117)$$

Energie obsažená v konečně velkém úseku  $\langle z_1, z_2 \rangle$  pak je dána jako

$$E = \int_{z_1}^{z_2} dE(z) = \int_{z_1}^{z_2} \varepsilon dz. \quad (2.118)$$

Zatímco jednotkou energie je  $[E] = \text{J}$ , jednotkou (délkové) hustoty energie je  $[\varepsilon] = \text{J} \cdot \text{m}^{-1}$ .

*Hustota kinetické energie* tedy dle předchozí definice a výrazu (2.116)

$$\tau = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2. \quad (2.119)$$

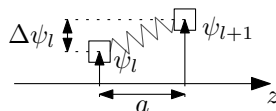
Dále, pro odvození výrazu pro potenciální energii využijeme diskrétní model řetízku atomů a jeho následnou spojitou limitu. V úseku struny  $\langle z, z + dz \rangle$  je celkový potenciál součtem potenciálních energií jednotlivých pružin,

$$dU = \sum_l U_l. \quad (2.120)$$

Linearizovaný výraz pro nárůst potenciální energie při příčných kmitech je<sup>16</sup>:

$$U_l = \frac{1}{2} k \left( 1 - \frac{a_0}{a} \right) (\Delta \psi_l)^2, \quad (2.121)$$

kde  $\Delta \psi_l$  je rozdíl výchylek sousedních závaží, viz obrázek 2.16.



Obrázek 2.16: Výchylky  $\psi_l$  jednotlivých závaží řetízku a jejich rozdíl  $\Delta \psi_l$ .

Počet pružin mezi  $\langle z, z + dz \rangle$  je  $dN = \frac{dz}{a}$ . Pro malý úsek struny můžeme uvažovat, že všechna  $\Delta \psi_l$  jsou přibližně stejná<sup>17</sup> a tedy

$$dU = dN U_{l_0} = \frac{1}{2} ka \left( 1 - \frac{a_0}{a} \right) \left( \frac{\Delta \psi_{l_0}}{a} \right)^2 dz \quad (2.122)$$

<sup>16</sup>Jedná se o aproximaci malých kmitů potenciálu pružiny při příčných výchylkách  $U(y) = \frac{1}{2} k \left( \sqrt{a^2 + y^2} - a_0 \right)^2$ .

<sup>17</sup>Dá se to opět udělat i rigorózněji. Výraz  $\frac{\Delta \psi_k}{a}$  se dá pomocí věty o střední hodnotě zapsat jako  $\psi'(\xi_k, t)$  a

Provedením spojitě limity  $a \rightarrow 0$  (a držení  $T = ka(1 - \frac{a_0}{a}) = \text{konst.}$ ) přejde podíl  $\frac{\Delta\psi}{a}$  na derivaci  $\frac{\partial\psi}{\partial z}$  a dostaneme

$$dU = \frac{1}{2}T \left( \frac{\partial\psi}{\partial z} \right)^2 dz. \quad (2.123)$$

Hustota potenciální energie pak je

$$u = \frac{1}{2}T \left( \frac{\partial\psi}{\partial z} \right)^2. \quad (2.124)$$

Nyní již můžeme napsat *hustotu celkové energie* na struně jako

$$\varepsilon = \tau + u = \frac{1}{2}\rho \left( \frac{\partial\psi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2}T \left( \frac{\partial\psi}{\partial z} \right)^2. \quad (2.125)$$

Celková energie v úseku  $\langle z_1, z_2 \rangle$  je dána integrálem

$$E_{\langle z_1, z_2 \rangle}(t) = \int_{z_1}^{z_2} \varepsilon(z, t) dz. \quad (2.126)$$

Podívejme se, jak se tato energie mění s časem:

$$\frac{dE_{\langle z_1, z_2 \rangle}}{dt} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} dz = \int_{z_1}^{z_2} \rho \frac{\partial\psi}{\partial t} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + T \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial^2\psi}{\partial z \partial t} dz. \quad (2.127)$$

Použijeme-li vlnovou rovnici, máme

$$\frac{dE_{\langle z_1, z_2 \rangle}}{dt} = T \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial\psi}{\partial t} \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial^2\psi}{\partial z \partial t} dz = T \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial\psi}{\partial t} \frac{\partial\psi}{\partial z} \right) dz = T \left[ \frac{\partial\psi}{\partial t} \frac{\partial\psi}{\partial z} \right]_{z_1}^{z_2}. \quad (2.128)$$

Definujeme-li veličinu *tok energie*  $S$

$$S(z, t) = -T \frac{\partial\psi}{\partial t} \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad (2.129)$$

pak můžeme rovnost (2.128) psát jako

$$\frac{dE_{\langle z_1, z_2 \rangle}(t)}{dt} = S(z_1, t) - S(z_2, t), \quad (2.130)$$

tedy že časová změna energie v daném úseku struny je dána bilancí vtoku a výtoku energie na jeho koncích. Kladný tok v bodě  $z_1$  celkovou energii zvyšuje a kladný tok v bodě  $z_2$  naopak snižuje. Rovnost (2.130) představuje integrální zákon zachování energie na struně. Ukažme, že tok energie  $S$  není nic jiného než výkon sil napětí na struně. Tento výsledek nebude překvapivý,

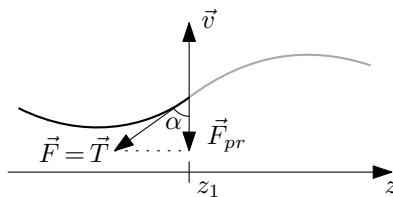
poté

$$\Delta U = \sum_k \frac{1}{2}T\psi'(\xi_k, t)^2 a \xrightarrow{a \rightarrow 0} \Delta U = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{2}T\psi'(z, t)^2 dz = \frac{1}{2}T\psi'(\xi, t)^2 \Delta z,$$

kde jsme použili definici Riemannova integrálu jako limitu integrálních součtů a v poslední rovnosti integrální větu o střední hodnotě. Pokud nyní  $\Delta z \rightarrow 0$ , půjde  $\xi \rightarrow z$  a dostanu

$$dU = \frac{1}{2}T\psi'(z, t)^2 dz.$$

protože vlastně představuje třetí větu impulsovou – časová změna celkové energie soustavy částic je rovna výkonu vnějších sil. Podívejme se na situaci v bodě  $z_1$  na obrázek 2.17.



Obrázek 2.17: Napětíová síla působící v bodě  $z_1$  od zbytku struny na úsek  $(z_1, z_2)$ . Rychlost pohybu struny je  $v = \frac{\partial \psi}{\partial t}$ . Velikost příčné průmětu je  $F_{pr} = T \cos \alpha$ .

Po dosazení do vzorce pro mechanický výkon:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{T} \cdot \vec{v} = -T v \cos \alpha = -F_{pr} v = -T \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial t} = S, \quad (2.131)$$

kde jsme ve skalárním součinu explicitně uvedli znaménko minus, jelikož v situaci na obrázku 2.17 svírají vektory tupý úhel. Ze vztahu  $P = S$  snadno napíšeme jednotky toku energie  $[S] = W = J \cdot s^{-1}$ .

Diferenciální tvar zákona zachování získáme limitou  $z_2 \rightarrow z_1$ . Přepíšeme levou stranu zákona zachování pomocí integrální věty o střední hodnotě,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(\xi, t) \Delta z, \quad (2.132)$$

kde  $\Delta z = z_2 - z_1$ . Po dosazení do (2.130) (a vydělení  $\Delta z$ ):

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}(\xi, t) = - \frac{S(z_2, t) - S(z_1, t)}{\Delta z} \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \quad (2.133)$$

Provedením limity  $\Delta z \rightarrow 0$  dostaneme diferenciální zákon zachování energie na struně<sup>18</sup>:

$$\boxed{\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial z} = 0.} \quad (2.134)$$

Jedná se vlastně o rovnici kontinuity<sup>19</sup>. Časová změna hustoty energie je dána (prostorovou) změnou toku energie v daném místě.

<sup>18</sup>Také bychom k němu mohli dospět jiným způsobem. Přepsat (2.130) jako

$$\frac{dE}{dt} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dz = - \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial S}{\partial z} dz,$$

dát všechny členy na jednu stranu,

$$\int_{z_1}^{z_2} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial z} \right) dz = 0,$$

a jelikož tato rovnost musí platit pro libovolné  $z_1, z_2$ , musí být integrand nulový.

<sup>19</sup>Vzpomeňte na rovnici kontinuity v elektřině a magnetismu:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Pro 1D problém (proud tekoucí jen ve směru osy  $z$ ) bychom dostali

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial z} = 0.$$

Energetické veličiny ( $\varepsilon$ ,  $\tau$ ,  $u$ ,  $S$ ) jsou kvadratické ve výchylce  $\psi$ . Neplatí tedy princip superpozice! Uvažujme superpozici dvou vln  $\psi = \psi_1 + \psi_2$ , pak

$$\varepsilon_{\psi_1+\psi_2} \neq \varepsilon_{\psi_1} + \varepsilon_{\psi_2}, \quad \text{atd.} \quad (2.135)$$

Například pro časovou derivaci máme

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial\psi_1 + \psi_2}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right)^2 + \underbrace{2\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\frac{\partial\psi_2}{\partial t}}_{\text{interferenční člen}}. \quad (2.136)$$

### 2.9.1 Energie v postupné vlně

Uvažujme vlnu postupující jedním směrem

$$\psi(z, t) = F(z - vt). \quad (2.137)$$

Označme  $F'(x) = \frac{dF}{dx}$ , pak derivace podle  $z$  a  $t$  mají následující tvar a platí mezi nimi vztah:

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = F'(z - vt), \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = -vF'(z - vt) \quad \longrightarrow \quad -v\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\partial\psi}{\partial t}. \quad (2.138)$$

Důsledkem toho platí rovnost hustoty kinetické a potenciální energie,  $u = \tau$ , neb

$$\tau = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho v^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 = u \quad (2.139)$$

Pro celkovou energii tedy  $\varepsilon = u + \tau = 2u = 2\tau$ .

Podívejme se dále na tok energie v postupné vlně. Můžeme zvolit dvě různé úpravy:

$$S = -T\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial t} = Tv\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 = 2\tau v = \varepsilon v \quad (2.140)$$

$$= \frac{T}{v}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = Z\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2, \quad (2.141)$$

kde jsme zavedli veličinu *impedance*  $Z = \sqrt{T\rho}$  (po dosazení  $z$   $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ ). Jeden výsledek tedy je

$$S = \varepsilon v, \quad \text{tok energie} = \text{hustota energie} \cdot \text{rychlost šíření vlny}. \quad (2.142)$$

Můžeme říct, že šíření vlny na struně je vlastně šíření energie podél struny. Anebo druhý výsledek:

$$S = Z\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 \quad \text{tok energie} = \text{impedance} \cdot \text{kvadrát rychlosti}, \quad (2.143)$$

který říká jak přepočítat rychlost v daném bodě na tok energie v daném bodě – skrze konstantu úměrnosti zvanou *impedance*.

### 2.9.2 Příklad: Harmonická postupná vlna

Pro harmonickou vlnu,

$$F(x) = A \cos kx, \quad \psi(z, t) = F(z - vt) = A \cos(\omega t - kz), \quad (2.144)$$

dostaneme následující tvary hustot kinetické a potenciální energie a toku energie:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 \sin^2(\omega t - kz), \\ u &= \frac{1}{2}TA^2k^2 \sin^2(\omega t - kz) = \frac{1}{2}\frac{T}{v^2}A^2\omega^2 \sin^2(\omega t - kz) = \tau, \\ S &= ZA^2\omega^2 \sin^2(\omega t - kz).\end{aligned}\tag{2.145}$$

Pro střední hodnoty máme

$$\boxed{\langle \tau \rangle = \langle u \rangle = \frac{1}{4}\rho A^2\omega^2, \quad \langle S \rangle = \frac{1}{2}ZA^2\omega^2.}\tag{2.146}$$

## Kapitola 3

# Disperzní vztah, vlnové balíky, grupová rychlost

### 3.1 Fázová rychlost, disperzní vztah

#### 3.1.1 Postupné vlnění

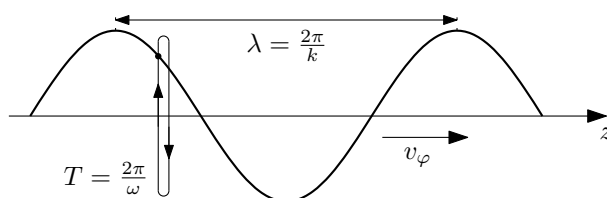
Uvažujme postupnou harmonickou vlnu  $\psi(z, t)$  (anebo její komplexifikaci) tvaru:

$$\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz), \quad \hat{\psi}(z, t) = Ae^{i(\omega t - kz)}, \quad (3.1)$$

kde  $\omega$  nazýváme úhlová frekvence,  $[\omega] = \text{s}^{-1}$ ,  $k$  vlnové číslo,  $[k] = \text{m}^{-1}$ . Tyto udávají periodu  $T$ ,  $[T] = \text{s}$ , a vlnovou délku  $\lambda$ ,  $[\lambda] = \text{m}$ , tohoto vlnění vztahy

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (3.2)$$

Tato vlna je znázorněná na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Harmonická postupná vlna. V libovolném daném bodě  $z = z_0$  pozorují harmonické kmitání s periodou  $T$ . V prostoru má harmonická vlna vlnovou délku  $\lambda$ . Vlna se jako celek pohybuje fázovou rychlostí  $v_\varphi$ .

Studujme nyní funkci fáze  $\varphi(t) = \omega t - kz$ . Odvoďme vztah pro rychlosti pohybu místa konstantní fáze,  $\varphi(t) = \varphi_0 = \text{konst}$ . Vyjádřeme z této rovnice implicitně zadanou funkci  $z(t)$ :

$$\varphi(t) = \omega t - kz = \varphi_0 \quad \longrightarrow \quad z(t) = \frac{\omega}{k}t - \frac{\varphi_0}{k} = v_\varphi t - \frac{\varphi_0}{k}. \quad (3.3)$$

Z ní vyčteme tzv. *fázovou rychlost* o velikosti

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k}}. \quad (3.4)$$

### 3.1.2 Disperzní vztah

Na parametry  $\omega$  a  $k$  zatím nemáme žádná omezení (kromě toho, že uvažujeme pouze kladné hodnoty). Chceme-li ale harmonickou postupnou vlnu vybudit v nějakém prostředí, nepodaří se to pro libovolné kombinace úhlové rychlosti  $\omega$  a vlnového čísla  $k$ .

**Příklad.** Uvažujme vlnovou rovnici,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad (3.5)$$

a dosadíme do ní harmonickou postupnou vlnu (3.1) a požadujeme, že vlnová rovnice je splněna pro všechny body prostoru a času. Jednotlivé derivace vyjdou následovně

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -k^2 \psi, \quad (3.6)$$

a tedy

$$(\omega^2 - v^2 k^2) \psi = 0. \quad (3.7)$$

Požadujeme-li netriviální řešení (tzn. nenulovou amplitudu postupné vlny), musí být splněn vztah

$$\omega = vk. \quad (3.8)$$

Tato relace se nazývá *disperzní vztah*. Udává přípustné kombinace úhlových frekvencí  $\omega$  a vlnových čísel  $k$ , pro které je postupná vlna řešením vlnové rovnice. Z tvaru disperzního vztahu vidíme, že konstanta  $v$  ve vlnové rovnici má význam fázové rychlosti.

Obecně je *disperzní vztah* tvaru

$$\omega = \omega(k), \quad k = k(\omega) \quad (3.9)$$

(jeden tvar je inverzí druhého). Tedy je to funkce  $\omega(k)$ , anebo  $k(\omega)$  daná fyzikálním prostředím. Tento vztah charakterizuje vlnové vlastnosti daného prostředí v tom smyslu, že nám určuje přípustné (tzn. řešící rovnice popisující dané prostředí) harmonické postupné vlny šířící se tímto prostředím:

$$\psi(z, t) = Ae^{i(\omega(k)t - kz)} = Ae^{i(\omega t - k(\omega)z)}. \quad (3.10)$$

Fázová rychlost těchto postupných vln je dána vztahem

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}, \quad v_\varphi(k) = \frac{\omega(k)}{k}, \quad v_\varphi(\omega) = \frac{\omega}{k(\omega)}. \quad (3.11)$$

Vidíme, že obecně může fázová rychlost záviset na úhlové frekvenci  $\omega$ , resp. vlnovém čísle  $k$ , vybuzečné vlny.

Interpretace dvou vzájemně inverzních disperzních vztahů v (3.9) je znázorněna na obrázku 3.2. Můžeme mít zdroj vlnění kmitající o úhlové frekvenci  $\omega$ , pak funkce  $k(\omega)$  udává, jaké bude mít vzniklé postupné vlnění vlnové číslo  $k$  (vlnovou délku  $\lambda$ ). Anebo můžeme v prostředí vybudit stojaté vlny o vlnovém čísle  $k$ , pak výraz  $\omega(k)$  řekne, s jakou úhlovou frekvencí  $\omega$  budou kmitat.



(a) Vysílání postupné vlny zdrojem o úhlové frekvenci  $\omega$ .

(b) Stojaté kmity o vlnové délce  $\lambda$ .

Obrázek 3.2: Disperzní vztah udává vztah mezi úhlovou frekvencí  $\omega$  a vlnovým číslem  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  (a tedy vlnovou délkou  $\lambda$ ).



Ukázky různých disperzních vztahů jsou k nalezení v tabulce 3.1.

Prostředí	Disperzní vztah	Poznámka
struna, zvuk, EM vlna	$\omega = vk$	lineární disperzní vztah
řetízek atomů	$\omega = \omega_{max} \sin \beta k$	
vlnovod, ionosféra	$\omega^2 = \omega_{min}^2 + v^2 k^2$	
vlny na mělké vodě	$\omega^2 = gk \tanh kh$	gravitace $g$ , hloubka $h$
vlny na hluboké vodě	$\omega = \sqrt{gk}, \omega^2 = gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3$	povrchové napětí $\sigma$ , hustota vody $\rho$
neideální struna	$\omega^2 = \frac{T}{\rho} k^2 + \alpha k^4$	
světlo v látce	$\omega = \frac{c}{n} k, n(\omega) = \sqrt{1 + \alpha(\omega_0^2 - \omega^2)^{-1}}$	

Tabulka 3.1: Příklady disperzních vztahů v různých prostředích.

### 3.1.3 Reaktivní prostředí

Co se stane, když máme zdroj o úhlové frekvenci  $\omega$  v daném prostředí, ale neexistuje žádné vlnové číslo  $k \in \mathbb{R}$ , které by splnilo daný disperzní vztah? V takovém případě hovoříme o *reaktivním prostředí*. Přesněji řečeno se dané prostředí pro danou úhlovou frekvenci jeví jako reaktivní. V tomto prostředí nelze vybudit postupnou vlnu o zvolené úhlové frekvenci  $\omega$ . Prostředí, které umožňuje šíření postupné vlny s úhlovou frekvencí  $\omega$ , říkáme *transparentní prostředí*.

**Příklad.** Podívejme se na příklad prostředí, které má následující tvar disperzního vztahu

$$\omega^2 = \omega_{min}^2 + v^2 k^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \omega_{min}^2 \psi, \quad (3.12)$$

kde daná vlnová rovnice vpravo vede na disperzní vztah uvedený vlevo.

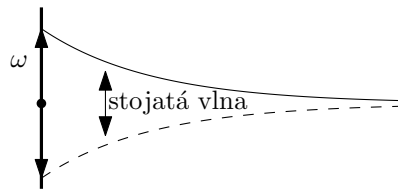
Pro  $\omega \in \langle \omega_{min}, +\infty \rangle$  existuje  $k \in \mathbb{R}$  splňující disperzní vztah. Pro  $\omega \geq \omega_{min}$  se tedy jedná o transparentní prostředí. Pro  $\omega < \omega_{min}$  nenajdu reálné vlnové číslo  $k \in \mathbb{R}$ , ale existuje řešení pro  $k \in \mathbb{C}$ :

$$k = i \sqrt{\frac{\omega_{min}^2 - \omega^2}{v^2}} = i\kappa. \quad (3.13)$$

Pokud toto řešení pro  $k \in \mathbb{C}$  dosadím do postupné vlny (která dala vzniknout disperznímu vztahu) obdržím tvar vlny, kterou zdroj vyvolá v tomto reaktivním prostředí:

$$\psi(z, t) = e^{i(\omega t \pm kz)} = e^{i(\omega t \pm i\kappa z)} = e^{\mp \kappa z} e^{i\omega t}. \quad (3.14)$$

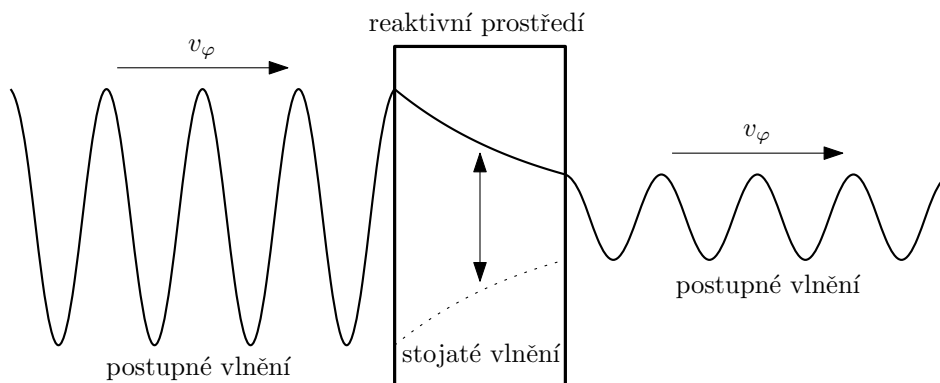
Tj. exponenciálně tlumenou stojatou vlnu; tato je znázorněna na obrázku 3.3. Těmto nešířícím se vlnám se říká *evanescentní vlny*. V reaktivním prostředí se tedy vlna nešíří, ale je exponenciálně tlumená – to je způsobeno komplexním řešením  $i\kappa$ , kdy se z harmonických kmitů (ve formě komplexní exponenciály) stane reálná exponenciála.



Obrázek 3.3: Zdroj vln o úhlové frekvenci  $\omega$  na hranici reaktivního prostředí vytvoří exponenciálně tlumenou stojatou vlnu.

Na obrázku 3.4 je znázorněno šíření vlny v transparentním prostředí, kterému do cesty postavíme reaktivní prostředí konečné šířky. Průchod reaktivním prostředím vlnu částečně utlumí.

Můžeme definovat vzdálenost zvanou *hloubka pronikání*,  $\delta = \frac{1}{\kappa}$ , kdy amplituda vlny poklesne právě na  $1/e$ .



Obrázek 3.4: Postupná vlna v transparentním prostředí, která narazí na tenké reaktivní prostředí, se částečně exponenciálně utlumí.

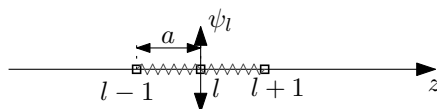
**Příklad.** Podívejme se na komplikovanější příklad řetízku atomů. Disperzní vztah je tvaru

$$\omega = \omega_{max} \sin \beta k, \quad \beta = \frac{a}{2}, \quad (3.15)$$

který vznikl dosazením stojaté vlny

$$\psi_l(t) = [\text{Re } e^{ikla}]e^{i\omega t} \quad (3.16)$$

do pohybových rovnic<sup>1</sup>,  $\psi_l$  udává výchylku  $l$ -tého závaží,  $a$  je vzdálenost jednotlivých těles, viz obrázek 3.5. Vidíme, že řetízek je transparentní prostředí pro  $\omega \in \langle 0, \omega_{max} \rangle$ .



Obrázek 3.5: Řetízek atomů. Jednotlivé atomy jsou číslovány  $l \in \mathbb{Z}$ , jejich výchylky jsou popsány funkcemi  $\psi_l(t)$ , vzdálenost mezi atomy je  $a$ .

Pro  $\omega \in \langle 0, \omega_{max} \rangle$  existuje  $k \in \mathbb{R}$  splňující disperzní vztah a tedy jedná se o transparentní prostředí. V reaktivním režimu pro  $\omega > \omega_{max}$  nebude fungovat jednoduchý trik  $k \rightarrow i\kappa$ , který jsme použili v předchozím příkladě (zkuste si dosazením, že disperzní vztah nebude splněn pro  $\omega, \kappa \in \mathbb{R}$ ). Upravme si tedy nejprve disperzní vztah (3.15) pomocí komplexních exponenciál:

$$\frac{\omega}{\omega_{max}} = \sin \beta k = \frac{e^{i\beta k} - e^{-i\beta k}}{2i} = \frac{(-i)e^{i\beta k} + ie^{-i\beta k}}{2} = \frac{e^{i(\beta k - \frac{\pi}{2})} + e^{-i(\beta k - \frac{\pi}{2})}}{2}, \quad (3.17)$$

kde jsme využili identitu  $e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i$ . Pro volbu  $\beta k - \frac{\pi}{2}$  ryze komplexní, tzn. například ve tvaru  $\beta k - \frac{\pi}{2} = i\beta\kappa$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$  dostaneme

$$\frac{\omega}{\omega_{max}} = \frac{e^{\beta\kappa} + e^{-\beta\kappa}}{2} = \cosh \beta\kappa \geq 1. \quad (3.18)$$

<sup>1</sup>Stojaté vlnění vznikne superpozicí postupných vln, tedy disperzní vztah kóduje stejnou informaci pro postupné i stojaté vlny.

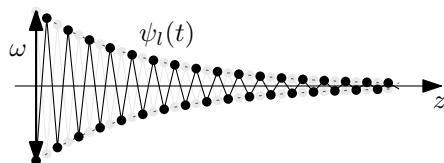
Tedy volbou  $k = i\kappa - \frac{1}{\beta} \frac{\pi}{2}$  a pro  $\omega > \omega_{max}$  splníme disperzní vztah pro  $\omega, \kappa \in \mathbb{R}$  a ten je tvaru

$$\omega = \omega_{max} \cosh \beta\kappa. \quad (3.19)$$

Tvar evanescentní vlny (po dosazení  $k = i\kappa + \frac{1}{\beta} \frac{\pi}{2}$  do (3.16)) je

$$\psi_l(t) = e^{-\kappa la} e^{i\frac{1}{\beta} \frac{\pi}{2} la} e^{i\omega t} = (-1)^l e^{-\kappa la} e^{i\omega t}, \quad (3.20)$$

tato je znázorněna na obrázku 3.6.



Obrázek 3.6: Vlna na řetízku atomů v reaktivním módu. Výchylka sousedních závaží se liší faktorem  $-1$ . Celý systém kmitá jako stojatá vlna o úhlové frekvenci  $\omega$  (šedě jsou zakresleny polohy závaží o půlperiodu později než zobrazené polohy černých závaží). Amplituda kmitání exponenciálně ubývá se vzdáleností od zdroje vlnění.

## 3.2 Matematická vsuvka: Fourierova transformace

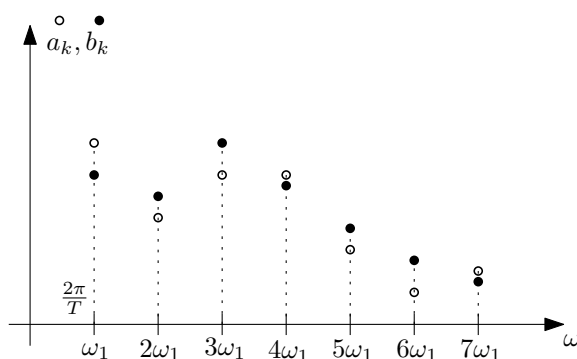
Již jsme viděli, jak rozložit periodický signál do (diskrétní) sumy harmonických vln. Jednalo se o rozklad periodické funkce do Fourierovy řady. Uvažujme funkci  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s periodou  $T$ , její Fourierova řada je pak<sup>2</sup>

$$f(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cos\left(\frac{2m\pi t}{T}\right) + b_m \sin\left(\frac{2m\pi t}{T}\right), \quad (3.21)$$

kde koeficienty  $a_m, b_m$  jsou dány vzorci

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2m\pi t}{T}\right) dt, \quad b_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2m\pi t}{T}\right) dt, \quad (3.22)$$

kde index  $m \in \mathbb{N}_0$  indexuje frekvence, z kterých skládáme původní signál. Nejnižší frekvenci označíme  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ . Vyšší frekvence pak můžeme psát jako  $\omega_m = m\omega_1$ . Rozklad periodického signálu do Fourierovy řady říká, že potřebujeme diskrétní množství frekvencí,  $\{\omega_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ . Viz schematický obrázek 3.7.



Obrázek 3.7: Schematicky znázorněné diskrétní frekvence ve Fourierově řadě.

<sup>2</sup>Pro zjednodušení následujícího výkladu jsme koeficient  $a_0$  zahrnuli přímo do sumy, je třeba pak myslet na to, že vzorec pro výpočet  $a_0$  je třeba dělit dvěma.

Uvažujme nyní neperiodickou funkci  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Pro každé  $T \in \mathbb{R}^+$  můžeme vypočítat koeficienty  $a_m, b_m$  dle vzorců (3.22) a dostat tak Fourierovu řadu periodického prodloužení funkce  $f|_{\langle -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \rangle}$ . Nerigorózně řečeno dostaneme *Fourierovu transformaci* jako limitu těchto Fourierových řad, pokud provedeme  $T \rightarrow +\infty$ . V takovém případě  $\omega_1 \rightarrow 0$  a z diskrétních frekvencí  $m\omega_1, m \in \mathbb{N}$ , se stane kontinuum frekvencí  $\omega \in \langle 0, +\infty \rangle$ .

Neperiodickou funkci  $f(t)$  tedy můžeme zapsat jako následující limitu Fourierových řad

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \left( \frac{a_m(T)}{\omega_1(T)} \cos(m\omega_1 t) + \frac{b_m(T)}{\omega_1(T)} \sin(m\omega_1 t) \right) \omega_1(T), \quad (3.23)$$

kde jsme si výrazy v řadě rozšířili frekvencí  $\omega_1$ . Tento výraz je vlastně Riemannův integrál<sup>3</sup>:

$$f(t) = \int_0^{+\infty} A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t d\omega, \quad (3.24)$$

kde jsme označili  $\omega = m\omega_1$  a funkce  $A(\omega)$  a  $B(\omega)$  jsou definovány jako

$$A(\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{a_m(T)}{\omega_1(T)}, \quad B(\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{b_m(T)}{\omega_1(T)}, \quad (3.25)$$

Provedením těchto limit získáme

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (3.26)$$

Vztahy (3.24) a (3.26) představují Fourierovu transformaci a její inverzi. Ukázali jsme, že neperiodické funkce lze zapsat jako spojitou superpozici harmonických vln. Funkce  $A(\omega)$  a  $B(\omega)$  budeme nazývat *spektrální funkce* nebo *spektra* funkce  $f$ . Tyto funkce udávají amplitudy jednotlivých harmonických vln tvořících funkci  $f$ .

Nerigoróznost našeho postupu spočívá v dvojitým limitování. Nejprve vlastně děláme limitu pro získání funkcí  $A(\omega)$  a  $B(\omega)$  a poté děláme limitu pro přechod od sumace k integraci. Rigorózní postup nicméně vede na stejné vztahy.

### 3.2.1 Fourierova transformace v komplexním zápisu

Zapišme Fourierovu transformaci (3.24) v řeči komplexních exponenciál:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^{+\infty} A(\omega) \underbrace{\cos \omega t}_{\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}} + B(\omega) \underbrace{\sin \omega t}_{\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}} d\omega \\ &= \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{A(\omega) - iB(\omega)}{2}}_{C(\omega)} e^{i\omega t} + \underbrace{\frac{A(\omega) + iB(\omega)}{2}}_{\tilde{C}(\omega)} e^{-i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Můžeme tedy definovat komplexní spektrální funkci,

$$C(\omega) = \frac{A(\omega) - iB(\omega)}{2}, \quad (3.28)$$

<sup>3</sup>Z definice Riemannova integrálu platí

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N f\left(k \frac{a}{N}\right) \frac{a}{N} = \int_0^a f(x) dx.$$

Zde je situace zkomplikována tím, že máme nekonečné sumy odpovídající integrování pro  $\omega \in \langle 0, +\infty \rangle$ .

kódující amplitudy  $A(\omega)$  a  $B(\omega)$  jako reálnou a imaginární část (až na dvojku a minus). Podíváme-li se nyní na vzorce pro  $A(\omega)$  a  $B(\omega)$  (3.26), vidíme, že mají smysl i pro  $\omega < 0$  a platí

$$A(-\omega) = A(\omega), \quad B(-\omega) = -B(\omega). \quad (3.29)$$

Pro funkci  $C(\omega)$  z výše uvedeného plyne  $C(-\omega) = \bar{C}(\omega)$ :

$$C(-\omega) = \frac{A(-\omega) - iB(-\omega)}{2} = \frac{A(\omega) + iB(\omega)}{2} = \bar{C}(\omega). \quad (3.30)$$

Po dosažení tohoto faktu do (3.27) přejde Fourierův integrál na tvar

$$f(t) = \int_0^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \int_0^{+\infty} C(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.31)$$

a po substituci v druhém integrálu  $\tilde{\omega} = -\omega$ ,  $d\tilde{\omega} = -d\omega$  získáme tento velmi jednoduchý tvar *komplexní Fourierovy transformace*

$$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega.} \quad (3.32)$$

Podmínka  $C(-\omega) = \bar{C}(\omega)$  je nutnou a postačující podmínkou pro realitu funkce  $f(t)$ . Vztah pro výpočet funkce  $C(\omega)$  získáme prostou kombinací vztahů (3.26):

$$\boxed{C(\omega) = \frac{A(\omega) - iB(\omega)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.} \quad (3.33)$$

Na tomto místě je vhodné poznamenat, že existují různé konvence zavedení komplexní Fourierovy transformace. Faktor  $\frac{1}{2\pi}$  se často rozloží na  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  a jeden z faktorů se přiřadí do vzorce pro rozklad  $f(t)$ . Tato konvence vede na velmi symetrický tvar Fourierovy transformace,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.34)$$

Další možnou konvenční změnou je prohodit funkce  $e^{i\omega t}$  a  $e^{-i\omega t}$ , případně ve Fourierově transformaci používat jako proměnnou frekvenci  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ . Při studiu literatury je tedy vždy vhodné se seznámit s používanou konvencí.

### 3.3 Vlnové balíky a relace neurčitosti

Zdroj kmitající čistě harmonickým průběhem  $x(t)$  po neomezenou dobu – zdroj harmonických postupných vln  $\psi(z, t)$ ,

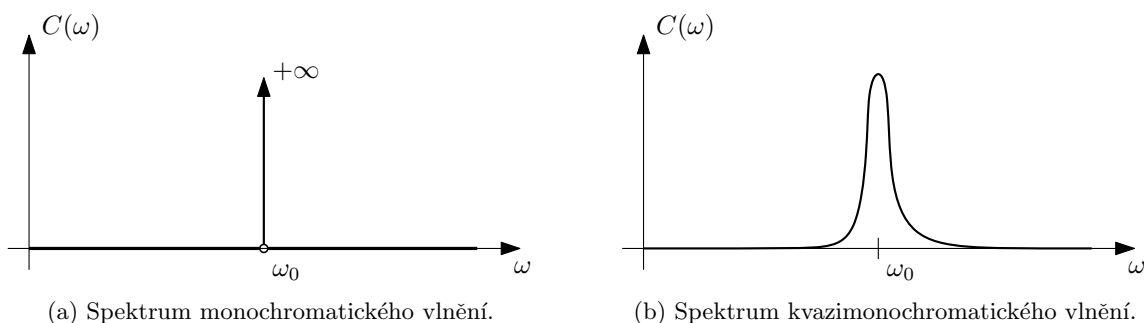
$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad \psi(z, t) = A \cos(\omega_0 t - k_0 z + \varphi), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.35)$$

– není zcela realistický model. Takové vlnění se nazývá *monochromatické*, jelikož jeho spektrum obsahuje jedinou frekvenci  $\omega_0$ , viz obrázek 3.8 (a). Proto zavádíme pojem *kvazimonochromatické* vlny tvaru

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_0(t) t + \varphi(t)), \quad \psi(z, t) = A(t_r) \cos(\omega_0(t_r) t - k_0(t_r) z + \varphi(t_r)), \quad (3.36)$$

kde se amplituda  $A$ , frekvence  $\omega$  a fázový posun  $\varphi$  mohou obecně v čase měnit (symbol  $t_r$  označuje retardovaný čas). Tyto změny ale musí být dostatečně pomalé tak, aby se v určitém

časovém úseku  $\tau \gg T = \frac{2\pi}{\omega}$  tyto parametry daly považovat za téměř konstantní – a tedy vybraný úsek vlny trvání  $\tau$  dostatečně přesně aproximuje monochromatickou vlnu. Spektrum kvazimonochromatické vlny je soustředěné kolem frekvence  $\omega_0$ , ale obsahuje celé kontinuum frekvencí okolo, viz obrázek 3.8 (b).



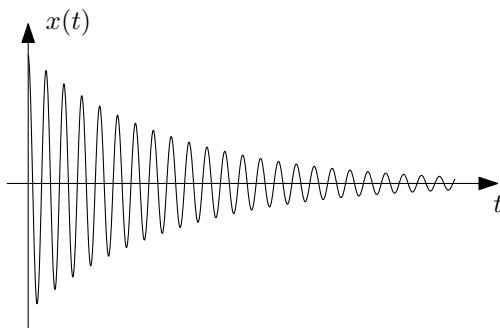
Obrázek 3.8: Spektrum monochromatického a kvazimonochromatického vlnění.

Jedním z možných příkladů je vysílání slabě tlumené harmonické vlny tvaru

$$x(t) = e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t), \quad \psi(z, t) = e^{-\alpha(t - \frac{z}{v})} \cos(\omega_0 t - k_0 z), \quad (3.37)$$

viz obrázek 3.9. Podmínka slabého tlumení je zde definována tím, že doba útlumu  $\tau = \frac{1}{\alpha}$  vlny na  $1/e$  hodnoty amplitudy je mnohem větší než perioda harmonických kmitů:

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \gg T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad \alpha \ll \omega_0. \quad (3.38)$$



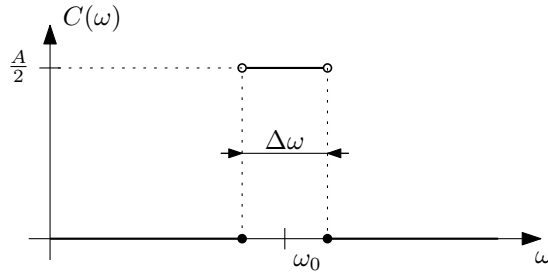
Obrázek 3.9: Exponenciálně tlumené kmitání.

Posledním pojmem, který zde budeme potřebovat je pojem *vlnový balík*. Budeme tím rozumět časově a prostorově ohraničené vlnění. Není tím přímo myšleno, že mimo danou časovou či prostorovou oblast musí vlnění zcela vymizet. Spíše je míněno, aby „hlavní“ část vlnění (s největší amplitudou, s největší energií) byla soustředěna do omezeného časového či prostorového intervalu. Pro vlnové balíky bychom tedy chtěli definovat veličiny  $\Delta t$  – časová šířka balíku – a  $\Delta z$  – prostorová šířka balíku. Tyto dvě veličiny budou mít mezi sebou jednoduchý vztah. Je-li  $v$  rychlost pohybu balíku prostředím, bude platit  $\Delta z = v \Delta t$ .

Kvazimonochromatické vlnové balíky získáme jako spojitou superpozici harmonických vln,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \psi(z, t) = x\left(t - \frac{z}{v}\right). \quad (3.39)$$

Uvažujme jednoduchý model vlnového balíku, kdy zvolíme reálnou spektrální funkci  $C(\omega)$  jako na obrázku 3.10. Tedy spektrum vycentrované okolo frekvence  $\omega_0$  a šířce spektra  $\Delta\omega$ .



Obrázek 3.10: Obdélníkové spektrum.

Fourierova transformace tohoto spektra pak vypadá následovně

$$x(t) = \int_0^{+\infty} A(\omega) \cos(\omega t) d\omega = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} A \cos(\omega t) d\omega \quad (3.40)$$

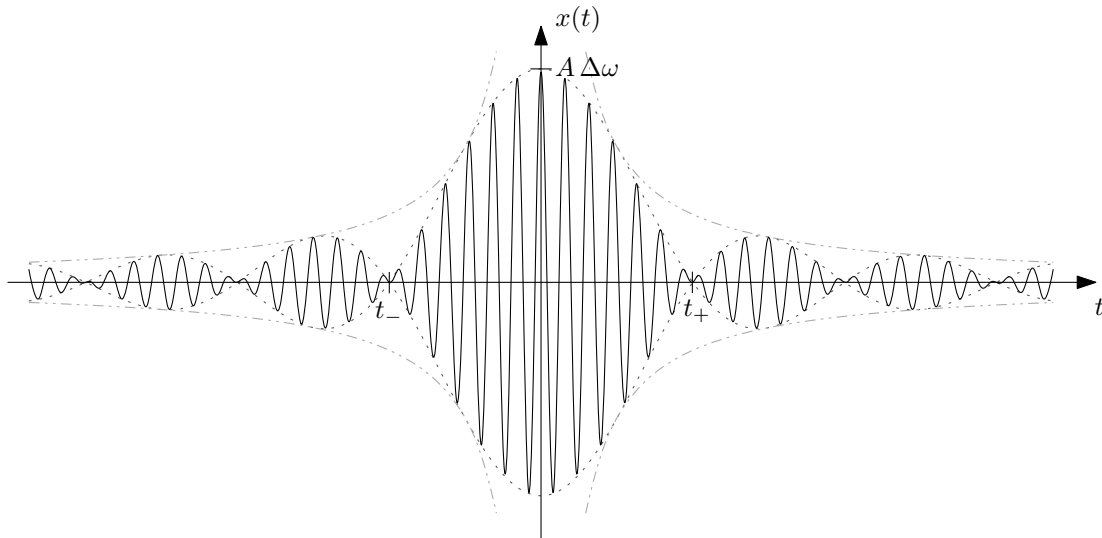
a po výpočtu a úpravě pomocí součtového vzorce (viz cvičení) dostaneme výsledný tvar balíku,

$$x(t) = A\Delta\omega \frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)}{\frac{\Delta\omega}{2}t} \cos(\omega_0 t), \quad (3.41)$$

který je znázorněn na obrázku 3.11. Po jeho vyslání ze zdroje bude mít tvar<sup>4</sup>

$$\psi(z, t) = A\Delta\omega \frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t_r\right)}{\frac{\Delta\omega}{2}t_r} \cos(\omega_0 t - k_0 z), \quad t_r = t - \frac{z}{v}, \quad (3.42)$$

kde  $t_r$  je retardovaný čas.



Obrázek 3.11: Vlnový balík vzniklý ze obdélníkového spektra. Vlastní průběh funkce  $x(t)$  je znázorněn plnou čarou. Amplitudová obálka je naznačena čárkovaně, obálka daná pouze nepřímou úměrou je naznačena čerchovaně. Časy  $t_{\pm}$  označují místa, kdy amplitudová obálka poprvé protíná nulu.

<sup>4</sup>V čase  $t = 0$  se funkce spojitě dodefinuje dle limity  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

Funkční tvar vlnového balíku  $x(t)$  (3.41) se dá napsat ve tvaru

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t), \quad \text{kde} \quad A(t) = A \Delta \omega \frac{\sin\left(\frac{\Delta \omega}{2} t\right)}{\frac{\Delta \omega}{2} t}. \quad (3.43)$$

To znamená, že vlnový balík je ve tvaru nosné harmonické vlny o frekvenci  $\omega_0$ , která je modulovaná amplitudovou obálkou popsanou funkcí  $A(t)$  (viz čárkovaná čára na obrázku 3.11 představující funkce  $\pm A(t)$ ). Nalezneme nyní šířku tohoto balíku tak, že spočítáme časy  $t_+$  a  $t_-$  ( $t_+ > 0$ ,  $t_- < 0$ ), kdy amplitudová obálka poprvé protne nulu, a rozdíl těchto časů bude představovat šířku tohoto balíku. Sinus má první nuly v  $\pm\pi$  a tedy

$$\frac{\Delta \omega}{2} t_{\pm} = \pm\pi. \quad (3.44)$$

Šířka balíku tedy je

$$\Delta t = t_+ - t_- = \frac{4\pi}{\Delta \omega} \quad (3.45)$$

a po přeuspořádání dostaneme vztah

$$\Delta t \cdot \Delta \omega = 4\pi = \text{konst.} \quad (3.46)$$

Tento vztah říká, že časová šířka balíku a šířka jeho frekvenčního spektra je k sobě v nepřímé úměře! Čím kratší je vlnový balík, tím více potřebujeme frekvencí na jeho vytvoření (a naopak). Konkrétní hodnota konstanty na pravé straně závisí na konkrétní definici hodnot  $\Delta t$  a  $\Delta \omega$  a není příliš důležitá. Hlavní je onen kvalitativní vztah nepřímé úměry.

Obecně se dá dokázat následující tvrzení, které se nazývá *relace neurčitosti*:

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \geq \pi. \quad (3.47)$$

Součin časové šířky  $\Delta t$  a šířky spektra  $\Delta \omega$  nikdy nebude menší než určitá konstanta (nezávislá<sup>5</sup> od tvaru signálu či spektra). V teorému jsou samozřejmě veličiny  $\Delta t$  a  $\Delta \omega$  rigorózně definovány. Zde na to bohužel není prostor. Uveďme ale jednoduché tvrzení z teorie Fourierovy analýzy, které intuitivně ilustruje platnost relací neurčitosti, přestože je v žádném případě nedokazuje:

Mějme funkci  $f(t)$  a k ní příslušnou spektrální funkci  $C(\omega)$ . Uvažujme konstantu  $a \in \mathbb{R}^+$ . Potom platí, že k funkci  $f(at)$  je spektrální funkce tvaru  $\frac{1}{a} C\left(\frac{\omega}{a}\right)$ . Dokažme toto tvrzení. Označme  $C_a(\omega)$  spektrální funkci k funkci  $f(at)$ . Z definice Fourierova integrálu máme

$$C_a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-i\omega t} dt \quad (3.48)$$

Provedeme-li substituci  $t' = at$ , dostaneme tvrzení věty:

$$C_a(\omega) = \frac{1}{a} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-i\frac{\omega}{a} t'} dt' = \frac{1}{a} C\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (3.49)$$

Nyní si uvědomme, co tato věta prakticky tvrdí. Nechť je časová šířka vlnového balíku  $f(t)$  velikosti  $\Delta t$  a k ní příslušná šířka frekvenčního spektra  $\Delta \omega$ ,

$$\Delta t \quad \dots \quad f(t) \quad \leftrightarrow \quad C(\omega) \quad \dots \quad \Delta \omega. \quad (3.50)$$

Násobení argumentu funkce  $f$  konstantou  $a > 0$  představuje škálování časové osy. Pro  $a > 1$  se funkce na časové ose smršťuje, pro  $a < 1$  se funkce roztahuje. Časová šířka funkce  $f(at)$  je

<sup>5</sup>Konstanta je naopak závislá od konkrétní použité konvence ve Fourierově transformaci.



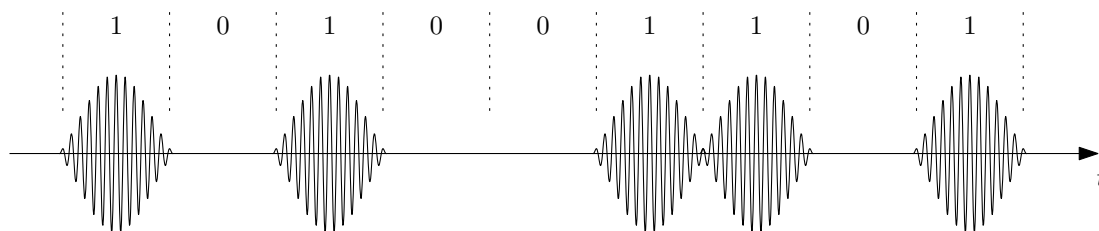
tedy  $\frac{\Delta t}{a}$ . Z tvrzení věty je spektrum naškálované funkce tvaru  $\frac{1}{a}C\left(\frac{\omega}{a}\right)$ , škálování frekvenčního spektra tedy probíhá inverzně než u časového průběhu funkce. Je-li původní šířka frekvenčního spektra  $\Delta\omega$ , u naškálované funkce bude  $a\Delta\omega$ ,

$$\frac{\Delta t}{a} \quad \dots \quad f(at) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{a}C\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad \dots \quad a\Delta\omega. \quad (3.51)$$

Součin časové šířky a spektrální šířky tedy zůstává konstantní pro libovolné číslo  $a$ :

$$\left(\frac{\Delta t}{a}\right) (a\Delta\omega) = \Delta t \Delta\omega. \quad (3.52)$$

Na závěr si ukažme jednoduchý příklad aplikace relací neurčitosti týkající se řádového odhadu dosažitelných přenosových rychlostí. Uvažujme primitivní způsob kódování binárního signálu do vysílaného signálu, kdy jedničku zakódujeme vysláním vlnového balíku, zatímco nulu zakódujeme jeho nevysláním, viz obrázek 3.12.



Obrázek 3.12: Binární signál zakódovaný do vyslaných/nevyslaných balíků.

Jestliže mají vlnové balíky šířku  $\Delta t$  musíme s případným vysláním nebo nevysláním dalšího balíku v řadě počkat přibližně alespoň čas  $\Delta t$ , aby příjemce mohl snadno rozlišit mezi jednotlivými vyslanými balíky. To znamená, že za jednotku času můžeme vyslat  $N = \frac{1}{\Delta t}$  balíků, tedy i bitů informace. Máme-li pro vysílání k dispozici šířku pásma  $\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$ , dle relací neurčitosti je šířka balíku přibližně alespoň  $\Delta t = \frac{\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{2\Delta f}$ . Přenosová rychlost je tedy maximálně  $N = 2\Delta f$  bitů za sekundu. Například šířka pásma jednoho kanálu Wifi je  $\Delta f = 20$  MHz, což při zabrání právě jednoho kanálu dává odhad na přenosovou rychlost  $N = 40$  Mbps.

## 3.4 Grupová rychlost

### 3.4.1 Superpozice dvou postupných harmonických vln

Nejprve si fenomén *grupové rychlosti* ukážeme na nejjednodušším možném příkladu – superpozici dvou postupných harmonických vln. Uvažujme prostředí s disperzním vztahem  $\omega(k)$  a vezměme postupné vlny s vlnovými čísly  $k_1$  a  $k_2$ , k nim pak z disperzního vztahu získám příslušné úhlové frekvence:

$$k_1, k_2 \quad \longrightarrow \quad \omega_1 = \omega(k_1), \omega_2 = \omega(k_2). \quad (3.53)$$

Vezměme následující superpozici vln se stejnou amplitudou a bez fázového posuvu<sup>6</sup> a upravme ji součtovým vzorcem:

$$\begin{aligned} \psi(z, t) &= A \cos(\omega_1 t - k_1 z) + A \cos(\omega_2 t - k_2 z) \\ &= 2A \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} z\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} z\right). \end{aligned} \quad (3.54)$$

<sup>6</sup>Fázový posuv nepřináší nic navíc, kromě delšího psaní.

Nyní uvažujme  $k_1$  blízké  $k_2$ , BÚNO  $k_1 > k_2$ . Označíme si

$$k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad k_{mod} = \frac{k_1 - k_2}{2}. \quad (3.55)$$

Potom platí  $k_{mod} \ll k_0$  díky blízkosti hodnot  $k_1, k_2$ . Dále si označíme

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad (3.56)$$

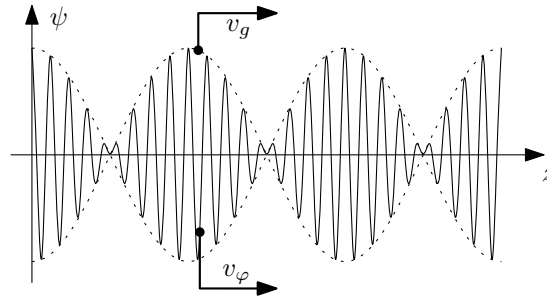
díky blízkosti  $k_1$  a  $k_2$  budou ze spojitosti disperzního vztahu blízké i  $\omega_1$  a  $\omega_2$  a tedy  $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega_0$ . Dále upravujeme

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \frac{\omega(k_1) - \omega(k_2)}{k_1 - k_2} \frac{k_1 - k_2}{2} = \frac{d\omega}{dk}(\xi) k_{mod} \approx \frac{d\omega}{dk}(k_0) k_{mod}, \quad (3.57)$$

kde jsme použili Lagrangeovu větu o přírůstku funkce,  $\xi \in (k_1, k_2)$  a následně derivaci aproximovali náhradou  $\xi$  za  $k_0$ . Superpozice (3.54) pak bude mít přibližně tvar

$$\psi(z, t) \approx 2A \cos(\omega_0 t - k_0 z) \cos(\omega'(k_0) k_{mod} t - k_{mod} z). \quad (3.58)$$

Tato superpozice má tvar součinu dvou postupných harmonických vln. První z nich je *nosná vlna* s (vysokou) úhlovou rychlostí  $\omega_0$  a velkým vlnovým číslem  $k_0$  (malou vlnovou délkou  $\lambda_0$ ). Druhá je *modulační vlna*, která moduluje amplitudu nosné vlny – tvoří její amplitudovou obálku. Tato vlna má mnohem větší vlnovou délku  $\lambda_{mod}$  (menší vlnové číslo  $k_{mod}$ ). Dostaneme tvar periodicky se opakujících vlnových balíků. Viz obrázek 3.13.



Obrázek 3.13: Superpozice dvou postupných harmonických vln.

Jaké jsou fázové rychlosti nosné a modulační vlny? Dle vztahu  $v = \frac{\omega}{k}$  dosadíme příslušné úhlové frekvence a vlnová čísla jednotlivých vln a dostaneme:

$$v_{nosná} = v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}, \quad v_{modulační} = v_g = \frac{\omega'(k_0) k_{mod}}{k_{mod}} = \frac{d\omega}{dk}(k_0). \quad (3.59)$$

Fázovou rychlost modulační vlny nazýváme *grupová rychlost*. Tato udává rychlost pohybu vlnových balíků, resp. jejich amplitudové obálky, skrze prostředí.

V případě, že máme lineární disperzní vztah tvaru  $\omega = vk$ , fázová rychlost nosné vlny a grupová rychlost se rovnají. Jinak se obecně mohou lišit.

Fázové rychlosti původních harmonických vln jsou

$$v_{\varphi 1} = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega(k_1)}{k_1}, \quad v_{\varphi 2} = \frac{\omega_2}{k_2} = \frac{\omega(k_2)}{k_2}. \quad (3.60)$$

Díky blízkosti  $k_1$  a  $k_2$  jsou tyto rychlosti blízké fázové rychlosti nosné vlny,  $v_\varphi \approx v_{\varphi 1} \approx v_{\varphi 2}$ .

### 3.4.2 Obecný vlnový balík

Uvažujme nyní obecný vlnový balík, který je spojitou superpozicí harmonických vln. Necht' je v prostředí umístěn zdroj, který vysílá signál tvaru

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.61)$$

kde funkce spektra  $C(\omega)$  je soustředěna kolem frekvence  $\omega_0$ , viz obrázek 3.14. Zdroj vyzařuje postupné vlny, tudíž z každé harmonické složky se stane postupná vlna:

$$f(t) \propto e^{i\omega t} \quad \longrightarrow \quad \psi(z, t) \propto e^{i(\omega t - kz)}, \quad (3.62)$$

kde  $k = k(\omega)$  je dané z disperzního vztahu. Plná superpozice postupujících vln pak má tvar

$$\psi(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i(\omega t - k(\omega)z)} d\omega. \quad (3.63)$$

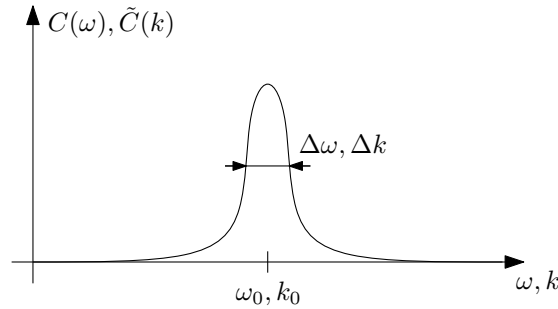
Nám se bude hodit integrovat spíše přes vlnová čísla  $k$ , takže substitucí,

$$\omega = \omega(k), \quad d\omega = \frac{d\omega}{dk} dk, \quad \tilde{C}(k) := C(\omega(k)) \frac{d\omega}{dk}, \quad (3.64)$$

přejdeme ke tvaru, kde sčítáme vlny pomocí jejich vlnových délek (vlnových čísel):

$$\psi(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{C}(k) e^{i(\omega(k)t - kz)} dk. \quad (3.65)$$

Spektrální funkce  $\tilde{C}(k)$  je také soustředěna kolem jednoho vlnového čísla  $k_0 = k(\omega_0)$ , ještě jednou viz obrázek 3.14.



Obrázek 3.14: Spektrum vlnového balíku. Schematicky znázorněné spektrální funkce  $C(\omega)$  a  $\tilde{C}(k)$ .

Nyní rozvineme disperzní vztah do Taylorovy řady se středem  $k_0$ ,

$$\omega(k) = \underbrace{\omega(k_0)}_{\omega_0} + \frac{d\omega}{dk}(k_0)(k - k_0) + O((k - k_0)^2), \quad (3.66)$$

a tento dosadíme do jednotlivých harmonických složek tvořící celkovou vlnu:

$$\begin{aligned} e^{i(\omega(k)t - kz)} &= \underbrace{e^{ik_0z} e^{-ik_0z}}_{=1} e^{i\omega_0 t} e^{i(\omega'(k_0)(k - k_0)t - kz)} e^{iO((k - k_0)^2)t} \\ &= e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} e^{i(\omega'(k_0)(k - k_0)t - (k - k_0)z)} e^{iO((k - k_0)^2)t}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

kde jsme si výraz vynásobili vhodnou jedničkou a přeuspořádali členy tak, že jsme vytkli komplexní nosnou vlnu. Dosadíme předchozí výraz do integrálu (3.65) a pro zkrácení zápisu označíme  $k' = k - k_0$ :

$$\psi(z, t) = e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{C}(k' + k_0) e^{i(\omega'(k_0)k't - k'z)} e^{iO(k'^2)t} dk. \quad (3.68)$$

Nyní využijeme toho, že spektrální funkce  $\tilde{C}(k)$  je soustředěna kolem vlnového čísla  $k_0$  (s šířkou spektra  $\Delta k$ ). Můžeme tedy aproximovat funkci  $\psi(z, t)$  tak, že omezíme obor integrace pouze na  $k \in \langle k_0 - \frac{\Delta k}{2}, k_0 + \frac{\Delta k}{2} \rangle$ . Jelikož jsme se tím omezili na hodnoty  $k$  blízké  $k_0$ , můžeme dále zanedbat vyšší řády Taylorova rozvoje,  $e^{iO(k'^2)}$ . Výsledkem je:

$$\psi(z, t) \approx e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} \tilde{C}(k' + k_0) \underbrace{e^{i(\omega'(k_0)k't - k'z)}}_{e^{-ik'(z - \omega'(k_0)t)}} dk. \quad (3.69)$$

Celý komplikovaný výraz pod integrálem závisí na proměnných  $z$  a  $t$  jen na jediném místě: v exponenciále je výraz  $z - \omega'(k_0)t$ , který je z hlediska integrace konstantní. Můžeme tedy definovat funkci  $F(x)$ ,

$$F(x) = \int_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} \tilde{C}(k) e^{-i(k - k_0)x} dk, \quad (3.70)$$

a psát výslednou vlnu  $\psi(z, t)$  jako

$$\psi(z, t) \approx e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} F(z - \omega'(k_0)t). \quad (3.71)$$

Toto je analogický výsledek jako u superpozice dvou harmonických vln. Máme zde nosnou vlnu  $e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}$  postupující fázovou rychlostí  $v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}$  a tato je amplitudově modulována modulační funkcí  $F(x)$ , která postupuje rychlostí  $\omega'(k_0)$  (vzpomeňte na d'Alembertovo řešení  $F(z - vt)$ ). Máme tedy stejné výrazy pro *fázovou a grupovou rychlost* (jako u superpozice dvou harmonických vln):

$$v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}, \quad v_g = \frac{d\omega}{dk}(k_0), \quad (3.72)$$

představující rychlosti postupu nosné a modulační vlny.

### 3.4.3 Rozplývání vlnového balíku

V předchozí kapitole jsme po zanedbání vyšších řádů Taylorova rozvoje obdrželi postupující vlnový balík, jehož amplitudová obálka má časově neměnný tvar  $F(x)$ . Pod integrálem jsme zanedbali člen tvaru

$$\exp [i O((k - k_0)^2) t], \quad (3.73)$$

který způsobuje, že funkce  $F(x)$  není v čase konstantní, ale má dodatečnou časovou závislost,

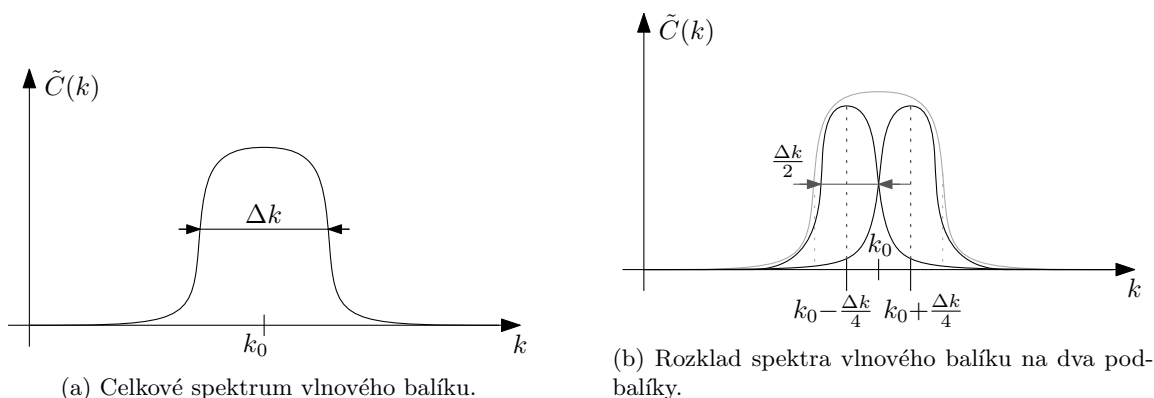
$$F(x) \longrightarrow F(x, t). \quad (3.74)$$

Tato dodatečná časová závislost způsobuje, že postupující amplitudová obálka  $F(z - v_g t, t)$  v čase mění svůj tvar – deformuje se. Tomuto jevu se říká *rozplývání vlnových balíků*. Pokusme se tento jev elementárně kvantifikovat.

Uvažujme opět spektrum vlnového balíku  $\tilde{C}(k)$  (znovu znázorněné na obrázku 3.15 (a)) soustředěné okolo vlnového čísla  $k_0$  o frekvenční šířce  $\Delta k$  a k němu odpovídající vlnový balík  $\psi(z, t)$  (daný Fourierovou transformací spektra  $\tilde{C}(k)$ ). Rozložme ho na superpozici dvou balíků,

$$\psi(z, t) = \psi_-(z, t) + \psi_+(z, t), \quad (3.75)$$

kde frekvenční spektrum balíku  $\psi_-$  je soustředěno okolo  $k_0 - \frac{\Delta k}{4}$  a  $\psi_+$  okolo  $k_0 + \frac{\Delta k}{4}$ , oba s šířkou spektra  $\frac{\Delta k}{2}$ , viz obrázek 3.15 (b).



Obrázek 3.15: Rozklad spektra pro studium rozplývání vlnového balíku.

Každý z těchto podbalíčků se může pohybovat jinou grupovou rychlostí:

$$v_{g-} = \frac{d\omega}{dk}(k_-), \quad v_{g+} = \frac{d\omega}{dk}(k_+), \quad (3.76)$$

kde  $v_{g-}$ , resp.  $v_{g+}$ , označuje grupovou rychlost  $\psi_-$ , resp.  $\psi_+$ . Jaký bude rozdíl těchto rychlostí  $\Delta v_g$ ?

$$\Delta v_g = v_{g+} - v_{g-} = \frac{\omega'(k_+) - \omega'(k_-)}{k_+ - k_-} (k_+ - k_-) = \omega''(\xi) \frac{\Delta k}{2} \approx \omega''(k_0) \frac{\Delta k}{2} = \frac{dv_g}{dk}(k_0) \frac{\Delta k}{2}, \quad (3.77)$$

při úpravách jsme použili Lagrangeovu větu o přírůstku funkce a fakt, že  $\xi \in (k_-, k_+)$ ,  $\xi \approx k_0$ , a spektrální středy jednotlivých podbalíčků jsme označili  $k_- = k_0 - \frac{\Delta k}{4}$ , resp.  $k_+ = k_0 + \frac{\Delta k}{4}$ . Platí tedy

$$\Delta v_g = \frac{1}{2} v'_g(k_0) \Delta k. \quad (3.78)$$

Označme (prostorovou) šířku balíku v čase  $t$  jako  $\Delta z(t)$  a zkoumejme, jak se tato bude měnit. Nechť je časová šířka původního signálu  $f(t)$  vysílaného zdrojem  $\Delta t$ . Jeho počáteční šířka je pak

$$\Delta z(0) = v_g \Delta t, \quad (3.79)$$

jelikož se pohybuje rychlostí  $v_g$  a jeho vyslání trvá přibližně  $\Delta t$ . Středů balíčků se od sebe vzdalují rychlostí  $\Delta v_g$ , takže šířka balíku v čase  $t$  je

$$\Delta z(t) = \Delta z(0) + \Delta v_g t \approx \Delta z(0) + \frac{1}{2} \omega''(k_0) \Delta k t. \quad (3.80)$$

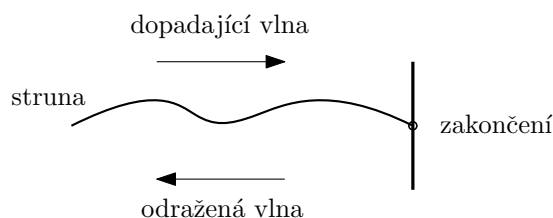
Rozplývání vlnových balíčků je jev, který obecně znehodnocuje náš vyslaný signál. V případě, že vysíláme řadu balíčků za sebou, dojde vlivem jejich rozplývání k jejich překryvu a nemožnosti ze zdeformované signalu rozpoznat, zda balík je či není přítomen (tímto způsobem jsme primitivně kódovali binární signál).



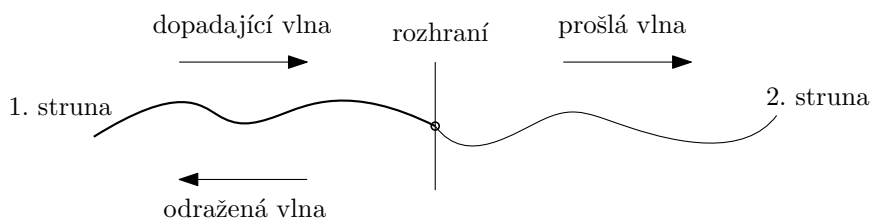
# Kapitola 4

## Odrazy vln

V této kapitole se budeme zabývat chováním vln na rozhraní několika prostředí. Koncepty budeme ilustrovat na modelu struny. Začneme studiem polonekonečné struny, která je v daném místě zakončená, viz obrázek 4.1. Potom přejdeme k případu, kdy máme dvě různé struny, které jsou v daném místě spojené. Naším cílem bude najít výrazy pro prošlé a odražené vlny v závislosti na předepsané vlně dopadající na rozhraní, viz obrázek 4.2.



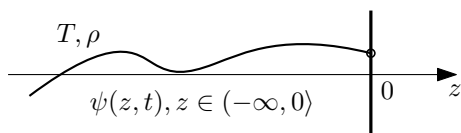
Obrázek 4.1: Modelová situace pro studium odrazů č.1: Zakončení jedné struny.



Obrázek 4.2: Modelová situace pro studium odrazů č.2: Napojení dvou strun.

### 4.1 Zakončení struny

Uvažujme strunu o hustotě  $\rho$  a napětí  $T$ , která je pro jednoduchost zakončená v  $z = 0$ . To znamená, že samotná struna se rozkládá na  $z \in (-\infty, 0)$ . Viz obrázek 4.3.



Obrázek 4.3: Zakončení jedné struny.

Pohyb struny je standardně popsán funkcí příčné výchylky  $\psi(z, t)$ , která se pro  $z \in (-\infty, 0)$

řídí vlnovou rovnicí,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (4.1)$$

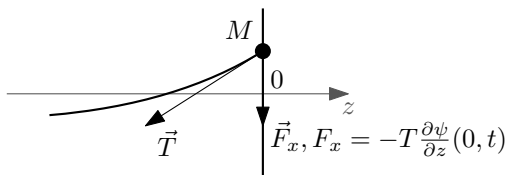
Uvažujme d'Alembertovo řešení vlnové rovnice,

$$\psi(z, t) = \underbrace{F(z - vt)}_{\text{dopadající vlna}} + \underbrace{G(z + vt)}_{\text{odražená vlna}}, \quad (4.2)$$

kde vlna  $\psi_d(z, t) = F(z - vt)$  představuje předepsanou dopadající vlnu a vlna  $\psi_r(z, t) = G(z + vt)$  je hledaná odražená vlna. Dále musíme předepsat okrajovou podmínku na rozhraní  $z = 0$ , která určí, jak se vlna na tomto rozhraní bude odrážet. Zatím pro obecnost uvažujme, že upevnění (zakončení, závěs) struny má hmotnost  $M$  a v místě upevnění působí třecí síla závislá na rychlosti,

$$F_{\text{tření}} = -\alpha \frac{\partial \psi}{\partial t}(0, t), \quad (4.3)$$

kde  $\alpha$  představuje koeficient třecí síly. Na upevnění dále působí silou samotná struna – příčným průmětem napěťové síly  $F_x = -T \frac{\partial \psi}{\partial z}$ , viz obrázek 4.4.



Obrázek 4.4: Příčná síla od struny působící na zakončení.

Zapišeme nyní obecnou pohybovou rovnici pro zakončení. Z Newtonova druhého zákona máme:

$$M \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(0, t) = F_x + F_{\text{tření}} = -T \frac{\partial \psi}{\partial z}(0, t) - \alpha \frac{\partial \psi}{\partial t}(0, t). \quad (4.4)$$

Uvažujeme-li nyní pro jednoduchost nehmotný závěs,  $M = 0$ , dostaneme v bodě  $z = 0$  okrajovou podmínku tvaru:

$$\boxed{T \frac{\partial \psi}{\partial z}(0, t) + \alpha \frac{\partial \psi}{\partial t}(0, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.} \quad (4.5)$$

Do této podmínky dále dosadíme d'Alembertovo řešení (4.2). Spočtením příslušných derivací,

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}(0, t) = F'(-vt) + G'(vt), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(0, t) = -vF'(-vt) + vG'(vt), \quad (4.6)$$

kde jsme označili  $F'(x) = \frac{dF}{dx}$ , dostaneme po dosazení

$$T (F'(-vt) + G'(vt)) + \alpha (-vF'(-vt) + vG'(vt)) = 0. \quad (4.7)$$

Toto je rovnice pro neznámý tvar odražené vlny  $G(x)$  při zadaném tvaru dopadající vlny  $F(x)$ . Vyjádříme tedy z předchozí rovnice funkci  $G'$ :

$$G'(vt) = \frac{\alpha v - T}{\alpha v + T} F'(-vt). \quad (4.8)$$



Označme  $x = vt$  a dále zavedme veličinu *impedance*  $Z = \sqrt{T\rho}$ , pak  $\frac{T}{v} = Z$ . Můžeme (4.8) přepsat jako

$$G'(x) = \frac{\alpha - Z}{\alpha + Z} F'(-x). \quad (4.9)$$

Po zintegrování dle proměnné  $x$  nalezneme tvar odražené vlny  $G(x)$ :

$$\boxed{G(x) = \frac{Z - \alpha}{Z + \alpha} F(-x)}, \quad (4.10)$$

kde jsme integrační konstantu položili  $c = 0$ , protože pouze posouvá celé řešení  $\psi(z, t)$  po svislé ose.

Ukázali jsme, že odražená vlna je pouze zrcadlovým překlopením dopadající vlny,  $G(x) \propto F(-x)$ , a amplituda se změní konstatním amplitudovým koeficientem

$$R = \frac{Z - \alpha}{Z + \alpha}, \quad (4.11)$$

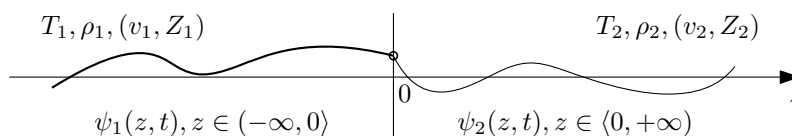
který se nazývá *koeficient odrazu*. Výsledné řešení je tvaru

$$\psi(z, t) = F(z - vt) + RF(-(z + vt)). \quad (4.12)$$

Požadujeme-li, aby nedocházelo k odrazům,  $R = 0$ , musí platit  $\alpha = Z$ . Třecí síla má v tom případě takovou podobu, že dokonale simuluje pokračování struny a žádná vlna se neodráží. Tomuto případu se říká *korektní zakončení*. Příklad  $\alpha \neq Z$  nazýváme *nekorektním zakončením*. Pokud uvažují nulové tření,  $\alpha = 0$ , dostanu podmínku volného konce a  $R = 1$ . Pro velké tření,  $\alpha \rightarrow +\infty$ , dostanu podmínku pevného konce a  $R = -1$ .

## 4.2 Napojení dvou strun

Pokročíme k druhé modelové situaci – napojení dvou různých strun. Situace je podrobně znázorněná na obrázku 4.5. První struna se rozkládá na souřadnicích  $z \in (-\infty, 0)$  a druhá na  $z \in (0, +\infty)$ . Parametry strun jsou označeny  $\rho_i, T_i$  (a k nim komplementární  $v_i$  a  $Z_i$ ),  $i \in \{1, 2\}$ .



Obrázek 4.5: Napojení dvou strun.

Každá ze strun se řídí příslušnou vlnovou rovnicí (s příslušnou hodnotou fázové rychlosti  $v_i$ ):

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} = v_i^2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2}, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (4.13)$$

Napišme příslušná d'Alembertova řešení na jednotlivých úsecích struny a interpretujme jednotlivé členy z hlediska studia odrazů vln, které přicházejí z první struny (tzn. ze  $z = -\infty$ ):

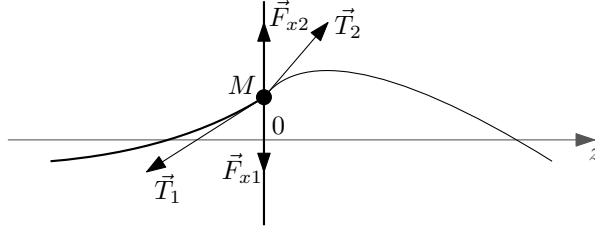
$$\begin{aligned} \psi_1(z, t) &= \underbrace{F_1(z - v_1 t)}_{\text{dopadající vlna}} + \underbrace{G_1(z + v_1 t)}_{\text{odražená vlna}}, \\ \psi_2(z, t) &= \underbrace{F_2(z - v_2 t)}_{\text{prošlá vlna}} + \underbrace{G_2(z + v_2 t)}_{=0}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Vlna  $G_2(z+v_2t)$ , tj. vlna šířící se ze  $z = +\infty$  nemá v našem modelu interpretaci. Předepíšeme tedy okrajovou podmínku vyzařování, tzn. položíme  $G_2 = 0$ . Zakazujeme šíření vlny z  $+\infty$ , která by nám narušovala naše studium odrazů vln přicházející z první struny. Naší úlohou tedy bude při předepsaném tvaru dopadající vlny  $F_1(x)$  nalézt tvary odražené vlny  $G_1(x)$  a prošlé vlny  $F_2(x)$ .

Nyní musíme napsat příslušné podmínky napojení v místě  $z = 0$ . První z nich je podmínka spojitosti napojení strun,

$$\boxed{\psi_1(0, t) = \psi_2(0, t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.} \quad (4.15)$$

Druhou podmínkou je splnění Newtonovy pohybové rovnice v místě napojení. Situace je znázorněná na obrázku 4.6. Uvažujme prozatím obecně napojení hmotnosti  $M$ . Na toto napojení pak působí příčné průměty sil od jednotlivých strun.



Obrázek 4.6: Příčné síly působící v místě napojení.

Pohybová rovnice pak má tvar

$$M \frac{\partial^2 \psi_{12}}{\partial t^2} = F_{x1} + F_{x2}, \quad (4.16)$$

kde si na levé straně pohybové rovnice můžeme díky podmínce spojitosti vybrat, jestli použijeme zrychlení výchylky  $\psi_1$  nebo  $\psi_2$  (indikováno symbolem  $\psi_{12}$ ). Vyjádření pro příčné síly je následující:

$$F_{x1} = -T_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z}(0, t), \quad F_{x2} = T_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial z}(0, t). \quad (4.17)$$

Pokud nyní vezmeme hmotnost napojení nulovou,  $M = 0$ , (nenulovou hmotností se budeme zabývat později), dostaneme podmínku rovnosti příčných sil v místě napojení:

$$\boxed{T_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z}(0, t) = T_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial z}(0, t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.} \quad (4.18)$$

Na základě těchto dvou podmínek napojení, podmínky spojitosti (4.15) a podmínky rovnosti příčných sil (4.18), vyjádříme tvar odražené vlny  $G_1(x)$  a prošlé vlny  $F_2(x)$  pomocí tvaru dopadající vlny  $F_1(x)$ . Dosaďme do podmínek napojení d'Alembertova řešení (4.14):

$$F_1(-v_1t) + G_1(v_1t) = F_2(-v_2t), \quad T_1 F_1'(-v_1t) + T_1 G_1'(v_1t) = T_2 F_2'(-v_2t) \quad (4.19)$$

a provedme substituci  $x = -v_1t$ :

$$F_1(x) + G_1(-x) = F_2\left(\frac{v_2}{v_1}x\right), \quad F_1'(x) + G_1'(-x) = \frac{T_2}{T_1} F_2'\left(\frac{v_2}{v_1}x\right) \quad (4.20)$$

Integrací druhé z rovnic dle  $x$  obdržíme

$$F_1(x) - G_1(-x) = \frac{T_2}{T_1} \frac{v_1}{v_2} F_2\left(\frac{v_2}{v_1}x\right), \quad (4.21)$$

kde jsme integrační konstantu zvolili nulovou, protože nakonec pouze posunuje celou výslednou funkci  $\psi(z, t)$  o konstantu (zkuste si ji tam nechat a uvidíte!). Konstantní člen na pravé straně je možné přepsat pomocí impedancí  $Z_1$  a  $Z_2$ ,  $Z = \sqrt{T\rho}$ :

$$\frac{T_2 v_1}{T_1 v_2} = \frac{Z_2}{Z_1}. \quad (4.22)$$

Výsledkem je následující soustava rovnic pro funkce  $G_1(x)$  a  $F_2(x)$ :

$$F_1(x) + G_1(-x) = F_2\left(\frac{v_2}{v_1}x\right), \quad F_1(x) - G_1(-x) = \frac{Z_2}{Z_1}F_2\left(\frac{v_2}{v_1}x\right). \quad (4.23)$$

Sečtením rovnic vyjádříme prošlou vlnu

$$\boxed{F_2(x) = PF_1\left(\frac{v_1}{v_2}x\right), \quad P = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2},} \quad (4.24)$$

kde konstantní amplitudový koeficient  $P$  nazýváme *koeficient průchodu*. Také se značí  $T$  (koeficient transmise), ale zde se to nehodí kvůli napětí ve strunách  $T_i$ . Odraženou vlnu vyjádříme z první rovnice v (4.23) (plynoucí z podmínky spojitosti) po dosazení z (4.24):

$$\boxed{G_1(x) = (P - 1)F_1(-x) = RF_1(-x), \quad R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2},} \quad (4.25)$$

koeficient  $R$  opět (jako u zakončení jedné struny) nazveme *koeficient odrazu*. Vidíme, že z podmínky spojitosti plyne jednoduchý vztah mezi koeficienty průchodu a odrazu:

$$\boxed{1 + R = P.} \quad (4.26)$$

Pro úplnost napíšeme i tvary vln  $\psi_i(z, t)$  postupujících po jednotlivých strunách:

$$\psi_1(z, t) = F_1(z - v_1t) + RF_1(-(z + v_1t)), \quad \psi_2(z, t) = PF_1\left(\frac{v_1}{v_2}(z - v_2t)\right). \quad (4.27)$$

Vyšlo nám, že odraz na rozhraní dvou strun je v jistém smyslu velmi jednoduše se chovající jev. Odražená vlna je zrcadlově převrácená a postupující zpět po první struně. Prošlá vlna je pouze deformovaná podílem fázových rychlostí  $\frac{v_2}{v_1}$  – pro  $v_2 > v_1$  je vlna na druhé straně roztažená, pro  $v_2 < v_1$  se naopak smrskne. Celá informace o průchodu a odrazu vln je zakódovaná v konstantních amplitudových koeficientech  $R$  a  $P$  – tyto jsou dané pouze parametry struny a nikoliv tvarem dopadající vlny.

Vlna se neodráží pokud jsou vyrovnané impedance na jednotlivých strunách:

$$R = 0 \Leftrightarrow Z_1 = Z_2 \Leftrightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (4.28)$$

Koeficient odrazu můžeme napsat v různých podobách

$$R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{Z_1}{Z_2} - 1}{\frac{Z_1}{Z_2} + 1} = \frac{1 - \frac{Z_2}{Z_1}}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}}, \quad (4.29)$$

z těchto tvarů plyne, že koeficienty závisí na poměru impedancí  $\frac{Z_1}{Z_2}$  a koeficienty průchodu a odrazu mají následující rozsahy

$$R \in \langle -1, 1 \rangle, \quad P \in \langle 0, 2 \rangle. \quad (4.30)$$

Při fixním  $Z_1$  dostaneme pro  $Z_2 = +\infty$  (pevný konec, nekonečně těžká nebo napnutá struna) koeficient  $R = -1$  ( $P = 0$ ), pro  $Z_2 = 0$  (volný konec, nehmotná nebo nenapjatá struna) pak máme  $R = 1$  ( $P = 2$ ).

### 4.2.1 Harmonická dopadající vlna

Uvažujme dopadající harmonickou vlnu (zde její komplexifikaci):

$$F_1(x) = Ae^{ik_1x}, \quad \psi_d(z, t) = F_1(z - v_1t) = Ae^{-i(\omega t - k_1z)}, \quad (4.31)$$

kde jsme dopadající část vlny  $\psi_1(z, t)$  označili jako  $\psi_d(z, t)$  a použili jsme disperzní vztah  $\omega = v_1k_1$ . Dosadíme nyní tvar dopadající vlny  $F_1(x)$  do vzorců (4.24) a (4.25) (a (4.27)). Odraženou a prošlou vlnu značíme  $\psi_r(z, t)$  a  $\psi_t(z, t)$ :

$$\begin{aligned} G_1(x) &= RF_1(-x), & \psi_r(z, t) &= G_1(z + v_1t) = RF_1(-z - v_1t) = AR e^{-i(\omega t + k_1z)}, \\ F_2(x) &= PF_1\left(\frac{v_1}{v_2}x\right), & \psi_t(z, t) &= F_2(z - v_2t) = PF_1\left(\frac{v_1}{v_2}z - v_1t\right) = AP e^{-i(\omega t - k_2z)}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

kde jsme znovu použili disperzní vztah  $\omega = v_1k_1$  a označili  $k_2 = k_1\frac{v_1}{v_2}$ . Podívejme se blíže na vlnové číslo prošlé vlny:

$$\frac{2\pi}{\lambda_2} = k_2 = \frac{v_1}{v_2}k_1 = \frac{v_1}{v_2} \frac{2\pi}{\lambda_1} \quad \longrightarrow \quad \lambda_2 = \frac{v_2}{v_1}\lambda_1. \quad (4.33)$$

Vlnová délka prošlé vlny se změní poměrem fázových rychlostí na první a druhé struně. Odpovídá to tomu, že rozhraní si můžeme představovat jako zdroj vlnění buzený dopadající vlnou z první struny. Tento myšlený zdroj pak vyzařuje prošlou vlnu šířící se po druhé struně.

### 4.3 Energetické poměry

Podívejme se na vztahy mezi toky energie dopadající, odražené a prošlé vlny. Definujeme koeficienty *reflexivity* (*odrazivosti*) a *transmisivity* jako podíl příslušných toků energie:

$$\mathcal{R} = \frac{|\langle S_{\text{odr}} \rangle|}{\langle S_{\text{dop}} \rangle}, \quad \mathcal{T} = \frac{\langle S_{\text{pr}} \rangle}{\langle S_{\text{dop}} \rangle}, \quad (4.34)$$

(u odrazivosti dáváme kolem energie odražené vlny absolutní hodnotu, jelikož tok energie odražené vlny je záporný). Pro harmonickou postupnou vlnu jsme si v kapitole o energetických veličinách na struně odvodili následující vztah pro tok energie:

$$|\langle S \rangle| = \frac{1}{2}ZA^2\omega^2. \quad (4.35)$$

Toky energie pro jednotlivé vlny pak jsou

$$\langle S_{\text{dop}} \rangle = \frac{1}{2}Z_1A^2\omega^2, \quad |\langle S_{\text{odr}} \rangle| = \frac{1}{2}Z_1A^2R^2\omega^2, \quad \langle S_{\text{pr}} \rangle = \frac{1}{2}Z_2A^2P^2\omega^2. \quad (4.36)$$

Po dosazení těchto vztahů do definic reflexivity a transmisivity (4.34), kde za amplitudy a impedance dosadíme příslušné hodnoty:

$$\boxed{\mathcal{R} = R^2, \quad \mathcal{T} = \frac{Z_2}{Z_1}P^2.} \quad (4.37)$$

Vidíme, že množství odražené energie (intenzita) je jednoduše dáno kvadrátem amplitudového koeficientu  $R$ . Naproti tomu na množství prošlé energie nelze usuzovat pouze ze změny amplitud, ale je třeba v zít v úvahu to, že se jedná o různá prostředí a že tedy stejné amplitudy mohou nést různé množství energie. Zde je tedy dodatečný faktor poměru impedancí  $\frac{Z_2}{Z_1}$ .

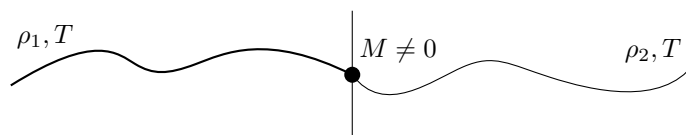
Použijme předchozího odstavce k vysvětlení „paradoxu“ pro případ  $R \rightarrow 1$  a  $P \rightarrow 2$ . Jedná se o případ, kdy  $Z_2 \rightarrow 0$ . Téměř celá vlna se odrazí ( $R \rightarrow 1$ ), ale zároveň projde vlna s téměř dvojnásobnou amplitudou ( $P \rightarrow 2$ )! Zároveň ale vidíme, že koeficient transmisivity jde díky nízké impedanci  $Z_2$  k nule,  $\mathcal{T} \rightarrow 0$ , tzn. energie nesená prošlou vlnou se také limitně blíží nule. K žádnému paradoxu tedy nedochází. V různých prostředích nestačí pouze porovnávat amplitudy, abychom usuzovali na energie nesené jednotlivými vlnami. V limitě volného konce máme  $\rho = 0$  nebo  $T = 0$ . Nehmotná nebo nenatažená struna nepřenáší žádnou energii.

Ze zákona zachování energie platí, že suma toků energií prošlé a odražené vlny je rovna toku energie dopadající vlny (v absolutních hodnotách), platí tedy:

$$\boxed{\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1, \quad \text{tzn.} \quad R^2 + \frac{Z_2}{Z_1} P^2 = 1.} \quad (4.38)$$

#### 4.4 Koeficienty průchodu a odrazu závislé na frekvenci

V minulých kapitolách jsme uvažovali, že napojení dvou strun je nehmotné. Nyní se podíváme na opačný případ. Uvidíme, že budeme muset zásadně změnit doposud používaný postup nalezení odražených a prošlých vln. Uvažujme tedy situaci znázorněnou na obrázku 4.7. Pro jednoduchost výpočtu tentokrát uvažujeme, že struny jsou napjaté na stejné napětí  $T$ , mají obecně různé hustoty  $\rho_1$  a  $\rho_2$  a napojení je realizováno hmotným bodem nenulové hmotnosti  $M$ .



Obrázek 4.7: Napojení s hmotou.

Zopakujme zde podmínky napojení – podmínka spojitosti a pohybová rovnice bodu napojení:

$$\psi_1(0, t) = \psi_2(0, t), \quad M \frac{\partial^2 \psi_{12}(0, t)}{\partial t^2} = T \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial z}(0, t) - \frac{\partial \psi_1}{\partial z}(0, t) \right), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.39)$$

kde symbol  $\psi_{12}$  znamená, že díky podmínce spojitosti si můžeme vybrat, zda budeme uvažovat výchylku  $\psi_1$  nebo  $\psi_2$ . Zaměříme se na druhou podmínku. Vidíme, že se zde míchájí první a druhé derivace a tedy jednoduchý postup použitý u předchozích modelů, kdy jsme rovnici zintegrovali, nebude možný<sup>1</sup>. Zkusme udělat úrok stranou. Uvědomme si, že každý tvar dopadající vlny  $F_1(x)$  se dá rozložit do součtu harmonických vln pomocí Fourierovy transformace:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(k) e^{ikx} dk. \quad (4.40)$$

Budeme tedy uvažovat dopadající vlnu ve formě harmonické postupné vlny s jednotkovou amplitudou, podíváme se, co se odrazí a co projde, a výsledné řešení pak můžeme zpět zapsat

<sup>1</sup>Po dosazení d'Alembertových řešení (4.14) do podmínek napojení (4.39) a úpravě dospějeme k následující nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty:

$$F_2''(x) - \frac{T(1 + \frac{v_2}{v_1})}{Mv_2^2} F_2'(x) = -\frac{2T}{Mv_2^2} F_1' \left( \frac{v_2}{v_1} x \right).$$

Tato rovnice se dá řešit. Homogenní řešení nalezneme standardní metodou charakteristického polynomu, nehomogenní řešení nalezneme metodou variací konstant. Výsledné velmi komplikované řešení ale neposkytuje příliš vzhledu do jevu odrazu v takovémto prostředí.

jako (spojitou) superpozici těchto elementárních odrazů. Udělejme navíc následující *ansatz* – předpokládejme, že i odražená a prošlá vlna budou ve tvaru harmonických vln:

$$F_1(x) = e^{ik_1x}, \quad G_1(x) = R e^{-ik_1x}, \quad F_2(x) = P e^{ik_2x}, \quad k_2 = \frac{v_1}{v_2} k_1, \quad (4.41)$$

kde vlnové číslo  $k_2$  je změněno poměrem fázových rychlostí oproti vlnovému číslu dopadající vlny  $k_1$ . Pokud se nám podaří najít řešení úlohy odrazu v tomto tvaru, víme, že z jednoznačnosti řešení jsme našli to správné (a jediné). Zapišme d'Alembertova řešení v tomto ansatzu,

$$\psi_1(z, t) = F_1(z - v_1t) + G_1(z + v_1t), \quad \psi_2(z, t) = F_2(z - v_2t), \quad (4.42)$$

kde jednotlivé vlny mají tvar:

$$\begin{aligned} F_1(z - v_1t) &= e^{-i(\omega t - k_1z)}, \\ G_1(z + v_1t) &= R e^{-i(\omega t + k_1z)}, \\ F_2(z - v_2t) &= P e^{-i(\omega t - k_2z)}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Tyto dosadíme do podmínek napojení (4.39). Z podmínky spojitosti máme

$$e^{-i\omega t} + R e^{-i\omega t} = P e^{-i\omega t} \quad \longrightarrow \quad 1 + R = P, \quad (4.44)$$

a z pohybové rovnice napojení (kde na levé straně volíme funkci  $\psi_2$ , jelikož obsahuje pouze jednu vlnu  $F_2$  a tedy dostaneme rovnici jednoduššího tvaru):

$$-PM\omega^2 e^{-i\omega t} = T(ik_1) \left[ R - 1 + \frac{v_1}{v_2} P \right] e^{-i\omega t}. \quad (4.45)$$

Z této rovnice vyjádříme koeficient  $P$  (po dosazení za  $R = P - 1$ ) s výsledkem:

$$\boxed{P(\omega) = \frac{2}{1 + \frac{v_1}{v_2} - i \frac{M\omega v_1}{T}} \in \mathbb{C}, \quad R(\omega) = P(\omega) - 1,} \quad (4.46)$$

kde jsme se navíc zbavili vlnového čísla  $k_1$  dosazením z disperzního vztahu  $\omega = v_1 k_1$ . Vidíme dvě překvapivé skutečnosti. Koeficienty vyšly závislé na úhlové frekvenci dopadající vlny  $\omega$  a také nám tyto koeficienty vyšly komplexní!

Komplexnost koeficientů jednoduše znamená, že koeficienty kódují nejen změnu amplitudy prošlé a odražené vlny, ale také fázový posun. Můžeme, např. pro koeficient  $P$ , použít goniometrický tvar komplexního čísla,

$$P = |P| e^{i\varphi}, \quad (4.47)$$

kteřé po dosazení do tvaru prošlé vlny  $F_2(x)$  dává:

$$F_2(x) = P e^{ik_2x} = |P| e^{i(k_2x + \varphi)}. \quad (4.48)$$

Velikost koeficientu  $|P|$  tedy má onen původní význam amplitudové modifikace prošlé vlny. Úhel  $\varphi$  v komplexní exponenciále  $e^{i\varphi}$  udává fázový posun oproti dopadající vlně.

Závislost koeficientů na úhlové frekvenci dopadající vlny  $\omega$  znamená, že každá harmonická složka se při odrazu obecně chová jinak. To má důležitý důsledek, pokud se vrátíme k původní úloze, kdy jsme jako tvar dopadající vlny volili obecnou funkci  $F_1(x)$ . Vezměme jako příklad tvar odražené vlny  $G_1(x)$ . Ve Fourierově integrálu (4.40) nahradíme každou z harmonických složek  $e^{ikx}$  za  $R(k)e^{-ikx}$  ( $R(k)$  je funkce vzniklá substitucí  $\omega = v_1 k$  z  $R(\omega)$ ):

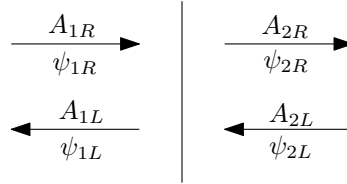
$$G_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(k) R(k) e^{-ikx} dk \neq R F_1(-x). \quad (4.49)$$

Jelikož je koeficient  $R$  závislý na  $\omega$  (na  $k$ ), nelze ho z integrálu vytknout a nelze tedy výslednou vlnu zapsat jako celkový koeficient odrazu  $R$  krát zrcadlená dopadající vlna  $F_1(-x)$ . Při koeficientech závislých na frekvenci se dopadající vlna při odrazu netriviálně deformuje (netriviálností rozumíme deformaci nad rámec zrcadlení u odražené vlny a roztazením poměrem  $\frac{v_1}{v_2}$  u prošlé vlny).

## 4.5 Matice přenosu

V této kapitole budeme chtít koeficienty průchodu a odrazu zakódovat do vhodné zvolené matice tak, abychom následně mohli velmi jednoduchým způsobem začít uvažovat odrazy na více než jednom rozhraní.

Dosud jsme v úloze odrazu vždy uvažovali podmínku vyzařování, kdy jsme zanedbávali vlnu přicházející „zprava“, jelikož při studiu odrazů tato neměla žádnou interpretaci. Nyní uvažujme obecnější situaci, kdy máme dané rozhraní dvou prostředí a na obou stranách rozhraní necháme vlny šířit se oběma směry, viz obrázek 4.8.



Obrázek 4.8: Rozhraní mezi dvěma prostředími. V obou prostředích se šíří postupné vlny oběma směry označené  $\psi_{1R}$  (vlna v prvním prostředí postupující doprava),  $\psi_{1L}$  (vlna v prvním prostředí postupující doleva),  $\psi_{2R}$  a  $\psi_{2L}$  (analogicky v druhém prostředí). Jejich amplitudy jsou označené  $A_{1R}$ ,  $A_{1L}$ ,  $A_{2R}$  a  $A_{2L}$ .

Uvažujeme-li, jako v předchozí sekci, komplexifikované harmonické postupné vlny, mají tyto vyjádření ve tvarech:

$$\begin{aligned} \psi_{1R} &= A_{1R} e^{i(\omega t - k_1 z)}, & \psi_{2R} &= A_{2R} e^{i(\omega t - k_2 z)}, \\ \psi_{1L} &= A_{1L} e^{i(\omega t + k_1 z)}, & \psi_{2L} &= A_{2L} e^{i(\omega t + k_2 z)}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

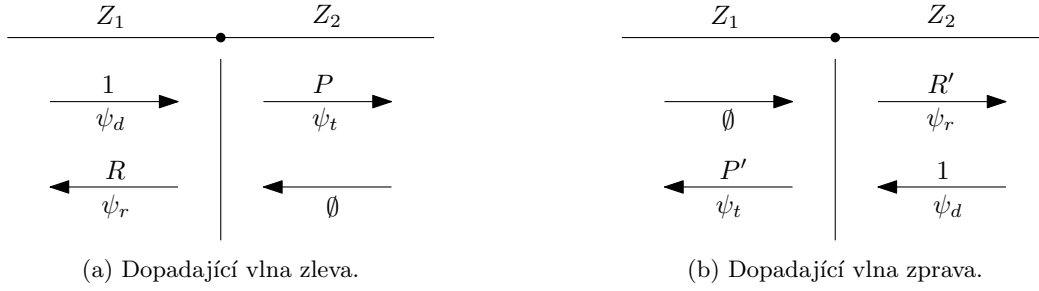
kde  $k_1$ , resp.  $k_2$ , je vlnové číslo v prvním, resp. druhém, prostředí.

Matice přenosu  $\mathbb{D} \in \mathbb{C}^{2,2}$  převádí amplitudy vln ( $A_{2R}, A_{2L}$ ) v druhém prostředí na amplitudy vln ( $A_{1R}, A_{1L}$ ) v prvním prostředí vztahem

$$\begin{pmatrix} A_{1R} \\ A_{1L} \end{pmatrix} = \mathbb{D} \begin{pmatrix} A_{2R} \\ A_{2L} \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

Matici přenosu  $\mathbb{D}$  prakticky najdeme řešením podmínek napojení mezi danými dvěma prostředími. Na konci této sekce si to ukážeme na příkladu.

Nejprve se jako jednoduchý úvodní příklad vraťme k úloze odrazu na napojení dvou strun o impedancích  $Z_1$  a  $Z_2$  v místě  $z = 0$ . Analogická schémata k obecnému obrázku 4.8 jsou znázorněna na obrázku 4.9. Necháváme tedy dopadat vlnu jednotkové amplitudy (ať už zleva nebo zprava) a amplituda prošlé a odražené vlny přímo udává koeficienty průchodu a odrazu.



Obrázek 4.9: Napojení dvou strun o impedancích  $Z_1$  a  $Z_2$ . Studujeme odrazy pro vlnu dopadající zleva i zprava. Koeficienty průchodu a odrazu pro vlnu dopadající zprava označujeme čárkami.

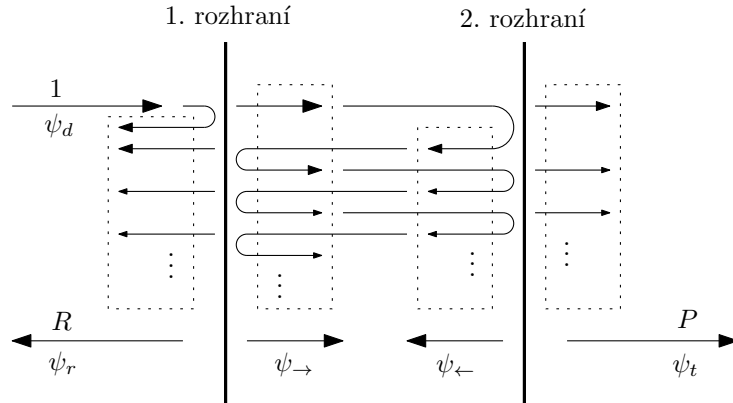
Dle definice matice přenosu (4.51) můžeme vztahy mezi amplitudami jednotlivých vln zapsat jako:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ R \end{pmatrix} = \mathbb{D} \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ P' \end{pmatrix} = \mathbb{D} \begin{pmatrix} R' \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

Vyřešením rovnic (4.52) pro koeficienty matice  $\mathbb{D}$  po dosazení již známých tvarů koeficientů průchodu a odrazu<sup>2</sup> dostaneme výsledný tvar matice přenosu

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2Z_1} \begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_1 - Z_2 \\ Z_1 - Z_2 & Z_1 + Z_2 \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

Pro situaci, kdy máme pouze jedno rozhraní mezi dvěma prostředími, matice přenosu moc užitečná není. Podívejme se ale na situaci, kdy vezmeme tři spolu postupně sousedící prostředí – například tři struny s impedancemi  $Z_1$ ,  $Z_2$  a  $Z_3$ . Pokud bychom postupovali tak, že vždy na jednotlivých rozhraních rozdělíme „aktuální“ dopadající vlnu na odraženou a prošlou část, dostaneme situaci popsanou na obrázku 4.10.



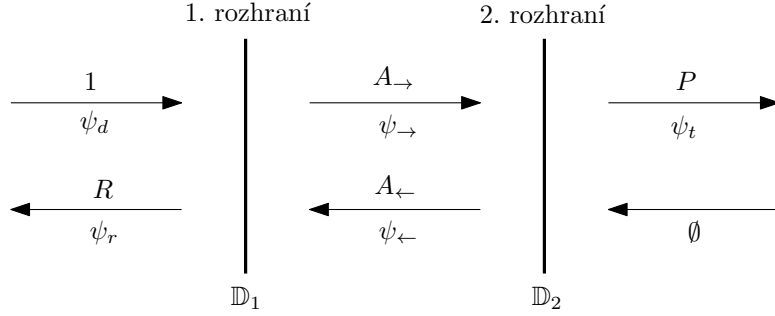
Obrázek 4.10: Dvě rozhraní mezi třemi prostředími. Vlna  $\psi_d$  jednotkové amplitudy dopadá zleva. Mezi dvěma rozhraními se odehraje nekonečně mnoho odrazů (a průchodů) a výsledná odražená vlna  $\psi_r$ , resp. prošlá vlna  $\psi_t$ , se získá jako superpozice všech odražených, resp. prošlých, příspěvků. Superpozici vln všech postupujících jedním a druhým směrem v prostoru mezi rozhraními značíme  $\psi_{\rightarrow}$  a  $\psi_{\leftarrow}$ . Po sečtením všech prošlých a odražených příspěvků (které opět vytvoří postupnou vlnu) můžeme určit „celkový“ koeficient průchodu  $P$  a odrazu  $R$ .

Tento postup, kde počítáme nekonečně mnoho příspěvků, je sice zdlouhavý, ale možný. Podívejme se na situaci z pohledu matice přenosu. Matice přenosu převádí amplitudy výsledných postu-

<sup>2</sup>Koeficient odrazu  $R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$  a průchodu  $P = 1 + R$ . Pro koeficienty „z druhé strany“ jenom přehodíme indexy u impedancí,  $R' = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$ ,  $P' = 1 + R'$ .



pujících vln z jednoho prostředí do druhého. Schematicky je situace znázorněna na obrázku 4.11.



Obrázek 4.11: Dvě rozhraní a výsledné postupující vlny a jejich amplitudy. Amplitudy postupných vln mezi dvěma rozhraními jsme označili  $A_{\rightarrow}$  a  $A_{\leftarrow}$ . Matice přenosu na jednotlivých rozhráních jsou označeny  $\mathbb{D}_1$  a  $\mathbb{D}_2$ .

Matice přenosu jednotlivých rozhraní,  $\mathbb{D}_1$  a  $\mathbb{D}_2$ , vztahují příslušné amplitudy dle definice (4.51) následujícím způsobem:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ R \end{pmatrix} = \mathbb{D}_1 \begin{pmatrix} A_{\rightarrow} \\ A_{\leftarrow} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_{\rightarrow} \\ A_{\leftarrow} \end{pmatrix} = \mathbb{D}_2 \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

V případě, že tyto rovnice složíme vyloučením amplitud  $A_{\rightarrow}$  a  $A_{\leftarrow}$ , obdržíme

$$\begin{pmatrix} 1 \\ R \end{pmatrix} = \mathbb{D}_1 \mathbb{D}_2 \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

V řeči matic přenosu se vrstvení rozhraní redukuje na pouhé násobení jednotlivých matic! Z rovnic (4.55) již snadno vyjádříme výsledné koeficienty  $R$  a  $P$  (složky matic  $\mathbb{D}_1$  a  $\mathbb{D}_2$  jsou známy – specifikují daná rozhraní).

Nyní se podívejme na zmiňovaný příklad hledání matice přenosu  $\mathbb{D}$  pomocí vyřešení podmínek napojení. Již jsme viděli odvození matice přechodu z již známých koeficientů průchodu a odrazu pro napojení dvou strun v místě  $z = 0$ . Ukažme si obecnější odvození tvaru matice  $\mathbb{D}$  pro rozhraní dvou strun na  $z = L$ . Rovnou sestavíme podmínky napojení při uvažování obecné situace jako na obrázku 4.8. Vlny na jednotlivých strunách tedy bereme tvaru (4.50). Podmínky napojení pro strunu musíme upravit pro polohu rozhraní na  $z = L$ . První je podmínka spojitosti,

$$\psi_{1R}(L, t) + \psi_{1L}(L, t) = \psi_{2R}(L, t) + \psi_{2L}(L, t), \quad (4.56)$$

a druhá je podmínka rovnosti příčných sil (uvažujeme nehmotné napojení),

$$T_1 \left( \frac{\partial \psi_{1R}}{\partial z}(L, t) + \frac{\partial \psi_{1L}}{\partial z}(L, t) \right) = T_2 \left( \frac{\partial \psi_{2R}}{\partial z}(L, t) + \frac{\partial \psi_{2L}}{\partial z}(L, t) \right). \quad (4.57)$$

Pro jednoduchost uvažujme, že napětí na obou strunách jsou stejná,  $T_1 = T_2 = T$ . Po dosazení harmonických vln (4.50) do podmínek napojení (4.56) a (4.57) (a vykrácení exponenciál a  $-iT$ ) obdržíme následující sadu rovnic vztahující amplitudové koeficienty  $A$ :

$$\begin{aligned} A_{1R}e^{-ik_1L} + A_{1L}e^{ik_1L} &= A_{2R}e^{-ik_2L} + A_{2L}e^{ik_2L}, \\ k_1A_{1R}e^{-ik_1L} - k_1A_{1L}e^{ik_1L} &= k_2A_{2R}e^{-ik_2L} - k_2A_{2L}e^{ik_2L}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Přepišme levé a pravé strany rovnic pomocí maticového zápisu:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e^{-ik_1L} & e^{ik_1L} \\ k_1e^{-ik_1L} & -k_1e^{ik_1L} \end{pmatrix}}_{\mathbb{D}_L} \begin{pmatrix} A_{1R} \\ A_{1L} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-ik_2L} & e^{ik_2L} \\ k_2e^{-ik_2L} & -k_2e^{ik_2L} \end{pmatrix}}_{\mathbb{D}_R} \begin{pmatrix} A_{2R} \\ A_{2L} \end{pmatrix}, \quad (4.59)$$

kde jsme matici na levé, resp. pravé, straně rovnice označili  $\mathbb{D}_L$ , resp.  $\mathbb{D}_R$ . Porovnáním tvaru rovnic (4.51) definující matici  $\mathbb{D}$  a získané rovnice (4.59) z podmínek napojení je zřejmé, že matice přenosu je tvaru

$$\mathbb{D} = \mathbb{D}_L^{-1}\mathbb{D}_R. \quad (4.60)$$

Provedením inverze matice<sup>3</sup> a jejich vynásobením dostaneme výsledek

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) e^{i(k_1-k_2)L} & \left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right) e^{i(k_1+k_2)L} \\ \left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right) e^{-i(k_1+k_2)L} & \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) e^{-i(k_1-k_2)L} \end{pmatrix}. \quad (4.61)$$

Dosazením  $L = 0$  dostaneme matici

$$\mathbb{D}(L = 0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{k_2}{k_1} & 1 - \frac{k_2}{k_1} \\ 1 - \frac{k_2}{k_1} & 1 + \frac{k_2}{k_1} \end{pmatrix}, \quad (4.62)$$

kteřá je stejného tvaru jako již získaná matice v (4.53), jelikož platí vztah

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{Z_2}{Z_1}. \quad (4.63)$$

---

<sup>3</sup>Inverze matice 2x2 je

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

# Kapitola 5

## Vlny v prostoru

### 5.1 Rovinné vlny

Krátce zopakujme, co víme o harmonických postupných vlnách v jedné dimenzi. Jsou řešením jednorozměrné vlnové rovnice,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad (5.1)$$

a mohou postupovat v kladném nebo záporném směru osy  $z$ :

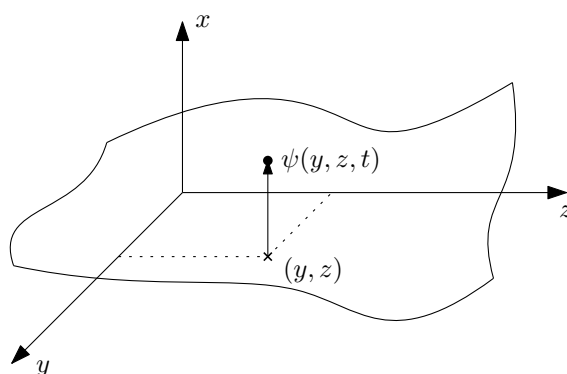
$$\psi(z, t) = e^{i(\omega t - kz)}, \quad \psi(z, t) = e^{i(\omega t + kz)}, \quad (5.2)$$

kde  $\omega$  a  $k$  splňuje disperzní vztah  $\omega = vk$ . Zavedeme-li (jedorozměrný) vektor směru šíření  $\vec{n} = (\pm 1)$ , polohový vektor  $\vec{r} = (z)$  a tzv. *vlnový vektor*  $\vec{k} = k\vec{n}$ , můžeme výraz  $\mp kz$  v postupné vlně zapsat jako  $-\vec{k} \cdot \vec{r}$ . Postupná vlna tedy získá tvar

$$\psi(z, t) = \psi(\vec{r}, t) = e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (5.3)$$

kde volbou vektoru  $\vec{n}$  (resp.  $\vec{k} = k\vec{n}$ ) volíme směr postupu. Tento tvar je dobře definovaný pro jakoukoliv dimenzi. Toho nyní využijeme a budeme ho zkoumat ve 2D (a následně ve 3D).

Přejdeme k dvourozměrné situaci. Jako model pro dvourozměrnou vlnu můžeme zvolit pružnou blánu, která se rozprostírá v rovině  $(y, z)$  a uvažujeme příčné výchylky této blány (ve směru osy  $x$ ) popsané funkcí  $\psi(y, z, t)$ . Viz obrázek 5.1.



Obrázek 5.1: Model dvourozměrného prostředí ve formě příčných výchylek pružné blány.

Uvažujme nyní dvourozměrný polohový vektor  $\vec{r} = (y, z)$ , jednotkový vektor  $\vec{n} = (n_y, n_z)$ ,  $|\vec{n}| = 1$ , vlnový vektor  $\vec{k} = k\vec{n}$  a vezměme vlnu opět tvaru (5.3), tj.

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (5.4)$$

Podívejme se na tvar „vlnoplochy“<sup>1</sup>, tj. množiny bodů s konstantní hodnotou fáze. Funkce fáze je  $\varphi(\vec{r}, t) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$ . Položme

$$\varphi(\vec{r}, t) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \varphi_0, \quad \omega t - \varphi_0 = k_y y + k_z z = k(n_y y + n_z z). \quad (5.5)$$

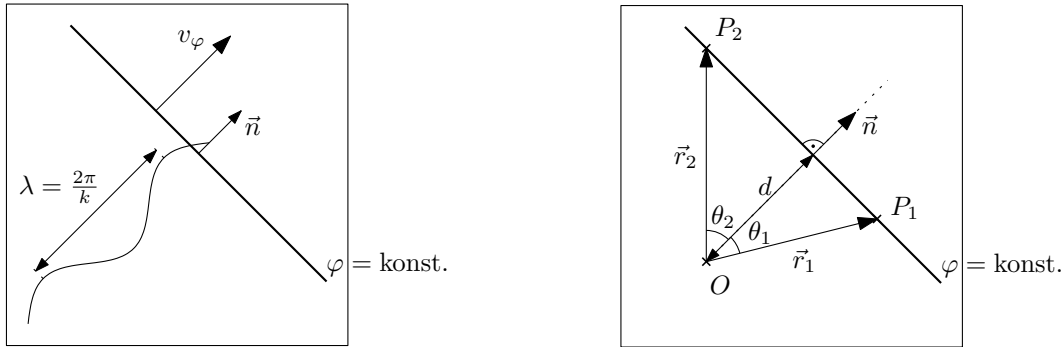
Po rozepsání dostaneme algebraickou rovnici přímky v rovině  $(y, z)$ :

$$\frac{1}{k}(\omega t - \varphi_0) = n_y y + n_z z, \quad (5.6)$$

Křivky konstantní fáze jsou tedy přímky s vektorem  $\vec{n}$  jako se svým normálovým vektorem, viz obrázek 5.2 vlevo. V daném čase je výraz  $\vec{n} \cdot \vec{r}$  konstantní. Zavedeme-li označení jako na obrázku 5.2 vpravo, můžeme psát

$$\vec{n} \cdot \vec{r}_1 = \vec{n} \cdot \vec{r}_2 = d = r_i \cos \theta_i, \quad (5.7)$$

tedy, že pro všechny body na přímce je skalární součin  $\vec{n} \cdot \vec{r}$  konstantní a má význam kolmé vzdálenosti přímky od počátku  $d$ . Vzdálenost  $d$  se ovšem s časem mění, je to levá strana rovnice (5.6). Rychlost postupu místa konstantní fáze je tedy  $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ , přímka konstantní fáze se pohybuje ve směru vektoru  $\vec{n}$  – vektor směru postupu vlny – fázovou rychlostí  $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ . Vlnový vektor  $\vec{k} = k \vec{n}$  tedy kóduje zároveň vlnovou délku skrze svoji velikost,  $|\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , a zároveň směr postupu  $\vec{n}$ .



(a) Schematicky znázorněný postup harmonické „rovinné“ vlny ve 2D. Tučně je znázorněna jedna přímka konstantní fáze. Harmonická vlna postupuje ve směru  $\vec{n}$  (kolmo na přímkovou vlnoplochu) rychlostí  $v_\varphi$ .

(b) Na přímce konstantní fáze platí  $\vec{n} \cdot \vec{r} = r \cos \theta = d = v_\varphi t - \frac{\varphi_0}{k}$ .

Obrázek 5.2: Harmonická postupná vlna ve 2D tvaru (5.3).

Tato harmonická postupná „rovinná“<sup>2</sup> vlna je řešením 2D vlnové rovnice

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = v^2 \Delta_{2D} \psi, \quad (5.8)$$

kde jsme zavedli označení 2D Laplaceova operátoru  $\Delta_{2D}$  (zde v proměnných  $y$  a  $z$ ), za splnění disperzního vztahu  $\omega = v|\vec{k}|$ . Tato vlnová rovnice je přímým zobecněním jednorozměrné vlnové rovnice. Tato rovnice by se dala získat například spojitou limitou 2D mříže závaží na pružinách (zobecnění řetízku atomů do dvou dimenzí).

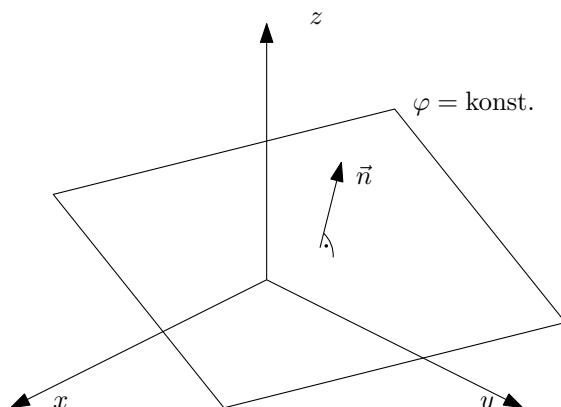
Na základě analýzy 2D případu dospějeme ke přímočarému zobecnění pro 3D případ. Zavedeme třírozměrné vektory: směr postupu  $\vec{n}$ , vlnový vektor  $\vec{k} = k \vec{n}$  (a polohový vektor  $\vec{r} = (x, y, z)$ ):

$$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z) = k \vec{n} = k(n_x, n_y, n_z), \quad |\vec{n}| = 1. \quad (5.9)$$

<sup>1</sup>Ve 2D bychom ji snad měli nazývat „vlnočárou“?

<sup>2</sup>Přímková?

Vlna  $\psi(\vec{r}, t)$  má formálně stejný tvar jako v (5.4). Plocha konstantní fáze je tentokrát rovina, ke které je vektor  $\vec{n}$  normálovým vektorem, tato se šíří prostorem fázovou rychlostí  $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ , viz schématický obrázek 5.3. Vlny tvaru (5.4) tedy nazýváme *harmonické rovinné postupné vlny*.



Obrázek 5.3: Rovinná vlnoplocha v 3D prostoru šířící se prostorem ve směru vektoru  $\vec{n}$  (resp.  $\vec{k}$ ) rychlostí  $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ .

Tato vlna je řešením třírozměrné vlnové rovnice

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \Delta \psi = v^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right), \quad (5.10)$$

kde  $\Delta$  je 3D Laplaceův operátor, za splnění disperzního vztahu  $\omega = v|\vec{k}|$ .

Na závěr si napíšeme zobecnění d'Alembertova řešení jednorozměrné vlnové rovnice. V jedné dimenzi byly pouze dva možné směry šíření vln – do kladného a záporného směru, tedy

$$\psi(z, t) = F(z - vt) + G(z + vt). \quad (5.11)$$

Ve více dimenzích jsou směry šíření dané jednotkovým vektorem  $\vec{n}$  a tedy danému směru  $\vec{n}$  přiřadíme postupnou rovinnou vlnu

$$\psi(\vec{r}, t) = F(\vec{n} \cdot \vec{r} - vt). \quad (5.12)$$

Obecné řešení pak získáme jako superpozici postupných rovinných vln postupujících ve všech možných směrech:

$$\psi(\vec{r}, t) = \int_{(\vec{n})} F_{(\vec{n})}(\vec{n} \cdot \vec{r} - vt) d^3 n. \quad (5.13)$$

## 5.2 Sférické vlny

Harmonickou postupnou vlnu se sférickými vlnoplochami představuje vlna následujícího tvaru

$$\psi(r, t) = e^{i(\omega t - kr)}. \quad (5.14)$$

Ověřme, že plochy konstantní fáze jsou skutečně sféry:

$$\varphi(r, t) = \omega t - k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \varphi_0, \quad (5.15)$$

po vyjádření  $r^2$  dostaneme algebraickou rovnicí sféry,

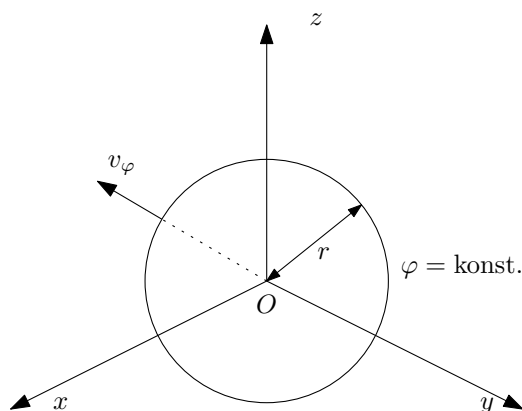
$$\underbrace{\left(\frac{1}{k}(\omega t - \varphi_0)\right)^2}_{R(t)^2 = (vt - r_0)^2} = x^2 + y^2 + z^2, \quad (5.16)$$

kde poloměr  $R(t)$  se zvětšuje fázovou rychlostí  $v = \frac{\omega}{k}$ . Sférická vlna je schematicky znázorněna na obrázku 5.4. Bohužel sférická vlna s konstantní amplitudou nespĺňuje vlnovou rovnici,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \Delta \psi. \quad (5.17)$$

Nalezneme proto skutečné řešení vlnové rovnice pro sféricky symetrické vlny, tzn. uvažujeme funkci  $\psi(r, t)$  jako funkci pouze vzdálenosti od počátku  $r$  (a času  $t$ ). K tomu budeme potřebovat vyjádřit Laplaceův operátor  $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$  pomocí derivací dle radiální souřadnice  $r$ ,  $\frac{\partial}{\partial r}$ . Na cvičení z TEF1 jste si ukázali<sup>3</sup>, že

$$\Delta \psi(r) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (5.18)$$



Obrázek 5.4: Kulová vlnoplocha sférické vlny v 3D prostoru rozšiřující se rychlostí  $v_\varphi$ .

<sup>3</sup>Nejprve vezměme první derivaci funkce  $\psi(r, t)$ .

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{x_i}{r},$$

kde jsme použili identitu  $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$ . Druhá derivace pak je

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{x_i}{r} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \frac{x_i}{r} \frac{x_i}{r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{x_i}{r} \right).$$

Využíváme Einsteinovo sumační pravidlo, tzn. přes druhé derivace  $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  (tedy přes index  $i$ ) se sčítá. Pak platí  $x_i x_i = r^2$ . Ještě potřebujeme spočítat člen

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{x_i}{r} \right) = \frac{\delta_{ii} r - x_i \frac{\partial r}{\partial x_i}}{r^2} = \frac{\delta_{ii} r - \frac{x_i x_i}{r}}{r^2} = \frac{1}{r} \left( \delta_{ii} - \frac{x_i x_i}{r^2} \right) = \frac{2}{r};$$

v poslední rovnosti jsme vysčítali přes  $i$ , tzn.  $\delta_{ii} = 3$  a opět  $x_i x_i = r^2$ . Celkem tedy máme

$$\Delta \psi(r, t) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Vlnová rovnice pro vlnu s funkční závislostí  $\psi(r, t)$  je tedy tvaru

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right). \quad (5.19)$$

Pravá strana vlnové rovnice v souřadnici  $r$  se dá zapsat jako (ověřte!):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\psi)}{\partial r^2}. \quad (5.20)$$

Po dosazení zpět do vlnové rovnice (5.17) a vynásobení  $r$  dostaneme

$$\boxed{\frac{\partial^2 (r\psi)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 (r\psi)}{\partial r^2}}, \quad (5.21)$$

což je jednorozměrná vlnová rovnice v prostorové souřadnici  $r$  pro funkci  $\Psi(r, t) = r\psi(r, t)$ ! Řešení jednorozměrné vlnové rovnice známe, je jím d'Alembertovo řešení:

$$\Psi(r, t) = F(r - vt) + G(r + vt), \quad (5.22)$$

po vyjádření  $\psi = \frac{1}{r}\Psi$  dostaneme řešení původní vlnové rovnice pro sféricky symetrické vlny  $\psi(r, t)$ :

$$\boxed{\psi(r, t) = \frac{1}{r}F(r - vt) + \frac{1}{r}G(r + vt)}, \quad (5.23)$$

kde  $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jsou libovolné funkce (dvakrát diferencovatelné). Vlna  $\frac{1}{r}F(r - vt)$  představuje sférickou vlnu šířící se z počátku fázovou rychlostí  $v$  s amplitudou ubývající jako  $\frac{1}{r}$ . Vlna  $\frac{1}{r}G(r + vt)$  představuje sférickou vlnu šířící se z nekonečna směrem k počátku, tuto vlnu obvykle neuvažujeme – předepisujeme podmínku vyzařování,  $G = 0$ . Pokud zvolíme za tvar vyzařované vlny harmonickou funkci,  $F(x) = e^{-ikx}$ , příslušná vlna  $\psi(r, t)$  bude mít tvar

$$F(r - vt) = \frac{1}{r}e^{i(\omega t - kr)}, \quad \psi(r, t) = \frac{1}{r}e^{i(\omega t - kr)}, \quad (5.24)$$

kde jsme označili  $\omega = vk$  (disperzní vztah).





## Kapitola 6

# Elektromagnetické vlnění

### 6.1 Rovinné elektromagnetické vlny

Uvažujeme homogenní prostředí vyplňující celý prostor tvořené lineárním dielektrikem a lineárním magnetikem. To znamená, že prostředí je možné popsat dvěma (konstantními) parametry: permitivitou  $\varepsilon$  a permeabilitou  $\mu$ . Zavedeme také parametry relativní permitivity  $\varepsilon_r$  a relativní permeability  $\mu_r$  pomocí relací

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0, \quad \mu = \mu_r \mu_0, \quad (6.1)$$

kde  $\varepsilon_0$  a  $\mu_0$  jsou permitivita a permeabilita vakua. Maxwellovy rovnice pro elektromagnetické pole  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  a  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  v tomto prostředí bez volných nábojů a proudů mají tvar:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \quad (\text{Gaussův zákon}), & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Faradayův zákon}), \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \quad (\vec{B} \text{ je solenoidální}), & \operatorname{rot} \vec{B} &= \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Ampér-Maxwellův zákon}). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Odvoďme vlnové rovnice plynoucí z těchto rovnic pro vektory  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$ . Aplikujme diferenciální operátor rotace na Faradayův zákon:

$$\operatorname{rot} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}, \quad (6.3)$$

kde jsme při úpravách použili diferenciální identitu  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta$  a Gaussův zákon. Prohozením derivací na levé straně (6.3) a použitím Ampér-Maxwellova zákona obdržíme

$$-\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}. \quad (6.4)$$

Porovnáním pravých stran (6.3) a (6.4) dostaneme vlnovou rovnici pro vektor elektrického pole  $\vec{E}$ :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon \mu} \Delta \vec{E}. \quad (6.5)$$

Stejným postupem, pokud začneme s Ampér-Maxwellovým zákonem, dospějeme k vlnové rovnici pro vektor magnetického pole  $\vec{B}$ :

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon \mu} \Delta \vec{B}. \quad (6.6)$$

Mám tedy šest nezávislých vlnových rovnic pro jednotlivé složky vektorů  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$ . Fázová rychlost elektromagnetických vln plynoucí z vlnových rovnic je

$$v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (6.7)$$

V případě vakua máme  $v_\varphi = c$  a

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}. \quad (6.8)$$

Můžeme definovat *index lomu*  $n$  prostředí jako poměr rychlosti světla ku fázové rychlosti v daném prostředí:

$$n = \frac{c}{v_\varphi} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r}, \quad (6.9)$$

poslední aproximace plyne z faktu, že většina látek má relativní magnetickou permeabilitu blízkou jedné.

Jakékoliv řešení vlnových rovnic (6.5) a (6.6) ještě nemusí být řešení původních Maxwellových rovnic (6.2). Platnost vlnových rovnic jsme odvodili z platnosti Maxwellových rovnic. Jakékoliv řešení splňující naše původní Maxwellovy rovnice bude i řešení vlnových rovnic, ale nemusí tomu být naopak. Uvažujme elektrické a magnetické rovinné postupné vlny jakožto řešení vlnových rovnic (6.5) a (6.6) tvaru:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 F(\vec{n} \cdot \vec{r} - vt), \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 F(\vec{n} \cdot \vec{r} - vt), \quad (6.10)$$

kde vektory  $\vec{E}_0$  a  $\vec{B}_0$  jsou konstantní vektory. Tvar postupné vlny  $F(x)$  je stejný pro všech šest složek vektorů. Stejně tak u všech uvažujeme stejný směr postupu  $\vec{n}^1$ . Nyní ověříme, jestli tyto postupné vlny splňují Maxwellovy rovnice. A pokud ne, tak za jakých podmínek se tak stane. Začneme Gaussovým zákonem, do něhož dosadíme  $\vec{E}$  z (6.10):

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 = \partial_i E_i = E_{0i} n_i F'(\vec{n} \cdot \vec{r} - vt) = (\vec{E}_0 \cdot \vec{n}) F'(\vec{n} \cdot \vec{r} - vt), \quad \forall \vec{r}, t, \quad (6.11)$$

kde jsme využili Einsteinovo sumační pravidlo a  $\partial_i(\vec{n} \cdot \vec{r}) = n_i$  (symbol  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ). Jestliže je tvar naší postupné vlny  $F(x)$  nekonstantní, pak určitě derivace  $F'(x)$  nemůže být všude nulová a musíme požadovat vymizení skalární součinu

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{E}_0 \perp \vec{n}. \quad (6.12)$$

Z Gaussova zákona tedy plyne nutnost kolmosti vektoru  $\vec{E}_0$  (a tedy i  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ) na směr šíření  $\vec{n}$ . Identicky z podmínky solenoidálnosti magnetického pole dostaneme podmínku kolmosti vektoru  $\vec{B}_0$  na směr šíření  $\vec{n}$ :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B}_0 \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{B}_0 \perp \vec{n}. \quad (6.13)$$

Elektromagnetická vlna je tedy vlna příčná! Výchytky jsou kolmé na směr šíření.

Vezměme dále Faradayův zákon,

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \varepsilon_{ijk} \partial_j E_k = -\partial_t B_i, \quad (6.14)$$

který jsme si zapsali v indexovém zápisu (za použití Einsteinova sumačního pravidla). Po dosazení postupných vln a jejich proderivování máme:

$$\varepsilon_{ijk} E_{0k} n_j F'(\vec{n} \cdot \vec{r} - vt) = -(-v) B_{0i} F'(\vec{n} \cdot \vec{r} - vt). \quad (6.15)$$

<sup>1</sup>Tento ansatz, kdy uvažujeme stejné  $F$  a stejné  $\vec{n}$  je důsledkem Maxwellových rovnic. Pokud bychom pro každou složku  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$  uvažovali jiný tvar postupné vlny  $F(x)$  a jiný směr postupu  $\vec{n}$ , z Maxwellových rovnic by plynulo, že si musejí být rovny. Pro jednoduchost tento krok vynecháváme a rovnou předpokládáme stejné  $F$  a  $\vec{n}$  pro všechny.

Vratíme-li se zpět k vektorovému zápisu,

$$\left(\vec{n} \times \vec{E}_0 - v\vec{B}_0\right) F'(\vec{n} \cdot \vec{r} - vt) = 0, \quad (6.16)$$

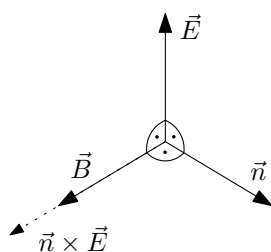
po vykrácení  $F'(x)$  dostaneme podmínku na vektory  $\vec{E}_0$  a  $\vec{B}_0$ :

$$\vec{n} \times \vec{E}_0 = v\vec{B}_0. \quad (6.17)$$

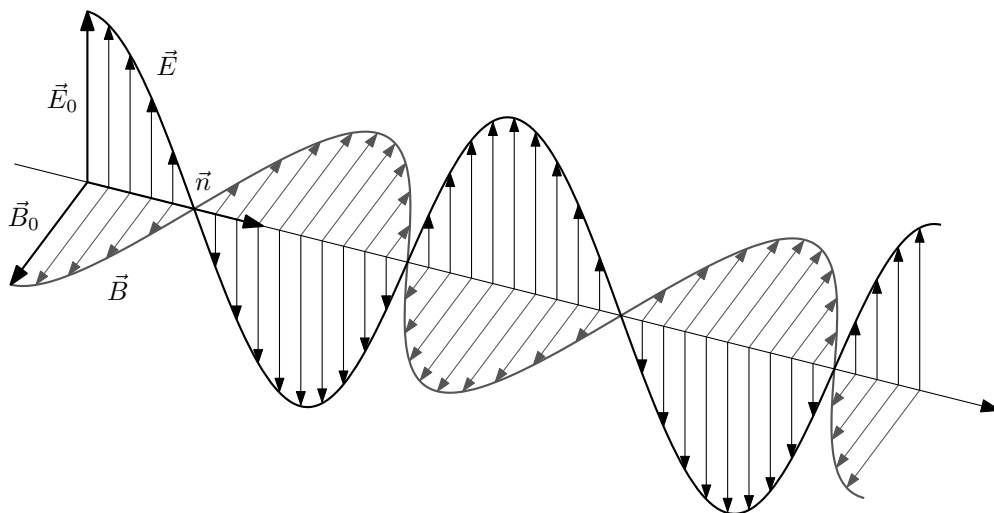
Ke stejné podmínce bychom dospěli i použitím Ampér-Maxwellova zákona. Tato podmínka říká, že vektor  $\vec{B}_0$  je kolmý na vektor  $\vec{E}_0$  a zároveň dává vztah mezi jejich velikostmi:

$$|\vec{E}_0| = v|\vec{B}_0|. \quad (6.18)$$

Z podmínek (6.12), (6.13) a (6.17) navíc plyne, že soubor  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{n})$  je pravotočivý ortogonální soubor vektorů, viz obrázek 6.1. Splnění těchto podmínek zaručuje, že postupná vlna (6.10) je řešením Maxwellových rovnic.



Obrázek 6.1: Vektory  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{n}$  tvoří pravotočivý ortogonální systém vektorů.



Obrázek 6.2: Harmonická postupná elektromagnetická vlna.

Uvažujme-li harmonickou postupnou vlnu, tzn. zvolíme (v komplexním zápisu)

$$F(x) = e^{ikx}, \quad (6.19)$$

pak výsledná elektromagnetická vlna je tvaru

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (6.20)$$

kde

$$\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{n} \text{ tvoří pravotočivý OG soubor,} \quad \omega = v|\vec{k}|, \quad \vec{k} = k\vec{n}. \quad (6.21)$$

Vztah  $\omega = v|\vec{k}|$  je disperzním vztahem pro EM vlnění. Tato vlna je znázorněna na obrázku 6.2. Pro speciální volbu směru postupu ve směru osy  $z$  dostaneme

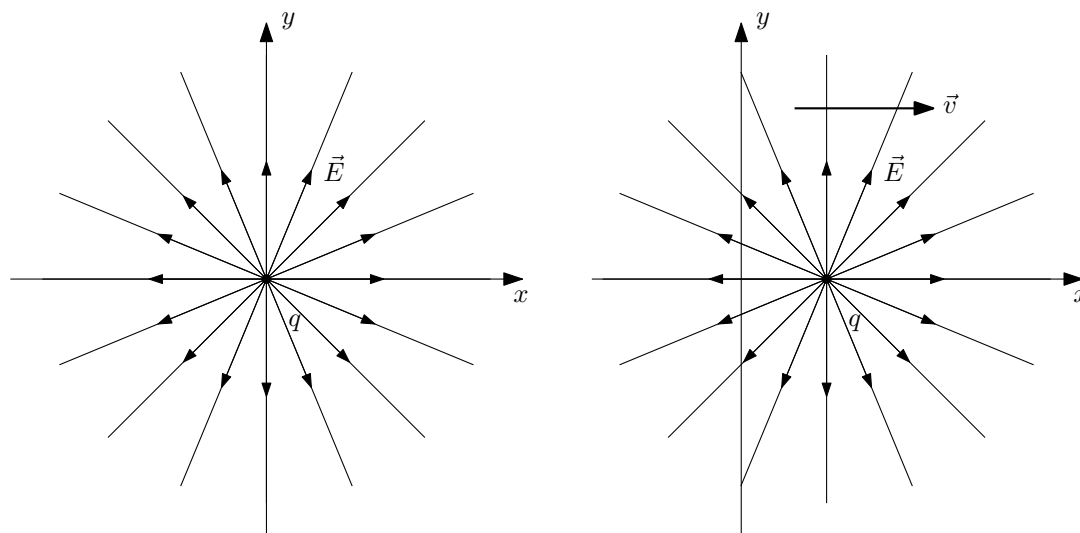
$$\vec{n} = (0, 0, 1), \quad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{-i(\omega t - kz)}. \quad (6.22)$$

## 6.2 Vyzařování elektromagnetických vln

V této kapitole se podíváme na to, jak generovat elektromagnetické vlny. Nejprve rychlé opakování z kurzu elektřiny a magnetismu. Pro náboj  $q$  v klidu v počátku dostaneme coulombické elektrické pole

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (6.23)$$

kteřé je radiální a ubývá se vzdáleností jako  $\frac{1}{r^2}$ , viz obrázek 6.3 vlevo.



(a) Elektrické pole statického bodového náboje. (b) Elektrické pole bodového náboje pohybujícího se rovnoměrně přímočaře.

Obrázek 6.3: Elektrické pole bodového náboje.

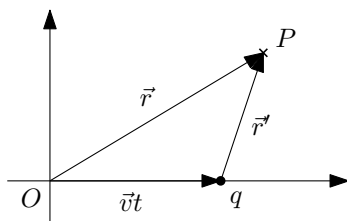
V případě, že máme náboj pohybující se rovnoměrně přímočaře rychlostí  $\vec{v}$  tak, že v čase  $t = 0$  prochází počátkem, je elektrické pole v čase  $t = 0$  tvaru

$$\vec{E}(\vec{r}, 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{\underbrace{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}_{\Gamma(\theta)}} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad (6.24)$$

kde  $\Gamma(\theta)$  je tzv. Heavisidův faktor, úhel  $\theta$  je úhel mezi vektorem rychlosti náboje  $\vec{v}$  a (polním) polohovým vektorem  $\vec{r}$ , faktor  $\beta = \frac{v}{c}$ . Pole zůstává radiální, pouze se v různých směrech mění jeho velikost. Zde budeme uvažovat nízké rychlosti,  $v \ll c$ , takže Heavisidův faktor aproximujeme jedničkou,  $\Gamma(\theta) \approx 1$ . Dále platí, že elektrické pole se jako celek posunuje rychlostí  $\vec{v}$  společně s nábojem. Můžeme psát

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{r'^3}, \quad \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t, \quad (6.25)$$

kde význam vektoru  $\vec{r}'$  je znázorněn na obrázku 6.4. Jedná se tedy o vektor spojující aktuální polohu náboje  $q$  s místem určování elektrického pole.

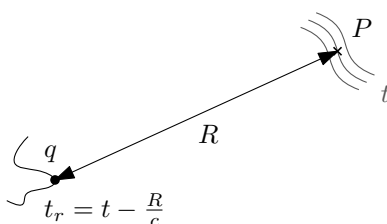


Obrázek 6.4: Vztah mezi vektory  $\vec{r}$  a  $\vec{r}'$ . Vektor  $\vec{r}$  je polohový vektor bodu  $P$ , vektor  $\vec{r}'$  je vektor spojující náboj  $q$  s bodem  $P$ .

Uvedený fakt, že radiální pole se v celém prostoru pohybuje spolu s nábojem, platí pouze pokud se náboj celou dobu pohyboval rovnoměrně přímočaře. Budeme nyní studovat situaci, kdy

- v čase  $t \leq 0$  je náboj v klidu v počátku,
- v čase  $0 \leq t \leq \tau$  necháme náboj akcelarovat na rychlost  $v$
- pro  $t \geq \tau$  se náboj bude pohybovat rovnoměrně přímočaře.

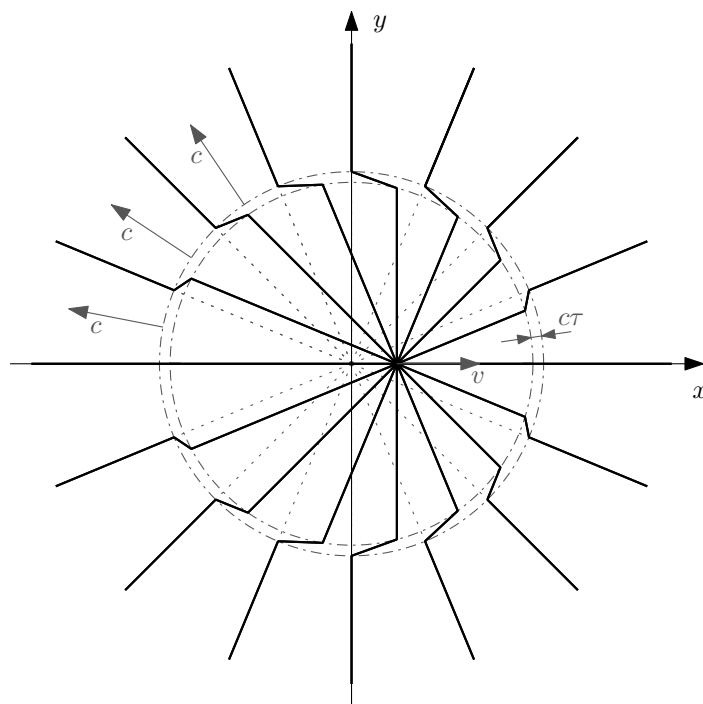
Budeme uvažovat konstantní akceleraci  $a$  ve směru osy  $x$ , takže výsledná rychlost  $\vec{v}$  bude také ve směru osy  $x$ . Dobu akcelerace  $\tau$  budeme uvažovat velmi malou, tak abychom mohli považovat vzdálenost, kterou náboj během akcelerace urazí,  $\frac{1}{2}a\tau^2$ , také za malou. Nyní nemůžeme pokročit dále, dokud si neuvedeme následující tvrzení: Vzruch se elektromagnetickým polem šíří rychlostí  $c$  a pole v místě  $P$  a v čase  $t$  je dané tím, co náboj dělal v retardovaném čase  $t_r = t - \frac{R}{c}$ , kde  $R$  je vzdálenost mezi bodem  $P$  a polohou náboje v čase  $t_r$ , viz obrázek 6.5. Nazvěme tento fakt *princip retardovaného času*. Ukázat, že tento princip ve vší obecnosti platí, je mimo naše aktuální možnosti. Rigorózní odvození viz přednáška TEF2.



Obrázek 6.5: Princip retardovaného času. Pole vytvářené nábojem v čase  $t_r$  se rychlostí  $c$  šíří prostorem, aby v čase  $t = t_r + \frac{R}{c}$  dorazilo do místa  $P$ .

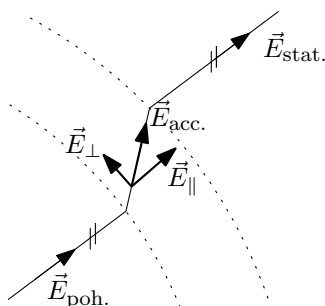
Na základě tohoto principu můžeme pole v čase  $t > \tau$  okolo náboje rozdělit do tří oblastí znázorněných na obrázku 6.6. První je tenká kulová slupka šířky  $c\tau$  o poloměru přibližně  $ct$  – tato bude představovat pole vyzářené nábojem během jeho akcelerace. Další je pole vně této slupky – toto je pole od náboje, kdy byl nehybný v počátku. A poslední je pole uvnitř této slupky – pole pohybujícího se náboje konstantní rychlostí  $\vec{v}$ .

Naším úkolem nyní bude určit tvary polí v jednotlivých oblastech. Ale tvary polí vně a uvnitř slupky již známe, jsou to pole (6.23) a (6.25). Hlavním úkolem tedy bude určit akcelerační pole  $\vec{E}_{acc}$  přímo v místě slupky. Omezíme se pouze na časy  $t \gg \tau$ , kdy je již slupka akceleračního pole daleko od počátku.



Obrázek 6.6: Vyzařování elektromagnetické vlny. Plnou čarou jsou znázorněny siločáry elektrického pole. Kulová slupka šířky  $c\tau$  (vyznačena čerchovaně) odpovídající elektromagnetickému poli akceleračního náboje expanduje rychlostí  $c$  a odděluje oblasti polí od statického a pohybujícího se náboje. Tečkovaně jsou označeny siločáry statického elektrického pole začínající v počátku (uvnitř slupky jsou nahrazeny polem pohybujícího se náboje).

Podívejme se v detailu na siločáru elektrického pole v místě slupky na obrázku 6.7. Statické pole  $\vec{E}_{\text{stat.}}$  a „pohybující se“ pole  $\vec{E}_{\text{poh.}}$  mající siločáru pod stejným úhlem se spojitě napojí siločárou akceleračního pole. Tento fakt je dán tím, že pokud budeme postupně v našem modelu zmenšovat hodnotu zrychlení  $a$  do nuly, musí pole přejít na pole statického náboje všude v prostoru. Dále si rozdělíme akcelerační pole  $\vec{E}_{\text{acc.}}$  přítomné ve slupce na část rovnoběžnou s polohovým vektorem  $\vec{E}_{\parallel}$  a část kolmou  $\vec{E}_{\perp}$ .

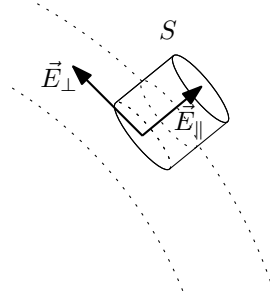


Obrázek 6.7: Detail siločáry elektrického pole v okolí slupky. Akcelerační pole je rozdělené na kolmou složku  $\vec{E}_{\perp}$  a rovnoběžnou složku  $\vec{E}_{\parallel}$  k polohovému vektoru  $\vec{r}$ .

Rovnoběžné pole  $\vec{E}_{\parallel}$  určíme z Gaussova zákona,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (6.26)$$

kde uzavřenou plochu  $S$  zvolím jako na obrázku 6.8 – tedy jako válcovou plochu procházející skrze vnější kraj slupky. Uvnitř této plochy není uzavřen žádný náboj, tudíž  $Q = 0$ .



Obrázek 6.8: Plocha  $S$  v Gaussově zákoně. Válec je orientovaný kolmo na povrch slupky a prochází vnější stranou slupky tak, že jedna podstava je přímo ve slupce a druhá podstava v oblasti se statickým polem.

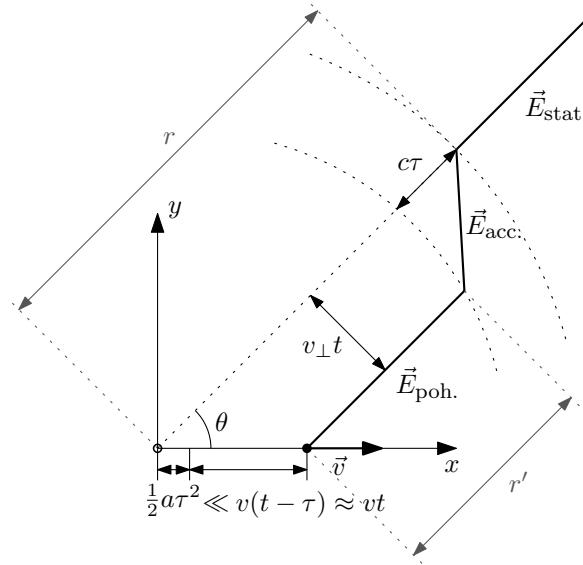
Tok pláštěm je nulový – vně slupky máme pouze radiální pole  $\vec{E}_{\text{stat.}}$ , které v plášti leží,  $\vec{E}_{\parallel}$  z definice taktéž leží v plášti a konečně  $\vec{E}_{\perp}$  na jedné straně pláště vtéká, ale na druhé straně stejně vytéká (uvažujeme  $S$  malé, aby se  $\vec{E}_{\perp}$  nestačilo příliš změnit). Zbývají tedy toky podstavami a z Gaussova zákona se tyto toky musí rovnat (v absolutní hodnotě):

$$E_{\parallel} S_{\text{podstava}} = E_{\text{stat.}} S_{\text{podstava}}. \quad (6.27)$$

Platí tedy, že velikost  $E_{\parallel}$  je úplně stejná jako u statického elektrického pole:

$$E_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad (6.28)$$

kde  $r$  je poloměr slupky. Jestliže je slupka tenká ( $c\tau$  je malé) a uvažujeme velké časy ( $t \gg \tau$ ), v okolí slupky bude platit<sup>2</sup>  $\vec{E}_{\text{poh.}} \approx \vec{E}_{\parallel} \approx \vec{E}_{\text{stat.}}$ . Dále se podíváme na velikost  $E_{\perp}$ . Nakresleme si vybranou siločáru elektrického pole ještě detailněji – jako na obrázku 6.9.



Obrázek 6.9: Detail siločáry elektrického pole pro  $t \gg \tau$ . Úhel  $\theta$  označuje odklon směru siločár statického a „pohybujícího se“ pole od osy  $x$  (tzn. od vektoru  $\vec{v}$ , resp.  $\vec{a}$ ). Šířka slupky je  $c\tau$ . Poloměr vnější strany slupky (oddělující statické elektrické pole  $\vec{E}_{\text{stat.}}$  je  $r$ , poloměr vnitřní strany slupky (oddělující „pohybující se“ elektrické pole  $\vec{E}_{\text{poh.}}$ ) je  $r'$ . Platí  $r = ct$  a  $r - r' \approx c\tau$ , pro velká  $t$  ( $\gg \tau$ ) můžeme uvažovat  $r \approx r'$ . Zároveň uvažujeme  $\frac{1}{2}a\tau^2 \ll vt$ , takže vzdálenost siločár polí  $\vec{E}_{\text{stat.}}$  a  $\vec{E}_{\text{poh.}}$  je  $v_{\perp}t$ , kde  $v_{\perp}$  je velikost kolmého průmětu rychlosti  $\vec{v}$ ,  $v_{\perp} = v \sin \theta$ , (tzn. úplně jsme zanedbali vzdálenost  $\frac{1}{2}a\tau^2$ ).

<sup>2</sup>Gaussův zákon bychom totiž mohli také použít na vnitřní straně slupky s polem  $\vec{E}_{\text{poh.}}$

Velikost  $E_{\perp}$  vyjádříme pomocí podobnosti dvou trojúhelníků. Jeden je tvořen vektory  $\vec{E}_{\perp}$  a  $\vec{E}_{\parallel}$  a druhý tvořen vzdálenostmi  $v_{\perp}t$  a  $c\tau$ :

$$\frac{c\tau}{v_{\perp}t} = \frac{E_{\parallel}}{E_{\perp}}. \quad (6.29)$$

Vyjádříme  $E_{\perp}$

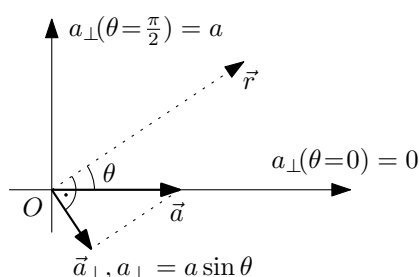
$$E_{\perp} = \frac{v_{\perp}t}{c\tau} E_{\parallel} = \frac{a_{\perp}\tau r}{c^2\tau} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{c^2} \frac{a_{\perp}}{r}, \quad (6.30)$$

kde jsme dosadili za  $E_{\parallel}$  z (6.28),  $v_{\perp} = a_{\perp}\tau$  ( $a_{\perp} = a \sin \theta$ ) a  $t \approx \frac{r}{c}$ . Kolmou složku elektrického pole  $\vec{E}_{\perp}$  nazveme *radiační pole*  $\vec{E}_{\text{rad}}$ :

$$\boxed{E_{\text{rad}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{c^2} \frac{a_{\perp}}{r}}. \quad (6.31)$$

Zabývejme se nyní vlastnostmi radiačního pole analýzou vztahu (6.31). Vidíme, že pole závisí na akceleraci náboje, nikoliv na jeho výsledné rychlosti. Pouze urychlený náboj vyzařuje elektromagnetické záření.

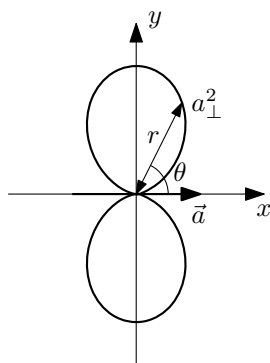
Dále je radiační pole různé v různých směrech – je *anizotropní* – jelikož závisí na projekci zrychlení  $a_{\perp}$ . Na obrázku 6.10 je znázorněna kolmá složka  $\vec{a}_{\perp}$  vektoru zrychlení  $\vec{a}$ . Je-li úhel  $\theta$  úhel mezi vektory  $\vec{r}$  a  $\vec{a}$ , pak velikost kolmého zrychlení je  $a_{\perp} = a \sin \theta$ . Ve směru zrychlení náboj nevyzařuje ( $a_{\perp}(\theta = 0) = 0$ ), nejvíce náboj vyzařuje kolmo na směr zrychlení ( $a_{\perp}(\theta = \frac{\pi}{2}) = a$ ).



Obrázek 6.10: Projekce akceleračního vektoru do kolmého směru ke směru polohového vektoru  $\vec{r}$ .

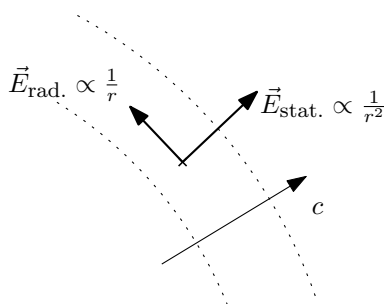
Anizotropie vyzařování se znázorňuje pomocí tzv. *vyzařovacího diagramu*, který je pro náš konkrétní případ na obrázku 6.11. Vyzařovací diagram znázorňuje intenzitu vyzařování do jednotlivých směrů. V kapitole 6.3 o energetických veličinách uvidíme, že intenzita je úměrná kvadrátu amplitudy. Zde je amplituda elektrického pole dána kolmým průmětem zrychlení  $a_{\perp}$ , ve vyzařovacím diagramu tedy vynášíme veličinu  $a_{\perp}^2$ .





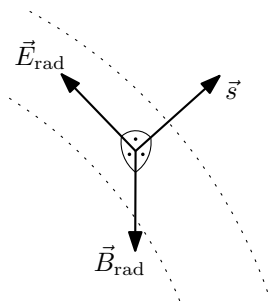
Obrázek 6.11: Vyzářovací diagram náboje urychleného ve směru osy  $x$ . Jedná se o polární diagram  $(x, y) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)$ , kde za funkci poloměru  $r(\theta)$  volíme kvadrát kolmého průmětu zrychlení,  $r(\theta) = a_{\perp}^2(\theta) = a^2 \sin^2 \theta$ . Vzdálenost vyzářovací křivky od počátku pod úhlem  $\theta$  vyjadřuje intenzitu vyzářování v daném směru.

Velmi překvapivou vlastností radiačního pole je, že ubývá se vzdáleností jako  $\frac{1}{r}$ ! Rovnoběžná složka  $\vec{E}_{\parallel}$  akceleračního pole  $\vec{E}_{\text{acc}}$  ubývá jako  $\frac{1}{r^2}$ , stejně tak pole mimo slupku  $\vec{E}_{\text{stat.}}$  a  $\vec{E}_{\text{poh.}}$ , viz schématický obrázek 6.12. Ve velké vzdálenosti od zdroje tedy dominuje radiační pole nad polem statickým!



Obrázek 6.12: Ubývání statického a radiačního pole se vzdáleností.

Platí, že radiační pole  $\vec{E}_{\text{rad}}$  je z definice kolmé na směr šíření,  $\vec{E}_{\text{rad}} \perp \vec{s}$ , kde  $\vec{s} = \vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}$ . Obecně platí (zde bez důkazu) stejný vztah pro vektory  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  a  $\vec{s}$  jako u rovinné elektromagnetické vlny. Soubor vektorů  $(\vec{E}_{\text{rad}}, \vec{B}_{\text{rad}}, \vec{s})$  tvoří pravotočivou sadu ortogonálních vektorů a pro velikosti platí  $E_{\text{rad}} = cB_{\text{rad}}$ . Viz schématický obrázek 6.13.



Obrázek 6.13: Směry vektorů  $\vec{E}_{\text{rad}}$ ,  $\vec{B}_{\text{rad}}$  a  $\vec{s}$ . Velikosti splňují  $E_{\text{rad}} = cB_{\text{rad}}$ .

Uvedený speciální případ (kdy máme náboj v klidu, pak období krátké akcelerace a nakonec rovnoměrný přímočarý pohyb) můžeme zobecnit následujícím způsobem: Uvažujeme pohyb

náboje takový, že se neustále vyskytuje v blízkosti počátku a jeho rychlost je malá vůči rychlosti světla,  $v \ll c$ , potom je radiační pole ve velké vzdálenosti od počátku tvaru

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{c^2} \frac{\vec{a}_\perp(t_r)}{r}, \quad t_r = t - \frac{r}{c}, \quad (6.32)$$

kde  $\vec{a}_\perp(t_r)$  je kolmá složka zrychlení v retardovaném čase  $t_r$  a znaménko minus je dané tím, že radiační pole míří proti směru vektoru  $\vec{a}_\perp$ , viz obrázky 6.6, 6.7 a 6.9. Zobecnění odpovídá tomu, že si radiační pole představujeme jako sérii na sebe navazujících slupek, kde radiační pole v každé slupce odpovídá akceleraci náboje v příslušném retardovaném čase. Je-li pohyb náboje  $q$  předepsán funkcí  $\vec{r}_q(t)$ , potom zrychlení  $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}_q(t)$  a kolmou složku zrychlení vypočítáme jako

$$\vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{a}_\parallel = \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{r}_0) \vec{r}_0, \quad \vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}, \quad (6.33)$$

tedy jako rozdíl celého vektoru  $\vec{a}$  a rovnoběžného průmětu  $\vec{a}_\parallel$ , který snadno vypočítáme pomocí skalárního součinu.

Uvažujme jako příklad náboj kmitající podél osy  $z$  okolo počátku se zrychlením

$$\vec{a}(t) = a_0 \vec{z} \cos(\omega t), \quad \vec{z} = (0, 0, 1). \quad (6.34)$$

Zrychlení v retardovaném čase  $t_r$  pak je

$$\vec{a}(t_r) = a_0 \vec{z} \cos(\omega t_r) = a_0 \vec{z} \cos(\omega t - kr), \quad (6.35)$$

kde jsme označili  $k = \frac{\omega}{c}$  (disperzní vztah). Velikost kolmého průmětu je

$$|\vec{a}_\perp| = |\vec{a}| \sin \theta, \quad (6.36)$$

kde úhel  $\theta$  je úhel mezi vektory  $\vec{z}$  a  $\vec{r}$  (a tedy i standardní úhel  $\theta$  sférických souřadnic). Po dosazení (6.34) a (6.36) do vzorce pro radiační pole (6.32) dostaneme pro velikost výsledek

$$E_{rad} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{c^2} a_0}_{\mathcal{E}_0} \frac{1}{r} \sin \theta \cos(\omega t_r) = \frac{\mathcal{E}_0}{r} \sin \theta \cos(\omega t - kr), \quad (6.37)$$

kde jsme zavedli veličinu  $\mathcal{E}_0$  představující amplitudu elektrického pole v jednotkové vzdálenosti od počátku. Vidíme, že pro harmonicky kmitající náboj jsme dostali sférickou harmonickou postupnou vlnu, která má navíc úhlovou závislost – anizotropii – danou dodatečným výrazem  $\sin \theta$ .

## 6.3 Energetické veličiny v elektromagnetickém poli

### 6.3.1 Hustota energie

Na přednášce z elektřiny a magnetismu jste si odvodili vztah pro hustotu energie statického elektrického a magnetického pole:

$$w = \frac{1}{2} \left( \epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu} \vec{B}^2 \right). \quad (6.38)$$

Připomeňme si znovu definici *hustoty energie*. Nyní máme elektromagnetické pole v 3D prostoru, tudíž zde (oproti případu na struně) hustota energie určuje malé množství energie  $dE$  v objemu  $dV$ :

$$dE = w dV, \quad [w] = \text{J.m}^{-3}. \quad (6.39)$$

Vztah (6.38) platí nejen pro statická pole, ale pro jakákoliv. Je to obecný výraz pro hustotu energie  $w(\vec{r}, t)$  jakéhokoliv elektromagnetického pole (v lineárním látkovém prostředí s permitivitou  $\varepsilon$  a permeabilitou  $\mu$ ). Toto tvrzení ponechme bez důkazu.

### 6.3.2 Tok energie

Podívejme se na změnu hustoty energie  $w$  v čase, tzn. počítejme derivaci výrazu podle času:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{B}, \quad (6.40)$$

kde jsme použili pravidlo o derivování skalárního součinu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \vec{E}^2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} E_i E_i \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial E_i}{\partial t} E_i + E_i \frac{\partial E_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial E_i}{\partial t} E_i = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} \quad (6.41)$$

(a stejně pro pole  $\vec{B}$ ). Použitím Maxwellových rovnic (6.2) nahradíme časové derivace za rotace (z Faradayova a Ampér-Maxwellova zákona):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( (\text{rot } \vec{B}) \cdot \vec{E} - (\text{rot } \vec{E}) \cdot \vec{B} \right). \quad (6.42)$$

Pomocí Einsteinova sumačního pravidla se dá snadno dokázat identita<sup>3</sup> (viz TEF1)

$$\text{div}(\vec{B} \times \vec{E}) = (\text{rot } \vec{B}) \cdot \vec{E} - (\text{rot } \vec{E}) \cdot \vec{B}. \quad (6.43)$$

Po dosazení do (6.42) dostaneme *rovnici kontinuity*:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div} \left( \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} \right) = 0, \quad (6.44)$$

kde člen v závorce interpretujeme jako *vektor toku energie*. Označíme ho  $\vec{S}$  a nazývá se *Poyntingův vektor*:

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B}}. \quad (6.45)$$

Jednotkou toku energie  $\vec{S}$  je  $[\vec{S}] = \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ . Množství energie  $dE$ , které proteče skrze plošku  $dA$  s normálovým vektorem  $\vec{n}$  za čas  $dt$  je dáno vztahem:

$$dE = (\vec{S} \cdot \vec{n}) dt dA. \quad (6.46)$$

Rovnice kontinuity (6.44) představuje diferenciální tvar zákona zachování energie v elektromagnetickém poli. Integrální tvar získáme integrováním přes daný objem  $V$ :

$$\frac{d}{dt} \int_V w dV = - \int_A \vec{S} \cdot d\vec{A}, \quad (6.47)$$

kde pravou stranu jsme získali použitím Gaussovy věty na objemový integrál, plocha  $A$  je hranicí objemu  $V$ ,  $A = \partial V$ . Integrální tvar zákona říká, že změna množství energie pole v objemu  $V$  je dána celkovým tokem energie skrze hranici  $A$ .

<sup>3</sup>Použitím indexového zápisu a Einsteinova sumačního pravidla:

$$\text{div}(\vec{B} \times \vec{E}) = \partial_i (\varepsilon_{ijk} B_j E_k) = \varepsilon_{ijk} ((\partial_i B_j) E_k + B_j (\partial_i E_k)) = E_k \varepsilon_{kij} \partial_i B_j - B_j \varepsilon_{jik} \partial_i E_k = \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B} - \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E}.$$

### 6.3.3 Hustota hybnosti

Elektromagnetické pole kromě energie nese také hybnost. Zavedeme pojem *hustoty hybnosti*  $\vec{g}$ , který udává množství hybnosti obsažené  $d\vec{p}$  v elementu objemu  $dV$ :

$$d\vec{p} = \vec{g} dV. \quad (6.48)$$

Jednotkou je

$$[\vec{g}] = [\vec{p}] \cdot \text{m}^{-3} = (\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}) \cdot \text{m}^{-3} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (6.49)$$

Uvažujme pouze případ elektromagnetického pole ve vakuu. Ukážeme, že elektromagnetické pole nese hybnost, kterou může předávat nabitým částicím. Obecné odvození viz přednáška TEF2, kde se ukáže, že obecně platí

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{S} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}. \quad (6.50)$$

My si pro jednoduchost a pouhou ilustraci ukážeme pouze velmi hrubý model rovinné harmonické elektromagnetické vlny a její interakce se silně tlumeným bodovým nábojem  $q$ . Uvidíme, jak je vlivem této interakce předávána hybnost elektromagnetického pole nabitě částici. Na náboj působí Lorentzova síla od elektromagnetické vlny,

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (6.51)$$

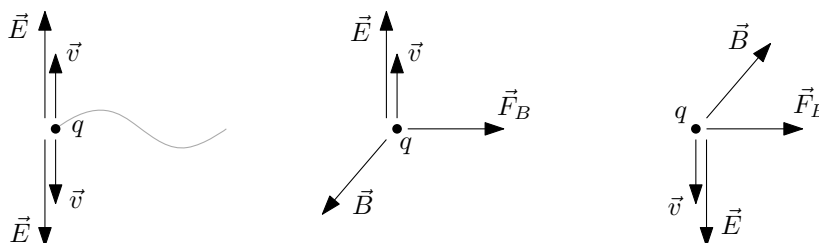
kde  $\vec{v}$  je rychlost náboje. Dále na náboj působí silná třecí síla lineárně závislá na rychlosti náboje  $\vec{v}$ . Pohybová rovnice je pak tvaru

$$m\vec{a} = -\alpha\vec{v} + \vec{F}_L. \quad (6.52)$$

Pro velmi silné tlumení je setrvačný člen  $m\vec{a}$  zanedbatelný vůči třecímu členu  $\alpha\vec{v}$ . V takovém případě máme pohybovou rovnici

$$\alpha\vec{v} = \vec{F}_L, \quad (6.53)$$

kde rychlost  $\vec{v}$  je přímo úměrná působící síle a nikoli zrychlení  $\vec{a}$ . Bez újmy na obecnosti uvažujme, že náboj je kladný,  $q > 0$ . Pokud by v procházející vlně bylo přítomno pouze elektrické pole  $\vec{E}$ , konala by částice pouze kmitavý pohyb ve směru elektrického pole, viz obrázek 6.14 vlevo. Nyní na tento pohyb superponujeme vliv magnetické části Lorentzovy síly. V jedné půlperiodě elektromagnetické vlny je situace znázorněna na obrázku 6.14 uprostřed a v druhé na obrázku 6.14 vpravo. Jelikož se směr rychlosti překlápá současně se směrem elektrického pole  $\vec{E}$ , a tím pádem i se směrem magnetického pole  $\vec{B}$ , zůstává směr magnetické části Lorentzovy síly stejný – ve směru postupu elektromagnetické vlny!



Obrázek 6.14: Interakce náboje s procházející rovinnou harmonickou postupnou vlnou. EM vlna se šíří směrem doprava. Vlevo je znázorněná rychlost nábojem  $\vec{v}$  vlivem elektrického pole  $\vec{E}$ . Vektor rychlosti je orientovaný ve směru pole  $\vec{E}$ . Směry magnetické části Lorentzovy síly jsou v obou půlperiodách EM vlny ve směru šíření, jak je znázorněno na obrázcích uprostřed a vpravo.

Kvantifikujme nyní tyto úvahy. Bez újmy na obecnosti uvažujme EM vlnu postupující ve směru  $\vec{n} = \vec{z}$ , elektrické pole kmitající ve směru  $\vec{x}$ ,  $\vec{E} = E_x \vec{x}$ , a magnetické pole tedy kmitající ve směru  $\vec{y}$ ,  $\vec{B} = B_y \vec{y}$ . Lorentzova síla je pak tvaru

$$\vec{F}_L = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) = qE_x \vec{x} + qv_x B_y \vec{z} - qv_z B_y \vec{x}. \quad (6.54)$$

Spočítejme časovou střední hodnotu Lorentzovy síly  $\vec{F}_L$  (která je zároveň časovou střední hodnotou předávané hybnosti vlivem této síly):

$$\left\langle \frac{d\vec{p}}{dt} \right\rangle = \langle \vec{F}_L \rangle = 0 + q \langle v_x B_y \rangle \vec{z} - 0. \quad (6.55)$$

První člen je nulový díky harmoničnosti složky  $E_x$  a třetí člen je nulový protože složka  $B_y$  je harmonická (tzn. mění znaménko), ale  $v_z$  je z důvodu diskutovaném výše stále kladné (s poloviční periodou oproti EM vlně).

Dále studujme změnu energie částice vlivem působící Lorentzovy síly:

$$\frac{dE}{dt} = P = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = q\vec{v} \cdot \vec{E} + \underbrace{q\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})}_{\vec{B} \cdot (\vec{v} \times \vec{v})=0} = qv_x E_x, \quad (6.56)$$

kde nám zbyl pouze člen od elektrického pole (magnetické pole nekoná práci; použili jsme vektorovou identitu<sup>4</sup>  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ ). Pro časovou střední hodnotu dostaneme

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = q \langle v_x E_x \rangle \quad (6.57)$$

a použijeme-li vztah mezi velikostí elektrické a magnetické složky v rovinné elektromagnetické vlně,  $E_x = cB_y$ , dospějeme k

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = qc \langle v_x B_y \rangle. \quad (6.58)$$

Porovnáním (6.55) a (6.58) získáme vztah mezi předávanou hybností a energií:

$$\boxed{\left\langle \frac{d\vec{p}}{dt} \right\rangle = \frac{1}{c} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \vec{z}.} \quad (6.59)$$

Hybnost a energie předávaná částici se musí dít na úkor hybnosti a energie elektromagnetického pole, vynásobíme-li předchozí vztah  $dt$  a vydělíme  $dV$ , dostaneme

$$\langle \vec{g} \rangle = \frac{1}{c} \langle w \rangle \vec{n}. \quad (6.60)$$

V následující kapitole uvidíme, že pro rovinnou vlnu je tento výsledek ekvivalentní (odmyslíme-li si střední hodnoty) s obecným vztahem (6.50).

<sup>4</sup>Kterou opět snadno dokážeme pomocí sumačního pravidla a indexového zápisu:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_i \varepsilon_{ijk} b_j c_k = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = c_k \varepsilon_{kij} a_i b_j = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

### 6.3.4 Energetické veličiny v rovinné vlně

Specifikujme si nyní energetické veličiny pro případ rovinné postupné vlny. V této vlně tvoří soubor vektorů  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{n})$  pravotočivý ortogonální systém ( $\vec{n}$  je směr postupu,  $|\vec{n}| = 1$ ) a vztah mezi velikostmi vektorů polí je  $E = vB$  (pro vakuum  $v = c$ ).

Pro hustotu energie  $w$  dostaneme

$$w = \frac{1}{2} \left( \varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu} \underbrace{B^2}_{B^2 = \frac{E^2}{v^2} = \varepsilon \mu E^2} \right) = \varepsilon E^2. \quad (6.61)$$

Pro Poyntingův vektor  $\vec{S}$  máme

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2 \vec{n}, \quad (6.62)$$

kde jsme využili vztah  $\vec{B} = \frac{1}{v} \vec{n} \times \vec{E}$  (plynoucí z vlastností vektorů  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{n}$  pro rovinnou EM vlnu) a také vztah  $\vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = E^2 \vec{n}$ , který si snadno rozmyslíme z obrázku 6.1. Pro rovinnou elektromagnetickou vlnu lze Poyntingův vektor napsat pomocí hustoty energie:

$$\vec{S} = v w \vec{n}. \quad (6.63)$$

Pro elektromagnetickou rovinnou postupnou vlnu ve vakuu můžeme pro hustotu hybnosti  $\vec{g}$  po dosažení z vyjádření pro Poyntingův vektor psát

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{S} = \frac{1}{c} w \vec{n} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}. \quad (6.64)$$

Pro harmonickou rovinnou postupnou vlnu šířící se ve směru osy  $\vec{z}$  (a vektor elektrického pole kmitající ve směru osy  $x$ ) jsou vektory  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$  tvaru

$$\vec{E} = E_0 \vec{x} \cos \omega t, \quad \vec{B} = B_0 \vec{y} \cos \omega t, \quad E_0 = c B_0, \quad \vec{n} = \vec{z}. \quad (6.65)$$

Pak hustota energie  $w$  a Poyntingův vektor  $\vec{S}$  (a jejich časové střední hodnoty) vyjdou

$$w = \varepsilon E^2 = \varepsilon E_0^2 \cos^2 \omega t, \quad \vec{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \cos^2 \omega t \vec{z}, \quad (6.66)$$

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2, \quad \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \vec{z}. \quad (6.67)$$

Velikosti časové střední hodnoty Poyntingova vektoru budeme říkat *intenzita* elektromagnetické vlny  $I = \langle |\vec{S}| \rangle$ .

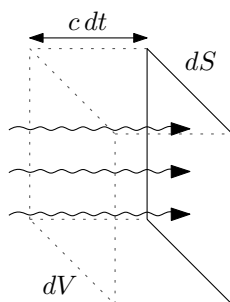
Energetické veličiny elektromagnetického pole jsou kvadratické v polích, stejně jako v případě struny. Opět proto nemůžeme používat komplexifikované vlny pro jejich výpočet.

### 6.3.5 Tlak záření

Vlivem nesené hybnosti působí elektromagnetická vlna tlakem na povrch, na který dopadá. Uvažujme nejprve případ, kdy vlna dopadá kolmo na povrch a celá vlna se absorbuje. Pak se veškerá hybnost nesená touto vlnou předává danému povrchu. Kvantifikujme tyto úvahy. Uvažujme malou plochu  $dS$  a malý časový okamžik  $dt$ . Tlak je z definice síla na jednotku plochy,

$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{dp}{dS dt}, \quad (6.68)$$

a působící síla je předaná hybnost za jednotku času  $dF = \frac{dp}{dt}$  (pozor,  $p$  značí tlak a  $dp$  hybnost). Nyní se musíme podívat, kolik hybnosti  $dp$  povrch absorbuje za čas  $dt$ . Za čas  $dt$  na povrch dopadne záření z objemu  $dV = c dt dS$ , viz obrázek 6.15. Hybnost obsažená v tomto objemu je  $dp = g dV$ .



Obrázek 6.15: Záření pohlcené ploškou velikosti  $dS$  za čas  $dt$  přichází z objemu  $dV = c dt dS$ .

Po dosazení do výrazu (6.68) dostaneme

$$p = \frac{g dV}{dS dt} = \frac{g c dt dS}{dS dt} = c g. \quad (6.69)$$

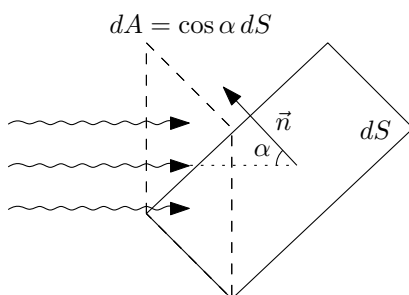
Použitím vztahů pro hustotu hybnosti v rovinné postupné vlně (6.64) můžeme tlak záření napsat v několika ekvivalentních tvarech:

$$p = c g = w = \frac{S}{c}. \quad (6.70)$$

Pokud máme povrch s odrazivostí  $\mathcal{R} \in \langle 0, 1 \rangle$ , tlak záření se příslušně zvyšuje:

$$p = (1 + \mathcal{R})w. \quad (6.71)$$

Pokud záření dopadá na povrch pod úhlem  $\alpha$  (úhel odklonu od kolmice), tlak záření se snižuje faktorem  $\cos^2 \alpha$ ,  $p = w \cos^2 \alpha$ . To je dáno dvěma efekty: snižuje se množství záření dopadající na plochu  $dS$  faktorem  $\cos \alpha$  a dále se snižuje předávaná hybnost ve směru kolmém na plošku  $dS$  také faktorem  $\cos \alpha$ , viz schematický obrázek 6.16.



Obrázek 6.16: Tlak záření dopadající na plochu skloněnou pod úhlem  $\alpha$ . Velikost průmětu plošky  $dS$  do směru kolmého na záření je  $dA = \cos \alpha dS$ .

Na závěr si uvedme pro představu velikost tlaku záření Slunce ve vzdálenosti  $1 \text{ AU} \approx 150 \cdot 10^6 \text{ km}$  (tzn. ve vzdálenosti, kde obíhá Země). Tok energie slunečního záření v této vzdálenosti je  $S = 1361 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  (zvaný též *solární konstanta*). Tlak záření pak je  $p = \frac{S}{c} = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}$ . Čím budeme blíže středu Slunce, tím bude tlak větší. Ve vzdálenosti  $d = 10^6 \text{ km}$  od středu Slunce (poloměr Slunce  $R_{\odot} \approx 0,7 \cdot 10^6 \text{ km}$ ) bude tlak  $150^2$ -krát větší,  $p = 0,1 \text{ Pa}$ . Uvnitř velmi hmotných hvězd ovšem tlak záření hraje významnou roli jako jeden z procesů působících proti gravitačnímu smršťování těchto hvězd.

### 6.3.6 Energie vyzařované vlny

Podívejme se nyní na tok energie  $\vec{S}$  elektromagnetické vlny vyzařované bodovým nábojem. Poyntingův vektor

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (6.72)$$

nabude tvaru

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} EB\vec{r}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E^2 \vec{r}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left( \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{c^2} \right)^2 \frac{1}{r^2} a_{\perp}^2(t_{\text{ret}}) \vec{r}_0 \quad (6.73)$$

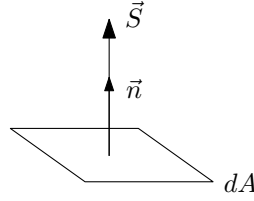
po dosazení ze vztahu pro radiální pole pohybujícího se náboje (6.32) a vztahu mezi směrem a velikostí vektorů  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$  (viz obrázek 6.13),  $t_{\text{ret}} = t - \frac{r}{c}$  je retardovaný čas. Vidíme, že tok energie míří v radiálním směru od zdroje. Spočítejme nyní tok energie procházející v čase  $t$  sférou o poloměru  $r$ . Zavedeme-li nyní sférické souřadnice tak, že osa  $z$  míří ve směru vektoru  $\vec{a}(t_{\text{ret}})$ , pak výraz pro velikost kolmého průmětu zrychlení  $a_{\perp}$  je

$$a_{\perp} = a \sin \theta, \quad (6.74)$$

kde  $\theta$  je standardní úhel sférických souřadnic měřící odklon od osy  $z$ . Tok energie  $dP$  malou ploškou  $dA$ , jejíž normálový vektor je  $\vec{n}$ , je dán vztahem

$$dP = \vec{S} \cdot d\vec{A}, \quad (6.75)$$

kde  $d\vec{A} = \vec{n} dA$ . Plocha, skrze níž počítáme tok, je sféra, normálový vektor míří také radiálním směrem jako vektor  $\vec{S}$  (viz obrázek 6.17), takže platí  $dP = S dA$ .



Obrázek 6.17: Ploška  $dA$ .

Celkový výkon  $P(t, r)$  procházející daným časem  $t$  sférou o daném poloměru  $r$  získáme integrací:

$$\begin{aligned} P &= \int_A dP = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} S \underbrace{r^2 \sin \theta d\varphi d\theta}_{dA} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left( \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{c^2} \right)^2 \frac{1}{r^2} a^2(t_r) \sin^2 \theta r^2 \sin \theta d\varphi d\theta, \end{aligned} \quad (6.76)$$

kde jsme za  $S$  dosadili z (6.73) a (6.74). Po úpravě získáme

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left( \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{c^2} \right)^2 a^2(t_{\text{ret}}) \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta, \quad (6.77)$$

kde jsme vyintegrovali přes úhel  $\varphi$  a vytknuli jsme všechny konstanty, včetně zrychlení  $a(t_r)$ , které je z pohledu integrace v daném  $t$  a na sféře konstantního poloměru  $r$  také konstanta. Jediné, co zbývá, je integrál přes úhel  $\theta$ , který snadno spočteme:

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \left[ -\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}. \quad (6.78)$$



Po dosazení a úpravě konstant je výsledkem tzv. *Larmorova formule* pro výkon vyzařovaný nerelativistickým bodovým nábojem:

$$P(t, r) = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} a^2(t_{\text{ret}}), \quad (6.79)$$

formule se může vyskytovat v různých podobách dle toho, jakým způsobem si vyberete zapsat konstantu  $\frac{\mu_0}{c}$  (pomocí vztahu  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ ). Výkon závisí na poloměru sféry  $r$  pouze skrze retardovaný čas  $t_{\text{ret}}$ . To znamená, že energie obsažená ve sféře expandující rychlostí  $c$  zůstává konstantní<sup>5</sup>. Toto je způsobeno tím, že elektrické pole ubývá jako  $\frac{1}{r}$ , tím pádem Poyntingův vektor ubývá jako  $\frac{1}{r^2}$ , povrch sféry je naproti tomu úměrný  $r^2$ , tyto dva efekty se tak vyruší.

Uvažujme harmonicky kmitající náboj, potom jeho poloha, kvadrát zrychlení včetně časové střední hodnoty jsou:

$$x(t) = A \cos \omega t, \quad a^2(t) = A^2 \omega^4 \cos^2 \omega t, \quad \langle a^2(t) \rangle = \frac{1}{2} A^2 \omega^4. \quad (6.80)$$

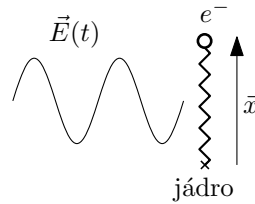
Časová střední hodnota unášeného výkonu pak je

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \langle a^2(t_r) \rangle = \frac{\mu_0 q^2}{12\pi c} A^2 \omega^4. \quad (6.81)$$

Tato již nijak nezávisí na  $r$  a tedy „v průměru“ je v každé slupce o poloměru  $r$  obsažená stejná energie.

## 6.4 Index lomu v látce a v plazmatu

Uvažujme jednoduchý model průchodu světla látkou jakožto interakce procházející elektromagnetické vlny s vázanými elektrony v atomech látky. Pro začátek uvažujme, že v látce je přítomen pouze jeden typ elektronů, který má vlastní úhlovou frekvenci kmitů  $\omega_0$  vlivem vázání v elektrickém poli jádra atomu.



Obrázek 6.18: Model elektronu vázaného v látce kmitajícího pod vlivem elektrického pole z procházející elektromagnetické vlny.

Potom pohybová rovnice tohoto elektronu bude

$$m\ddot{\vec{x}} + m\omega_0^2 \vec{x} = \vec{F}_L, \quad (6.82)$$

kde  $m$  je hmotnost elektronu a  $\vec{F}_L$  je Lorentzova síla působící na elektron v procházející elektromagnetické vlně. Tlumení elektronu v tomto jednoduchém modelu zanedbáváme. Pokud nyní v Lorentzově síle,

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (6.83)$$

<sup>5</sup>Uvažují-li pevně zvolený retardovaný čas  $t_{\text{ret}} = t - \frac{r}{c}$ , tak můžu vyjádřit  $r(t) = -ct_{\text{ret}} + ct$  - tedy slupky konstantního retardovaného času expandují rychlostí  $c$ .

odhadneme velikost magnetické části v procházející elektromagnetické vlně,

$$|\vec{v} \times \vec{B}| \leq v|\vec{B}| = \frac{v}{c}|\vec{E}| \ll |\vec{E}|, \quad (6.84)$$

vidíme, že pro nerelativistické rychlosti,  $v \ll c$ , je, díky vztahu  $|\vec{E}| = c|\vec{B}|$ , možné magnetickou sílu zanedbat. Pro nerelativistický elektron tedy bude pohybová rovnice (6.82) přibližně tvaru

$$m\ddot{\vec{x}} + m\omega_0^2\vec{x} = -e\vec{E}(t), \quad (6.85)$$

kde  $e$  je elementární elektrický náboj. Pro harmonickou elektromagnetickou vlnu máme v daném místě

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t), \quad (6.86)$$

tzn. máme harmonický oscilátor buzený harmonickou budící silou. Využijeme tedy výsledků kapitoly 1.6, přesněji řečeno vztahů (1.24), (1.25) a (1.28) (pro nulové tření  $\delta = 0$ , amplitudu buzení  $B \rightarrow -\frac{e}{m}\vec{E}_0$  a budící frekvenci  $\Omega = \omega$ ), a můžeme psát

$$\vec{x}(t) = -\frac{e}{m} \frac{\vec{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (6.87)$$

Kmitající elektron vytváří proměnný dipólový moment  $\vec{p}$  o velikosti

$$\vec{p} = -e\vec{x} = \frac{e^2}{m} \frac{\vec{E}(t)}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (6.88)$$

Těžká kladně nabitá jádra považujeme za nehybná a tedy žádný dipólový moment nevytváří. Takto působí elektromagnetická vlna na všechny elektrony (s úhlovou frekvencí  $\omega_0$ ) přítomné v látce. Jestliže v látce je početní hustota elektronů  $N$ , pak vektor polarizace  $\vec{P}$  (představující objemovou hustotu dipólového momentu,  $d\vec{p} = \vec{P} dV$ ) je dán vztahem

$$\vec{P} = N\vec{p}. \quad (6.89)$$

Permitivita  $\varepsilon$  prostředí je vyjádřitelná ze vztahu pro elektrickou indukci  $\vec{D}$ :

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon\vec{E}. \quad (6.90)$$

(tento vztah definuje  $\varepsilon$  pro výsledné  $\vec{E}$  a  $\vec{P}$ ). Dosadíme-li do (6.90) hodnotu polarizace  $\vec{P}$ , dostaneme

$$\varepsilon_0 \left( 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \vec{E} = \varepsilon\vec{E} \quad (6.91)$$

a tedy

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left( 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right). \quad (6.92)$$

Pro index lomu máme přibližný vztah  $n \approx \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$ , tzn.

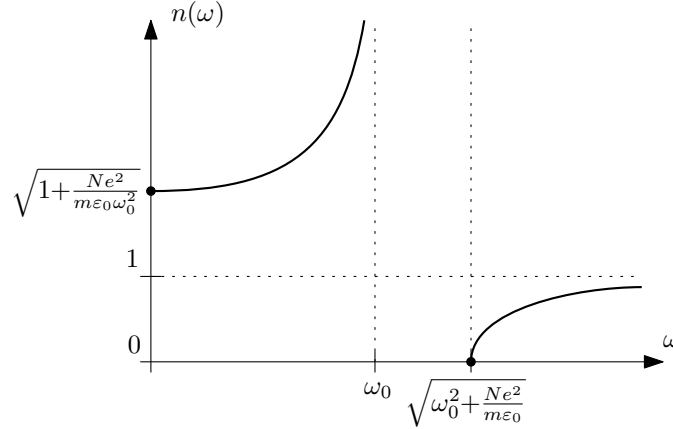
$$\boxed{n(\omega) = \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}}}. \quad (6.93)$$

Máme-li dán index lomu  $n(\omega)$ , známe disperzní vztah daného prostředí

$$\omega = \frac{c}{n(\omega)} k. \quad (6.94)$$

Tento model kvantifikuje klasickou představu o interakci elektromagnetické vlny s látkou. Změna fázové rychlosti EM vlnění při průchodu látkou se interpretuje jako efekt superpozice indukovaných polí (od rozkmitávaných elektronů) a procházející vlny.

Singularita pro  $\omega = \omega_0$  by se odstranila započítáním nenulového útlumu jednotlivých elektronů. Schematický graf funkce indexu lomu  $n(\omega)$  (6.93) je na obrázku 6.19. V oblasti  $\omega < \omega_0$  je zlomek pod odmocninou kladný a tedy index lomu  $n > 1$  (a  $v_\varphi < c$ ). V oblasti  $\omega > \omega_0$  je zlomek záporný. Pro frekvence v rozsahu  $\omega \in (\omega_0, \sqrt{\omega_0^2 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}})$  je výraz pod odmocninou záporný a celé prostředí se chová jako reaktivní. Pro frekvence  $\omega \geq \sqrt{\omega_0^2 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}}$  je prostředí opět transparentní, tentokrát ovšem s  $n < 1$  ( $v_\varphi > c$ ).



Obrázek 6.19: Funkce indexu lomu  $n(\omega)$ .

Typicky máme v látce více elektronů různých typů (různě „silně“ vázaných v atomu), tudíž obecně bychom uvažovali hustoty jednotlivých typů elektronů  $N_k$  s jejich vlastními frekvencemi  $\omega_k$ . Toto zobecnění by vedlo na vztah pro index lomu

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \sum_k \frac{N_k e^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_k^2 - \omega^2}}. \quad (6.95)$$

Pokročíme k případu plazmatu. V plazmatu máme elektrony a kladně nabitě ionty, které se mohou volně pohybovat. Podobně jako v případě indexu lomu pro látku, zanedbáváme pohyb kladně nabitých iontů (v látce to byla jádra atomů) vzhledem k jejich mnohonásobně vyšší hmotnosti oproti elektronům<sup>6</sup>. Pro plazma využijeme předchozích výsledků jednoduše tak, že položíme  $\omega_0 = 0$  – elektrony nejsou vázané. Z výsledku (6.93) tedy dostaneme

$$n(\omega) = \sqrt{1 - \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega^2}}. \quad (6.96)$$

Z obecného disperzního vztahu pro index lomu  $\omega = \frac{c}{n}k$  můžeme vyjádřit  $n = \frac{1}{\omega}ck$  a po dosazení do (6.96),

$$c^2 k^2 \frac{1}{\omega^2} = 1 - \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega^2}, \quad (6.97)$$

a drobné úpravě obdržíme disperzní vztah pro vlny v plazmatu

$$\boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2}, \quad (6.98)$$

<sup>6</sup>Proton je přibližně dvou tisíckrát těžší než elektron ( $\frac{m_p}{m_e} \approx 1836$ ).

kde jsme označili tzv. *plazmovou frekvenci*  $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}$ . Pro  $\omega > \omega_p$  se plazma chová jako transparentní prostředí, pro  $\omega < \omega_p$  jako prostředí reaktivní. V zemské ionosféře je v závislosti na denní době, ročním období a aktivitě Slunce plazmová frekvence v rozmezí 10 – 30 MHz. Vlny nižších frekvencí tedy ionosférou neprocházejí a odráží se.

## 6.5 Vlnovod

Vlnovod je zařízení, které dokáže vést elektromagnetické vlnění bez velkých ztrát. Zatímco ve volném prostoru se elektromagnetická vlna ze zdroje šíří jako sférická vlna, kde amplituda ubývá se vzdáleností. Vlnovod omezí šíření vlny do omezeného prostoru podél jednoho směru a zamezí tak ubývání amplitudy při šíření. Reálně se jedná o kovovou trubku či oplechované vedení<sup>7</sup> – tedy o prostor ohraničený kovovým pláštěm. Jako model nám poslouží dlouhý přímý vlnovod obdélníkového průřezu, jehož stěny jsou z dokonale vodivého materiálu (materiálu s nulovým, resp. zanedbatelným odporem).

Zabývejme se šířením elektrické části elektromagnetické vlny v tomto prostředí. Vektor elektrického pole  $\vec{E}$  musí splňovat vlnovou rovnici a Gaussův zákon,

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \vec{E}, \quad \text{div } \vec{E} = 0, \quad (6.99)$$

tedy úplně stejné rovnice jako například pro rovinnou elektromagnetickou vlnu. Důležitý rozdíl je v přítomnosti *okrajových podmínek*. Hledáme elektrické pole uvnitř vlnovodu s požadavkem splnění okrajových podmínek *dokonale vodivých stěn*. Dokonale vodivé stěny vynutí *vymizení tečných složek elektrického pole ve stěnách vlnovodu*. Tento fakt plyne z diferenciálního Ohmova zákona tvaru

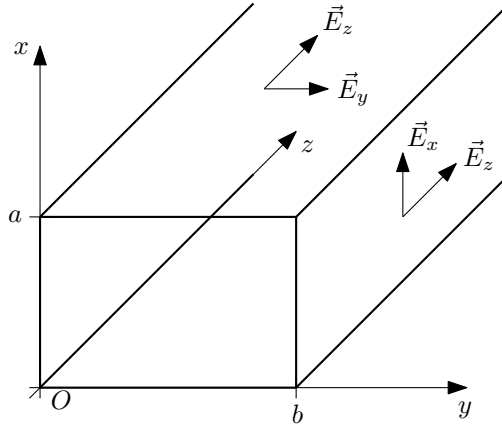
$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (6.100)$$

který vztahuje proudovou hustotu  $\vec{j}$  ve vodiči s působícím elektrickým polem  $\vec{E}$  pomocí konstanty úměrnosti  $\sigma$  – vodivosti materiálu. Vyjádříme-li velikost elektrického pole  $E = \frac{1}{\sigma} j$  a uvažujeme-li nekonečnou vodivost (nulový odpor), dostaneme  $E = 0$ . Fyzikálně řečeno náboje dokáží sledovat měnící se elektrické pole a vždy ho svým pohybem přesně vykompenzovat<sup>8</sup>. Jelikož ale náboje musí zůstat ve stěně vlnovodu, nemůže kolmá složka elektrického pole na hranici stěny vyvolávat pohyb nábojů a zůstává tedy nevyrušena.

Zavedme souřadnice jako na obrázku 6.20, na tomto obrázku jsou také znázorněné příslušné tečné složky v jednotlivých stěnách vlnovodu.

<sup>7</sup> Asi jako vedení vzduchotechniky.

<sup>8</sup> Pro statická pole tento fakt platí pro jakékoliv vodiče. Statické elektrické pole ve vodiči je vždy nulové. Pro nestatická pole již vyžadujeme navíc podmínku dokonalé vodivosti.



Obrázek 6.20: Obdélníkový vlnovod rozměrů  $(a, b)$  orientovaný ve směru osy  $z$ . V horní (a dolní), resp. pravé (a levé) stěně jsou znázorněny příslušné tečné složky elektrického pole  $\vec{E}$ .

V takto zavedených souřadnicích jsou okrajové podmínky následujícího tvaru. Pro levou ( $y = 0$ ) a pravou ( $y = b$ ) stěnu máme:

$$\begin{aligned} E_x(x, 0, z, t) = E_x(x, b, z, t) = 0 & \quad \forall x \in \langle 0, a \rangle, \quad \forall z, t \in \mathbb{R}, \\ E_z(x, 0, z, t) = E_z(x, b, z, t) = 0 & \quad \forall x \in \langle 0, a \rangle, \quad \forall z, t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6.101)$$

Pro horní ( $x = a$ ) a dolní ( $x = 0$ ) stěnu:

$$\begin{aligned} E_y(0, y, z, t) = E_y(a, y, z, t) = 0 & \quad \forall y \in \langle 0, b \rangle, \quad \forall z, t \in \mathbb{R}, \\ E_z(0, y, z, t) = E_z(a, y, z, t) = 0 & \quad \forall y \in \langle 0, b \rangle, \quad \forall z, t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6.102)$$

Budeme nyní chtít najít co nejjednodušší řešení rovnic (6.99) splňující okrajové podmínky (6.101) a (6.102), které se šíří podél vlnovodu (tj. podél osy  $z$ ). Nebudeme si klást za cíl nalézt úplně obecné řešení. Hledání řešení si můžeme zjednodušit, pokud budeme uvažovat elektrické pole konstantní v některých směrech. Určitě chceme zachovat závislost na souřadnicích  $z$  a  $t$ , jelikož chceme popsat vlnu postupující ve směru osy  $z$ . Bohužel, pokud bychom ponechali elektrické pole konstantní v rovinách  $xy$ , tzn. uvažovali bychom funkce  $\vec{E}(z, t)$ , okrajové podmínky vynutí nulovost řešení (viz dále). Přidejme tedy závislost na jedné proměnné navíc a studujme, co se stane. Vezměme elektrické pole například konstantní podél osy  $x$ , tzn. uvažujeme funkce

$$\vec{E} = \vec{E}(y, z, t). \quad (6.103)$$

Ansatz  $\vec{E}(y, z, t)$  vede na vynulování složek  $E_y$  a  $E_z$  v celém prostoru vlnovodu. Proč? Okrajové podmínky pro horní a dolní stěnu (6.102) hovoří o poli v bodech  $x = 0$  a  $x = a$ , ale naše pole je ve směru  $x$  konstantní. Je-li nulové na okraji, musí být nulové<sup>9</sup> i pro všechna  $x$ :

$$\begin{aligned} 0 = E_y(0, y, z, t) = E_y(y, z, t) = E_y(x, y, z, t) & \quad \forall x, y, z, t, \\ 0 = E_z(0, y, z, t) = E_z(y, z, t) = E_z(x, y, z, t) & \quad \forall x, y, z, t. \end{aligned} \quad (6.104)$$

Okrajové podmínky nám zjednodušily elektrické pole  $\vec{E}$  do podoby

$$\vec{E} = (E_x, 0, 0), \quad E_x = E_x(y, z, t). \quad (6.105)$$

<sup>9</sup>Ze stejného důvodu vymizela i složka  $E_x$  pro pole, které mělo závislost pouze  $\vec{E}(z, t)$ . Z okrajové podmínky levé a pravé stěny (6.101) bychom dostali:

$$E_x(x, 0, z, t) = E_x(z, t) = E_x(x, y, z, t) \quad \forall x, y, z, t.$$

Gaussův zákon je pak splněn automaticky,

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x(y, z, t)}{\partial x} = 0, \quad (6.106)$$

a z vlnové rovnice zbyla jedna složka a Laplaceův operátor působí jen v souřadnicích  $y$  a  $z$ :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = c^2 \Delta E_x = c^2 \left( \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right). \quad (6.107)$$

Stále nám zbývá okrajová podmínka pro složku  $E_x$  z (6.101):

$$E_x(0, z, t) = E_x(b, z, t) = 0 \quad \forall z, t \in \mathbb{R}. \quad (6.108)$$

Jak jsme již říkali, chceme najít elektrické pole šířící se podél osy  $z$ . Uvažujme tedy následující ansatz:

$$E_x(y, z, t) = Y(y) e^{i(\omega t - k_z z)}. \quad (6.109)$$

Napsali jsme elektrické pole jako postupnou vlnu ve směru osy  $z$  s neznámou funkcí  $Y$  souřadnice  $y$ . Symbolem  $k_z$  jsme označili vlnové číslo příslušející směru  $z$ . Jednotlivé derivace ve vlnové rovnici (6.107) vedou na výrazy

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -\omega^2 Y(y) e^{i(\omega t - k_z z)}, \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -k_z^2 Y(y) e^{i(\omega t - k_z z)}, \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = Y''(y) e^{i(\omega t - k_z z)}, \quad (6.110)$$

a po jejich dosazení do (6.107) a vykrácení exponenciály dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici pro funkci  $Y(y)$  tvaru

$$Y'' + \underbrace{\left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right)}_K Y = 0. \quad (6.111)$$

Okrajové podmínky (6.108) se redukují na následující podmínky na funkci  $Y(y)$ :

$$Y(0) = 0, \quad Y(b) = 0. \quad (6.112)$$

Pro  $K \leq 0$  jsou řešení hyperbolické funkce ( $K < 0$ ) nebo lineární funkce ( $K = 0$ ) a pro tyto nelze netriviálně okrajové podmínky splnit. Pro  $K > 0$  dostaneme rovnici

$$Y'' + k_y^2 Y = 0, \quad (6.113)$$

kde jsme si označili jako vlnové číslo ve směru  $y$ ,

$$k_y = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2}. \quad (6.114)$$

Řešení (6.113) zapíšeme ve tvaru

$$Y(y) = \alpha \cos(k_y y) + \beta \sin(k_y y). \quad (6.115)$$

Nalezneme tvar řešení, které splňuje okrajové podmínky (6.108):

$$0 = Y(0) = \alpha \quad \Rightarrow \quad 0 = Y(b) = \beta \sin(k_y b). \quad (6.116)$$

Musíme položit  $\alpha = 0$  a požadujeme-li netrivialitu řešení, musí být  $\beta \neq 0$  a zároveň

$$k_y b = m\pi, \quad m \in \mathbb{N} \quad (6.117)$$

(jelikož  $k_y b > 0$ , tak  $m \in \mathbb{N}$ ). Ve vlnovodu tedy, prostřednictvím tvaru funkce  $Y(y)$ , existují módy číslované přirozenými čísly  $m \in \mathbb{N}$  ve tvaru funkcí  $\sin$ . To je velmi podobné jako na struně s pevnými konci – pevné konce vynutily vymizení výchylky v místech upevnění. Zde musí na stěnách vymizet elektrické pole v důsledku „pevných konců“ dokonalé vodivosti. Přípustná vlnová čísla pro funkci  $Y(y)$  a k nim příslušné funkce  $Y_m(y)$  tedy mají tvar

$$k_{y(m)} = \frac{m\pi}{b}, \quad Y_m(y) = \beta \sin(k_{y(m)}y) = \beta \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \quad m \in \mathbb{N} \quad (6.118)$$

Nyní dejme všechny získané informace dohromady. Elektrické pole ve vlnovodu jde vybudit v různých módech číslovaných přirozeným číslem  $m \in \mathbb{N}$  tvaru

$$\vec{E} = (E_x, 0, 0), \quad E_x(y, z, t) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{i(\omega t - k_z z)}, \quad (6.119)$$

(kde jsme místo  $\beta$  začali psát  $E_0$ ). Přitom konstanty  $k_y = \frac{m\pi}{b}$ ,  $k_z$  a  $\omega$  musí splňovat disperzní vztah (plynoucí z (6.114)):

$$\omega^2 = c^2 (k_y^2 + k_z^2) = \left(\frac{m\pi c}{b}\right)^2 + c^2 k_z^2. \quad (6.120)$$

Označíme-li  $\omega_{\min(m)} = \frac{m\pi c}{b}$ , můžeme disperzní vztah pro vlnovod psát ve tvaru

$$\omega^2 = \omega_{\min(m)}^2 + c^2 k^2, \quad (6.121)$$

kde jsme navíc přestali psát index u  $k_z$ , jelikož, přestože máme elektrické pole v prostoru, se efektivně jedná o postupující vlnu pouze ve směru  $z$  a není tedy sporu o tom, že vlnové číslo  $k$  (dříve  $k_z$ ) popisuje vlnovou délku vlny elektrického pole ve směru  $z$ . Můžeme tedy počítat fázovou a grupovou rychlost elektromagnetické vlny postupující vlnovodem podél osy  $z$  jako

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}, \quad v_g = \frac{d\omega}{dk}, \quad (6.122)$$

tedy úplně stejně jako u jednorozměrného vlnění.

Z disperzního vztahu (6.121) plyne, že pro daný mód (tzn. pro dané přirozené číslo  $m$ ) existuje minimální úhlová frekvence  $\omega_{\min(m)}$ , která se ještě může vlnovodem šířit. Pro  $\omega > \omega_{\min(m)}$  se jedná o prostředí transparentní, pro  $\omega < \omega_{\min(m)}$  se jedná o reaktivní prostředí. Nejnižší mód pro  $m = 1$  má zároveň nejnižší minimální úhlovou frekvenci

$$\omega_{\min} = \omega_{\min(1)} = \frac{\pi c}{b}. \quad (6.123)$$

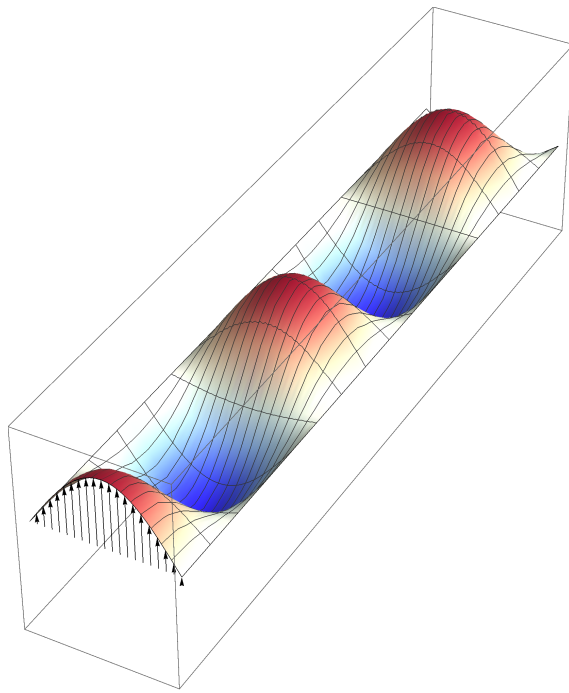
Pro vlnovod rozměru  $b = 10$  cm je to  $f_{\min} = \frac{\omega_{\min}}{2\pi} = 1,5$  GHz. Pro frekvence  $\omega$  v reaktivním režimu snadno nalezneme řešení disperzního vztahu v podobě  $k = i\kappa$ , tzn.

$$\omega^2 = \omega_{\min(m)}^2 - c^2 \kappa^2, \quad (6.124)$$

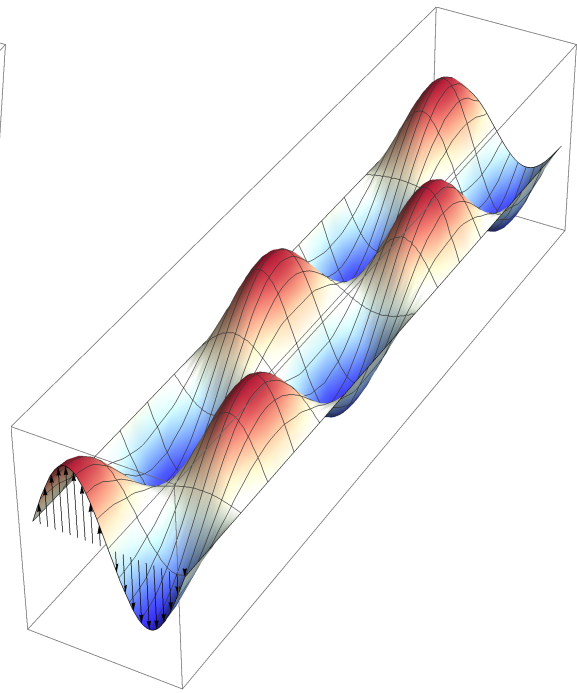
a výsledná vlna ve vlnovodu bude exponenciálně tlumená stojatá vlna tvaru

$$E_x(y, z, t) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{-\kappa z} e^{i\omega t}. \quad (6.125)$$

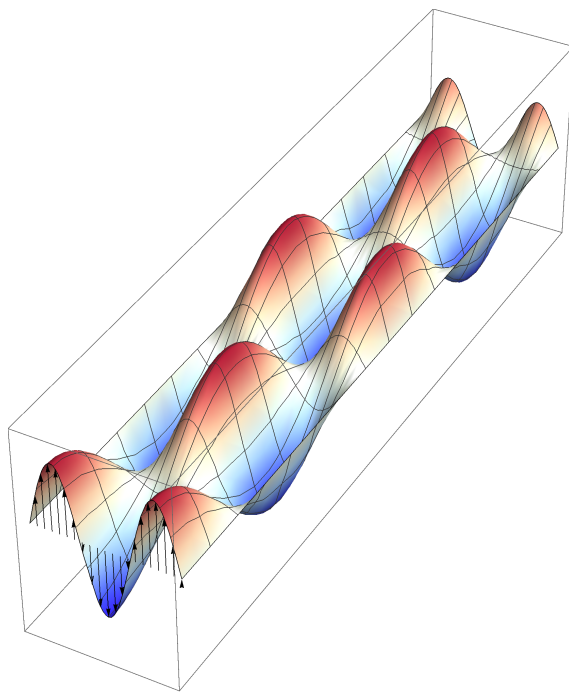
Vlnovod tedy vede elektromagnetickou vlnu bez zmenšování amplitudy, ale jeho rozměry musí být dostatečné, aby vlnu dané frekvence vůbec mohl vést. Pokud rozměry vlnovodu dostatečné nejsou, vlna se vlnovodem nešíří, ale vznikne exponenciálně tlumená stojatá vlna. Ukázka jednotlivých módů je na obrázku 6.21.



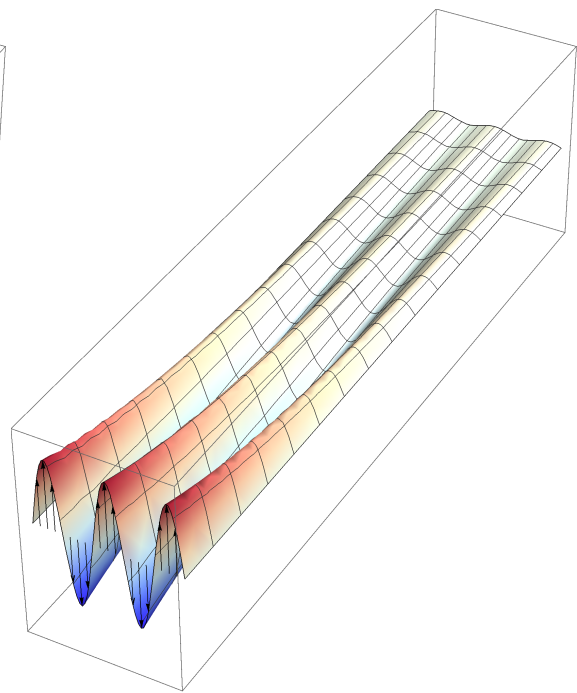
(a) První mód,  $m = 1$ .



(b) Druhý mód,  $m = 2$ .



(c) Třetí mód,  $m = 3$ .



(d) Pátý tlumený mód,  $m = 5$ .

Obrázek 6.21: Znázornění elektrického pole ve vlnovodu pro několik módů. Jsou zobrazeny vlny pro fixní úhlovou frekvenci  $\omega$ . Při zvyšování čísla módu  $m$  se zvyšuje minimální uhlová frekvence  $\omega_{\min(m)}$ , až se nevyhnutelně stane, že od jistého  $m_0$  se vlna přestane šířit, zde se tak stalo pro  $m_0 = 5$  na posledním obrázku. Elektrické pole je konstantní podél osy  $x$ , na obrázcích je tedy znázorněné pole ve vybrané rovině  $x = x_0$ . „Na začátku“ vlnovodu jsou znázorněné přímo vektory elektrické intenzity  $\vec{E}$  (černě), jinak je grafem (barevně) spojitě vykreslena intenzita elektrického pole bez znázornění jednotlivých vektorů. Pro šířící se módy ( $m < m_0$ ) je vlna jako celek pohybuje vlnovodem fázovou rychlostí  $v_{\varphi(m)}$  (pro každý mód jinou), pro nešířivé módy ( $m \geq m_0$ ) dostáváme stojatou vlnu.



## 6.6 Podmínky napojení EM pole na rozhraní nevodivých prostředí

Uvažujme dvě homogenní prostředí tvořené lineárním dielektrikem a magnetikem popsané permitivitami  $\varepsilon_1$  a  $\varepsilon_2$  a permeabilitami  $\mu_1$  a  $\mu_2$ . Odvodíme nyní tzv. *podmínky napojení* elektrického a magnetického pole na rozhraní těchto dvou prostředí, které budou udávat vztah mezi hodnotami elektrického a magnetického pole na jedné a druhé straně rozhraní.

Zapišme Maxwellovy rovnice v látkovém prostředí pro obecně proměnnou permitivitu  $\varepsilon(\vec{r})$  a permeabilitu  $\mu(\vec{r})$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varepsilon\vec{E}) &= \rho_{\text{volné}} \quad (\text{Gaussův zákon}), & \operatorname{div}\vec{B} &= 0 \quad (\vec{B} \text{ je solenoidální}), \\ \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Faradayův zákon}), & \operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\vec{B}\right) &= \vec{j}_{\text{volné}} + \frac{\partial(\varepsilon\vec{E})}{\partial t} \quad (\text{Ampér-Maxwellův zákon}). \end{aligned} \quad (6.126)$$

Nevodivé prostředí se propíše do vymizení volných nábojů a proudů:

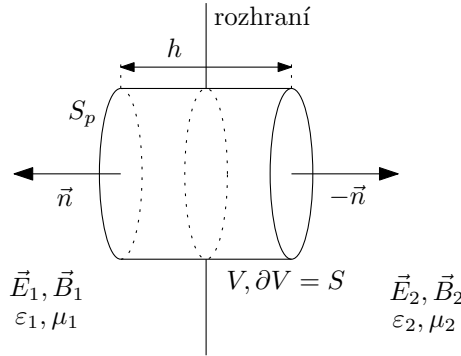
$$\rho_{\text{volné}} = 0, \quad \vec{j}_{\text{volné}} = 0. \quad (6.127)$$

Obecná strategie bude taková, že přepíšeme jednotlivé Maxwellovy rovnice do integrálního tvaru, použijeme Gaussovu, resp. Stokesovu, větu a vhodně zvolíme objem/plochu/křivku integrace tak, aby poskytla vztahy mezi poli na jedné a druhé straně rozhraní.

Začneme s Gaussovým zákonem. Vyintegrováním přes daný objem  $V$  a použitím Gaussovy věty dostaneme

$$\int_V \operatorname{div}(\varepsilon\vec{E}) dV = \oint_S \varepsilon\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (6.128)$$

kde uzavřená plocha  $S$  je hranicí objemu  $V$ ,  $\partial V = S$ . Pravá strana je nulová v důsledku nepřítomnosti volných nábojů. Element plochy v integrálu je  $d\vec{S} = \vec{n} dS$ , kde  $\vec{n}$  je jednotkový normálový vektor k ploše  $S$ . Zvolme nyní za objem/plochu  $V/S$  válec, který je svou osou kolmo na rozhraní dvou prostředí tak, jak je znázorněno na obrázku 6.22.



Obrázek 6.22: Válcová plocha  $S$  umístěná svou osou kolmo na rozhraní dvou homogenních prostředí. Plocha podstavy je  $S_p$  a výška válce je  $h$ . Normálový vektor k podstavě v prvním prostředí označme  $\vec{n}$ , k druhé podstavě je to pak  $-\vec{n}$ .

Integrační oblast rozdělíme na obě podstavy a plášť. Tzn. tok  $\Phi$  celým válcem můžeme rozdělit na  $\Phi = \Phi_{\text{plášť}} + \Phi_{p1} + \Phi_{p2}$ :

$$\Phi = \Phi_{\text{plášť}} + \left( \varepsilon_1 \vec{E}_1 \cdot \vec{n} - \varepsilon_2 \vec{E}_2 \cdot \vec{n} \right) S_p = 0, \quad (6.129)$$

kde integrál přes malou plochu podstavy jsme napsali<sup>10</sup> jako součin plochy  $S_p$  a hodnoty skalárního součinu  $\vec{E} \cdot \vec{n}$  v daném místě. Tok pláštěm můžeme odhadnout  $|\Phi_{\text{plášť}}| \leq \alpha S_{\text{plášť}} = \alpha (2\pi r)h$ , kde  $\alpha$  je maximum funkce  $|\vec{E} \cdot \vec{n}|$  na ploše pláště a  $r$  je poloměr podstavy. V limitě  $h \rightarrow 0$  tok pláštěm vymizí a po vykrácení  $S_p$  z (6.129) obdržíme

$$\vec{n} \cdot (\varepsilon_1 \vec{E}_1 - \varepsilon_2 \vec{E}_2) = 0, \quad (6.130)$$

kde  $\vec{E}_1$  a  $\vec{E}_2$  představují hodnoty elektrického pole z jedné a druhé strany rozhraní. Skalární součin  $\vec{E} \cdot \vec{n}$  geometricky představuje velikost průmětu vektoru  $\vec{E}$  do směru normálového vektoru, tudíž představuje velikost normálové složky elektrického pole  $\vec{E}_\perp$ . Z Gaussova zákona tedy plyne, že *normálové složky elektrického pole mají na rozhraní skok daný poměrem příslušných permitivit prostředí*:

$$\boxed{\varepsilon_1 \vec{E}_{1\perp} = \varepsilon_2 \vec{E}_{2\perp}, \quad \frac{E_{1\perp}}{E_{2\perp}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.} \quad (6.131)$$

Zcela stejný postup se aplikuje i pro druhou divergenční Maxwellovu rovnici, tj. solenoidálnost magnetického pole. Integrální tvar

$$\int_V \text{div } \vec{B} dV = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (6.132)$$

po zvolení válcové plochy jako v předchozím vede na

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0, \quad (6.133)$$

nebo-li *normálové složky magnetického pole jsou na rozhraní spojitě*:

$$\boxed{\vec{B}_{1\perp} = \vec{B}_{2\perp}.} \quad (6.134)$$

Jako další nyní uvažujme Ampér-Maxwellův zákon v (6.126), jehož integrální tvar získáme po vyintegrování přes plochu  $S$ ,

$$\int_S \text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \vec{B} \right) \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial(\varepsilon \vec{E})}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (6.135)$$

a použitím Stokesovy věty na levou stranu rovnice dostaneme

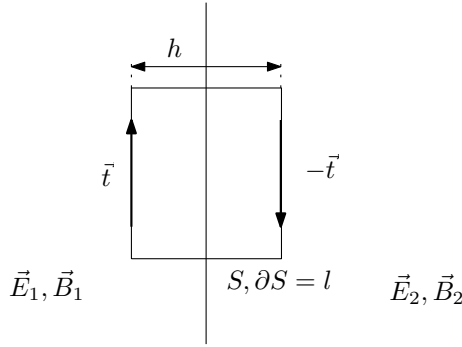
$$\oint_l \frac{1}{\mu} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \frac{\partial(\varepsilon \vec{E})}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \quad (6.136)$$

kde uzavřená křivka  $l$  je hranice plochy  $S$ ,  $l = \partial S$ . Element délky v integrálu je  $d\vec{l} = \vec{t} dl$ , kde  $\vec{t}$  je jednotkový tečný vektor ke křivce  $l$ , element plochy je opět  $d\vec{S} = \vec{n} dS$ . Zvolme za plochu  $S$  (resp. její hranici  $l$ ) obdélník, jehož plocha je kolmá k rozhraní prostředí, tak jak je znázorněno na obrázku 6.23.

<sup>10</sup>Používáme vlastně zobecněnou větu o střední hodnotě integrálu. Integrál spojitě skalární funkce  $\vec{E} \cdot \vec{n}$  přes kompaktní (omezenou a uzavřenou) plochu  $S$  můžeme napsat jako velikost této plochy krát funkční hodnota v nějakém bodě plochy:

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = (\vec{E} \cdot \vec{n})(\xi) S = \vec{E}(\xi) \cdot \vec{n}(\xi) S,$$

kde bod  $\xi$  je blíže neurčený bod plochy  $S$ . Provedeme-li limitu  $S \rightarrow 0$  dostaneme funkční hodnotu  $(\vec{E} \cdot \vec{n})$  ve vybraném bodě, kolem kterého jsme zkonstruovali plochu  $S$ .



Obrázek 6.23: Obdélníková plocha  $S$ , resp. křivka  $l$  umístěná kolmo na rozhraní prostředí. Označme rozměr obdélníku napříč rozhraními  $h$  a podél rozhraní  $l$ . Jednotkový tečný vektor k levé straně obdélníka je  $\vec{t}$ , potom tečný vektor k pravé straně zachovávající směr obíhání je  $-\vec{t}$ .

Nejprve se podívejme na integrál na pravé straně (6.136). Tento můžeme v absolutní hodnotě odhadnout shora výrazem  $\alpha S = \alpha l h$ , kde  $\alpha$  je maximum funkce  $\left| \frac{\partial(\epsilon \vec{E})}{\partial t} \cdot \vec{n} \right|$  a  $S$  je obsah zvoleného obdélníka. V limitě  $h \rightarrow 0$  tento integrál tedy vymizí. Integraci na levé straně (6.136) přes křivku  $l$  rozdělme na jednotlivé strany. Analogickou argumentací jako výše se ukáže, že integrály přes horní a dolní stranu obdélníka v limitě  $h \rightarrow 0$  vymizí. V integrálním tvaru Ampér-Maxwellova zákona tedy po provedení limity  $h \rightarrow 0$  zbyde pouze:

$$\frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1 \cdot \vec{t} l - \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2 \cdot \vec{t} l = 0, \quad (6.137)$$

kde (pro připomenutí)  $l$  je délka levé a pravé strany obdélníka a  $\vec{B}_1$  a  $\vec{B}_2$  jsou hodnoty magnetických polí z jedné a druhé strany rozhraní. Po vykrácení<sup>11</sup>  $l$ :

$$\vec{t} \cdot \left( \frac{\vec{B}_1}{\mu_1} - \frac{\vec{B}_2}{\mu_2} \right) = 0. \quad (6.138)$$

Skalární součin s vektorem  $\vec{t}$  dá velikost průmětu na směr tečný k rozhraní. Jelikož jsme na začátku mohli volit orientaci obdélníkové plochy  $S$  libovolně, musí vztah (6.138) platit pro libovolný tečný vektor  $\vec{t}$ . To nám dává následující výsledek

$$\boxed{\frac{B_{1\parallel}}{\mu_1} = \frac{B_{2\parallel}}{\mu_2}, \quad \frac{B_{1\parallel}}{B_{2\parallel}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}}, \quad (6.139)$$

tedy že *tečné složky magnetického pole mají na rozhraní skok* daný poměrem příslušných permeabilit prostředí.

Úplně stejně postupujeme i v případě Faradayova zákona. Integrální tvar

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (6.140)$$

vede po zvolení obdélníkové plochy jako v předchozím případě k podmínce

$$\vec{t} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (6.141)$$

<sup>11</sup>A také limitě  $l \rightarrow 0$ , abychom v opětovně použité integrální větě o střední hodnotě dostali hodnoty polí  $\vec{B}_1$  a  $\vec{B}_2$  v dobře definovaných místech.

a tedy *tečné složky elektrického pole jsou na rozhraní spojité*:

$$\boxed{\vec{E}_{1\parallel} = \vec{E}_{2\parallel}} \quad (6.142)$$

Na závěr shrňme nalezené podmínky napojení elektrického a magnetického pole na rozhraní dvou nevodivých prostředí do tabulky (s uvedením zákona, ze kterého plynou):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \vec{E}_{1\perp} &= \varepsilon_2 \vec{E}_{2\perp} \quad (\text{Gaussův zákon}), & \vec{B}_{1\perp} &= \vec{B}_{2\perp} \quad (\vec{B} \text{ je solenoidální}), \\ \vec{E}_{1\parallel} &= \vec{E}_{2\parallel} \quad (\text{Faradayův zákon}), & \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_{1\parallel} &= \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_{2\parallel} \quad (\text{Ampér-Maxwellův zákon}). \end{aligned} \quad (6.143)$$

## Kapitola 7

# Polarizace

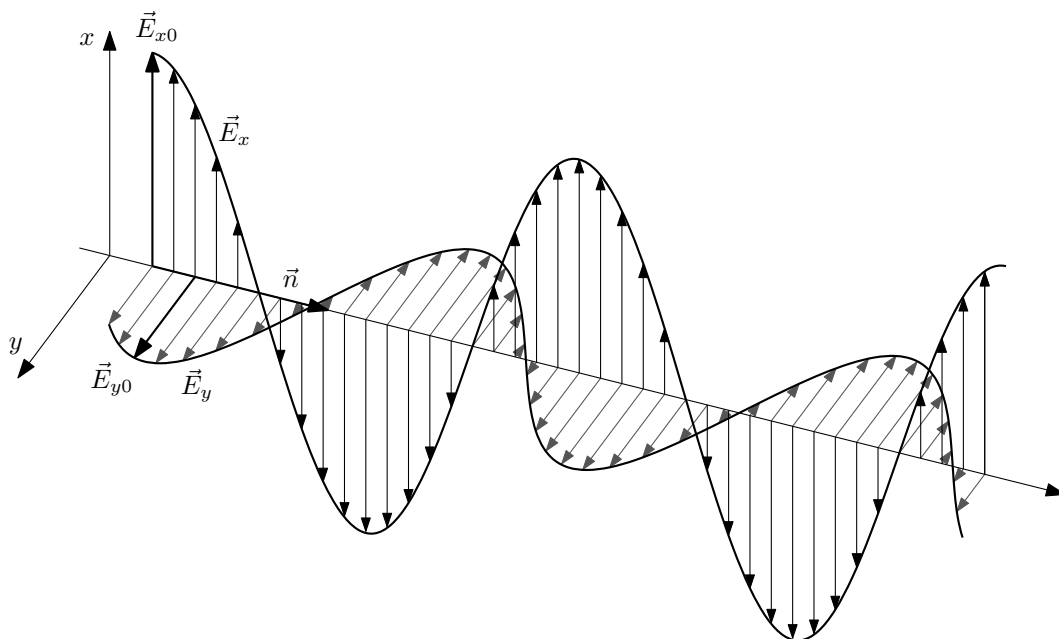
Ukázali jsme si, že elektromagnetická postupná vlna je vlna příčná. Elektrické a magnetické pole je kolmé na směr šíření. To znamená, že existují dva nezávislé směry pro vektory elektrického a magnetického pole – říkáme, že máme dvě nezávislé *polarizace*. Budeme se věnovat popisu pouze elektrické části vlny  $\vec{E}$ , magnetická část pak je plně určena ze vztahu  $\vec{B} = \frac{1}{v} \vec{s} \times \vec{E}$ , kde  $\vec{s}$  je vektor směru šíření. Zvolme souřadnice tak, že směr šíření je  $\vec{s} = \vec{z}$ , pak můžeme za bázi příčné roviny, ve které leží vektory  $\vec{E}$  zvolit například vektory  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$ . Obecný vektor elektrického pole tedy můžeme rozložit do složek mířící ve směru osy  $x$  a  $y$ :

$$\vec{E} = E_x \vec{x} + E_y \vec{y}. \quad (7.1)$$

Jestliže budeme uvažovat harmonické postupné vlny, můžeme za každou z těchto složek z principu superpozice zvolit vlnu s různou amplitudou a s různým fázovým posuvem:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_{x0} e^{i(\omega t - kz + \varphi_1)} \vec{x} + E_{y0} e^{i(\omega t - kz + \varphi_2)} \vec{y}. \quad (7.2)$$

Graficky jsou tyto dvě postupné složky v navzájem kolmých směrech  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$  znázorněné na obrázku (7.1).



Obrázek 7.1: Dva lineárně nezávislé směry elektrického pole – každá z vln může mít obecně různou amplitudu, zde  $E_{x0}$  a  $E_{y0}$ , a různý fázový posun.

Fázový rozdíl těchto dvou složek  $\delta\varphi$ ,

$$\delta\varphi = (\omega t - kz + \varphi_1) - (\omega t - kz + \varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (7.3)$$

nezávisí na čase ani místě v prostoru. Vybereme-li si nyní libovolné místo  $z = z_0$ , můžeme sledovat časový průběh elektrického pole  $\vec{E}(t) = \vec{E}(z_0, t)$ :

$$\vec{E}(t) = E_{x0} \vec{x} e^{i(\omega t + \varphi'_1)} + E_{y0} \vec{y} e^{i(\omega t + \varphi'_2)}, \quad (7.4)$$

kde  $\varphi'_i = \varphi_i - kz_0$ , opět tedy platí

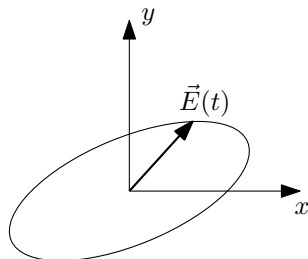
$$\delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi'_1 - \varphi'_2. \quad (7.5)$$

Pro fázový rozdíl  $\delta\varphi$  tedy nezáleží, ve kterém místě konkrétně budeme průběh elektrického pole sledovat. Přestaňme tedy rozlišovat konkrétní hodnoty fází  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  (tzn. například přestaneme psát čárky ve výrazu (7.4)), ale rozlišujeme jen jejich rozdíl  $\delta\varphi$ . Zároveň posunem v prostoru o  $\Delta z$  dosáhneme posunu ve fázi v obou vlnách  $-k\Delta z$ , případně posunem v čase o  $\Delta t$  dosáhneme posunu ve fázi v obou vlnách o  $\omega\Delta t$ . Z tohoto faktu plyne, že ve vyjádření (7.4) si do obou exponenciál můžeme přičíst vhodnou fázi (do obou stejnou!), tak jak se nám bude v daném případě hodit – aby se výraz například zjednodušil.

Reálná část z výrazu (7.4),

$$\vec{E}(t) = E_{x0} \vec{x} \cos(\omega t + \varphi_1) + E_{y0} \vec{y} \cos(\omega t + \varphi_2), \quad (7.6)$$

je parametrickou rovnicí elipsy<sup>1</sup>. Vektor elektrického pole  $\vec{E}(t)$  tedy v daném místě  $z = z_0$  obecně opisuje křivku tvaru elipsy, viz obrázek 7.2. Říkáme, že je elektromagnetická vlna *elipticky polarizovaná*.



Obrázek 7.2: Při obecné polarizaci opisuje vektor elektrického pole ve vybraném bodě elipsu.

Podívejme se na výraz pro intenzitu elektromagnetické vlny v obecné polarizaci (7.6). Intenzita je dána jako časová střední hodnota absolutní hodnoty toku energie:

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle, \quad \vec{S} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\vec{E}|^2 \vec{z}. \quad (7.7)$$

<sup>1</sup>Tento fakt se dá ukázat převodem parametrického tvaru (kde je parametrem čas  $t$ ) do algebraického tvaru pro složky  $E_x$  a  $E_y$ . Rozepíšeme složky elektrického pole pomocí součtových vzorců

$$E_x = E_{x0}(\cos \omega t \cos \varphi_1 - \sin \omega t \sin \varphi_1), \quad E_y = E_{y0}(\cos \omega t \cos \varphi_2 - \sin \omega t \sin \varphi_2)$$

Na tyto vztahy lze nahlížet jako na lineární rovnice pro funkce  $\sin \omega t$  a  $\cos \omega t$ . Vyřešením těchto rovnic dostaneme

$$\cos \omega t = aE_x + bE_y, \quad \sin \omega t = cE_x + dE_y,$$

kde čísla  $a, b, c, d$  jsou dané konkrétními hodnotami  $E_{x0}, E_{y0}, \varphi_1, \varphi_2$ . Umocněním na druhou a sečtením dostaneme

$$1 = (aE_x + bE_y)^2 + (cE_x + dE_y)^2,$$

což je rovnice kuželosečky v proměnných  $E_x$  a  $E_y$  (je to kvadratický polynom v  $E_x$  a  $E_y$ ). Jelikož hodnoty  $E_x$  a  $E_y$  jsou omezené (amplitudami  $E_{x0}$  a  $E_{y0}$ ), musí se jednat o elipsu nebo její degenerované případy (kružnice, úsečka).

Spočtěme tedy výraz  $|\vec{E}|^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}$  pro vlnu (7.6),

$$\begin{aligned} |\vec{E}|^2 &= E_{x0}^2 \vec{x}^2 \cos^2(\omega t + \varphi_1) + E_{y0}^2 \vec{y}^2 \cos^2(\omega t + \varphi_2) + 2E_{x0}E_{y0}(\vec{x} \cdot \vec{y}) \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(\omega t + \varphi_2) \\ &= E_{x0}^2 \cos^2(\omega t + \varphi_1) + E_{y0}^2 \cos^2(\omega t + \varphi_2) + 0, \end{aligned} \quad (7.8)$$

vlivem kolmosti vektorů  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$  interferenční člen vymizí a celková intenzita je pak jednoduše součtem intenzit v jednotlivých kolmých směrech (středování v čase dá faktor  $\frac{1}{2}$  z funkcí  $\cos^2$ ):

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (E_{x0}^2 + E_{y0}^2) = I_x + I_y. \quad (7.9)$$

Výsledná intenzita tedy závisí pouze na amplitudách jednotlivých vln, nikoliv na vzájemné fázi. Konkrétně je výsledná intenzita úměrná sumě kvadrátů amplitud vln v navzájem kolmých směrech.

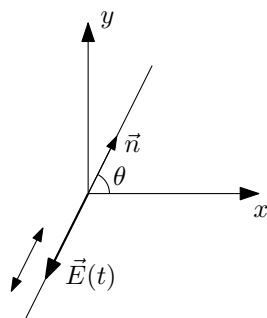
Každou vlnu tvaru (7.4) můžeme reprezentovat pomocí komplexního dvousložkového vektoru  $\hat{\vec{E}} \in \mathbb{C}^2$ , pokud si tvar elektrického pole  $\vec{E}(t)$  (7.4) prepíšeme následujícím způsobem:

$$\vec{E}(z, t) = (E_{x0}e^{i\varphi_1}\vec{x} + E_{y0}e^{i\varphi_2}\vec{y}) e^{i(\omega t - kz)} = \hat{\vec{E}} e^{i(\omega t - kz)}, \quad \hat{\vec{E}} = \begin{pmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{x0} e^{i\varphi_1} \\ E_{y0} e^{i\varphi_2} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2. \quad (7.10)$$

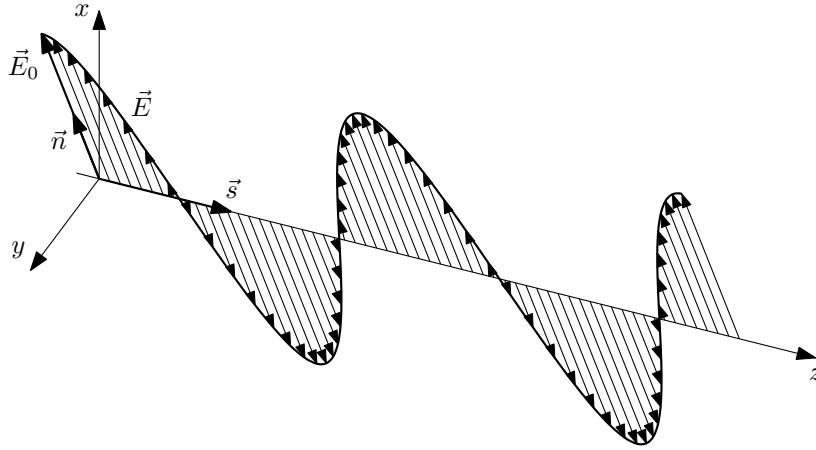
Intenzita vlny se pomocí tohoto vektoru zapíše jako

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \|\hat{\vec{E}}\|^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (|\hat{E}_1|^2 + |\hat{E}_2|^2) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (E_{x0}^2 + E_{y0}^2). \quad (7.11)$$

Podívejme se nyní na dva speciální případy polarizace. Příklad *lineární polarizace* nastává, pokud vektor elektrického pole  $\vec{E}(t)$  kmitá v jednom daném směru, viz obrázek 7.3, kde je znázorněn vektor  $\vec{E}(t)$  v kolmé rovině  $xy$ , a také viz obrázek 7.4, kde je znázorněno elektrické pole v prostoru  $\vec{E}(z, t_0)$  v daném čase  $t_0$ .



Obrázek 7.3: Při lineární polarizaci vektor elektrického pole  $\vec{E}(t)$  harmonicky kmitá v rovině  $xy$  (kolmé na směr šíření podél osy  $z$ ) podél jednotkového směrového vektoru  $\vec{n} = (n_x, n_y)$ .



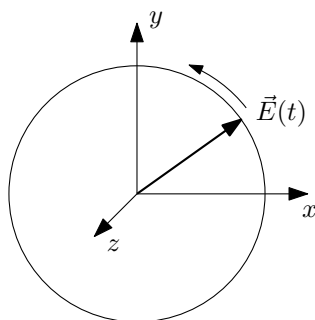
Obrázek 7.4: Prostorový průběh elektrického pole v lineární polarizaci. Znázorněno je elektrické pole  $\vec{E}(z, t_0)$  podél osy  $z$  v daném čase  $t_0$ .

Tento případ nastává pro fázový posun  $\delta\varphi \in \{0, \pi\}$ , pak lze elektrické pole (7.4) zapsat ve tvaru

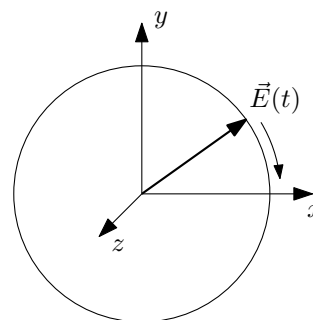
$$\vec{E}(t) = E_0 \vec{n} e^{i(\omega t + \varphi)}, \quad \hat{\vec{E}} = E_0 \vec{n} e^{i\varphi} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} e^{i\varphi}, \quad (7.12)$$

kde jednotkový vektor  $\vec{n} = (n_x, n_y) = (\cos \theta, \sin \theta)$  reprezentuje směr kmitání elektrického pole  $\vec{E}(t)$  v rovině  $xy$  a úhel  $\theta$  odklon tohoto vektoru od osy  $x$ .

Druhým speciálním případem je *kruhová polarizace*, kdy vektor elektrického pole  $\vec{E}(t)$  opisuje v rovině  $xy$  kružnici. V tomto případě ještě rozlišujeme dva podpřípady dle směru obíhání vektoru  $\vec{E}(t)$ . Pokud při pohledu proti směru šíření obíhá vektor  $\vec{E}(t)$  proti směru hodinových ručiček, hovoříme o *levotočivé kruhové polarizaci*, při pohybu po směru hodinových ručiček pak o *pravotočivé kruhové polarizaci*<sup>2</sup>. Tyto polarizace znázorněné v rovině  $xy$  jsou na obrázku 7.5. Pro kruhovou polarizaci tvoří vektor elektrického pole  $\vec{E}(z, t_0)$  v daném čase podél osy  $z$  šroubovici, která je znázorněná na obrázku 7.6.



(a) Levotočivá kruhová polarizace.

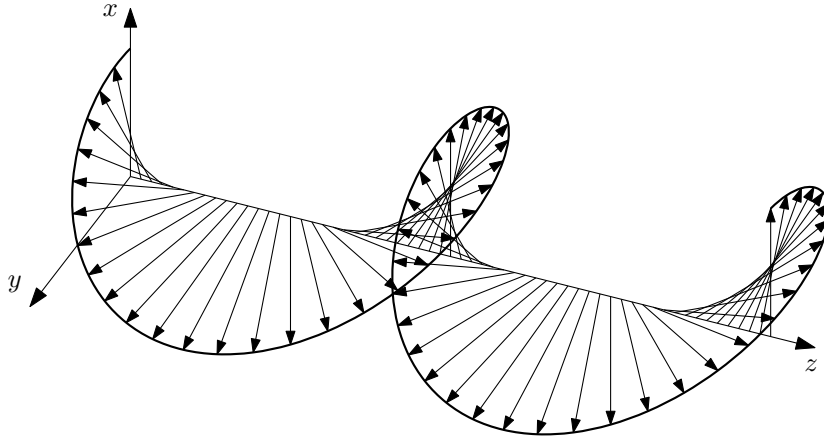


(b) Pravotočivá kruhová polarizace.

Obrázek 7.5: Kruhová polarizace elektromagnetické vlny. Smysl oběhu vektoru  $\vec{E}(t)$  se určuje při pohledu proti směru postupu vlny (naznačeno osou  $z$  mřící směrem k nám/z papíru).

<sup>2</sup>Bohužel existují dvě konvence. Druhá má definice přesně opačné než my zde.





Obrázek 7.6: Prostorový průběh elektrického pole pro kruhovou polarizaci. Znázorněno je elektrické pole  $\vec{E}(z, t_0)$  podél osy  $z$  v daném čase  $t_0$ . V tomto případě se jedná o pravotočivou polarizaci (vlna postupuje ve směru osy  $z$  a poté v dané rovině  $xy$  se bude vektor  $\vec{E}(t)$  šroubovice otáčet po směru hodinových ručiček, naproti tomu samotná šroubovice se podél osy  $z$  obtáčí proti směru hodinových ručiček...).

Kruhovou polarizaci dostaneme pro  $\delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$  a  $E_{x0} = E_{y0} = E_0$ . Po dosazení těchto podmínek do (7.4) je výsledkem výraz

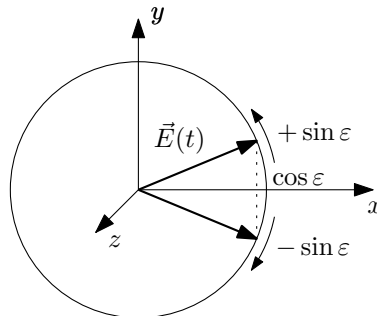
$$\vec{E}(t) = E_0 \left( \vec{x} \cos(\omega t + \varphi) \pm \underbrace{\vec{y} \sin(\omega t + \varphi)}_{\vec{y} \cos(\omega t + \varphi \mp \frac{\pi}{2})} \right), \quad (7.13)$$

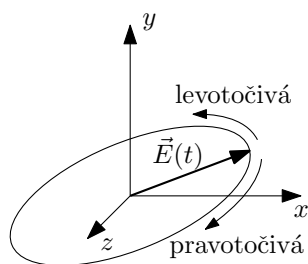
který je parametrickou rovnicí kružnice. Znaménko plus u sinu (tzn. fázi  $-\frac{\pi}{2}$ ) odpovídá levotočivé polarizaci a znaménko minus (tzn. fázi  $+\frac{\pi}{2}$ ) pravotočivé<sup>3</sup>. V komplexním zápisu máme

$$\vec{E}(t) = E_0 \left( \vec{x} e^{i(\omega t + \varphi)} + \vec{y} e^{i(\omega t + \varphi \mp \frac{\pi}{2})} \right), \quad \hat{E} = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\mp i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} e^{i\varphi}. \quad (7.14)$$

Pokud nemáme polarizace výše zmíněných speciálních typů, hovoříme, jak již bylo řečeno, o obecné eliptické polarizaci. Tato může být opět rozdělena do dvou kategorií: levotočivá a pravotočivá, viz obrázek 7.7. V prostoru tvoří elektrické pole tvar eliptické šroubovice.

<sup>3</sup>Tento fakt je snadno vidět pro malé kladné hodnoty fáze  $\omega t + \varphi$ . Vektor elektrického pole pak míří díky kosinu ve směru osy  $x$  a sinus malé kladné fáze je také kladný. V závislosti na znaménku před sinem dostáváme vektor, který se za malý čas trochu pootočil buďto do kladného nebo záporného směru osy  $y$ .





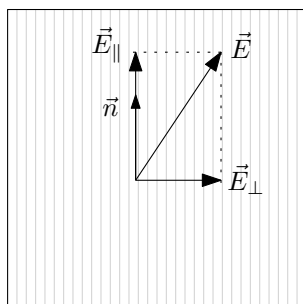
Obrázek 7.7: Levotočivá a pravotočivá eliptická polarizace.

## 7.1 Polarizátor a vlnová destička

V předchozí kapitole jsme si uvedli formalismus popisu polarizačních stavů a nyní se zaměříme na to, jak polarizační stavy měnit. Za tím účelem si popíšeme dva základní optické elementy, polarizátor a vlnovou destičku, které budeme postupně elektromagnetické vlně stavět do cesty.

### 7.1.1 Polarizátor

*Polarizátor* je optický element, který dovoluje průchod pouze takové složce elektrického pole, které kmitá ve směru osy polarizátoru – zvané *osa propustnosti* – popsané směrovým vektorem  $\vec{n} = (n_x, n_y)$ , viz obrázek 7.8.



Obrázek 7.8: Z elektrického pole  $\vec{E}$  dopadající na polarizátor je propuštěna pouze složka  $\vec{E}_{\parallel}$  rovnoběžná s osou propustnosti  $\vec{n}$ .

Jestliže tedy elektrické pole vstupující do polarizátoru rozložíme na  $\vec{E}_{\text{in}} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$ , pak výstupní pole bude  $\vec{E}_{\text{out}} = \vec{E}_{\parallel}$ . Akce polarizátoru se dá zapsat projekcí vektoru  $\vec{E}_{\text{in}}$  na směr  $\vec{n}$  pomocí skalárního součinu následujícím způsobem:

$$\vec{E}_{\text{out}} = (\vec{E}_{\text{in}} \cdot \vec{n}) \vec{n}, \quad (7.15)$$

kde  $\vec{n}$  je *jednotkový* vektor ve směru osy propustnosti. Dále bychom chtěli působení polarizátoru zakódovat do vhodné transformace vektorů  $\hat{\vec{E}}_{\text{in}}, \hat{\vec{E}}_{\text{out}} \in \mathbb{C}^2$  komplexního zápisu. Transformace (7.15) je lineární a tudíž ji půjde zakódovat do matice  $\mathbb{P}_{\vec{n}} \in \mathbb{C}^{2,2}$  – projektoru na osu  $\vec{n}$ , vztahující vektory  $\hat{\vec{E}}_{\text{in}}, \hat{\vec{E}}_{\text{out}}$  takto:

$$\hat{\vec{E}}_{\text{out}} = \mathbb{P}_{\vec{n}} \hat{\vec{E}}_{\text{in}}. \quad (7.16)$$

Najdeme vyjádření této matice rozepsáním vztahu (7.15):

$$\vec{E}_{\text{out}} = (E_x n_x + E_y n_y) \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x^2 E_x + n_x n_y E_y \\ n_x n_y E_x + n_y^2 E_y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} n_x^2 & n_x n_y \\ n_x n_y & n_y^2 \end{pmatrix}}_{\mathbb{P}_{\vec{n}}} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \mathbb{P}_{\vec{n}} \vec{E}_{\text{in}}. \quad (7.17)$$

Zavedeme-li úhel  $\theta$  jako úhel odklonu vektoru  $\vec{n}$  od osy  $x$ , dostaneme vyjádření  $\vec{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$  a můžeme psát

$$\mathbb{P}_{\vec{n}} = \mathbb{P}_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (7.18)$$

Uveďme si příklady projektorů na základní osy propustnosti:  $\vec{x}, \vec{y}, \frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}$  (osa propustnosti musí být jednotková):

$$\mathbb{P}_{\vec{x}} = \mathbb{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P}_{\vec{y}} = \mathbb{P}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P}_{\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}} = \mathbb{P}_{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.19)$$

Uvažujme lineárně polarizovanou vlnu dopadající na polarizátor. Jak se změní intenzita vlny po průchodu polarizátorem? Bez újmy na obecnosti veďme osu  $x$  ve směru vektoru vstupujícího polarizovaného světla, tzn.  $\vec{E}_{\text{in}} = E_0 \vec{x} \cos \omega t$ . Osa propustnosti nechť je obecně  $\vec{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$ , kde úhel  $\theta$  nyní popisuje úhel mezi směrem kmitání lineárně polarizované vlny a osou propustnosti polarizátoru. Po dosažení do (7.15) vyjde výstupní vektor amplitudy

$$\vec{E}_{0\text{out}} = E_0(\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n} = (E_0 \cos \theta) \vec{n} \quad (7.20)$$

a tedy výstupní vlna bude tvaru  $\vec{E}_{\text{out}} = (E_0 \cos \theta) \vec{n} \cos \omega t$ . Pokud dosadíme tvary vstupní a výstupní vlny do vztahu pro intenzitu vlny (7.7) dostaneme

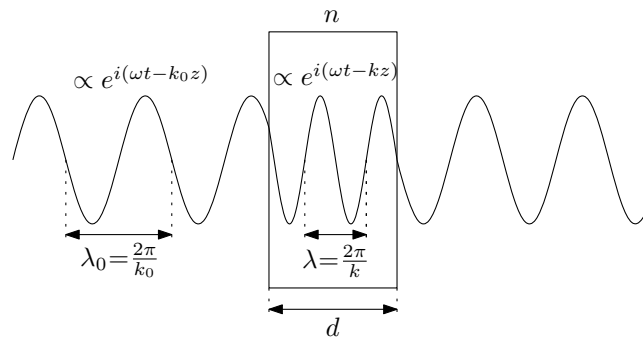
$$I_{\text{out}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle |\vec{E}_{\text{out}}|^2 \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos^2 \theta \langle E_0^2 \cos^2 \omega t \rangle = I_{\text{in}} \cos^2 \theta. \quad (7.21)$$

Tento vztah mezi intenzitami se nazývá *Malusův zákon*:

$$\boxed{I_{\text{out}} = I_{\text{in}} \cos^2 \theta.} \quad (7.22)$$

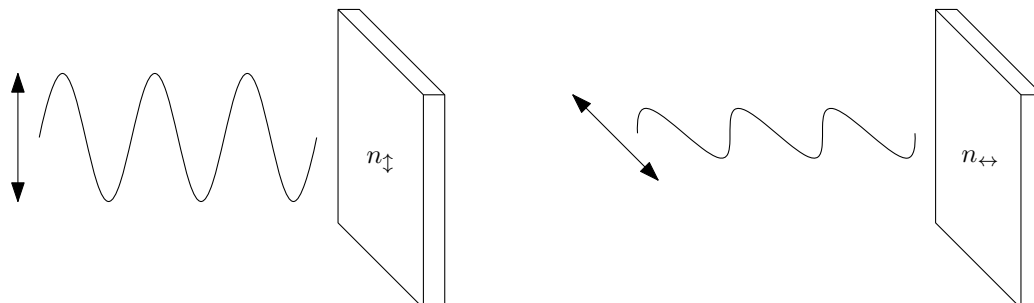
### 7.1.2 Vlnová destička

Přejdeme nyní k druhému optickému elementu a tím je *vlnová destička*. Vlnová destička umožňuje měnit fázový rozdíl  $\varphi_1 - \varphi_2$  mezi jednotlivými kolmými složkami elektrického pole. Jak toho docílí? Podívejme se nejprve, o kolik se změní vlastní fáze vlny po průchodu materiálem tloušťky  $d$  s indexem lomu  $n$ . Schematicky je situace znázorněna na obrázku 7.9. V materiálu prochází vlna tvaru  $e^{i(\omega t - kz)}$ , kde  $k$  je vlnové číslo dané disperzním vztahem  $\omega = \frac{c}{n}k$ . Za destičkou je fáze posunutá o  $-kd$  než před destičkou. Oběma kolmým složkám elektrického pole se ale fáze změní stejně a ke změně rozdílu fází tedy nedochází...



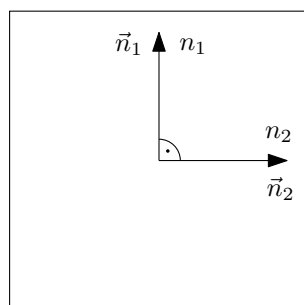
Obrázek 7.9: Průchod vlny látkou o indexu lomu  $n$ . V materiálu prochází vlna tvaru  $e^{i(\omega t - kz)}$ , kde  $k$  je vlnové číslo dané disperzním vztahem  $\omega = \frac{c}{n}k$ .

Abychom toho docílili, potřebujeme materiál, tzv. *dvojlomný krystal*, který se pro vlny polarizované v různém směru chová jako materiál o různém indexu lomu, viz schematický obrázek 7.10. Takovéto chování vzniká díky anizotropii dané látky. Odezva látky na procházející vlnu elektrického pole je různá v závislosti na orientaci vektoru elektrického pole (v závislosti na polarizaci světla).



Obrázek 7.10: Dvojlomný krystal. Pro elektrické pole orientované vertikálním směrem se chová jako materiál o indexu lomu  $n_{\uparrow}$ , pro elektrické pole orientované kolmo na vertikální pole, tzn. zde kmitající v horizontálním směru, se chová jako materiál o indexu lomu  $n_{\leftrightarrow}$ .

Vlnová destička z dvojlomného krystalu je parametrizovaná dvěma na sebe kolnými osami,  $\vec{n}_1$  a  $\vec{n}_2$ , k nimž jsou příslušné různé indexy lomu  $n_1$  a  $n_2$  (pozor, nejedná se o velikosti vektorů  $\vec{n}_1$  a  $\vec{n}_2$ , ty jsou jednotkové,  $|\vec{n}_1| = |\vec{n}_2| = 1$ ) a svojí tloušťkou  $d$ , resp. změnou fázového rozdílu  $\varphi_1 - \varphi_2$  o  $\Delta\varphi$ .



Obrázek 7.11: Značení os vlnové destičky z dvojlomného krystalu. Kolmé osy destičky jsou ve směru  $\vec{n}_1$  a  $\vec{n}_2$  a k nim příslušné indexy lomu  $n_1$  a  $n_2$ .

Jak závisí velikost změny fázového posunu  $\Delta\varphi$  na velikostech  $n_1$ ,  $n_2$  a  $d$ ? Jak jsme si již řekli, fáze před a za destičkou se liší obecně o  $-kd$ , zde pro jednotlivé složky elektrického pole  $-k_1d$  a  $-k_2d$ . Je-li tedy elektrické pole na začátku destičky tvaru

$$\vec{E}_{\text{in}}(t) = E_1 \vec{n}_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + E_2 \vec{n}_2 \cos(\omega t + \varphi_2), \quad (7.23)$$

bude pole na konci destičky

$$\vec{E}_{\text{out}}(t) = E_1 \vec{n}_1 \cos(\omega t + \varphi_1 - k_1 d) + E_2 \vec{n}_2 \cos(\omega t + \varphi_2 - k_2 d). \quad (7.24)$$

Rozdíl fází se průchodem destičkou změnil z  $\varphi_1 - \varphi_2$  na  $\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta\varphi$ , kde  $\Delta\varphi$  je

$$\Delta\varphi = (k_2 - k_1)d = \frac{\omega}{c}(n_2 - n_1)d. \quad (7.25)$$

Využijeme-li disperzní vztah ve vakuu  $\omega = ck_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$ , můžeme fázový posun  $\Delta\varphi$  zapsat pomocí vlnové délky  $\lambda_0$  ve vakuu jako

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_2 - n_1)d. \quad (7.26)$$

Tento fázový posun  $\Delta\varphi$  přičítáme k části vlny odpovídající indexu lomu  $n_1$ . Toto můžeme snadno vidět, přičteme-li do fází obou vln ve výrazu (7.24) hodnotu  $k_2d$  (což je operace neměnící polarizační stav), pak dostaneme

$$\vec{E}_{\text{out}}(t) = E_1 \vec{n}_1 \cos(\omega t + \varphi_1 + \underbrace{(k_2 - k_1)d}_{\Delta\varphi}) + E_2 \vec{n}_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (7.27)$$

Pokud uvažujeme  $\Delta\varphi$  pouze kladné, což vyžaduje, abychom si označili indexy lomu tak, že  $n_1 < n_2$ , dostaneme praktické pravidlo: kladný fázový posun  $\Delta\varphi$  přičítáme k té složce elektrické vlny, která odpovídá menšímu indexu lomu.

Destička způsobující změnu fázového rozdílu o  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$  se nazývá *čtvrtvlnová destička*, pro fázový posun  $\Delta\varphi = \pi$  se nazývá *půlvlnová destička*.

Jak zapíšeme akci vlnové destičky s fázovým posunem  $\Delta\varphi$  v komplexním zápisu? Resp. jak definujeme matici  $\mathbb{D}_{\Delta\varphi}$  transformující komplexní vektor  $\hat{\vec{E}}_{\text{in}} \in \mathbb{C}^2$  na vektor  $\hat{\vec{E}}_{\text{out}} \in \mathbb{C}^2$  dle předpisu

$$\hat{\vec{E}}_{\text{out}} = \mathbb{D}_{\Delta\varphi} \hat{\vec{E}}_{\text{in}}? \quad (7.28)$$

Nejprve potřebujeme vlnu elektrického pole rozepsat do směrů os vlnové destičky  $\vec{n}_1$  a  $\vec{n}_2$ . Toto můžeme učinit pomocí projektorů na tyto osy,  $\mathbb{P}_{\vec{n}_1}$  a  $\mathbb{P}_{\vec{n}_2}$ . Pro na sebe kolmé jednotkové vektory  $\vec{n}_1$  a  $\vec{n}_2$  platí  $\mathbb{P}_{\vec{n}_1} + \mathbb{P}_{\vec{n}_2} = \mathbb{I}$ , můžeme tedy napsat

$$\hat{\vec{E}}_{\text{in}} = \mathbb{P}_{\vec{n}_1} \hat{\vec{E}}_{\text{in}} + \mathbb{P}_{\vec{n}_2} \hat{\vec{E}}_{\text{in}}. \quad (7.29)$$

Výstupní pole získáme tak, že k části, která odpovídá menšímu indexu lomu (uvažujeme  $n_1 < n_2$ ), přičteme fázový posun  $\Delta\varphi$ :

$$\hat{\vec{E}}_{\text{out}} = e^{i\Delta\varphi} \mathbb{P}_{\vec{n}_1} \hat{\vec{E}}_{\text{in}} + \mathbb{P}_{\vec{n}_2} \hat{\vec{E}}_{\text{in}} = (e^{i\Delta\varphi} \mathbb{P}_{\vec{n}_1} + \mathbb{P}_{\vec{n}_2}) \hat{\vec{E}}_{\text{in}}. \quad (7.30)$$

Porovnáním pravé strany (7.30) a definice matice  $\mathbb{D}_{\Delta\varphi}$  (7.28) vidíme, že platí

$$\mathbb{D}_{\Delta\varphi} = e^{i\Delta\varphi} \mathbb{P}_{\vec{n}_1} + \mathbb{P}_{\vec{n}_2}. \quad (7.31)$$

Uvažujeme-li například pro jednoduchost  $\vec{n}_1 = \vec{x}$  a  $\vec{n}_2 = \vec{y}$  (a použijeme definici projektorů  $\mathbb{P}_{\vec{x}}$  a  $\mathbb{P}_{\vec{y}}$  z (7.19)) dostaneme

$$\mathbb{D}_{\Delta\varphi} = e^{i\Delta\varphi} \mathbb{P}_{\vec{x}} + \mathbb{P}_{\vec{y}} = \begin{pmatrix} e^{i\Delta\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.32)$$

## 7.2 Měření polarizace

Úhlová frekvence  $\omega$  elektromagnetické vlny je obvykle příliš velká, než abychom mohli měřit přímo samotný průběh elektrického pole (pro oblast viditelného světla se jedná o frekvence v řádu stovek THz). Jsme tedy nevyhnutelně odsouzeni k měření pouze časových středních hodnot jistých veličin. Pro určení polarizačního stavu (a celkové intenzity) popsaného vztahem (7.6) potřebujeme určit hodnoty amplitud v jednotlivých směrech,  $E_{x0}$  a  $E_{y0}$ , a dále hodnotu fázového rozdílu  $\varphi_1 - \varphi_2$ . Ukažme, že tyto veličiny můžeme určit měřením následujících intenzit:

$$I_x = \langle E_x^2 \rangle, \quad I_y = \langle E_y^2 \rangle, \quad I_{xy} = \langle E_x E_y \rangle, \quad I_{\overline{xy}} = \langle E_x(\omega t - \frac{\pi}{2}) E_y \rangle, \quad (7.33)$$

kde pod výrazem  $E_x(\omega t - \frac{\pi}{2})$  rozumíme, že ve složce  $E_x$  posuneme fázi o  $-\frac{\pi}{2}$ . Pokud tyto intenzity vypočítáme dosazením z obecně elipticky polarizovaného světla (7.6) dostaneme

$$\begin{aligned}
I_x &= \langle E_x^2 \rangle = E_{x0}^2 \langle \cos^2(\omega t + \varphi_1) \rangle = \frac{1}{2} E_{x0}^2, \\
I_y &= \langle E_y^2 \rangle = E_{y0}^2 \langle \cos^2(\omega t + \varphi_2) \rangle = \frac{1}{2} E_{y0}^2, \\
I_{xy} &= \langle E_x E_y \rangle = E_{x0} E_{y0} \langle \underbrace{\cos(\omega t + \varphi_1) \cos(\omega t + \varphi_2)}_{\frac{1}{2} (\cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2))} \rangle = \frac{1}{2} E_{x0} E_{y0} \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \\
I_{\overline{xy}} &= \langle E_x(\omega t - \frac{\pi}{2}) E_y \rangle = E_{x0} E_{y0} \langle \underbrace{\cos(\omega t + \varphi_1 - \frac{\pi}{2}) \cos(\omega t + \varphi_2)}_{\frac{1}{2} (\sin(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2))} \rangle = \frac{1}{2} E_{x0} E_{y0} \sin(\varphi_1 - \varphi_2).
\end{aligned} \tag{7.34}$$

Z intenzit  $I_x$  a  $I_y$  dokážeme vypočítat amplitudy  $E_{x0}$  a  $E_{y0}$ . Potom intenzity  $I_{xy}$  a  $I_{\overline{xy}}$  udávají  $\sin$  a  $\cos$  fázového rozdílu, což ho jednoznačně určuje (na intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$ ).

Jak tyto čtyři intenzity dokážeme prakticky změřit? Intenzity  $I_x$ , resp.  $I_y$ , změříme tak, že dáme světlu do cesty polarizátor s osou propustnosti  $\vec{x}$ , resp.  $\vec{y}$ , tyto propustí jen složky  $E_x$ , resp.  $E_y$ . Intenzitu  $I_{xy}$  změříme tak, že dáme světlu do cesty lineární polarizátor s osou propustnosti  $\frac{\vec{x} + \vec{y}}{\sqrt{2}}$ . Výstupní intenzita po průchodu tímto polarizátorem pak vyjde<sup>4</sup>

$$I_{\text{out}} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + I_{xy}. \tag{7.35}$$

Poslední intenzitu  $I_{\overline{xy}}$  určíme tak, že nejprve dáme světlu do cesty čtvrtvlnovou destičku s osou  $\vec{n}_1 = \vec{y}$  (osa příslušející menšímu indexu lomu) – tato přičte fázový posun  $\frac{\pi}{2}$  do složky  $E_y$ , což je ekvivalentní odečtení fáze  $\frac{\pi}{2}$  ve složce  $E_x$  – a následně opět polarizátor s osou propustnosti  $\frac{\vec{x} + \vec{y}}{\sqrt{2}}$ . V této konfiguraci je výstupní intenzita dána vztahem<sup>5</sup>

$$I_{\overline{\text{out}}} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + I_{\overline{xy}}. \tag{7.36}$$

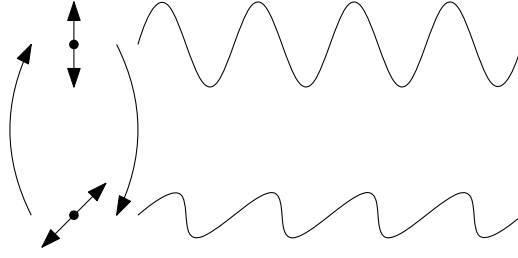
Tedy intenzity  $I_x$  a  $I_y$  změříme přímo vložením příslušně orientovaného polarizátoru, intenzity  $I_{xy}$  a  $I_{\overline{xy}}$  dopočítáme z naměřených intenzit  $I_{\text{out}}$  a  $I_{\overline{\text{out}}}$ .

### 7.3 Nepolarizované světlo

Náš popis zatím obsahuje pouze pojem (úplně, dokonale) polarizovaného světla. Pro jakékoliv hodnoty parametrů  $E_{x0}$ ,  $E_{y0}$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  ve vlně tvaru (7.4), resp. (7.6), máme (úplně, dokonale) polarizované světlo. Jak tedy popíšeme nepolarizované světlo? Co to vlastně je? Zhruba řečeno je nepolarizované světlo takové světlo, kterému se v čase náhodně mění jeho polarizace. Představme si atom (elektron v atomu), který svým kmitáním vyzařuje lineárně polarizované světlo. Po čase do atomu narazí jiný atom a způsobí, že začne kmitat v jiném směru a tedy změní rovinu polarizace vyzařovaného světla. Tento proces se v látce neustále opakuje a tedy se neustále náhodně mění rovina polarizace vyzařovaného světla. Viz schematický obrázek 7.12. Nyní se tuto hrubou představu pokusíme pečlivěji definovat a kvantifikovat.

<sup>4</sup>Viz příklad 9.4 na cvičení.

<sup>5</sup>Zcela analogicky jako předchozí vztah.



Obrázek 7.12: Kmitající atom vyzářující lineárně polarizované světlo. Vlivem vnějších působení (nárazy ostatních atomů) mění náhodně směr svého kmitání vedoucí ke změně roviny polarizace vyzářovaného světla.

Nejprve uveďme tři důležité časové škály, které budeme při studiu nepolarizovaného světla potřebovat. První škálou je perioda  $T$  samotného elektromagnetického vlnění. Pro viditelné světlo je přibližně  $T \approx 10^{-14}$  s.

Druhou škálou je tzv. *koherenční čas*  $t_{\text{koh}}$ . Tento čas představuje dobu, po kterou se zachovává daná polarizace, tzn. v úvodním ilustračním příkladě doba, po kterou atom nerušeně kmitá. Typicky  $t_{\text{koh}} \approx 10^{-9} - 10^{-8}$  s. Tento čas se také dá definovat pomocí pojmu *časové koherence*. Řekneme, že pole v daném místě  $\vec{E}(t)$  v časech  $t_1$  a  $t_2$  jsou časově koherentní, jestliže ze znalosti pole v okolí času  $t_1$  dokážeme určit pole v okolí času  $t_2$  (a naopak). Koherenční doba  $t_{\text{koh}}$  je tedy maximální vzdálenost časů  $|t_1 - t_2|$ , kdy jsou pole ještě vzájemně koherentní. Pokud nelze předpovědět pole v okolí  $t_2$  ze znalosti pole v okolí  $t_1$ , říkáme, že jsou pole nekoherentní.

A poslední škálou je rozlišovací doba  $t_{\text{roz}}$  přístroje, kterým měříme polarizační stav. Přístroj měří intenzitu dopadajícího světla, která je daná středováním přes rozlišovací dobu,  $I = \langle \vec{E}^2 \rangle_{t_{\text{roz}}}$ . Nyní rozlišme dva případy. Nejprve pokud  $t_{\text{koh}} \gg t_{\text{roz}}$  – v takovém případě budeme hovořit o rychlém přístroji. V tomto případě je přístroj schopen sledovat změny polarizace a budeme prostě měřit úplně polarizované světlo, kterému se polarizace mění s periodou  $t_{\text{koh}}$ .

V případě, že platí  $t_{\text{koh}} \ll t_{\text{roz}}$  – hovoříme o pomalém přístroji, – přístroj nedokáže sledovat rychlé náhodné změny polarizace a v takovém případě budeme hovořit o světle dopadajícím na přístroj jako o nepolarizovaném světle (přesněji řečeno o částečně polarizovaném nebo nepolarizovaném světle). Podívejme se nyní na toto měření intenzity pomalým přístrojem podrobněji. Ukážeme, že měřením souboru intenzit  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_{xy}$  a  $I_{\overline{xy}}$  dokážeme rozlišit polarizované světlo od nepolarizovaného (či částečně polarizovaného).

Zobecníme zápis úplně polarizovaného světla (7.6) tak, že parametry  $E_{x0}$ ,  $E_{y0}$ ,  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  mohou být proměnné v čase:

$$\vec{E}(t) = E_{x0}(t) \vec{x} \cos(\omega t + \varphi_1(t)) + E_{y0}(t) \vec{y} \cos(\omega t + \varphi_2(t)). \quad (7.37)$$

Funkce  $E_{x0}(t)$ ,  $E_{y0}(t)$ ,  $\varphi_1(t)$  a  $\varphi_2(t)$  se mění na škále koherenčního času  $t_{\text{koh}}$ . Můžeme si představovat, že se velmi pomalu mění tak, že po dobu  $t_{\text{koh}}$  zůstávají téměř konstantní. Zároveň díky nerovnosti  $T \ll t_{\text{koh}}$  je změna těchto funkcí mnohem pomalejší než změna fáze daná členem  $\omega t$ . Výsledné vztahy pro měření intenzity  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_{xy}$  a  $I_{\overline{xy}}$  (7.34) vznikly středováním přes jednu periodu harmonických vln (7.6) tvořící elektrické pole ve světle. Jestliže nyní provedeme středování přes jednu periodu  $T$  pro elektrické pole (7.37), můžeme díky vztahu  $T \ll t_{\text{koh}}$  považovat funkce  $E_{x0}(t)$ ,  $E_{y0}(t)$ ,  $\varphi_1(t)$  a  $\varphi_2(t)$  za téměř konstantní a výsledkem tohoto středování

budou časově proměnné intenzity,

$$\begin{aligned}
I_x(t) &= \frac{1}{2} E_{x0}^2(t), \\
I_y(t) &= \frac{1}{2} E_{y0}^2(t), \\
I_{xy}(t) &= \frac{1}{2} E_{x0}(t) E_{y0}(t) \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)), \\
I_{\overline{xy}}(t) &= \frac{1}{2} E_{x0}(t) E_{y0}(t) \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)),
\end{aligned} \tag{7.38}$$

které se mění na škále  $t_{\text{koh}}$ . Pomalým přístrojem s rozlišovací dobou  $t_{\text{roz}}$  pak naměříme takové intenzity, které vzniknou dodatečným středováním přes rozlišovací dobu  $t_{\text{roz}}$ :

$$I_x = \langle I_x(t) \rangle_{t_{\text{roz}}}, \quad I_y = \langle I_y(t) \rangle_{t_{\text{roz}}}, \quad I_{xy} = \langle I_{xy}(t) \rangle_{t_{\text{roz}}}, \quad I_{\overline{xy}} = \langle I_{\overline{xy}}(t) \rangle_{t_{\text{roz}}}. \tag{7.39}$$

Podívejme se, kolik tyto intenzity vyjdou pro model nepolarizovaného světla, který jsme nastínili v úvodu – tedy pro lineárně polarizované světlo, kterému se náhodně mění rovina polarizace. Elektrické pole bude tvaru

$$\vec{E}(t) = E_0 \vec{n}(t) \cos(\omega t + \varphi), \tag{7.40}$$

kde směrový vektor  $\vec{n}(t)$  zapíšeme pomocí časově proměnného úhlu  $\theta(t)$  jako

$$\vec{n}(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)). \tag{7.41}$$

Funkce úhlu  $\theta(t)$  se mění na škále  $t_{\text{koh}}$  a uvažujeme, že všechny hodnoty úhlů  $\langle 0, 2\pi \rangle$  jsou rovnoměrně zastoupeny. Intenzity (7.38) pro světlo tvaru (7.40) jsou tvaru

$$\begin{aligned}
I_x(t) &= \frac{1}{2} E_0^2 \cos^2 \theta(t), \\
I_y(t) &= \frac{1}{2} E_0^2 \sin^2 \theta(t), \\
I_{xy}(t) &= \frac{1}{2} E_0^2 \cos \theta(t) \sin \theta(t) \cos(\varphi - \varphi) = \frac{1}{4} E_0^2 \sin 2\theta(t), \\
I_{\overline{xy}}(t) &= \frac{1}{2} E_0^2 \cos \theta(t) \sin \theta(t) \sin(\varphi - \varphi) = 0.
\end{aligned} \tag{7.42}$$

Středování přes rozlišovací dobu přístroje  $t_{\text{roz}} \gg t_{\text{koh}}$  vede na

$$I_x = \frac{1}{4} E_0^2, \quad I_y = \frac{1}{4} E_0^2, \quad I_{xy} = 0, \quad I_{\overline{xy}} = 0, \tag{7.43}$$

střední hodnoty  $\langle \cos^2 \theta(t) \rangle_{t_{\text{roz}}} = \langle \sin^2 \theta(t) \rangle_{t_{\text{roz}}} = \frac{1}{2}$  a  $\langle \sin 2\theta(t) \rangle_{t_{\text{roz}}} = 0$  vyjdou úplně stejně jako standardní časové střední hodnoty goniometrických funkcí přes jednu periodu, jelikož po dobu měření  $t_{\text{roz}}$  se úhel  $\theta$  mnohokrát změní a rovnoměrně pokryje interval  $\langle 0, 2\pi \rangle$ . Intenzity  $I_{xy}$  a  $I_{\overline{xy}}$  vyšly obě nulové, což pro úplně polarizované světlo není možné (sin a cos v (7.34) nemohou být současně nula)! Vidíme tedy, že nepolarizované světlo dokážeme měřením odlišit od světla polarizovaného.

Obecně v nepolarizovaném světle dané intenzity máme podmínku na funkce  $E_{x0}(t)$ ,  $E_{y0}(t)$ ,  $\varphi_1(t)$  a  $\varphi_2(t)$  plynoucí právě z konstantnosti celkové intenzity:

$$I_0 = \langle \vec{E}^2 \rangle = \langle E_x^2 + E_y^2 \rangle = I_x + I_y = \text{konst.} \tag{7.44}$$



V nepolarizovaném světle se obecně hodnoty funkcí  $E_{x0}(t)$ ,  $E_{y0}(t)$ ,  $\varphi_1(t)$  a  $\varphi_2(t)$  mění náhodně a rovnoměrně nabývají všech přípustných hodnot. Z této podmínky jednak plyne

$$I_x = I_y \quad (7.45)$$

(nesmí záležet na přeznačení os  $x$  a  $y$ ). A dále pro náhodné úhly  $\varphi_1(t)$  a  $\varphi_2(t)$  platí

$$\langle \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \rangle_{t_{\text{roz}}} = \langle \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \rangle_{t_{\text{roz}}} = 0. \quad (7.46)$$

Ze vztahů (7.44), (7.45) a (7.46) pro nepolarizované světlo plyne

$$I_x = \frac{1}{2}I_0, \quad I_y = \frac{1}{2}I_0, \quad I_{xy} = 0, \quad I_{\overline{xy}} = 0. \quad (7.47)$$

Můžeme dále uvažovat superpozici úplně polarizovaného světla a světla nepolarizovaného. Pak dostáváme světlo *částečně polarizované*.

Polarizační stav a stupeň polarizace popisujeme tzv. *Stokesovými parametry*, které jsou dané vztahy

$$P_1 = \frac{I_x - I_y}{I_x + I_y}, \quad P_2 = \frac{2I_{xy}}{I_x + I_y}, \quad P_3 = \frac{2I_{\overline{xy}}}{I_x + I_y}. \quad (7.48)$$

Obecně platí (zde bez důkazu)

$$P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 \leq 1. \quad (7.49)$$

Pro úplně polarizované světlo pak  $P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = 1$  (tuto část lze snadno ukázat dosazením do (7.48) z (7.34)). Pro nepolarizované světlo dostaneme  $P_1 = P_2 = P_3 = 0$  (dosazením do (7.48) z (7.47)). Dále definujeme *stupeň polarizace* jako velikost Stokesova vektoru  $\vec{P} = (P_1, P_2, P_3)$ , tj.  $|\vec{P}| = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}$ . V případě, že platí  $0 < |\vec{P}| < 1$  nazveme světlo *částečně polarizované*. (Pro úplně polarizované světlo máme  $|\vec{P}| = 1$  a pro nepolarizované světlo  $|\vec{P}| = 0$ .)

## 7.4 Úloha odrazu EM vlny na rovinném rozhraní

V této kapitole se budeme zabývat problémem průchodu (lomu) a odrazu elektromagnetických vln na rovinném rozhraní dvou nevodivých prostředí. Z Maxwellových rovnic odvodíme zákony odrazu a lomu, nalezneme amplitudové koeficienty průchodu a odrazu v závislosti na úhlu dopadu a polarizaci dopadající elektromagnetické vlny. Předpovíme existenci význačného úhlu, při kterém se jistá polarizace neodráží a umožní nám tedy světlo polarizovat odrazem. Při řešení využijeme podmínky napojení na rozhraní nevodivých prostředí, které jsme si odvodili v kapitole 6.6.

Nechme na rovinné rozhraní dopadat rovinnou postupnou harmonickou elektromagnetickou vlnu. Jako *ansatz* vezměme, že odražená a prošlá vlna budou také rovinné vlny, jejichž elektrické složky tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$\vec{E}_d = \vec{E}_{d0} e^{i(\omega t - \vec{k}_d \cdot \vec{r})}, \quad \vec{E}_r = \vec{E}_{r0} e^{i(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}, \quad \vec{E}_t = \vec{E}_{t0} e^{i(\omega_t t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})}, \quad (7.50)$$

kde  $\vec{E}_d$ ,  $\vec{E}_r$  a  $\vec{E}_t$  označují po řadě dopadající, odraženou a prošlou vlnu. Konstantní amplitudové vektory  $\vec{E}_{d0}$ ,  $\vec{E}_{r0}$  a  $\vec{E}_{t0}$  zatím necháváme bez bližšího určení. Magnetická část elektromagnetických vln je jednoznačně daná vztahem

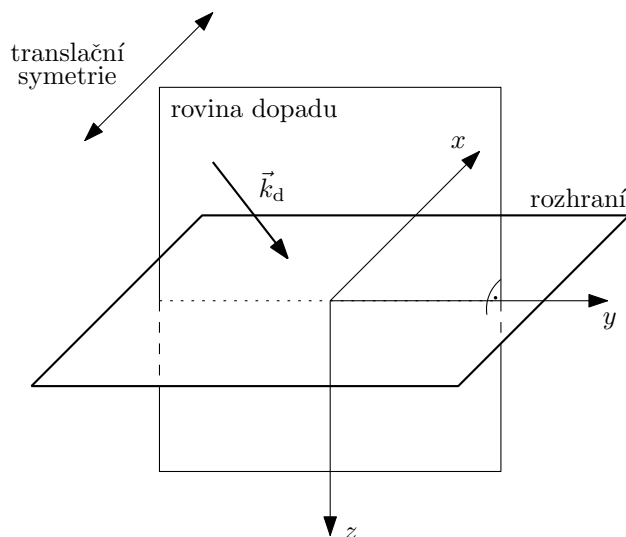
$$\vec{B} = \frac{1}{v} \vec{n} \times \vec{E} = \frac{1}{v} \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} \quad (7.51)$$

(pro příslušné hodnoty  $\omega$ ,  $v$  a  $\vec{k} = k\vec{n}$ ). Vlnové vektory  $\vec{k}_d$ ,  $\vec{k}_r$  a  $\vec{k}_t$  udávají směr postupu vlny,  $\vec{k} = k\vec{n}$ , a vlnovou délku  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ . Vztahy mezi úhlovými rychlostmi a vlnovými čísly udávají příslušné disperzní vztahy

$$\omega = \frac{c}{n_1} |\vec{k}_d| = \frac{k_d}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}, \quad \omega_r = \frac{c}{n_1} |\vec{k}_r| = \frac{k_r}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}, \quad \omega_t = \frac{c}{n_2} |\vec{k}_t| = \frac{k_t}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}, \quad (7.52)$$

indexy lomu jsou dané vlastnostmi prostředí jako  $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$ , rychlost světla je  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ .

*Rovinu dopadu* definujeme jako rovinu kolmou na rovinné rozhraní a obsahující vlnový vektor dopadající vlny  $\vec{k}_d$ , viz obrázek 7.13. Zavedeme kartézské souřadnice tak, že rovina rozhraní je dána jako  $z = 0$  a rovina dopadu je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou  $yz$ . Celá úloha je pak translačně symetrická podél osy  $x$ .

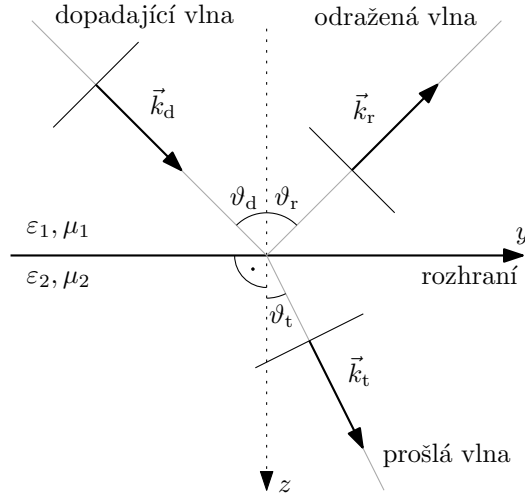


Obrázek 7.13: Rovina rozhraní a na ní kolmá rovina dopadu obsahující vlnový vektor dopadající vlny  $\vec{k}_d$ . Kartézské souřadnice jsou zavedené tak, že rovina rozhraní je v  $z = 0$  a rovina dopadu odpovídá rovinám rovnoběžným s rovinou  $yz$ .

Translační symetrie podél osy  $x$  znamená, že vlny (7.50) nesmí záviset na proměnné  $x$ . To znamená, že vlnové vektory musí mít nulovou složku  $k_x$ ,

$$\vec{k} = (0, k_y, k_z) \quad (7.53)$$

(u dopadající vlny je toto tvrzení triviální, jelikož jsme zavedli souřadnice tak, aby  $k_{dx} = 0$ , netriviální je tento fakt pro odraženou a prošlou vlnu). Celý problém průchodu a odrazu elektromagnetické vlny je tedy rovinný. Dále zavedeme po řadě úhly dopadu  $\vartheta_d$ , odrazu  $\vartheta_r$  a průchodu (lomu)  $\vartheta_t$  jako odklony směrů postupu příslušných vln od kolmice k rozhraní, viz obrázek 7.14.



Obrázek 7.14: Elektromagnetická vlna dopadající na rozhraní ve směru vlnového vektoru  $\vec{k}_d$  s odklonem od kolmice  $\vartheta_d$ . Pro odraženou a prošlou vlnu úhly odklonů od kolmice označíme  $\vartheta_r$  a  $\vartheta_t$ .

Pomocí těchto úhlů můžeme vyjádřit jednotlivé složky vlnových vektorů  $\vec{k}_d$ ,  $\vec{k}_r$  a  $\vec{k}_t$  následovně:

$$\vec{k}_d = (0, k_d \sin \vartheta_d, k_d \cos \vartheta_d), \quad \vec{k}_r = (0, k_r \sin \vartheta_r, -k_r \cos \vartheta_r), \quad \vec{k}_t = (0, k_t \sin \vartheta_t, k_t \cos \vartheta_t). \quad (7.54)$$

#### 7.4.1 Zákon odrazu a lomu, kritický úhel a totální odraz

Začneme s první podmínkou napojení a to podmínkou spojitosti tečných složek elektrického pole na rozhraní,

$$\vec{E}_{1\parallel} = \vec{E}_{2\parallel}, \quad \vec{E}_{d\parallel} + \vec{E}_{r\parallel} = \vec{E}_{t\parallel}, \quad (7.55)$$

elektrické pole v prvním prostředí  $\vec{E}_1$  je součtem dopadající a odražené vlny,  $\vec{E}_d + \vec{E}_r$ , a pole v druhém prostředí  $\vec{E}_2$  je dané procházející vlnou  $\vec{E}_t$ . Po dosazení z ansatzu (7.50) dostaneme

$$\vec{E}_{d0\parallel} e^{i(\omega t - k_{dy}y)} + \vec{E}_{r0\parallel} e^{i(\omega_r t - k_{ry}y)} = \vec{E}_{t0\parallel} e^{i(\omega_t t - k_{ty}y)}, \quad (7.56)$$

kde jsme využili tvaru vlnových vektorů (7.53) a faktu, že na rozhraní je  $z = 0$ . Podmínka (7.56) je lineární kombinací exponenciál (resp. sada několika lineárních kombinací). Pro obecně nenulová elektrická pole dostáváme, že exponenciály musí být po dvojicích lineárně závislé, to je ovšem možné jedině tak, že jsou si rovny<sup>6</sup>:

$$e^{i(\omega t - k_{dy}y)} = e^{i(\omega_r t - k_{ry}y)} = e^{i(\omega_t t - k_{ty}y)}, \quad \forall y, t \in \mathbb{R}. \quad (7.57)$$

Pokud si mají být tyto funkce rovny, musí si být rovny parametry v nich:

$$\omega = \omega_r = \omega_t, \quad k_{dy} = k_{ry} = k_{ty}. \quad (7.58)$$

Tedy úhlové frekvence jednotlivých vln musí být stejné (odteď budeme psát pouze  $\omega$ ) a tečné složky vlnových vektorů se musí rovnat (zde je tečnou složkou složka  $y$ ):

$$\vec{k}_{d\parallel} = \vec{k}_{r\parallel} = \vec{k}_{t\parallel}. \quad (7.59)$$

<sup>6</sup>Pokud by byly lineárně nezávislé, musely by být amplitudy elektrických polí nulové. Exponenciální funkce s různými parametry vždy tvoří lineárně nezávislý soubor. Pokud si chceme ponechat volnost v amplitudách elektrických polí (tedy nenechat si vnútit jejich nulovost vlivem lineární nezávislosti), musíme všechny tři exponenciály volit identicky.

Dosadíme-li nyní vyjádření tečné složky vlnových vektorů  $k_y$  z (7.54) dostaneme

$$k_d \sin \vartheta_d = k_r \sin \vartheta_r = k_t \sin \vartheta_t \quad (7.60)$$

a dále nahradíme-li velikosti vlnových vektorů z disperzních vztahů (7.52) (a vykrátíme společný faktor  $\frac{\omega}{c}$ ):

$$n_1 \sin \vartheta_d = n_1 \sin \vartheta_r = n_2 \sin \vartheta_t. \quad (7.61)$$

Z levé rovnosti plyne *zákon odrazu* – úhel dopadu se rovná úhlu odrazu, pravá rovnost představuje *Snellův zákon lomu*:

$$\boxed{\vartheta_d = \vartheta_r, \quad n_1 \sin \vartheta_d = n_2 \sin \vartheta_t.} \quad (7.62)$$

V dalším budeme značit úhel dopadu a odrazu  $\vartheta_1$ , úhel lomu  $\vartheta_2$ , tzn. Snellův zákon bude tvaru

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2. \quad (7.63)$$

Pro  $n_1 > n_2$ , tedy při tzv. průchodu z opticky hustšího do opticky řidšího prostředí, plyne ze Snellova zákona  $\vartheta_2 > \vartheta_1$ . Ovšem musí platit  $\vartheta_2 \leq \frac{\pi}{2}$ . Definujeme tzv. *kritický úhel*  $\vartheta_C$  jako takový úhel  $\vartheta_1$ , při kterém nastává  $\vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$ . Ze Snellova zákona pro hodnotu kritického úhlu plyne

$$\boxed{\sin \vartheta_C = \frac{n_2}{n_1}.} \quad (7.64)$$

Pro úhel dopadu  $\vartheta_1 > \vartheta_C$  se prošlá vlna „nemá kam zalomit“ a dochází k tzv. *totálnímu odrazu*, kdy do druhého prostředí se vlna nešíří a celá se odrazí. V tomto případě se druhé prostředí chová jako reaktivní prostředí. Podívejme se na tento fakt detailněji. Uvažujme disperzní vztah druhého prostředí pro prošlou vlnu

$$\omega^2 = \frac{c^2}{n_2^2} |\vec{k}_t|^2 = \frac{c^2}{n_2^2} (k_{ty}^2 + k_{tz}^2). \quad (7.65)$$

Vyjádríme složku vlnového čísla  $\vec{k}_t$  ve směru osy  $z$ , udávající, jak moc vlna postupuje ve směru osy  $z$ ,

$$k_{tz}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 - k_{ty}^2. \quad (7.66)$$

Dále můžeme z podmínky (7.58) položit  $k_{ty} = k_{dy}$ , z vyjádření (7.54) máme  $k_{dy} = k_d \sin \vartheta_1$  a konečně  $k_d$  můžeme vyjádřit z disperzního vztahu v prvním prostředí (7.52),  $k_d = \frac{\omega}{c} n_1$ . Po provedení těchto úprav dostaneme vztah (7.66) pro  $k_{tz}^2$  ve tvaru

$$k_{tz}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \vartheta_1). \quad (7.67)$$

Pro  $\vartheta_1 > \vartheta_C$  nemá disperzní vztah (7.67) řešení pro reálné  $k_{tz}$ . Tzn. skutečně vidíme, že pro  $\vartheta_1 > \vartheta_C$  se druhé prostředí chová jako reaktivní, tzn. nepodporuje šíření elektromagnetické vlny ve směru osy  $z$ . Řešení (7.67) nalezneme pro ansatz  $k_{tz} = -i\kappa$ , po dosazení máme

$$\boxed{\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n_1^2 \sin^2 \vartheta_1 - n_2^2).} \quad (7.68)$$

Tvar elektromagnetické vlny v druhém prostředí získáme po dosazení našeho ansatzu  $\vec{k}_t = (0, k_{ty}, -i\kappa)$  do tvaru prošlé elektrické vlny  $\vec{E}_t$  (7.50):

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{t0} e^{i(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} = \vec{E}_{t0} e^{i(\omega t - k_{ty} y)} e^{-\kappa z}. \quad (7.69)$$

Tento tvar představuje elektrickou vlnu postupující ve směru osy  $y$ , ale exponenciálně tlumenou ve směru osy  $z$ . Můžeme opět definovat hloubku pronikání  $\delta$  jako vzdálenost, na které amplituda vlny poklesne na  $e^{-1}$  původní hodnoty. Zjevně  $\delta = \kappa^{-1}$ .

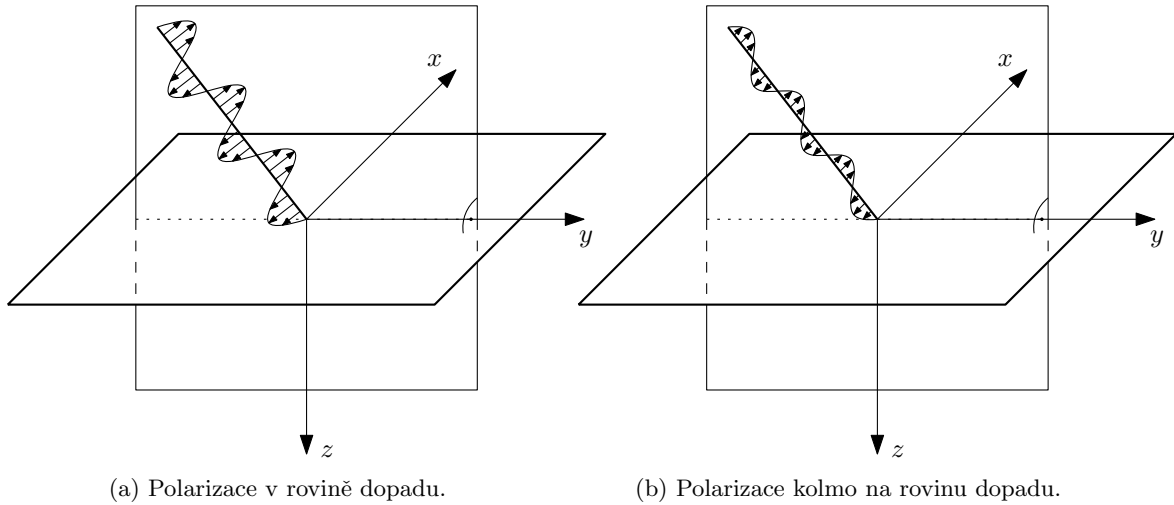
### 7.4.2 Podmínky napojení pro jednotlivé polarizace

Uvažujme nyní všechny podmínky napojení elektrického a magnetického pole na rozhraní,

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{1\parallel} &= \vec{E}_{2\parallel} & \Rightarrow & & (\vec{E}_{d0} + \vec{E}_{r0})_{x,y} &= (\vec{E}_{t0})_{x,y}, \\
 \varepsilon_1 \vec{E}_{1\perp} &= \varepsilon_2 \vec{E}_{2\perp} & \Rightarrow & & \varepsilon_1 (\vec{E}_{d0} + \vec{E}_{r0})_z &= \varepsilon_2 (\vec{E}_{t0})_z, \\
 \vec{B}_{1\perp} &= \vec{B}_{2\perp} & \Rightarrow & & (\vec{B}_{d0} + \vec{B}_{r0})_z &= (\vec{B}_{t0})_z, \\
 \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_{1\parallel} &= \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_{2\parallel} & \Rightarrow & & \frac{1}{\mu_1} (\vec{B}_{d0} + \vec{B}_{r0})_{x,y} &= \frac{1}{\mu_2} (\vec{B}_{t0})_{x,y},
 \end{aligned} \tag{7.70}$$

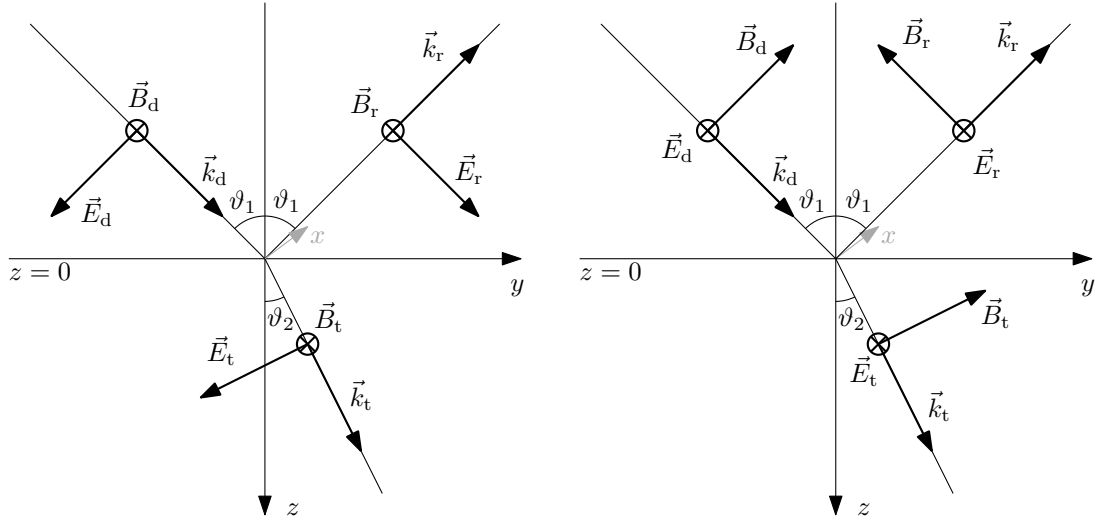
kde na levé straně jsou uvedeny podmínky bez souřadnic, na pravé straně jsme uvedli vztahy pomocí jednotlivých složek daných vektorů. U všech vln jsou exponenciály na rozhraní stejné, můžeme je tedy vykrátit, a v podmínkách napojení zbudou pouze amplitudové vektory. Složky  $x$  a  $y$  jsou složky tečné k rozhraní, složka  $z$  je složkou kolmou k rozhraní (viz zavedení souřadnic na obrázku 7.13). Pro přehlednost zápisu jsme zavedli značení  $(\vec{A} + \vec{B})_x = A_x + B_x$ , atp. pro další složky.

Nyní musíme postup rozdělit na dvě oddělené části podle polarizace dopadající vlny. Uvažujeme lineárně polarizovanou dopadající vlnu a jednu volíme rovinu polarizace tak, že elektrické pole kmitá v rovině dopadu, podruhé volíme rovinu polarizace s vektorem elektrického pole kmitajícím kolmo na rovinu dopadu, viz obrázky 7.15.



Obrázek 7.15: Rozlišíme dva případy podle směru lineární polarizace dopadající vlny.

Uvažujme ansatz, že polarizace se v odražené a prošlé vlně zachová – to odpovídá představě, že dopadající vlna na rozhraní rozkmitává náboje ve směru své polarizace, tyto náboje pak vyzařují vlny se stejnou polarizací. Nyní můžeme zavést kladné směry elektrického a magnetického pole v jednotlivých elektromagnetických vlnách. Chceme, aby trojice vektorů  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  a  $\vec{k}$  tvořila pravotočivou soustavu vektorů. Vlnové vektory  $\vec{k}$  jsou dané, směry vektorů elektrického pole jsou omezené volbou polarizace v rovině dopadu nebo kolmo na rovinu dopadu. Zvolme tedy kladné směry například jako na obrázcích 7.16.



(a) Příklad polarizace v rovině dopadu. Směry magnetického pole  $\vec{B}$  volíme tak, aby směřovaly v kladném směru osy  $x$ . Směry elektrického pole  $\vec{E}$  jsou pak již určeny z pravidla pravé ruky.

(b) Příklad polarizace kolmo na rovinu dopadu. Směry elektrického pole  $\vec{E}$  volíme tak, aby směřovaly v kladném směru osy  $x$ . Směry magnetického pole  $\vec{B}$  jsou pak již určeny z pravidla pravé ruky.

Obrázek 7.16: Kladné směry vektorů elektrického pole  $\vec{E}$  a magnetického pole  $\vec{B}$  pro jednotlivé polarizace. Zakreslená je rovina dopadu s osami  $y$  a  $z$ .

Nyní můžeme specializovat obecné podmínky napojení v (7.70) pro jednotlivé případy polarizace. Vlevo polarizace v rovině dopadu, vpravo polarizace kolmo na rovinu dopadu:

$$\begin{aligned}
 E_{d0y} + E_{r0y} &= E_{t0y}, & E_{d0x} + E_{r0x} &= E_{t0x}, \\
 \varepsilon_1(E_{d0z} + E_{r0z}) &= \varepsilon_2 E_{t0z}, & 0 &= 0, \\
 0 &= 0, & B_{d0z} + B_{r0z} &= B_{t0z}, \\
 \frac{1}{\mu_1}(B_{d0x} + B_{r0x}) &= \frac{1}{\mu_2} B_{t0x}, & \frac{1}{\mu_1}(B_{d0y} + B_{r0y}) &= \frac{1}{\mu_2} B_{t0y}.
 \end{aligned} \tag{7.71}$$

Některé podmínky napojení dopadly triviálně vlivem toho, že v konkrétním případě do daného směru elektrické nebo magnetické pole vůbec nemíří a podmínka je tedy automaticky splněna.

Dále si vyjádříme jednotlivé složky vektorů elektrického a magnetického pole pomocí úhlů dopadu  $\vartheta_1$  a lomu  $\vartheta_2$  z obrázků 7.16. Pro případ polarizace v rovině dopadu máme:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{d0} &= E_{d0}(0, -\cos \vartheta_1, \sin \vartheta_1), & \vec{E}_{r0} &= E_{r0}(0, \cos \vartheta_1, \sin \vartheta_1), & \vec{E}_{t0} &= E_{t0}(0, -\cos \vartheta_2, \sin \vartheta_2), \\
 \vec{B}_{d0} &= B_{d0}(1, 0, 0), & \vec{B}_{r0} &= B_{r0}(1, 0, 0), & \vec{B}_{t0} &= B_{t0}(1, 0, 0),
 \end{aligned} \tag{7.72}$$

a pro polarizaci kolmo na rovinu dopadu:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{d0} &= E_{d0}(1, 0, 0), & \vec{E}_{r0} &= E_{r0}(1, 0, 0), & \vec{E}_{t0} &= E_{t0}(1, 0, 0), \\
 \vec{B}_{d0} &= B_{d0}(0, \cos \vartheta_1, -\sin \vartheta_1), & \vec{B}_{r0} &= B_{r0}(0, -\cos \vartheta_1, -\sin \vartheta_1), & \vec{B}_{t0} &= B_{t0}(0, \cos \vartheta_2, -\sin \vartheta_2).
 \end{aligned} \tag{7.73}$$

Amplitudy magnetických polí můžeme vyjádřit pomocí amplitud elektrických polí

$$B_{d0} = \frac{1}{v_1} E_{d0}, \quad B_{r0} = \frac{1}{v_1} E_{r0}, \quad B_{t0} = \frac{1}{v_2} E_{t0}. \tag{7.74}$$

Zavedeme koeficienty průchodu  $P$ , resp. odrazu  $R$ , jako poměr amplitud prošlé, resp. odražené, vlny k amplitudě dopadající vlny.

$$R = \frac{E_{r0}}{E_{d0}}, \quad P = \frac{E_{t0}}{E_{d0}}. \quad (7.75)$$

Nyní dosadíme tvary složek elektrického a magnetického (7.72) a (7.73) do podmínek napojení (7.71). Nahradíme amplitudy magnetického pole dle (7.74) a na závěr v těchto rovnicích zavedeme koeficienty  $R$  a  $P$  pomocí definic (7.75). Označme symboly  $R_{\parallel}$  a  $P_{\parallel}$  koeficienty průchodu a odrazu pro polarizaci v rovině dopadu a  $R_{\perp}$  a  $P_{\perp}$  pro koeficienty pro polarizaci kolmou na rovinu dopadu. Po sérii těchto úkonů obdržíme tyto rovnice:

$$\begin{aligned} (-1 + R_{\parallel}) \cos \vartheta_1 &= -P_{\parallel} \cos \vartheta_2, & 1 + R_{\perp} &= P_{\perp}, \\ \varepsilon_1(1 + R_{\parallel}) \sin \vartheta_1 &= \varepsilon_2 P_{\parallel} \sin \vartheta_2, & 0 &= 0, \\ 0 &= 0, & \frac{1}{v_1}(1 + R_{\perp}) \sin \vartheta_1 &= \frac{1}{v_2} P_{\perp} \sin \vartheta_2, \\ \frac{1}{\mu_1} \frac{1}{v_1} (1 + R_{\parallel}) &= \frac{1}{\mu_2} \frac{1}{v_2} P_{\parallel}, & \frac{1}{\mu_1} \frac{1}{v_1} (1 - R_{\perp}) \cos \vartheta_1 &= \frac{1}{\mu_2} \frac{1}{v_2} P_{\perp} \cos \vartheta_2. \end{aligned} \quad (7.76)$$

Dostali jsme vždy tři rovnice pro příslušné koeficienty  $R$  a  $P$ . Ukážeme, že vždy dvě z rovnic jsou stejné a zůstanou nám dvě nezávislé rovnice pro koeficienty průchodu a odrazu. Siny v rovnicích (7.76) můžeme odstranit pomocí Snellova zákona,

$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (7.77)$$

a dospějeme k

$$\frac{\varepsilon_1}{n_1} (1 + R_{\parallel}) = \frac{\varepsilon_2}{n_2} P_{\parallel}, \quad \frac{1}{n_1 v_1} (1 + R_{\perp}) = \frac{1}{n_2 v_2} P_{\perp}. \quad (7.78)$$

Zapišme vztahy mezi konstantami  $v$ ,  $n$ ,  $\varepsilon$  a  $\mu$ :

$$n = \frac{c}{v}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad \frac{\varepsilon}{n} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}, \quad \frac{1}{nv} = \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{\mu v} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}. \quad (7.79)$$

Po dosazení těchto vztahů do rovnic (7.76) a (7.78) se ukáže, že rovnice (7.78) nejsou nezávislé (jsou stejné jako čtvrté rovnice v (7.76)).

### 7.4.3 Koeficienty průchodu a odrazu – Fresnelovy vzorce

Finální tvar rovnic (po vypuštění závislých rovnic (7.78) a dosazení z (7.79)) pro koeficienty průchodu a odrazu pro příslušné polarizace je následující:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (1 + R_{\parallel}) &= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} P_{\parallel}, & 1 + R_{\perp} &= P_{\perp}, \\ (1 - R_{\parallel}) \cos \vartheta_1 &= P_{\parallel} \cos \vartheta_2, & \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (1 - R_{\perp}) \cos \vartheta_1 &= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} P_{\perp} \cos \vartheta_2. \end{aligned} \quad (7.80)$$

Vidíme, že mezi koeficienty průchodu a odrazu pro polarizaci kolmou k rovině dopadu dostáváme „klasický“ vztah  $P_{\perp} = 1 + R_{\perp}$  plynoucí z podmínky spojitosti na rozhraní – zde se jedná o spojitost složek elektrického pole ležících v rovině rozhraní (první z podmínek napojení v

(7.70)). Naproti tomu pro polarizaci v rovině dopadu podmínka spojitosti neplatí a vztah mezi  $R_{\parallel}$  a  $P_{\parallel}$  je komplikovanější. Řešením rovnic (7.80) získáme

$$\begin{aligned} R_{\parallel} &= \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \vartheta_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \vartheta_2}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \vartheta_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \vartheta_2}, & R_{\perp} &= \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \vartheta_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \vartheta_2}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \vartheta_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \vartheta_2}, \\ P_{\parallel} &= \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}} (1 + R_{\parallel}), & P_{\perp} &= 1 + R_{\perp}. \end{aligned} \quad (7.81)$$

Tento výsledek představuje přesné řešení koeficientů průchodu a odrazu na rozhraní dvou nevodivých prostředí plynoucích z Maxwellových rovnic. Veličina  $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$  se nazývá impedance  $Z$ ,

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad (7.82)$$

Pro většinu materiálů platí  $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$ . Můžeme tedy psát

$$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\mu_r}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}. \quad (7.83)$$

Po dosazení předchozího výrazu do (7.81) dospějeme k tzv. *Fresnelovým vzorcům*:

$$R_{\parallel} = \frac{n_2 \cos \vartheta_1 - n_1 \cos \vartheta_2}{n_2 \cos \vartheta_1 + n_1 \cos \vartheta_2}, \quad R_{\perp} = \frac{n_1 \cos \vartheta_1 - n_2 \cos \vartheta_2}{n_1 \cos \vartheta_1 + n_2 \cos \vartheta_2}, \quad (7.84)$$

kde samozřejmě pouze jeden z úhlů je parametrem, druhý je určen ze Snellova zákona.

Pro kolmý dopad,  $\vartheta_1 = 0$ , máme ze Snellova zákona  $\vartheta_2 = 0$  a Fresnelovy vzorce se redukují na jednoduchý tvar

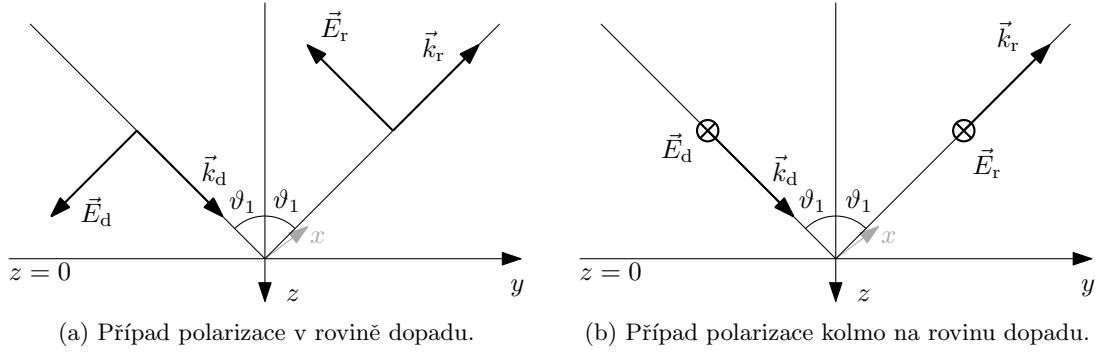
$$R = \pm \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}. \quad (7.85)$$

Tento výsledek je ale velmi podivný. Při kolmém dopadu není rovina dopadu jednoznačně definována a obě polarizace jsou zcela ekvivalentní. Měly by tedy dávat stejné výsledky. Kámen úrazu je v zavedení kladných směrů, viz obrázek 7.16. Pro případ polarizace v rovině dopadu pro  $\vartheta_1 \rightarrow 0$  vektory  $\vec{E}_d$  a  $\vec{E}_r$  míří opačným směrem, zatímco pro polarizaci kolmou na rovinu dopadu míří stále stejným směrem (ve směru osy  $x$ ). Tato situace upozorňuje na fakt, že pro interpretaci Fresnelových vzorců je třeba mít informaci o tom, jak byly zavedené kladné směry. Jejich zavedení pak může měnit znaménka u koeficientů  $R$  a  $P$  různých polarizací. A jako obvykle, konvence v literatuře není jednotná. Odsud dál v textu **změňme kladný směr vektoru  $\vec{E}_r$  pro případ polarizace v rovině dopadu na opačný**. To způsobí  $R_{\parallel} \rightarrow -R_{\parallel}$ , odtud tedy pracujeme s výrazem pro  $R_{\parallel}$ , který má opačné znaménko než je uvedené v (7.84), (pro kolmý dopad tak dostaneme konzistentně  $R = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ ). Výsledné tvary Fresnelových vzorců jsou pak:

$$\boxed{R_{\parallel} = \frac{n_1 \cos \vartheta_2 - n_2 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_2 + n_2 \cos \vartheta_1}, \quad R_{\perp} = \frac{n_1 \cos \vartheta_1 - n_2 \cos \vartheta_2}{n_1 \cos \vartheta_1 + n_2 \cos \vartheta_2},} \quad (7.86)$$

na obrázku 7.17 jsou zakresleny finální kladné směry elektrického pole dopadající a odražené vlny nezbytné k interpretaci vzorců (7.86).





Obrázek 7.17: Upravené finální kladné směry vektorů elektrického pole  $\vec{E}$  pro jednotlivé polarizace dopadající a odražené vlny. Zakreslená je rovina dopadu s osami  $y$  a  $z$ .

Tvary Fresnelových vzorců můžeme dále zjednodušit, pokud dosadíme za index lomu  $n_1$  pomocí Snellova zákona,

$$n_1 = n_2 \frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_1}. \quad (7.87)$$

Dospějeme tak k jednoduchým tvarům<sup>7</sup>

$$R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{\operatorname{tg}(\vartheta_2 + \vartheta_1)}, \quad R_{\perp} = \frac{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{\sin(\vartheta_2 + \vartheta_1)}. \quad (7.88)$$

Průběhy těchto funkcí jsou znázorněny na obrázcích 7.18, kde jsou rozděleny případy pro  $n_1 < n_2$  a  $n_1 > n_2$ . Dále definujeme odrazivost jako  $\mathcal{R} = R^2$  udávající, jaká část intenzity dopadající vlny se odrazí,  $I_r = \mathcal{R} I_d$ . Grafy odrazivosti jsou taktéž na obrázku 7.18. Pro úhly  $\vartheta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  pro případ  $n_1 < n_2$  jde odrazivost k jedné a z rozhraní se stává dokonalé zrcadlo (podobně pro  $\vartheta_1 \rightarrow \vartheta_C$  pro případ  $n_1 > n_2$ ). Hodnota odrazivosti se liší v závislosti na polarizaci (až na  $\vartheta_1 = 0$  a  $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$ , resp.  $\vartheta_1 = \vartheta_C$ ). To způsobuje, že dopadá-li na rozhraní nepolarizované světlo, po odrazu se částečně lineárně polarizuje.

#### 7.4.4 Brewsterův úhel, polarizace odrazem

Při pohledu na grafy koeficientů odrazu, resp. odrazivosti, vidíme, že existuje speciální hodnota úhlu, při které se polarizace v rovině dopadu vůbec neodráží. Tomuto úhlu se říká *Brewsterův úhel*.

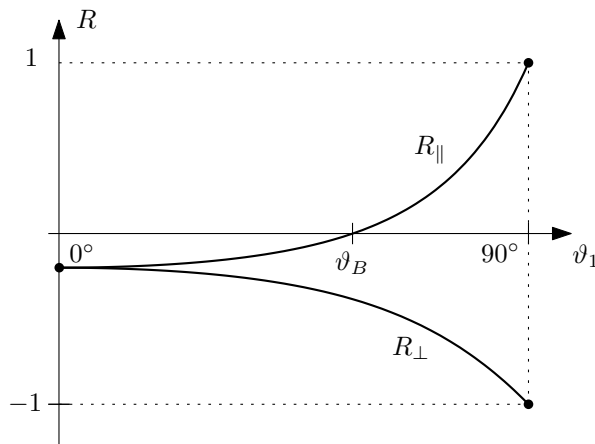
Hledejme hodnotu úhlu, pro který je koeficient odrazu nula. Pokud bychom uvažovali vynulování čitatele ve výrazech pro koeficient odrazu (ať už pro  $R_{\parallel}$  anebo  $R_{\perp}$ ), dostaneme podmínku  $\vartheta_1 = \vartheta_2$ . Tato ale nastává jen pro  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$  a potom  $R = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$  je nenulové.

Druhou možností je, že jmenovatel bude nekonečno. Tato situace může nastat jen s funkcí tangens,  $\operatorname{tg}(\vartheta_2 + \vartheta_1) = +\infty$ , tedy pro kombinaci úhlů

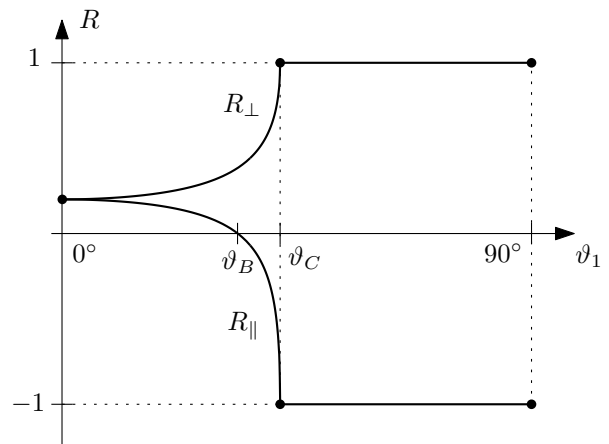
$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}, \quad (7.89)$$

tato podmínka tedy definuje Brewsterův úhel  $\vartheta_1 = \vartheta_B$  a říká, že při dopadu pod Brewsterovým úhlem svírají směry odražené a lomené vlny pravý úhel, viz obrázek 7.19.

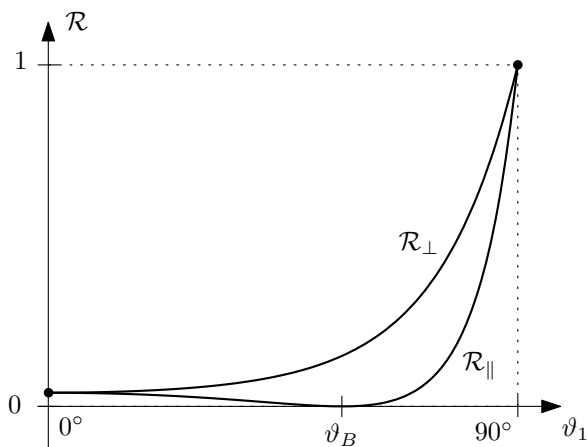
<sup>7</sup>Tvar  $R_{\perp}$  se získá přímočarým použitím součtového vzorce, u vyjádření  $R_{\parallel}$  je potřeba nejprve použít vzorec pro sinus dvojnásobného úhlu a pak příslušný součtový vzorec.



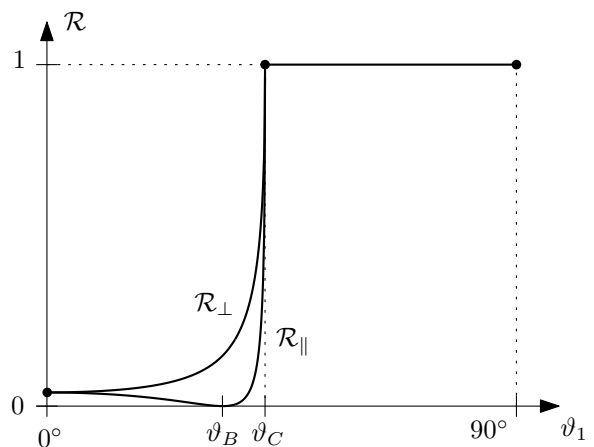
(a) Koeficienty odrazu pro odraz na opticky hustším prostředí, tzn. situace pro  $n_1 < n_2$ .



(b) Koeficienty odrazu pro odraz na opticky řidším prostředí, tzn. situace pro  $n_2 < n_1$ . Pro úhly  $\vartheta > \vartheta_C$  dochází k totálnímu odrazu.

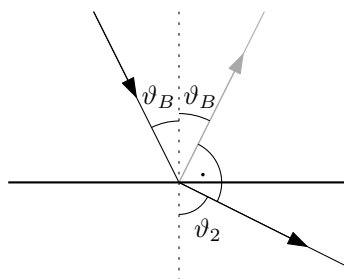


(c) Odrazivosti pro odraz na opticky hustším prostředí, tzn. situace pro  $n_1 < n_2$ .



(d) Odrazivosti pro odraz na opticky řidším prostředí, tzn. situace pro  $n_1 > n_2$ . Pro úhly  $\vartheta > \vartheta_C$  dochází k totálnímu odrazu.

Obrázek 7.18: Fresnelovy vzorce. Graf koeficientů odrazu  $R$  a odrazivosti  $\mathcal{R}$  v závislosti na úhlu dopadu  $\vartheta_1$  a polarizaci – v rovině dopadu  $R_{\parallel}$  a  $\mathcal{R}_{\parallel}$ , kolmo na rovinu dopadu  $R_{\perp}$  a  $\mathcal{R}_{\perp}$ . Na obrázcích vlevo je situace pro  $n_1 < n_2$ , vpravo pro  $n_1 > n_2$ . Brewsterův úhel  $\vartheta_B$  značí úhel, kdy  $R_{\parallel} = \mathcal{R}_{\parallel} = 0$ .



Obrázek 7.19: Paprsek dopadající pod Brewsterovým úhlem  $\vartheta_B$  se zalomí tak, že směr prošlé a odražené vlny svírá pravý úhel. Odražený paprsek je lineárně polarizován kolmo na rovinu dopadu, jelikož koeficient odrazu  $R_{\parallel}$  je nulový.

Po dosazení do Snellova zákona,

$$n_1 \sin \vartheta_B = n_2 \underbrace{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \vartheta_B \right)}_{\cos \vartheta_B}, \quad (7.90)$$

vyjádříme

$$\boxed{\operatorname{tg} \vartheta_B = \frac{n_2}{n_1}}. \quad (7.91)$$

Tato rovnice má řešení pro libovolnou kombinaci indexů lomu  $n_1$  a  $n_2$  – tedy pro jakékoli rozhraní existuje Brewsterův úhel.

Existenci Brewsterova úhlu lze využít několika způsoby. Necháme-li dopadat nepolarizované světlo pod Brewsterovým úhlem, elektrické pole kmitající v rovině dopadu se neodrazí a my získáme světlo polarizované kolmo na rovinu dopadu. Tomuto jevu se říká *polarizace odrazem*. Jak již bylo řečeno, pod jiným úhlem se světlo polarizuje částečně. Dále máme-li lineárně polarizované světlo, můžeme ho nechat dopadat pod Brewsterovým úhlem tak, že polarizace leží v rovině dopadu, v takovém případě se žádné světlo neodrazí a rozhraní je dokonale průhledné – tomuto jevu se říká *Brewsterovo okno*.



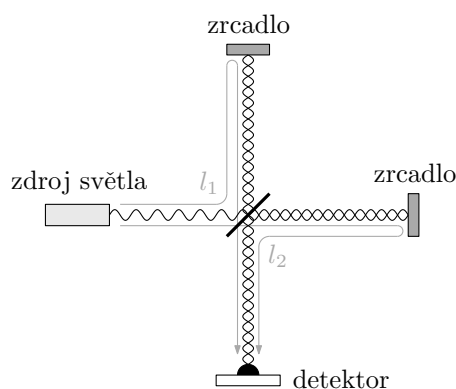
## Kapitola 8

# Interference a difrakce

Linearita Maxwellových rovnic má za následek princip superpozice – vezmeme-li jakákoliv dvě řešení Maxwellových rovnic, i jejich lineární kombinace je řešením. Energetické veličiny jsou ovšem kvadratické v polích – neplatí u nich, že vezmeme-li sumu řešení, dostanu i příslušnou sumu energetických veličin. Objevuje se dodatečný interferenční člen, který stojí za jevem interference. V následující kapitole si tento jev popíšeme na příkladu Michelsonova interferometru a prozkoumáme, jaké podmínky mohou znemožnit pozorování interference, resp. způsobit vymizení interferenčního členu.

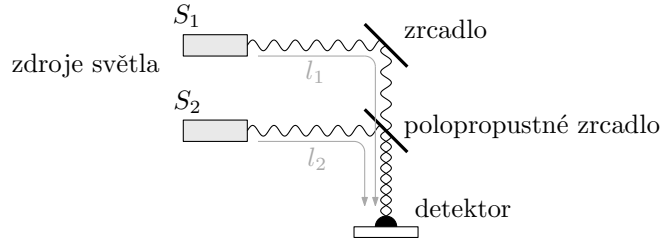
### 8.1 Michelsonův interferometr

Michelsonův interferometr je znázorněn a popsán na obrázku 8.1.



Obrázek 8.1: Michelsonův interferometr. Paprsek ze zdroje světla se dělí na dělič svazku na dva, odráží se od zrcadel a poté se opět spojí, aby dopadl do detektoru. Délky drah jednotlivých paprsků označme  $l_1$ ,  $l_2$ .

My se zaměříme na trochu obecnější a zároveň jednodušší uspořádání znázorněné na obrázku 8.2. Hlavní změnou je nahrazení jednoho zdroje světla s děličem svazku rovnou dvěma zdroji.



Obrázek 8.2: „Pedagogický“ interferometr. Dva zdroje světla jsou pomocí zrcadel nasměrované do detektoru s drahami délek  $l_1$  a  $l_2$ .

Zapišme elektrická pole generovaná v jednotlivých zdrojích světla, uvažujeme, že mají stejnou úhlovou frekvenci  $\omega$ :

$$E_1(t) = E_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad E_2(t) = E_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (8.1)$$

Prozatím předpokládejme, že fázová posunutí  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  jsou konstanty. Zároveň jsme napsali elektrické pole jako skalární veličinu – jev polarizace a vlastní fakt, že je veličina elektrického pole vektorová, zde nejsou pro následnou diskuzi důležité. Elektrické pole ve vzdálenosti  $l$  podél dráhy příslušného paprsku můžeme zapsat<sup>1</sup> jako postupnou vlnu

$$E(l, t) = E \cos(\omega t - kl + \varphi). \quad (8.2)$$

Vlna dopadající do detektoru je pak superpozicí vln z jednotlivých zdrojů:

$$E_D(t) = E_1(l_1, t) + E_2(l_2, t) = E_1 \cos(\omega t - kl_1 + \varphi_1) + E_2 \cos(\omega t - kl_2 + \varphi_2). \quad (8.3)$$

Nás zajímá intenzita měřená detektorem s rozlišovací dobou  $t_{\text{roz}} \gg T$ . Z periodicity vlny  $E_D(t)$  stačí středovat přes jednu periodu  $T$ :

$$\begin{aligned} I_D &= \langle E_D^2(t) \rangle_{t_{\text{roz}}} = \langle E_D^2(t) \rangle_T \\ &= \langle E_1^2 \cos^2(\dots) \rangle + \langle E_2^2 \cos^2(\dots) \rangle + 2E_1 E_2 \langle \cos(\omega t - kl_1 + \varphi_1) \cos(\omega t - kl_2 + \varphi_2) \rangle. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Nyní označíme

$$I_i = \frac{1}{2} E_i^2, \quad E_i = \sqrt{2I_i}, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (8.5)$$

tedy intenzity jednotlivých vln  $I_i$  vyjádříme pomocí amplitud  $E_i$  a obráceně (a ignorujeme konstantu  $\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$ , což pouze odpovídá jiné volbě jednotek). Zároveň použijeme součtový vzorec na součin cosinů v (8.4):

$$I_D = I_1 + I_2 + 4\sqrt{I_1 I_2} \left[ \frac{1}{2} \langle \cos(2\omega t - k(l_1 + l_2) + \varphi_1 + \varphi_2) \rangle + \frac{1}{2} \langle \cos(k(l_1 - l_2) + \varphi_1 - \varphi_2) \rangle \right] \quad (8.6)$$

Po vystředování je pak výsledná intenzita dopadající do detektoru:

$$I_D = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k(l_1 - l_2) + \varphi_1 - \varphi_2). \quad (8.7)$$

Výsledná intenzita závisí na funkci fázového rozdílu  $\Delta\varphi$  tvaru

$$\Delta\varphi = k(l_1 - l_2) + \varphi_1 - \varphi_2, \quad (8.8)$$

<sup>1</sup>Ignorujeme takové jevy jako úbytek amplitudy po průchodu polopropustným zrcadlem anebo fázový posuv při průchodu, resp. odrazu, na jednotlivých zrcadlech. Můžeme si představovat, že jsou zahrnuty do délky dráhy  $l$ . Pro další diskuzi nejsou tyto jevy nijak podstatné.

kteřá je závislá na rozdílu drah jednotlivých paprsků. V závislosti na tomto rozdílu pozorujeme buď konstruktivní nebo destruktivní interferenci, intenzita se obecně může pohybovat v intervalu

$$I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2 \leq I_D(\Delta\varphi) \leq (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}. \quad (8.9)$$

Pro stejné intenzity obou zdrojů,  $I_1 = I_2 = I_0$  se výraz zjednoduší na

$$I_D(\Delta\varphi) = 2I_0(1 + \cos \Delta\varphi) \in \langle 0, 4 \rangle I_0. \quad (8.10)$$

### 8.1.1 Vliv časové a prostorové koherence na viditelnost interference

V předchozím textu jsme uvažovali, že fázové posuny  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  jsou konstantní. Toto je idealizovaný stav, který v realitě nikdy nenastává. Uvažujme, že posuvy fáze jsou funkce času,  $\varphi_1(t)$  a  $\varphi_2(t)$ , takové, že zůstávají téměř konstantní po dobu  $t_{\text{koh}} \gg T$  – koherenční dobu. Po uplynutí koherenční doby se hodnoty fází náhodně změní. Připomeňme, že u tepelných zdrojů viditelného světla máme  $T \approx 10^{-14}$  s a  $t_{\text{koh}} \approx 10^{-9}$  s.

Podívejme se nejprve, jak se změní výrazy vypočtené v předchozí kapitole. Elektrická pole vyzařovaná z jednotlivých zdrojů nyní nabudou tvaru

$$E_{1,2}(t) = E_{1,2} \cos(\omega t + \varphi_{1,2}(t)). \quad (8.11)$$

Podél paprsků pak máme postupné vlny tvaru

$$E_{1,2}(l_{1,2}, t) = E_{1,2} \cos(\omega t - kl_{1,2} + \varphi_{1,2}(t_{\text{ret}1,2})), \quad (8.12)$$

kde jsme funkce fáze vyjádřili v příslušných retardovaných časech

$$t_{\text{ret}1} = t - \frac{l_1}{c}, \quad t_{\text{ret}2} = t - \frac{l_2}{c}. \quad (8.13)$$

Interferenční část  $I_{\text{int}}$  intenzity  $I_D$  dopadající do detektoru (8.7), která vznikla středováním přes jednu periodu  $T$ , se nezmění, neboť po dobu jedné periody jsou fáze  $\varphi_{1,2}(t)$  konstantní. Interferenční intenzita ale bude nyní časově závislá s časovou škálou změny  $t_{\text{koh}}$ :

$$I_{\text{int}}(t) = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k(l_1 - l_2) + \varphi_1(t_{\text{ret}1}) - \varphi_2(t_{\text{ret}2})). \quad (8.14)$$

Výsledná intenzita pozorovaná v detektoru je dána dodatečným středováním vztahu (8.14) přes rozlišovací dobu přístroje  $t_{\text{roz}}$ :

$$I_D(t) = I_1 + I_2 + \langle I_{\text{int}}(t) \rangle_{t_{\text{roz}}}. \quad (8.15)$$

Nyní rozlišíme různé situace a budeme se zabývat tím, jak vyjde vystředovaná intenzita  $I_D(t)$  ze vztahu (8.15).

#### 1. Zdroje $S_1$ a $S_2$ jsou *prostorově koherentní*.

Prostorová koherence popisuje vztahy mezi světelnými (elektrickými) poli v různých místech prostoru. Řekneme, že pole v místech  $P_1$  a  $P_2$  jsou *prostorově koherentní*, jestliže nám znalost pole v místě  $P_1$  umožní předpovědět pole v místě  $P_2$  (a naopak). Pokud tomu tak není, řekneme, že zdroje jsou prostorově nekoherentní.

Pokud jsou zdroje světla  $S_1$  a  $S_2$  prostorově koherentní, bude pro funkce fáze platit<sup>2</sup>  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi(t)$ . Je nutno poznamenat, že prostorová koherence zdrojů světla se

<sup>2</sup>Obecněji pak  $\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \text{konst.}$ , se známou hodnotou konstanty na pravé straně. My zde pro jednoduchost volíme nulovou pravou stranu.

typicky zajišťuje rozdělením paprsku z jednoho zdroje, tak jak je tomu v Michelsonově interferometru. Funkce fázového rozdílu  $\Delta\varphi$  je tedy nyní tvaru

$$\Delta\varphi = k(l_1 - l_2) + \varphi\left(t - \frac{l_1}{c}\right) - \varphi\left(t - \frac{l_2}{c}\right). \quad (8.16)$$

Rozlišíme dva případy:

- (a) Rozdíl retardovaných časů je menší než koherenční doba,  $|t_{\text{ret1}} - t_{\text{ret2}}| \ll t_{\text{koh}}$ .  
V takovém případě jsou hodnoty fáze v různých (ale blízkých) časech stejné, ve funkci fáze se odečtou a interferenční intenzita nebude závislá na čase – interferenční jev bude stálý a tedy i viditelný.

Tato situace nastane pro  $|l_1 - l_2| \ll ct_{\text{koh}}$ , neboť

$$|t_{\text{ret1}} - t_{\text{ret2}}| = \left| t - \frac{l_1}{c} - t + \frac{l_2}{c} \right| = \frac{1}{c}|l_1 - l_2|. \quad (8.17)$$

Rozdíl drah jednotlivých paprsků tedy musí být menší než vzdálenost, kterou světlo urazí za koherenční dobu. Pro  $t_{\text{koh}} \approx 10^{-9}$  s máme  $|l_1 - l_2| \ll 30$  cm.

- (b) Rozdíl retardovaných časů je větší než koherenční doba,  $|t_{\text{ret1}} - t_{\text{ret2}}| \gg t_{\text{koh}}$ .  
V tomto případě porovnáváme hodnoty fázových posuvů v různých „oknech“ časové koherence, tzn. fáze se stihla mezi časy  $t_{\text{ret1}}$  a  $t_{\text{ret2}}$  náhodně změnit. Dostáváme tedy situaci, kdy se veličina

$$\delta\varphi(t) = \varphi(t_{\text{ret1}}) - \varphi(t_{\text{ret2}}) \quad (8.18)$$

náhodně mění na časové škále  $t_{\text{koh}}$ . Musíme opět rozlišit dva (pod)případy:

- i. Máme „rychlý“ přístroj, tj.  $t_{\text{roz}} \ll t_{\text{koh}}$ . V takovém případě středujeme ve výrazu pro intenzitu (8.15) konstantu, jelikož hodnota  $\delta\varphi$  je za dobu středování neměnná. Rychlý přístroj tedy pozoruje rychlé změny interference na škále  $t_{\text{koh}}$ .
- ii. Máme „pomalý“ přístroj, tj.  $t_{\text{roz}} \gg t_{\text{koh}}$ . Nyní se během rozlišovací doby přístroje hodnota fáze  $\delta\varphi$  mnohokrát náhodně změní vyplňujíc rovnoměrně interval úhlů  $\langle 0, 2\pi \rangle$ . Středování v intenzitě (8.15) způsobí vynulování interferenčního kosinu a interferenční jev nebude pozorovatelný. Celková intenzita naměřená v detektoru bude prostým součtem intenzit jednotlivých paprsků,  $I_D = I_1 + I_2$ .

## 2. Zdroje $S_1$ a $S_2$ nejsou prostorově koherentní.

V takovém případě znalost pole u zdroje  $S_1$  (a tedy znalost funkce  $\varphi_1(t)$ ) neumožňuje určit funkci  $\varphi_2(t)$ . Rozdíl  $\delta\varphi(t) = \varphi_1(t_{\text{ret1}}) - \varphi_2(t_{\text{ret2}})$  se nyní také náhodně mění na časové škále  $t_{\text{koh}}$  (bez ohledu na velikost rozdílu  $|l_1 - l_2|$ , resp.  $|t_{\text{ret1}} - t_{\text{ret2}}|$ ). Nastává tedy stejný případ jako v 1. (b), tzn. v závislosti na „rychlosti“ přístroje bud' pozorujeme rychlé změny interferenční intenzity anebo je pozorování interference znemožněno.

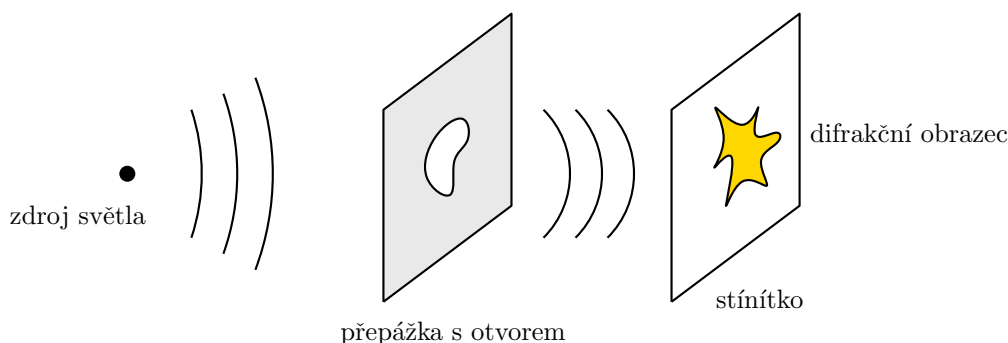
V praktickém případě pro optické jevy máme k dispozici pouze „pomalé“ přístroje a můžeme tedy podrobnou diskuzi výše shrnout do jednoduché poučky: Nekoherentní vlny (ať už časově nebo prostorově) spolu neinterferují, výsledná intenzita je daná prostým součtem intenzit jednotlivých vln.

To je také důvod, proč jev interference v běžném životě pozorujeme jen za jistých okolností. Světlo vysílané různými zdroji světla (nebo také nebodovými zdroji světla) je prostorově nekoherentní a tedy interferenci nepozorujeme. Naopak pozorujeme například interferenci na tenkých vrstvách (olejová skvrna na vodě), kde dráhový rozdíl jednotlivých paprsků je velmi malý a tedy vlny jsou časově koherentní.



## 8.2 Difrakce

Pod problémem difrakce budeme rozumět uspořádání na obrázku 8.3. Zdroj světla vysílá elektromagnetické vlnění, které necháme procházet neprůhlednou přepážkou s otvorem<sup>3</sup> a výsledné vlnění necháme dopadnout na stínítko, kde pozorujeme tzv. *difrakční obrazec*, pod čímž rozumíme rozložení intenzity vlny dopadající na stínítko v závislosti na poloze na stínítku. Naším úkolem bude na základě uspořádání experimentu předpovědět tvar difrakčního obrazce.



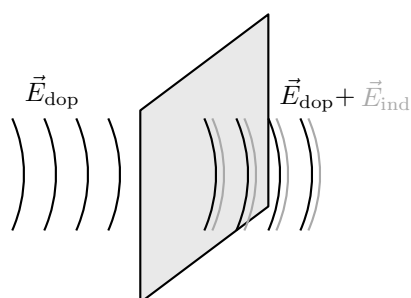
Obrázek 8.3: Problém difrakce. Světlo dopadá na přepážku s otvorem a vytváří difrakční obrazec na stínítku.

### 8.2.1 Babinetův princip

Abychom dokázali problém difrakce vůbec nějakým způsobem uchopit, podívejme se na to, jak vlastně funguje neprůhledná přepážka. Nejprve uvažujme plnou přepážku bez jakéhokoliv otvoru. Označme  $\vec{E}_{\text{dop}}$  pole dopadající zleva na neprůhlednou přepážku. Toto pole interaguje s atomy tvořící přepážku a tyto atomy musí vyzařovat pole  $\vec{E}_{\text{ind}}$  takové, že **za přepážkou** se obě pole superponují na nulu:

$$\vec{E}_{\text{dop}} + \vec{E}_{\text{ind}} = 0. \quad (8.19)$$

Tzn. z definice neprůhledné přepážky musí být indukované pole takové, že v oblasti za přepážkou přesně vyruší dopadající pole.

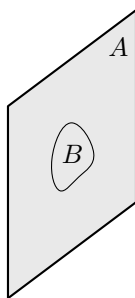


Obrázek 8.4: Plná přepážka musí indukovat takové pole, že celkové pole za přepážkou je přesně nulové.

Nyní myšleně rozdělme přepážku na oblasti  $A$  a  $B$ , viz obrázek 8.5. Indukované pole  $\vec{E}_{\text{ind}}$  od plné přepážky lze rozložit na indukovaná pole od částí  $A$  a  $B$  (pole od atomů tvořících část  $A$  a  $B$ ):

$$\vec{E}_{\text{ind}} = \vec{E}_{\text{ind}A} + \vec{E}_{\text{ind}B}. \quad (8.20)$$

<sup>3</sup>Otvor může být velmi rozličných a velmi komplexních tvarů.



Obrázek 8.5: Přepážka myšleně rozdělená na dvě oblasti  $A$  a  $B$ .

Nyní se rozhodneme odstranit část přepážky  $B$ . Jaké bude nyní pole za přepážkou  $A$ , označme ho  $\vec{E}_A$ ? Odstraněním části  $B$  musí vymizet indukované pole  $\vec{E}_{\text{ind}B}$  a za přepážkou bude superpozice následujících polí:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{\text{dop}} + \vec{E}_{\text{ind}A}. \quad (8.21)$$

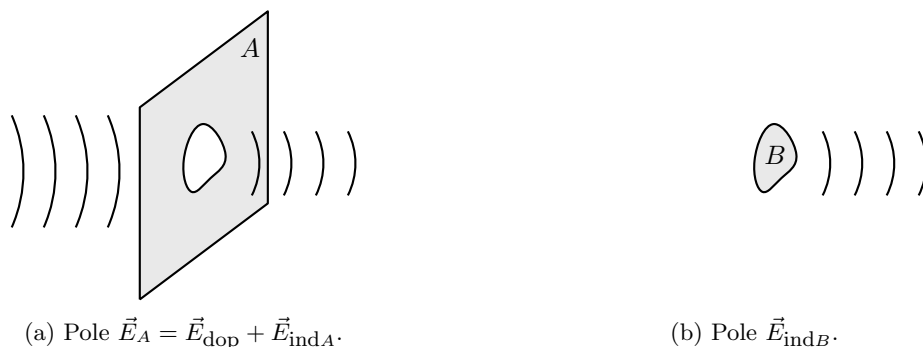
Dosadíme-li rozklad (8.20) do (8.19), dostaneme vztah

$$\vec{E}_{\text{dop}} + \vec{E}_{\text{ind}A} + \vec{E}_{\text{ind}B} = 0. \quad (8.22)$$

Jednoduchým přesunutím členu  $\vec{E}_{\text{ind}B}$  na druhou stranu rovnítky dostaneme odpověď na naši otázku:

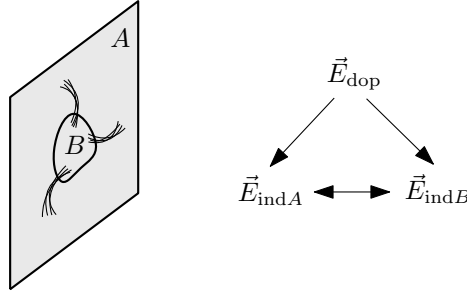
$$\boxed{\vec{E}_A = -\vec{E}_{\text{ind}B}}, \quad (8.23)$$

tzn. pole za přepážkou s odstraněnou částí  $B$  je úplně stejné, jako bychom nechali vyzářovat pouze část přepážky  $B$  (až na znaménko, ale na tom nebude výsledná intenzita záviset). Viz schematický obrázek 8.6. Rovnost (8.23) nám velmi pomůže v řešení problému difrakce.



Obrázek 8.6: Pole za přepážkou tvaru  $A$  (s otvorem  $B$ ),  $\vec{E}_A$ , je stejné jako pole vyzářované špuntem  $B$ ,  $\vec{E}_{\text{ind}B}$ .

Důležité je poznamenat, že Babinetův princip platí pouze přibližně. Proč tomu tak je? Indukovaná pole od částí přepážky  $A$  a  $B$  se vzájemně ovlivňují. To znamená, že po odstranění části přepážky  $B$  se pole  $\vec{E}_{\text{ind}A}$  nutně změní. Viz schematický obrázek 8.7. Tento efekt je nejvýraznější na hranici mezi  $A$  a  $B$ , vymizení pole  $\vec{E}_{\text{ind}B}$  bude způsobovat největší změny ve vyzářování atomů v okolí hranice  $B$ . Jedním z našich předpokladů proto bude, aby otvor  $B$  byl dostatečně velký v porovnání s vlnovou délkou procházejícího světla,  $D \gg \lambda$ , kde jsme označili velikost otvoru jako  $D$ .



Obrázek 8.7: Dopadající pole  $\vec{E}_{\text{dop}}$  indukuje pole vyzařovaná z přepážek  $A$  a  $B$ ,  $\vec{E}_{\text{ind}A}$  a  $\vec{E}_{\text{ind}B}$ , a tyto se vzájemně ovlivňují.

### 8.2.2 Komplementární přepážky

Přepážky  $A$  a  $B$ , které se navzájem doplňují na plnou přepážku, nazýváme *komplementární*, viz obrázek 8.8. Podívejme se nyní, jak se budou lišit difrakční obrazce těchto komplementárních přepážek.



Obrázek 8.8: Komplementární přepážky.

Vyjdeme z již dokázaného vztahu (8.23) a přičtením vhodné nuly ho upravme:

$$\vec{E}_A = -\vec{E}_{\text{ind}B} = -(\vec{E}_{\text{ind}B} + \vec{E}_{\text{dop}}) + \vec{E}_{\text{dop}} = \vec{E}_{\text{dop}} - \vec{E}_B, \quad (8.24)$$

kde jsme označili pole za přepážkou  $B$  (bez  $A$ ),  $\vec{E}_{\text{dop}} + \vec{E}_{\text{ind}B}$ , jako  $\vec{E}_B$ . Vztah mezi poli pro komplementární přepážky je tedy

$$\boxed{\vec{E}_B = \vec{E}_{\text{dop}} - \vec{E}_A.} \quad (8.25)$$

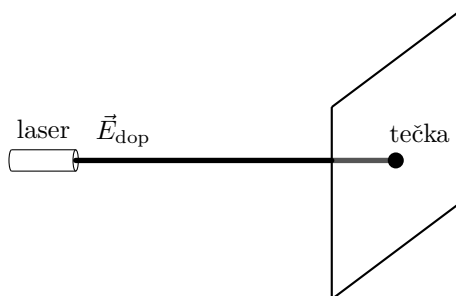
Jako *Babinetův princip* se pak označuje identita  $\vec{E}_A + \vec{E}_B = \vec{E}_{\text{dop}}$ , tedy že superpozicí polí způsobených přítomností přepážky  $A$ , resp.  $B$ , dostaneme původní pole  $\vec{E}_{\text{dop}}$  v nepřítomnosti jakékoliv přepážky.

Význam identity (8.25) je následující. V místech, kde je dopadající pole nulové,  $\vec{E}_{\text{dop}} = 0$ , platí za přepážkou

$$\vec{E}_B = -\vec{E}_A, \quad (8.26)$$

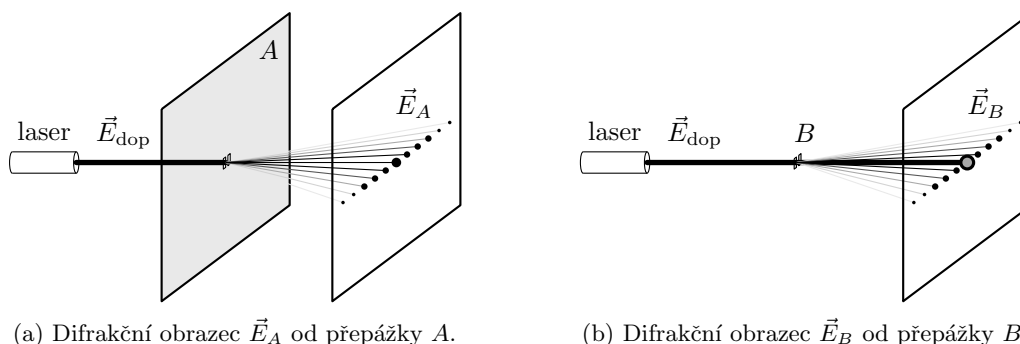
tedy, že difrakční obrazce od komplementárních stínítek jsou stejné! (Pro jistotu zopakujme, že intenzita jakožto veličina úměrná kvadrátu elektrického pole na znaménka nehledí.) Tam, kde je dopadající pole nenulové, dochází k interferenci dopadajícího pole a difrakčního pole od přepážky  $A$ . Situaci ilustruje následující příklad s laserovým paprskem dopadajícím na stínítko.

V případě nepřítomnosti jakékoliv přepážky pozorujeme na stínítku samotné pole  $\vec{E}_{\text{dop}}$  jako svítící tečku, viz obrázek 8.9.



Obrázek 8.9: Laserový paprsek představující dopadající pole  $\vec{E}_{\text{dop}}$  vytváří svítící tečku na stínítku.

Dáme-li laserovému paprsku do cesty přepážku  $A$ , dostaneme difrakční obrazec  $\vec{E}_A$ , viz obrázek 8.10 (a). Dáme-li nyní do cesty komplementární stínítko, mimo původní svítící tečku pozorujeme úplně stejný difrakční obrazec, viz obrázek 8.10 (b).



Obrázek 8.10: Difrakční obrazce od komplementárních přepážek – zde například dvou úzkých štěrbin a příslušného komplementu. V místě na stínítku mimo původní svítící tečku jsou obrazce identické. V místě původní tečky je pole  $\vec{E}_B$  dané interferencí obrazce  $\vec{E}_A$  s dopadajícím polem  $\vec{E}_{\text{dop}}$ .

### 8.2.3 Huygensův-Fresnelův princip

Nyní můžeme přistoupit k vlastnímu řešení difrakčního problému. Pro jednoduchost budeme uvažovat pouze případ velmi vzdáleného zdroje světla v ose otvoru v přepážce. Díky tomu nám na přepážku kolmo dopadá rovinná postupná elektromagnetická vlna.

V kapitole o Babinetově principu jsme ukázali (viz vztah (8.23)), že difrakční obrazec v přítomnosti přepážky  $A$  (a tedy přítomnosti otvoru na místě  $B$ ),  $\vec{E}_A$ , je dán pouze indukovaným polem vyzařovaným fiktivními náboji v místě otvoru  $B$ ,  $\vec{E}_{\text{ind}B}$ . Náboje jsou rozkmitávané dopadající vlnou a samy pak vyzařují sférické vlny. Vzhledem k tomu, že v případě plné přepážky má úloha translační symetrii podél roviny přepážky, musí být amplituda vyzařovaných vln v každém místě přepážky stejná. Výsledné pole za přepážkou je pak dáno superpozicí sférických vln vyzařovaných fiktivními náboji v místě otvoru  $B$ . Tyto úvahy nás vedou k následujícímu difrakčnímu integrálu popisujícímu pole v bodě  $P$  za přepážkou:

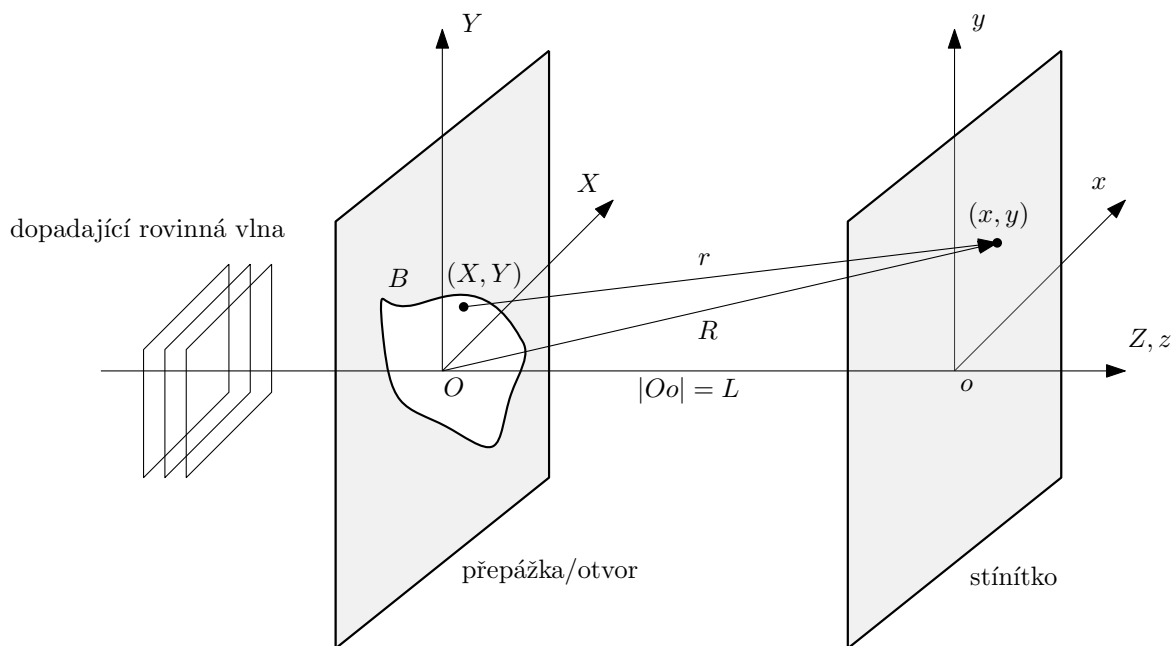
$$\vec{E}_P = \vec{E}_0 \int_B \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr)} dS, \quad (8.27)$$

kde  $B$  je množina bodů tvořících otvor v přepážce,  $dS$  je element plochy v rovině přepážky a  $r$  je vzdálenost mezi aktuálním elementem plochy a bodem  $P$ . Tato vzdálenost jednak způsobuje

zmenšování amplitudy vyzařované vlny a dále výraz  $-kr$  určuje fázový posun vyzařované vlny v místě bodu  $P$ . Amplitudu  $\vec{E}_0$  z našich úvah není možné určit. Naší konečnou předpovědí tedy bude pouze relativní rozložení intenzit na stínítku.

V difrakčním integrálu jsme úplně zanedbali, že vyzařování nábojů není izotropní. Náboje jsou rozkmitávané v rovině přepážky a budou tedy vyzařovat nejvíce ve směru kolmo na tuto rovinu. Omezíme se na konstatování, že náš difrakční integrál platí pouze pro takovou oblast stínítka, která není příliš vzdálená od kolmice procházející otvorem v přepážce.

Nyní zavedeme kartézské souřadnice  $(X, Y)$  v rovině přepážky a  $(x, y)$  v rovině stínítka jako na obrázku 8.11. Vzdálenost rovin přepážky a stínítka označme  $L$ . Element plochy má vyjádření  $dS = dX dY$ .



Obrázek 8.11: Zavedení kartézských souřadnic  $(X, Y)$  pro rovinu přepážky a  $(x, y)$  pro rovinu stínítka. Vzdálenost  $r$  je pak vzdálenost mezi body  $(X, Y)$  a  $(x, y)$ , vzdálenost  $R$  je mezi počátkem roviny přepážky a bodem  $(x, y)$  v rovině stínítka. Vzdálenost rovnoběžných rovin přepážky a stínítka je  $L$ .

Vzdálenost  $r$  v difrakčním integrálu (8.27) má v takto zavedených souřadnicích vyjádření

$$r = r(x, y, X, Y), \quad r^2 = L^2 + (X - x)^2 + (Y - y)^2. \quad (8.28)$$

Tímto je difrakční úloha obecně vyřešená (samozřejmě se všemi omezeními, které naše odvození provázelo). Pro daný otvor  $B$  dokážeme pomocí difrakčního integrálu (8.27) určit elektrické pole  $\vec{E}(x, y)$  na stínítku a následně vypočítat i průběh intenzity  $I(x, y) = \langle \vec{E}^2(x, y) \rangle$ . Vzhledem k neznalosti amplitudy  $\vec{E}_0$  neurčujeme absolutní rozložení intenzity ale pouze relativní.

Na závěr vysvětleme pojem *Huygensův-Fresnelův princip*. Tento princip říká, že body otvoru v přepážce jsou zdrojem sférických vln (Huygensův princip) a výsledné pole za přepážkou získáme jako jejich superpozici (Huygensův-Fresnelův princip). Historicky byl tento princip postulován Fresnelem a přímo vede na difrakční integrál (8.27). My jsme zde tento integrál (a tedy i Huygensův-Fresnelův princip) odvodili na základě Babinetova principu, principu superpozice a studia vyzařování kmitajících nábojů.

### 8.2.4 Fraunhoferova difrakce

Difrakční integrál (8.27) je obecně na výpočet velmi složitý. My zde sérií aproximací dospějeme k nejjednodušší možné difrakci a tou je tzv. *Fraunhoferova difrakce*.

Zaveďme nyní vzdálenost  $R$ , která udává vzdálenost místa  $(x, y)$  na stínítku od počátku  $O$  roviny přepážky, ještě jednou viz obrázek 8.11. Souřadnicové vyjádření této vzdálenosti je

$$R^2 = L^2 + x^2 + y^2. \quad (8.29)$$

Vidíme, že tato nezávisí na souřadnicích  $(X, Y)$  a tedy z pohledu integrace v rovině přepážky je vzdálenost  $R$  konstantní. Budeme nyní chtít vyjádřit vzdálenost  $r$  pomocí vzdálenosti  $R$  a zanedbat některé členy, aby se výraz pod integrálem zjednodušil. Dosazením za  $L^2$  ve vyjádření  $r$  (8.28) z výrazu pro  $R$  (8.29) dostaneme

$$r^2 = R^2 + (X - x)^2 - x^2 + (Y - y)^2 - y^2. \quad (8.30)$$

Odmocněním a vytknutím  $R$  obdržíme hledaný výraz pro vztah mezi vzdálenostmi  $r$  a  $R$ :

$$r = R \sqrt{1 + \frac{(X - x)^2 - x^2 + (Y - y)^2 - y^2}{R^2}}. \quad (8.31)$$

Nyní aproximujme odmocninu použitím Taylorova rozvoje do prvního řádu,  $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ ; zde tedy musíme předpokládat, že rozměry otvoru v přepážce (rozsahy souřadnic  $X$  a  $Y$ ) a rozměr oblasti na stínítku, kde difrakční obrazec pozorujeme (rozsahy souřadnic  $x$  a  $y$ ) jsou mnohem menší než vzdálenost stínítku od přepážky  $L$  ( $R$  ve jmenovateli jsme odhadli vzdáleností  $L$ ):

$$r \approx R \left( 1 + \frac{(X^2 - 2Xx) + (Y^2 - 2Yy)}{2R^2} \right). \quad (8.32)$$

Zároveň, pokud je otvor v přepážce dostatečně malý, můžeme dále zanedbat kvadratické členy v souřadnicích přepážky  $X^2$  a  $Y^2$  vůči lineárním členům  $2Xx$  a  $2Yy$ . Co přesně se rozumí pojmem „dostatečně malý“ se dozvíme později, až odvodíme tzv. kritérium Fraunhoferovy difrakce. Po zanedbání kvadratických členů dospějeme k výsledné aproximaci pro vzdálenost  $r$  tvaru

$$r \approx R \left( 1 - \frac{Xx + Yy}{R^2} \right) = R - \frac{Xx + Yy}{R}. \quad (8.33)$$

Pokud bychom aproximovali ještě o trochu více, dostaneme jednoduše  $r \approx R$ . Nyní tyto aproximace dosadíme do difrakčního integrálu (8.27). Do fáze exponenciály dosadíme aproximaci (8.33) a do úbytku amplitudy onu ještě hrubší aproximaci  $r = R$ . Tímto dospějeme k *Fraunhoferově difrakčnímu integrálu*:

$$\vec{E}(x, y) = \frac{\vec{E}_0}{R} e^{i(\omega t - kR)} \int_B e^{i \frac{k}{R}(Xx + Yy)} dX dY. \quad (8.34)$$

Proč jsme použili pro amplitudu hrubší aproximaci než pro fázi? Fáze je pro jev interference důležitější než amplituda – fáze rozhoduje, jestli bude interference konstruktivní nebo destruktivní, naproti tomu amplitudy rozhodují pouze o tom, jak moc bude interference kontrastní<sup>4</sup>. Navíc ve funkci fáze vystupuje vlnové číslo  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , které je pro optické vlnové délky řádu  $10^7 \text{ m}^{-1}$ , tzn. i malé rozdíly fáze se velmi amplifikují velkým vlnovým číslem. Posledním dodatkem je, že pokud bychom použili ve funkci fáze aproximaci  $r \approx R$ , nedostali bychom vůbec žádnou netriviální interferenci.

<sup>4</sup>Tzn. jak velký bude jasový rozdíl mezi konstruktivní a destruktivní interferencí.

**Matematická vsuvka.** Označme nové proměnné  $u$  a  $v$  jako

$$u = \frac{k}{R} x, \quad v = \frac{k}{R} y \quad (8.35)$$

a zavedme tzv. *charakteristickou funkci*  $f(X, Y)$  množiny  $B$ ,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , tak, že

$$f(X, Y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } (X, Y) \in B \\ 0 & \text{pro } (X, Y) \notin B. \end{cases} \quad (8.36)$$

Potom integrál ve Fraunhoferově difrakčním integrálu získá tvar

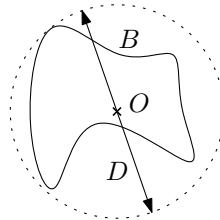
$$E(u, v) \propto \int_{\mathbb{R}^2} f(X, Y) e^{i(uX+vY)} dX dY. \quad (8.37)$$

Toto je 2D Fourierova transformace (srovnej s 1D Fourierovou transformací v sekci 3.2). Z matematického hlediska je tedy elektrické pole na stínítku předpovězené Fraunhoferovou difrakcí dáno dvourozměrnou Fourierovou transformací charakteristické funkce  $f$  otvoru v přepážce.

Odvodme nyní tzv. *kritérium Fraunhoferovy difrakce*, tzn. za jakých okolností můžeme bez obav zanedbat kvadratické členy ve výrazu (8.32). Pokud bychom je zanedbali, vyskytl by se v exponenciále ve funkci fáze dodatečný fázový posun tvaru

$$\Delta\varphi = k \frac{X^2 + Y^2}{2R}. \quad (8.38)$$

Pokud má tento dodatečný člen jen minimálně ovlivňovat výsledný interferenční obrazec, musí platit<sup>5</sup>  $\Delta\varphi \ll 1$ . Vyjádřeme vlnové číslo pomocí vlnové délky,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , a zavedme průměr  $D$  jako průměr myšleného kruhu, do kterého se již celý otvor  $B$  vejde, viz obrázek 8.12.



Obrázek 8.12: Průměr  $D$  myšleného kruhu, do kterého se již schová celý otvor v přepážce  $B$ .

Nyní můžeme ve výrazu pro fázový posun (8.38) použít odhady  $X^2 + Y^2 \leq \frac{1}{4}D^2$  a  $L \leq R$ :

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2 + Y^2}{2R} \leq \frac{\pi D^2}{4\lambda L} \ll 1 \quad (8.39)$$

Numerický faktor  $\frac{\pi}{4}$  zahodíme (zvětšíme na jedničku) a dospějeme tak k finálnímu kritériu Fraunhoferovy difrakce:

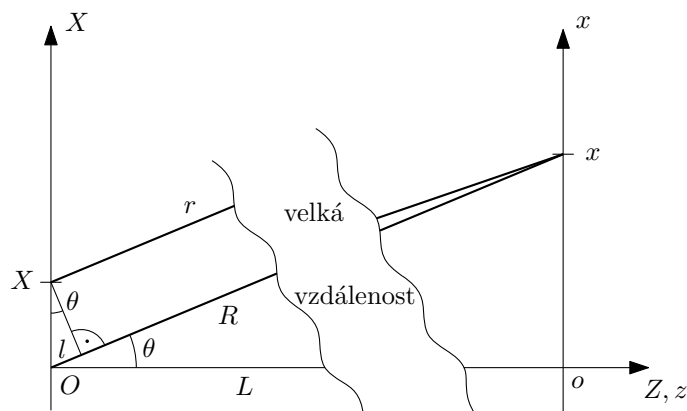
$$\boxed{L \gg \frac{D^2}{\lambda}, \quad D^2 \ll \lambda L.} \quad (8.40)$$

Výsledné kritérium tedy kvantifikuje, jak moc musí být stínítko vzdálené, případně jak moc malý musí být otvor v přepážce, abychom mohli bez obav použít Fraunhoferovu difrakci.

<sup>5</sup>Vidíme tedy, že jsme udělali určitý argumentační posun. Nakonec není až tak důležité, jak je kvadratický člen velký v porovnání s lineárním, ale jak moc přispěje do výsledného fázového posunu, kde změna fáze o  $\pi$  představuje rozdíl mezi konstruktivní a destruktivní interferencí.

V případě, že kritérium Fraunhoferovy difrakce není splněno, jedná se pak o *Fresnelovu difrakci*. Stejně tak hovoříme o Fresnelově difrakci v případě, že zdroj světla není dostatečně vzdálený od přepážky s otvorem, takže nemůžeme uvažovat, že na přepážku dopadají rovinné vlny. Touto složitější difrakcí se zde nebudeme zabývat.

Na závěr se podíváme na geometrický význam členu  $\frac{Xx+Yy}{R}$  ve Fraunhoferově integrálu. Bez újmy na obecnosti a pro větší jednoduchost položíme  $Y, y = 0$  a studujme výraz jen v rovině  $(x, z)$ , resp.  $(X, Z)$ . Situace je znázorněná na obrázku 8.13. Hlavní je zavedení úhlu  $\theta$ , který představuje úhel, pod kterým z počátku přepážky vidíme daný bod na stínítku, a vzdálenosti kolmého průmětu  $l$ , opět viz obrázek 8.13. Potom platí vztah  $l = X \sin \theta = X \frac{x}{R}$ . Velká vzdálenost stínítka zapříčiňuje, že paprsky vycházející z počátku přepážky a z bodu ve vzdálenosti  $X$  jsou téměř rovnoběžné a rozdíl jejich délek  $R - r$  je přibližně roven  $l$ . Ve Fraunhoferově aproximaci si tedy představujeme, že všechny paprsky dopadající v daném místě na stínítko vycházejí z příslušných bodů v otvoru  $B$  rovnoběžně pod úhlem  $\theta$  a dráhové rozdíly jsou pak dané prostě kolmým průmětem mezi jednotlivými paprsky.



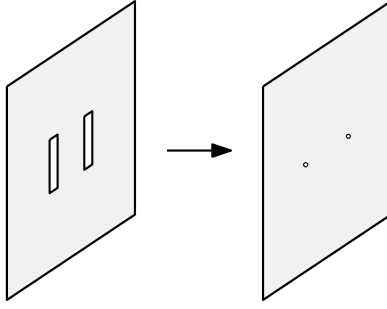
Obrázek 8.13: Geometrický význam funkce fáze ve Fraunhoferově difrakci. Úhel  $\theta$  se dá vyjádřit jako  $\sin \theta = \frac{x}{R}$ . Vzdálenost  $l$  je dána jako velikost odvěsny trojúhelníku vzniklého kolmým průmětem z bodu  $X$  na paprsek vycházející z počátku přepážky. Velikost  $l$  můžeme vyjádřit jako  $l = X \sin \theta = \frac{Xx}{R}$ .

V následujících sekcích budeme studovat aplikace Fraunhoferova integrálu na několika základních tvarech otvoru v přepážce.

### 8.2.5 Youngův pokus

Youngův pokus představuje studium difrakce na dvou obdélníkových štěrbinách. Hlavní rysy tohoto experimentu se zachovávají i v případě, že si celou situaci zjednodušíme náhradou obdélníkových otvorů za dva bodové otvory, viz schematický obrázek 8.14. Situaci si dále zjednodušíme tím, že výsledný difrakční obrazec budeme studovat pouze na ose  $x$ , tzn. pro  $y = 0$ . Je samozřejmě možné celou situaci spočítat s plným zachováním geometrie dvou obdélníkových štěrbin, viz cvičení příklad 11.7.



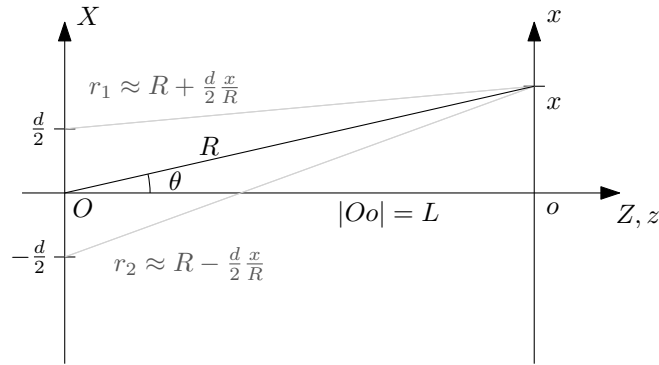


Obrázek 8.14: Youngův pokus na dvouštěrbíně. Pro jednoduchost výkladu provedeme náhradu obdélníkových štěrbin za bodové otvory.

Fraunhoferův integrál (8.34) se pak změní na pouhou sumu dvou členů,

$$\int_B \rightarrow \sum_{2 \text{ zdroje}}, \quad (8.41)$$

kde polohy zdrojů jsou  $Y = 0$  a  $X = \pm \frac{d}{2}$ , kde  $d$  označuje vzdálenost bodových otvorů v přepážce, viz obrázek 8.15.



Obrázek 8.15: Youngův pokus na dvouštěrbíně.

Konkrétně dostaneme následující vyjádření pro elektrické pole podél osy  $x$ ,  $\vec{E}(x)$ :

$$\begin{aligned} \vec{E}(x) &= \frac{\vec{E}_0}{R} e^{i(\omega t - kR)} \left( e^{i \frac{k}{R} \frac{d}{2} x} + e^{-i \frac{k}{R} \frac{d}{2} x} \right) = \frac{\vec{E}_0}{R} e^{i(\omega t - kR)} 2 \cos \left( \frac{k d}{R 2} x \right) \\ &= \frac{2\vec{E}_0}{R} e^{i(\omega t - kR)} \cos \left( \frac{1}{2} k d \sin \theta \right), \end{aligned} \quad (8.42)$$

kde jsme zavedli úhel  $\theta$  stejně jako na obrázku 8.13, tzn. jako  $\sin \theta = \frac{x}{R}$ , viz také obrázek 8.15. Intenzita pozorovaná na stínítku bude

$$I(\sin \theta) = \langle (\text{Re } \vec{E})^2 \rangle = \frac{4E_0^2}{R^2} \langle \cos^2(\omega t - kR) \rangle \cos^2 \left( \frac{1}{2} k d \sin \theta \right) = \frac{2E_0^2}{R^2} \cos^2 \left( \frac{1}{2} k d \sin \theta \right). \quad (8.43)$$

Intenzita samozřejmě slábne se zvětšující se vzdáleností od stínítka jako  $\frac{1}{R^2}$ , ale hlavní je interferenční člen daný kvadrátem kosinu. Body, kdy tento kosinus nabývá maxima jsou dány podmínkou

$$\frac{1}{2} k d \sin \theta = m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (8.44)$$

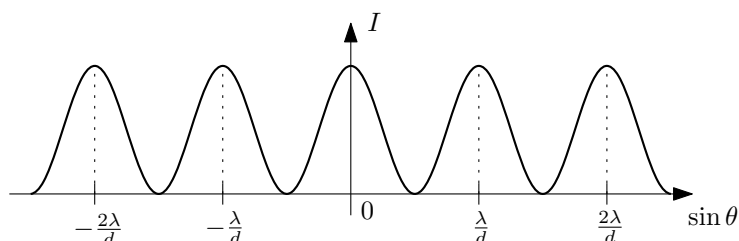
a tedy difrakční maxima jsou na stínítku vidět přibližně pod úhly

$$\boxed{\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{d}, \quad m \in \mathbb{Z}.} \quad (8.45)$$

Vidíme, že velikost „ohybu“ (tzn. jak moc je maximum odkloněno od přímého směru) je přímo úměrná vlnové délce  $\lambda$  – čím delší vlnová délka, tím více se světlo ohýbá – a nepřímo úměrná vzdálenosti štěrbin  $d$  – čím jsou štěrbin blíže, tím více jsou maxima vzdálená od přímého směru. Číslo  $m$  se nazývá *řád maxima* a maximální pozorovatelný řád je zřejmě dán následující podmínkou:

$$\sin \theta \leq 1 \quad m \frac{\lambda}{d} \leq 1 \quad m \leq \frac{d}{\lambda}. \quad (8.46)$$

Průběh intenzity na ose  $x$  na stínítku je zobrazen na obrázku 8.16 i s příslušně vyznačenými maximy.



Obrázek 8.16: Průběh intenzity na ose  $x$  na stínítku pro dva bodové zdroje znázorněné jako funkce proměnné  $\sin \theta$ . Maxima intenzity jsou v bodech  $\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{d}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

Pokud se zajímáme přímo o kartézské souřadnice difrakčních maxim na stínítku, stačí z definice  $\sin \theta = \frac{x}{R}$  vyjádřit  $x$ :

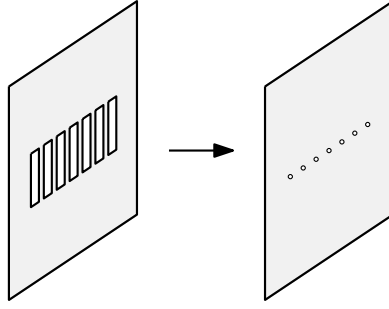
$$x_m = R_m \sin \theta_m \approx L m \frac{\lambda}{d}, \quad (8.47)$$

kde jsme pro jednoduchost uvažovali maxima v blízkosti počátku, kde můžeme aproximovat  $R = \sqrt{L^2 + x^2} \approx L$ . Vzdálenost sousedních difrakčních maxim na stínítku je pak

$$\boxed{\Delta x = x_{m+1} - x_m = L \frac{\lambda}{d}.} \quad (8.48)$$

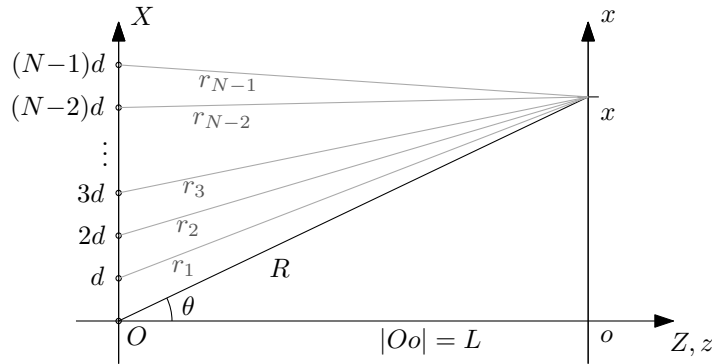
### 8.2.6 Difrakční mřížka

Zobecněním Youngova pokusu je případ *difrakční mřížky*, kdy počet obdélníkových štěrbin zobecníme na libovolné přirozené číslo  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N \geq 2$ . Opět si situaci zjednodušíme náhradou konečně velkých obdélníkových štěrbin za bodové otvory, viz obrázek 8.17. Průběh intenzity budeme zkoumat pouze na ose  $x$ . Vzdálenost sousedních bodů nechť je opět  $d$ .



Obrázek 8.17: Difrakční mřížka. Opět budeme pro jednoduchost uvažovat bodové otvory a intenzitu na stínítku na ose  $x$ .

Zavedme souřadnice v rovině přepážky tak, že první otvor leží v počátku a každý další leží v kladné části osy  $X$ , tj. na souřadnicích  $X_j = jd$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ , viz obrázek 8.18.



Obrázek 8.18: Zavedení souřadnic pro případ difrakční mřížky. Bodové otvory leží na souřadnicích  $X_j = jd$ ,  $j \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ . Vzdálenosti od jednotlivých otvorů k bodu na stínítku jsou ve Fraunhoferově aproximaci  $r_j \approx R - jd \frac{x}{R}$ .

Fraunhoferův integrál (8.34) je nyní, podobně jako v případě Youngova pokusu (viz např. (8.42)), suma sférických vln přes jednotlivé bodové otvory:

$$\vec{E}(x) = \frac{\vec{E}_0}{R} e^{i(\omega t - kR)} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i \frac{k}{R} (jd)x} = \frac{\vec{E}_0}{R} e^{i(\omega t - kR)} \sum_{j=0}^{N-1} \left( e^{i \frac{k}{R} xd} \right)^j. \quad (8.49)$$

Na sumu použijeme vzorec pro součet konečné geometrické řady,

$$\sum_{k=0}^{N-1} x^k = \frac{x^N - 1}{x - 1}, \quad (8.50)$$

a výsledný výraz si vhodně rozšíříme, abychom se nakonec zbavili co nejvíce komplexních exponenciál převodem na goniometrické funkce:

$$\vec{E}(x) = \frac{\vec{E}_0}{R} e^{i(\omega t - kR)} \frac{e^{i \frac{k}{R} Nxd} - 1}{e^{i \frac{k}{R} xd} - 1} \cdot \frac{e^{-i \frac{k}{R} x \frac{d}{2}}}{e^{-i \frac{k}{R} x \frac{d}{2}}} \cdot \frac{e^{-i \frac{k}{R} N x \frac{d}{2}}}{e^{-i \frac{k}{R} N x \frac{d}{2}}}. \quad (8.51)$$

Pak již jen upravujeme:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{R} e^{i(\omega t - kR)} \frac{e^{i \frac{1}{2} kdN \frac{x}{R}} - e^{-i \frac{1}{2} kdN \frac{x}{R}}}{e^{i \frac{1}{2} kd \frac{x}{R}} - e^{-i \frac{1}{2} kd \frac{x}{R}}} e^{-i \frac{1}{2} kd(N-1) \frac{x}{R}} = \frac{\vec{E}_0}{R} e^{i(\omega t - kR - \frac{1}{2} kd(N-1) \frac{x}{R})} \frac{\sin \left( \frac{k}{R} N x \frac{d}{2} \right)}{\sin \left( \frac{k}{R} x \frac{d}{2} \right)}. \quad (8.52)$$

Výsledná intenzita na stínítku zapsaná pomocí úhlu  $\theta$ ,  $\sin \theta = \frac{x}{R}$ , je

$$I = \langle (\text{Re } \vec{E})^2 \rangle = \frac{E_0^2}{2R^2} \left( \frac{\sin(\frac{1}{2}kNd \sin \theta)}{\sin(\frac{1}{2}kd \sin \theta)} \right)^2. \quad (8.53)$$

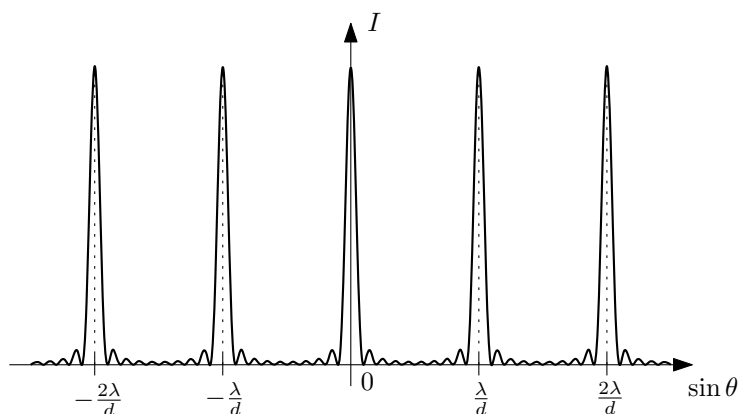
Zkoumejme nyní, stejně jako u Youngova pokusu, polohu difrakčních maxim. Tyto jsou nyní dané nulovým jmenovatelem (limita intenzity ale samozřejmě vyjde konečná). Jmenovatel je nulový za podmínky

$$\frac{1}{2}kd \sin \theta = m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (8.54)$$

Tato podmínka je ale úplně stejná jako v případě dvojštěrbiny! Viz podmínka (8.44). Tzn. můžeme převzít výsledky o úhlové poloze difrakčních maxim (8.45), počtu difrakčních maxim (8.46) a vzdálenosti maxim na stínítku (8.48):

$$\boxed{\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{d}, \quad m \leq \frac{d}{\lambda}, \quad \Delta x = L \frac{\lambda}{d}.} \quad (8.55)$$

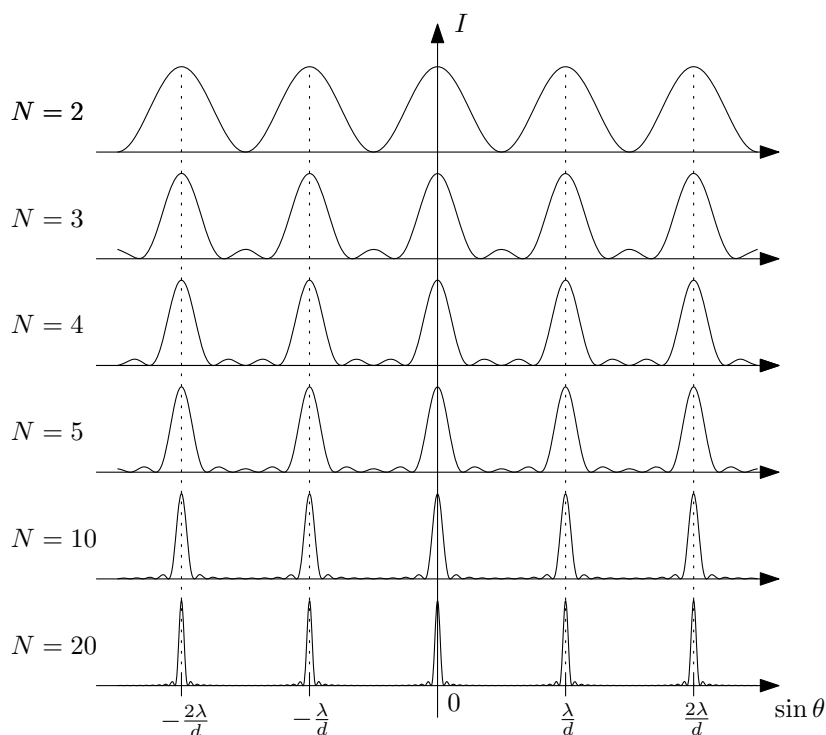
Jak se tedy liší případ difrakční mřížky od Youngova pokusu se dvěma štěrbinami? Podívejme se na graf intenzity na ose  $x$  na stínítku na obrázku 8.19 pro  $N = 10$ . Difrakční maxima jsou užší v závislosti na počtu štěrbin, toto zužování je znázorněné na obrázku 8.20.



Obrázek 8.19: Průběh intenzity na ose  $x$  na stínítku pro difrakční mřížku znázorněné jako funkce proměnné  $\sin \theta$ . Maxima intenzity jsou v bodech  $\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{d}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Zde je konkrétně znázorněn případ pro  $N = 10$  štěrbin.

Šířku difrakčního maxima definujeme pro jednoduchost jako vzdálenost bodů, kdy intenzita poprvé okolo tohoto maxima dosahuje nulové hodnoty. Tyto body jsou dány prvními nulami čitatele v intenzitě (8.53), kdy je jmenovatel zároveň nenulový. Pro centrální maximum dostáváme:

$$\frac{1}{2}kNd \sin \theta_{\pm} = \pm\pi, \quad \sin \theta_{\pm} = \pm \frac{1}{N} \frac{\lambda}{d}. \quad (8.56)$$



Obrázek 8.20: Šířka difrakčních maxim pro různý počet štěrbin v difrakční mřížce. Poloha maxim zůstává stejná, mění se jen jejich šířka nepřímo úměrně s počtem štěrbin.

Pro šířku maxima  $\Delta(\sin \theta)$  máme:

$$\Delta(\sin \theta) = \sin \theta_+ - \sin \theta_- = \frac{2 \lambda}{N d}, \quad \Delta \theta \approx \frac{2 \lambda}{N d}, \quad (8.57)$$

kde jsme aproximovali  $\sin \theta \approx \theta$ .

Difrakční mřížka se často používá jako spektrometr. Úhly, pod kterými pozorujeme difrakční maxima (s výjimkou centrálního maxima), závisí na vlnové délce světla. Dopadá-li tedy na difrakční mřížku světlo složené z více vlnových délek, na stínítku se maxima pro jednotlivé vlnové délky zobrazí v různých bodech. Na stínítku pak můžeme určit, z kterých vlnových délek se světlo dopadající na difrakční mřížku skládá – můžeme tedy určit jeho spektrum.

Nesmíme ale zapomenout na fakt, že difrakční maxima mají konečnou šířku. Budou-li tedy ve spektru přítomné příliš blízké vlnové délky, na stínítku je nebudeme schopni rozlišit. Jednoduché kritérium rozlišovací schopnosti mřížky je takové, že vzdálenost difrakčních maxim příslušejících jednotlivým vlnovým délkám musí být větší než je šířka těchto difrakčních maxim. Poloha difrakčních maxim pro dvě vlnové délky  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  je

$$\sin \theta_1 = m \frac{\lambda_1}{d}, \quad \sin \theta_2 = m \frac{\lambda_2}{d}. \quad (8.58)$$

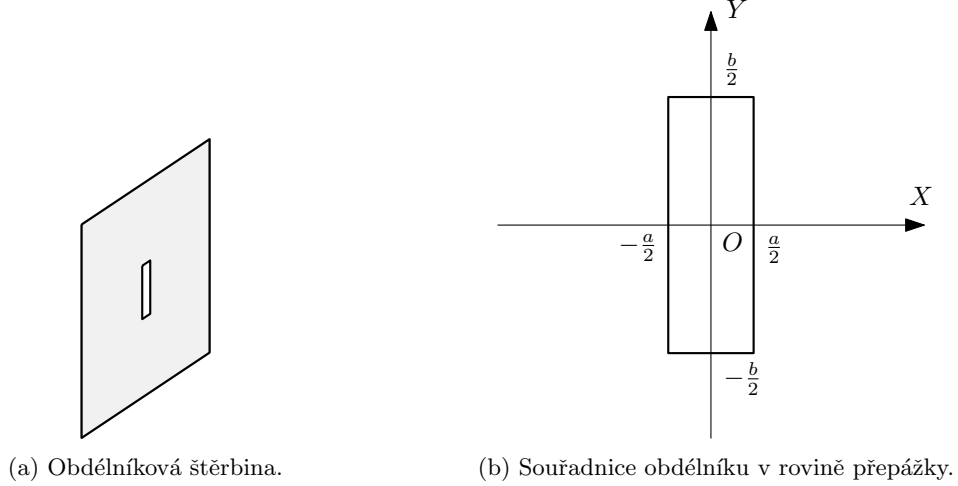
Chceme, aby vzdálenost maxim byla větší než šířka těchto maxim:

$$m \left| \frac{\lambda_1}{d} - \frac{\lambda_2}{d} \right| > \frac{2 \lambda}{N d}, \quad |\lambda_1 - \lambda_2| > \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{m N}. \quad (8.59)$$

kde jsme pro šířku maxim zvolili pro jednoduchost střední vlnovou délku  $\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ .

### 8.2.7 Štěrbina konečné šířky

Poslední aplikací Fraunhoferova integrálu, kterou si detailně ukážeme, je difrakce na jedné obdélníkové štěrbině, viz schematický obrázek 8.21 vlevo.



(a) Obdélníková štěrbina.

(b) Souřadnice obdélníku v rovině přepážky.

Obrázek 8.21: Difrakce na obdélníkové štěrbině s rozměry  $a \times b$ .

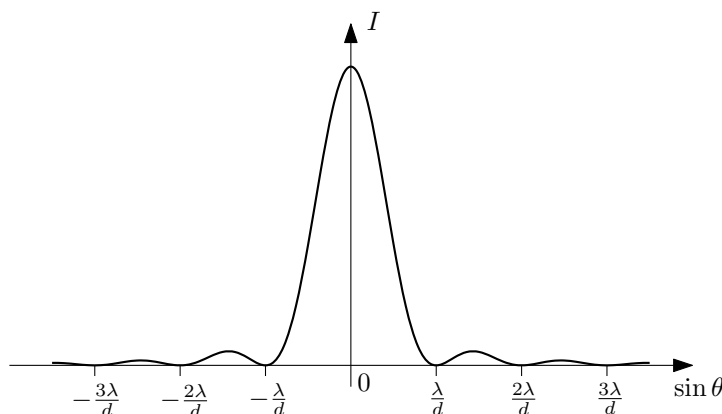
Přímým použitím Fraunhoferova integrálu (8.34), kde souřadnicové vyjádření obdélníkové štěrbině  $B$  je znázorněno na obrázku 8.21 vpravo, ukážeme:

$$\begin{aligned}
 E(x, y) &\propto \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} e^{i\frac{k}{R}(xX+yY)} dX dY = \left( \int_{-a/2}^{a/2} e^{i\frac{k}{R}xX} dX \right) \left( \int_{-b/2}^{b/2} e^{i\frac{k}{R}yY} dY \right) \\
 &= \left[ \frac{1}{i\frac{k}{R}x} e^{i\frac{k}{R}xX} \right]_{-a/2}^{a/2} \left[ \frac{1}{i\frac{k}{R}y} e^{i\frac{k}{R}yY} \right]_{-b/2}^{b/2} = 4 \frac{\sin\left(\frac{k}{R}\frac{a}{2}x\right)}{\frac{k}{R}x} \frac{\sin\left(\frac{k}{R}\frac{b}{2}y\right)}{\frac{k}{R}y} \\
 &= ab \frac{\sin\left(\frac{1}{2}ka\frac{x}{R}\right)}{\frac{1}{2}ka\frac{x}{R}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{2}kb\frac{y}{R}\right)}{\frac{1}{2}kb\frac{y}{R}}. \tag{8.60}
 \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že neumíme určit amplitudu  $\vec{E}_0$  v difrakčním integrálu, omezili jsme se pouze na výpočet vlastního (fázového) integrálu. Pokud se budeme dále zajímat pouze o průběh elektrického pole a intenzity na ose  $x$  (tzn. budeme uvažovat  $y = 0$ ), dostaneme výrazy

$$E(x, 0) \propto \frac{\sin\left(\frac{1}{2}kd \sin \theta\right)}{\frac{1}{2}kd \sin \theta}, \quad I(x, 0) \propto \left( \frac{\sin\left(\frac{1}{2}kd \sin \theta\right)}{\frac{1}{2}kd \sin \theta} \right)^2, \tag{8.61}$$

kde jsme symbolem  $d = a$  označili šířku štěrbině ve směru osy  $x$  a opět zavedli úhel  $\theta$  jako  $\sin \theta = \frac{x}{R}$ . Funkce intenzity (v proměnné  $\sin \theta$  již není periodická, ale má tvar funkce  $\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$ , kde  $u = \frac{1}{2}kd \sin \theta$ ). Graf intenzity na ose  $x$  je na obrázku 8.22.



Obrázek 8.22: Průběh intenzity na ose  $x$  na stínítku pro štěrbinu šířky znázorněné jako funkce proměnné  $\sin \theta$ . Poloha minim je v bodech  $\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{d}$ ,  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

Šířka centrálního maxima je daná vzdáleností prvních nul intenzity, tzn.

$$\frac{1}{2}kd \sin \theta_{\pm} = \pm \pi, \quad \Delta(\sin \theta) = \sin \theta_+ - \sin \theta_- = \frac{2\lambda}{d}, \quad \Delta\theta \approx \frac{2\lambda}{d}. \quad (8.62)$$

Úhlové velikosti hlavního maxima  $\Delta\theta$  se také jinak říká velikost *úhlové rozbíhavosti paprsku*. Jakmile je šíření elektromagnetické vlny omezeno otvorem nějaké velikosti, dochází na tomto otvoru k difrakci a paprsek za otvorem nezůstává stále stejně velký, ale rozšiřuje se mírou danou příslušnou úhlovou rozbíhavostí. Příkladem omezení je například konečná velikost výstupního otvoru laserového systému, konečná velikost čočky dalekohledu, atp. Jinak řečeno, nelze dosáhnout přesné „rovnoběžnosti“ prostorově omezeného paprsku, ale vždy se vlivem difrakce bude rozbíhat.

Dále se podíváme na polohu minim. Tyto polohy jsou dány nulovostí čitatele, tzn.

$$\frac{1}{2}kd \sin \theta = m\pi, \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (8.63)$$

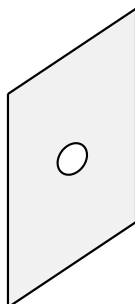
což je opět stejná podmínka jako v případě Youngova pokusu anebo difrakční mřížky (jen jde teď o minima místo maxim), tzn. platí stejné vztahy,

$$\boxed{\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{d}, \quad m \leq \frac{d}{\lambda}, \quad \Delta x = L \frac{\lambda}{d}}, \quad (8.64)$$

pro polohu minim, počet viditelných minim a vzdálenost minim na stínítku.

### 8.2.8 Difrakce na kruhovém otvoru

Přirozeně se nabízí se ptát, jak bude vypadat difrakce na kruhovém otvoru? Očekáváme, že jelikož má otvor rotační symetrii, bude mít stejnou symetrii i difrakční obrazec.



Obrázek 8.23: Difrakce na kruhovém otvoru.

Při výpočtu difrakčního obrazce se jeví jako výhodné nezavádět do roviny přepážky a stínítka kartézské souřadnice  $X, Y$  a  $x, y$ , ale polární souřadnice  $\rho, \phi$  a  $r, \varphi$ . Ze symetrie úlohy pak bude výsledná intenzita závislá pouze na souřadnici  $r$ ,  $I(r)$ . Bohužel přes zdánlivou jednoduchost této úlohy vede výsledný difrakční integrál na speciální funkce zvané Besselovy  $J_n(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Výsledná difrakční intenzita má tvar

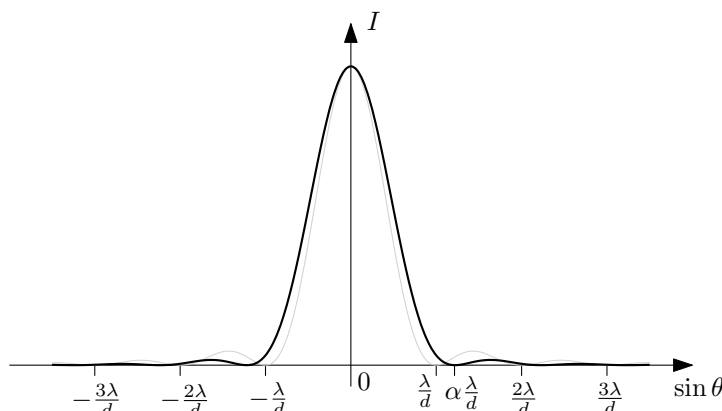
$$I(\sin \theta) \propto \left( \frac{J_1(\frac{1}{2}kd \sin \theta)}{\frac{1}{2}kd \sin \theta} \right)^2, \quad (8.65)$$

kde  $d$  je průměr otvoru a  $\sin \theta = \frac{r}{R} = \frac{r}{\sqrt{L^2+r^2}}$ . Besselovy funkce mohou být definovány integrály

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nu - x \sin u) du. \quad (8.66)$$

Tvar funkce  $I(\sin \theta)$  je znázorněn na obrázku 8.24. Centrální maximum, které je definované polohami prvních nulových bodů intenzity  $I$  je určené první nulou funkce  $J_1(x)$  pro  $x > 0$ . Hodnota  $x$  se nedá analyticky vyčíslit, takže ji zapišme ve tvaru  $x = \alpha\pi$ , kde  $\alpha \approx 1,22$ . Potom polohy prvních minim na stínítku budou na pozicích

$$\sin \theta = \pm \alpha \frac{\lambda}{d}. \quad (8.67)$$



Obrázek 8.24: Tvar funkce  $I(\sin \theta)$  pro difrakci na kruhovém otvoru – znázorněna černou barvou. Šedou barvou je pro srovnání zobrazen průběh funkce  $I(\sin \theta)$  na (obdélníkové) štěrbině šířky  $d$ . Centrální maximum pro kruhový otvor je o něco širší než pro štěrbinu.

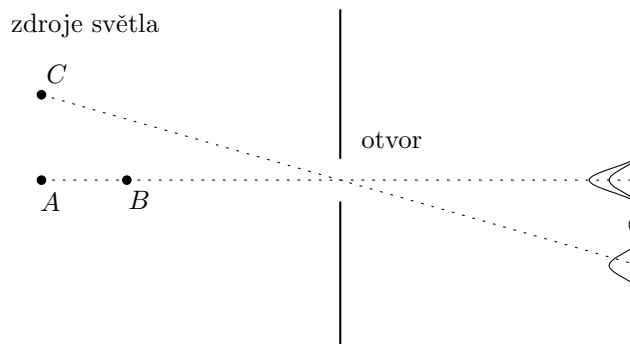
### 8.2.9 Vliv koherence na viditelnost difrakčního obrazce

Nyní se zabývejme otázkou, co může znemožnit pozorování jevu difrakce. Jelikož je difrakce interferenčním jevem, tak na její viditelnost bude mít vliv koherence světelného zdroje, který difrakci vyvolává.

Jev difrakce je vyvolaný dráhovými rozdíly (a tím vyvolanými fázovými rozdíly) vln vznikajících na otvoru přepážky (Babinetův princip) a dopadajících na konkrétní místo stínítka. Jestliže přepážku osvěcujeme bodovým zdrojem světla s dobou časové koherence  $t_{\text{koh}}$ , pak rozdíl drah jednotlivých paprsků musí být mnohem menší než  $ct_{\text{koh}}$ . Na konci kapitoly 8.2.4 o Fraunhoferově difrakci jsme ukázali, že rozdíl drah je velikosti  $d \sin \theta$ , kde  $d$  je velikost otvoru v přepážce. Pro tepelné zdroje máme  $t_{\text{koh}} \approx 10^{-9}$  s a tedy  $ct_{\text{koh}} \approx 30$  cm. Časová koherence tepelných zdrojů tedy nebude problém pro otvory v přepážce mnohem menší než 30 centimetrů. V opačném případě se bude snižovat kontrast interferenčního obrazce a tedy i viditelnost difrakce.



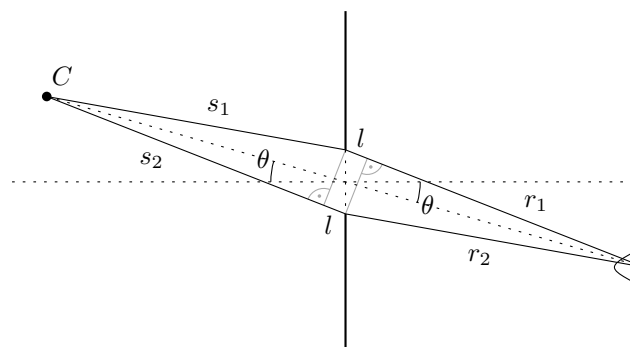
Jak to bude v případě nebodového zdroje světla? V tepelném nebodovém zdroji jsou jeho jednotlivé body zdrojem prostorově nekoherentních vln – na základě znalosti vlny vyzařované z jednoho bodu zdroje nedokážeme předpovědět vlnu vycházející z jiného místa zdroje. Jako jednoduchý příklad uvažujme nebodový zdroj světla skládající se ze tří diskrétních bodových zdrojů jako na obrázku 8.25.



Obrázek 8.25: Nebodový zdroj světla tvořený body  $A$ ,  $B$  a  $C$ . Body  $A$  a  $B$  jsou umístěné na ose otvoru kolmé k přepážce (a stínítka). Bod  $C$  je naopak vyosený. Na stínítka jsou pak schematicky znázorněné difrakční obrazce od individuálních zdrojů  $A$ ,  $B$  a  $C$ .

V části o vlivu koherence na viditelnost interference jsme si ukázali, že nekoherentní vlny spolu neinterferují – tedy intenzity od jednotlivých vln se prostě sčítají. Takže obrazce od zdrojů  $A$  a  $B$  se jednoduše překryjí a interferenční obrazec zůstane nezměněn (viz schematické grafy na stínítka na obrázku 8.25). Zbývá nyní určit, jak bude vypadat difrakční obrazec od zdroje  $C$  – tedy zdroje příčně posunutého mimo osu otvoru v přepážce. Tuto situaci jsme zatím vůbec neuvažovali – vždy jsme brali rovinné vlny dopadající kolmo na přepážku.

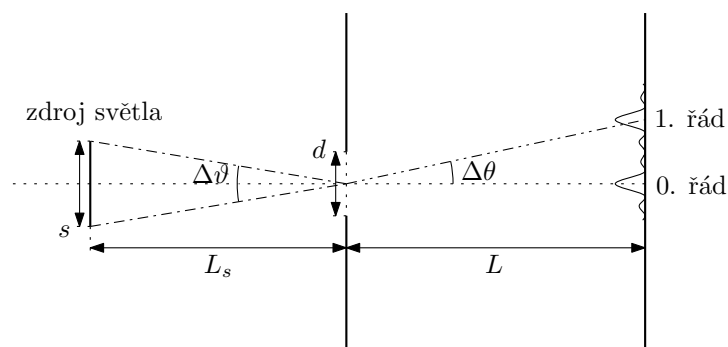
Odpověď je naštěstí poměrně jednoduchá. V takovém případě bude hlavní difrakční maximum posunuto mimo osu otvoru tak, aby přímka procházející zdrojem  $C$  a maximem na stínítka procházela středem otvoru v přepážce, viz obrázek 8.26.



Obrázek 8.26: Dráhy krajních paprsků vycházející ze zdroje  $C$  dopadající na jedno místo na stínítka. Délky těchto paprsků jsou  $s_1 + r_1$  a  $s_2 + r_2$ . Konstruktivní interference vzniká tam, kde se tyto dráhy rovnají. V takovém případě navíc platí  $s_2 - s_1 = r_2 - r_1 = l = d \sin \theta$ , kde  $d$  je velikost otvoru.

Posun zdroje mimo osu otvoru v přepážce tedy způsobuje posun difrakčního obrazce na stínítka. Superpozice difrakčních obrazců od velmi blízkých zdrojů  $A$  a  $C$  tak bude jevit jako rozmazání difrakčního obrazce způsobeného pouze zdrojem  $A$ . Spojitě rozložený (nebodový) zdroj světla pak bude na stínítka vytvářet nekonečnou superpozici neinterferujících difrakčních obrazců – tato superpozice se bude jevit jako rozmazání původního difrakčního obrazce. V případě, že rozměr zdroje světla bude natolik velký, že poloha hlavních difrakčních maxim od

krajních bodů zdroje světla dosáhne na difrakční maxima prvního řádu od centrálních bodů zdroje světla, difrakční obrazec zcela vymizí. Předchozí věta poslouží jako kritérium pro určení limitu velikosti zdroje světla, aby nebylo rozmazání difrakčního obrazce příliš velké. Podívejme se na obrázek 8.27, kde zavedeme potřebné geometrické veličiny.



Obrázek 8.27: Uvažujeme zdroj světla právě takové šířky  $s$  ve vzdálenosti  $L_s$  od přepážky (s úhlovou velikostí  $\Delta\vartheta$ ), že způsobuje překryv maxima nultého řádu od krajních bodů zdroje s maximem prvního řádu od centrálních bodů zdroje.

Kvantitativně požadavek dostatečné nerozmazanosti zapíšeme jako

$$\boxed{\Delta\vartheta \ll \Delta\theta.} \quad (8.68)$$

Vzdálenost interferenčních maxim pro bodový zdroj světla je  $\Delta\theta = \frac{\lambda}{d}$  a pro malé  $\Delta\vartheta$  můžeme psát  $\Delta\vartheta \approx \frac{s}{L_s}$ . Můžeme pak dostat různé tvary nerovnosti (8.68) dle konkrétní aplikace:

$$\frac{s}{L_s} \ll \frac{\lambda}{d}, \quad \text{resp.} \quad s \ll L_s \frac{\lambda}{d}, \quad \text{resp.} \quad d \ll \frac{\lambda}{\Delta\vartheta}. \quad (8.69)$$

Na závěr uveďme malý příklad. Úhlová velikost Slunce na obloze je asi  $\Delta\vartheta = 30'$ . Uvažujme, že dominantní vlnová délka ve viditelném světle je  $\lambda = 600 \text{ nm}$ , poté nám výše uvedené kritérium dává  $d \ll 70 \mu\text{m}$ . Abychom tedy mohli pozorovat ohyb slunečního světla, muselo by procházet otvory menšími než  $70 \mu\text{m} < 0,1 \text{ mm}$ !

## Kapitola 9

# \*Geometrická optika

### 9.1 \*Přechod od vlnové optiky k optice geometrické

Pojmy, se kterými jsme pracovali doposud – ve vlnové optice – byly například: vlna, amplituda, vlnoplocha, interference. Naproti tomu v geometrické optice je hlavním pojmem paprsek. Naším hlavním úkolem tedy bude zavést tento pojem – k tomu budeme muset udělat některé aproximace, které budou znamenat, že geometrická optika bude pouze přibližnou teorií šíření světla. Uvidíme, že naše aproximace bude vyžadovat  $\lambda \rightarrow 0$ , tedy v geometrické optice, mimo jiné, úplně zanedbáme difrakční jevy, které jsou přímo úměrné vlnové délce  $\lambda$ .

V kapitole o rovinných elektromagnetických vlnách jsme ukázali, že jednotlivé složky elektrického a magnetického pole se řídí vlnovou rovnicí:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \Delta \psi, \quad \psi \in \{E_i, B_j\}. \quad (9.1)$$

Rozložme obecně vlnu  $\psi(\vec{r}, t)$  řešící vlnovou rovnici (9.1) na funkci „amplitudy“  $A(\vec{r}, t)$  a funkci fáze  $\varphi(\vec{r}, t)$  jako

$$\psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t) e^{i\varphi(\vec{r}, t)}. \quad (9.2)$$

Bez dodatečných předpokladů je tento rozklad zcela nejednoznačný. Budeme tedy požadovat, že funkce amplitudy  $A$  se mění jen velmi pomalu na vzdálenostech řádu  $\lambda$ . Naproti tomu funkce fáze  $\varphi$  se bude měnit velmi rychle – o hodnotu  $2\pi$  na vzdálenost  $\lambda$ .

Nyní budeme chtít v prostoru najít, mimo jiné, tzv. *lokální směry šíření* udávající, kterým směrem se v každém bodě prostoru vlna šíří. U rovinné postupné harmonické vlny je situace jednoduchá – směr šíření je v prostoru všude stejný a dán vlnovým vektorem  $\vec{k}$ , který je zároveň kolmý na rovinné vlnoplochy (plochy konstantní fáze) všude v prostoru – v tomto případě můžeme mluvit o globálním vlnovém vektoru  $\vec{k}$ . Lokální směry pro obecnou vlnoplochu získáme tak, že jednotlivé malé části vlnoplochy budeme aproximovat rovinou a porovnáním s příslušnou ekvivalentní rovinnou postupnou vlnou zjistíme příslušné lokální veličiny.

Rozvíňme tedy funkci fáze  $\varphi(\vec{r}, t)$  do prvního řádu Taylorova rozvoje v proměnných  $\vec{r}$  a  $t$  okolo bodu  $\vec{r}_0$  v čase  $t_0$ :

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}, t) &= \varphi(\vec{r}_0, t_0) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi(\vec{r}_0, t_0)}{\partial x_j} (x_j - x_{j0}) + \frac{\partial \varphi(\vec{r}_0, t_0)}{\partial t} (t - t_0) + \dots \\ &= \varphi(\vec{r}_0, t_0) + \text{grad } \varphi(\vec{r}_0, t_0) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) + \frac{\partial \varphi(\vec{r}_0, t_0)}{\partial t} (t - t_0) + \dots \end{aligned} \quad (9.3)$$

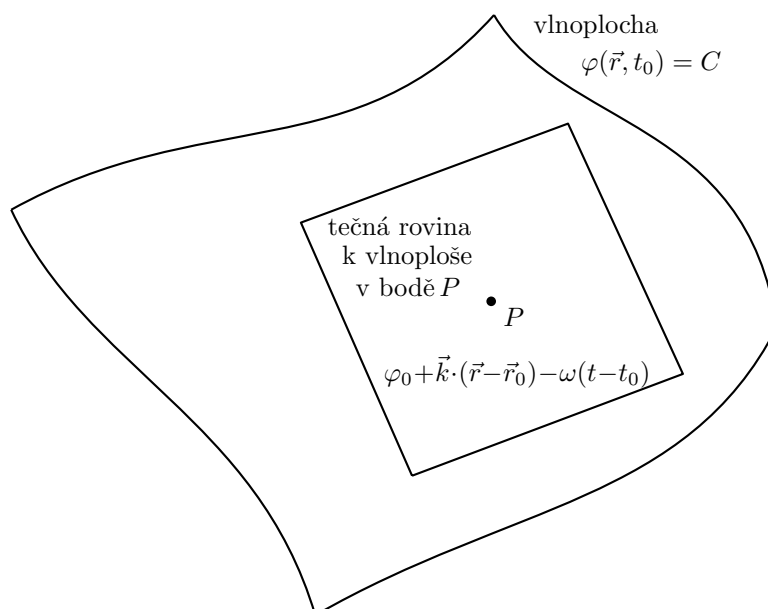
Vidíme, že v prvním řádu můžeme funkci fáze napsat jako

$$\varphi(\vec{r}, t) = \varphi_0 + \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) - \omega(t - t_0), \quad (9.4)$$

kde

$$\vec{k} = \text{grad } \varphi, \quad \omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (9.5)$$

Rozvojem funkce fáze  $\varphi(\vec{r}, t)$  do prvního řádu Taylorova polynomu okolo bodu  $(\vec{r}_0, t_0)$  jsme obecnou vlnoplochu danou rovnicí  $\varphi(\vec{r}, t) = \text{konst.}$  nahradili okolo bodu  $\vec{r}_0$  v čase  $t_0$  rovinnou postupnou vlnou, viz schematický obrázek 9.1. Vektorové pole  $\vec{k}(\vec{r}, t)$ , resp. skalární pole  $\omega(\vec{r}, t)$ , nazveme *lokální vlnový vektor*, resp. *lokální úhlová frekvence*. Přirozeně lokální vlnový vektor  $\vec{k}$  definuje *lokální vlnové číslo*  $k(\vec{r}, t) = |\vec{k}(\vec{r}, t)|$ , *lokální vlnovou délku*  $\lambda(\vec{r}, t) = \frac{2\pi}{k(\vec{r}, t)}$  a lokální směr šíření  $\vec{n}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{k}(\vec{r}, t)}{k(\vec{r}, t)}$ . Analogicky můžeme definovat tzv. *lokální rychlost šíření*  $v(\vec{r}, t) = \frac{\omega(\vec{r}, t)}{k(\vec{r}, t)}$ , případně její vektorový tvar přidáním směru šíření  $\vec{v}(\vec{r}, t) = v(\vec{r}, t) \vec{n}(\vec{r}, t)$ . Jelikož vektor  $\vec{k}$  je dán jako gradient funkce fáze,  $\vec{k} = \text{grad } \varphi$ , je tento díky vlastnosti gradientu kolmý k vlnoplochám; to samé platí i pro lokální rychlost  $\vec{v}$ , jelikož je pouhým násobkem vlnového vektoru,  $\vec{v} \propto \vec{k}$ .

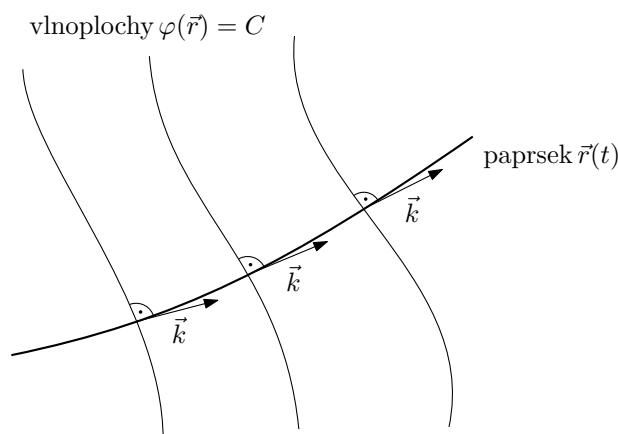


Obrázek 9.1: Náhrada přesné vlnoplochy v čase  $t_0$  rovinou v bodě  $P$  (jehož poloha je popsána vektorem  $\vec{r}_0$ ).

Paprsky, ústřední pojem geometrické optiky, definujeme jako křivky  $\vec{r}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  splňující diferenciální rovnici

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(\vec{r}(t), t), \quad (9.6)$$

kde napravo vystupuje lokální rychlost šíření v aktuálním místě „konce“ paprsku. Tato rovnice je jednoduše vyjádření požadavku, že rychlost paprsku  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  je v každém bodě rovna lokální rychlosti šíření  $\vec{v}$ . Křivkám, jejichž derivace se rovná nějakému zadanému vektorovému poli, se obecně v matematice říká *integrální křivky* (daného vektorového pole). Jelikož rychlost  $\vec{v}$  je všude kolmá na vlnoplochy, i paprsky jsou v každém bodě kolmé na vlnoplochy, kterými procházejí. Schematicky je průběh paprsků vůči vlnoplochám znázorněn na obrázku 9.2.



Obrázek 9.2: Paprsek jako integrální křivka vektorového pole  $\vec{v}$ , resp.  $\vec{k}$ . Jelikož vektor  $\vec{k} = \text{grad } \varphi$  je všude kolmý na vlnplochy, jsou i paprsky všude kolmé na vlnplochy.

Čistě na základě znalosti funkce fáze  $\varphi(\vec{r}, t)$  jsme dokázali definovat lokální vlnové veličiny a z nich odvodit dráhy paprsků v dané vlně. Nyní musíme najít diferenciální rovnici, která bude funkci fáze určovat. Funkci fáze jsme definovali jako část „celkové“ vlny  $\psi(\vec{r}, t)$  splňující vlnovou rovnici (9.1) dle ansatzu (9.2). Spočtěme nejprve jednotlivé derivace tohoto ansatzu vyskytující se ve vlnové rovnici:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[ \frac{\partial A}{\partial t} + iA \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] e^{i\varphi}, \quad (9.7)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + iA \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] e^{i\varphi}, \quad (9.8)$$

a analogicky pro prostorové derivace dostaneme

$$\Delta \psi = \sum_{j=1}^3 \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial x_j^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + iA \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} - A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)^2 \right] e^{i\varphi}. \quad (9.9)$$

Nyní chceme odhadnout velikosti jednotlivých členů v derivacích (9.8) a (9.9) na základě aproximací plynoucí jednak z pomalé změny funkce amplitudy  $A$  a také z aproximace geometrické optiky, kdy uvažujeme  $\lambda \rightarrow 0$  (a tedy  $k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow +\infty$ ,  $\omega = vk \rightarrow +\infty$ ). Dle (9.5) jsou první prostorové derivace  $\varphi$  úměrné první mocnině velikosti vlnového čísla  $k$  a první časová derivace  $\varphi$  také (jelikož  $\omega$  je přímo úměrná  $k$ ):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \propto k^1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} \propto k^1, \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)^2 \propto k^2, \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \propto k^2. \quad (9.10)$$

Amplituda a její derivace se se změnou vlnové délky nijak významně nemění, tzn. můžeme psát

$$A \propto k^0, \quad \frac{\partial A}{\partial x_j} \propto k^0, \quad \frac{\partial A}{\partial t} \propto k^0, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x_j^2} \propto k^0, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \propto k^0. \quad (9.11)$$

Jak to bude s druhými derivacemi funkce fáze? Tyto představují změnu vlnového vektoru v prostoru a změnu úhlové frekvence v čase. O těchto také předpokládáme, že se mění pomalu a velikost jejich změny neškáluje s velikostí  $k$ , můžeme tedy uvažovat

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} \propto k^0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \propto k^0. \quad (9.12)$$

V limitě  $k \rightarrow +\infty$  pak v derivacích (9.8) a (9.9) zůstanou pouze členy s nejvyšší mocninou  $k$  – toto jsou právě kvadratické členy prvních derivací, které jsou úměrné  $k^2$ . Z vlnové rovnice pak v aproximaci geometrické optiky zůstane pouze

$$\boxed{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 = v^2 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2.} \quad (9.13)$$

Tato rovnice se nazývá *rovnici eikonálu*. V tomto textu dále uvažujme, že všude v prostoru máme monochromatickou vlnu o úhlové frekvenci  $\omega_0$ , tedy platí

$$-\frac{\partial\varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \omega(\vec{r}, t) = \omega_0 = \text{konst.} \quad (9.14)$$

Pokud tuto jednoduchou diferenciální rovnici vyřešíme, dostaneme následující tvar funkce fáze:

$$\varphi(\vec{r}, t) = -\omega_0 t + \varphi_0(\vec{r}), \quad (9.15)$$

kde funkce  $\varphi_0(\vec{r})$  vznikla jako integrační konstanta při integrování podle času. Ve funkci fáze se nám separovala závislost na čase a prostoru, a časová závislost je velmi triviální. Dosazením do rovnice eikonálu (9.13) dostaneme

$$\boxed{\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_j}\right)^2 = \frac{\omega_0^2}{v^2}.} \quad (9.16)$$

Tuto rovnici můžeme nazývat *bezčasová rovnice eikonálu*. Pokud se podíváme do definice lokálních veličin (9.5) (a v textu pod) a dosadíme tvar funkce fáze (9.15) zjistíme, že pro monochromatické vlny jsou všechny lokální veličiny v čase konstantní a mají jen závislost na prostorových souřadnicích:

$$\vec{k}(\vec{r}) = \text{grad } \varphi_0(\vec{r}), \quad \omega = \omega_0, \quad \lambda(\vec{r}) = \frac{2\pi}{|\vec{k}(\vec{r})|}, \quad \text{atp.} \quad (9.17)$$

Na význam a řešení (bezčasové) rovnice eikonálu se podíváme až po důležitém zobecnění v následující sekci.

## 9.2 \*Nehomogenní prostředí

Naše výsledky zatím nejsou příliš zajímavé, jelikož jsme se prozatím omezili pouze na homogenní prostředí, kde je fázová rychlost  $v$  a tedy i index lomu  $n = \frac{c}{v}$  konstantní. Uvažujme tedy prostředí, kde je index lomu v prostoru proměnný –  $n(\vec{r})$ . Jelikož platí  $n \approx \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$ , máme tedy v prostoru proměnnou i permitivitu –  $\varepsilon(\vec{r})$ . Jak se za těchto nových předpokladů změní odvození, která jsme doteď provedli?

Vraťme se k odvození vlnové rovnice pro elektrické pole  $\vec{E}$  z kapitoly 6.1 o elektromagnetických vlnách. Gaussův zákon má pro nekonzantní permitivitu  $\varepsilon$  v prostředí bez volných nábojů tvar:

$$0 = \text{div}(\varepsilon\vec{E}) = \varepsilon \text{div } \vec{E} + (\text{grad } \varepsilon) \cdot \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \text{div } \vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon}(\text{grad } \varepsilon) \cdot \vec{E}. \quad (9.18)$$

Při počítání dvojité rotace elektrického pole  $\vec{E}$  (6.3) člen  $\text{grad div } \vec{E}$  nevypadne:

$$\text{rot rot } \vec{E} = \underbrace{\text{grad div } \vec{E}}_{\neq 0} - \Delta\vec{E} = -\text{grad} \left( \frac{1}{\varepsilon}(\text{grad } \varepsilon) \cdot \vec{E} \right) - \Delta\vec{E}. \quad (9.19)$$

Výsledná vlnová rovnice pro elektrické pole pak nabývá oproti (6.5) modifikovaného tvaru:

$$\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = \text{grad} \left( \frac{1}{\varepsilon} \text{grad} \varepsilon \cdot \vec{E} \right). \quad (9.20)$$

Jak se dodatečný člen projeví při odvozování rovnice eikonálu? Naštěstí nijak. Člen na pravé straně modifikované vlnové rovnice (9.20) obsahuje nulté, resp. první, prostorové derivace složek elektrického pole –  $E_i$  a  $\frac{\partial E_i}{\partial x_j}$ . Tyto jsou úměrné maximálně první mocnině lokálního vlnového čísla  $k$ :  $k^1$ . V limitě geometrické optiky, kdy  $\lambda \rightarrow 0$  a tedy  $k \rightarrow +\infty$ , převládnu pouze členy, které jsme již ponechaly v původní rovnici eikonálu (9.16), tzn. členy úměrné  $k^2$ . Rovnice eikonálu tedy zůstane stejná, jediné, co se objeví navíc, je závislost indexu lomu na poloze:

$$\sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j} \right)^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2} n^2(\vec{r}). \quad (9.21)$$

Lokální rychlost šíření (lokální fázová rychlost)  $v$  je nyní proměnná – v každém bodě prostoru může být obecně jiná –  $v(\vec{r})$ :

$$v(\vec{r}) = \frac{c}{n(\vec{r})}. \quad (9.22)$$

Rovnici (9.21) můžeme zapsat více geometrickým způsobem. Na její levé straně vystupuje kvadrát velikosti gradientu funkce fáze  $\varphi_0$ , lze tedy psát:

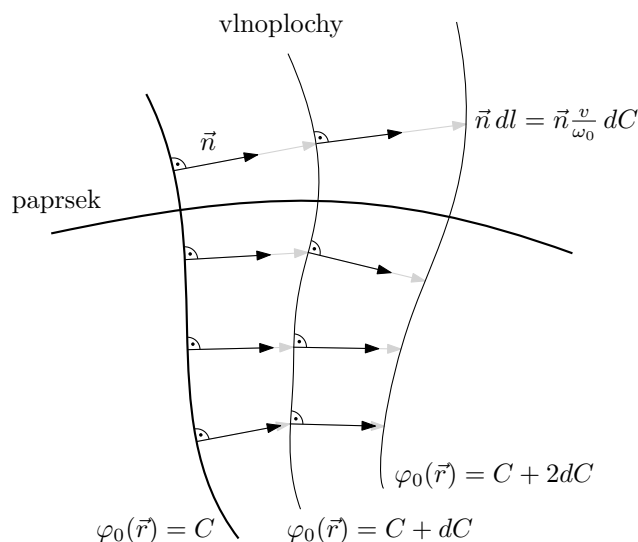
$$|\text{grad} \varphi_0| = \frac{\omega_0}{v(\vec{r})}. \quad (9.23)$$

Míru růstu funkce fáze  $\varphi_0(\vec{r})$  tedy v každém bodě prostoru určuje převrácená hodnota okamžité fázové rychlosti  $v(\vec{r})$ . Jak si představit řešení rovnice eikonálu (9.23)? A jak z výsledné funkce fáze  $\varphi_0(\vec{r})$  nalezneme průběh konkrétních paprsků? Řešení provedeme v několika krocích (které je také možné schematicky sledovat na obrázku 9.3):

1. Nejprve je třeba zvolit počáteční vlnoplochu  $\varphi_0(\vec{r}) = C = \text{konst.}$  – tzn. vyberu body v prostoru (tvořící plochu) a přiřadím jim libovolnou počáteční hodnotu fáze  $C$ . Nejjednoduššími volbami jsou například rovina nebo kulová plocha. V každém bodě této plochy zkonstruuji jednotkové normálové vektory  $\vec{n}$  – tyto budou představovat směry největšího růstu funkce fáze  $\varphi_0$ . Velikost tohoto růstu je předepsaná rovnicí eikonálu (9.23).
2. Nyní chci získat „další“ vlnoplochu danou podmínkou  $\varphi_0(\vec{r}) = C + dC$  – tedy podívat se, jak bude vypadat nadplocha s fází infinitezimálně zvětšenou o hodnotu  $dC$ . Jelikož velikost gradientu udává velikost růstu dané funkce podél normálového vektoru z dané izoploše, je třeba se posunout o vzdálenost danou jednoduchou rovnicí  $|\text{grad} \varphi_0| dl = dC$ , tedy o vzdálenost

$$dl = \frac{dC}{|\text{grad} \varphi_0|} = \frac{v}{\omega_0} dC, \quad (9.24)$$

kde jsme v druhé rovnosti dosadili z rovnice eikonálu. Tímto způsobem (infinitezimálním zvětšováním konstanty  $C$  a postupnou konstrukcí vlnoploch) „vyvinu“ funkci fáze  $\varphi_0(\vec{r})$ . Tento proces je schematicky ve dvou krocích znázorněn na obrázku 9.3. Tato konstrukce vlastně představuje Huygensovu konstrukci vlnoploch, kdy se každý bod „aktuální“ vlnoplochy stává zdrojem sekundárních sférických vln, jejichž společná hranice tvoří novou vlnoplochu.



Obrázek 9.3: Řešení rovnice eikonálu. Tučně vlevo je znázorněna počáteční nadplocha  $\varphi_0(\vec{r}) = C$ . Kolmo k ní jsou znázorněny černé jednotkové normálové vektory. Další vlnoplochy s infinitesimalně zvětšenou hodnotou fáze o násobky  $dC$  jsou získány posunem ve směru normálových vektorů o vzdálenost  $dl = \frac{dC}{|\text{grad } \varphi_0|} = \frac{v}{\omega_0} dC$ . Paprsky jsou pak dány jako křivky všude kolmé k nalezeným vlnoplochám.

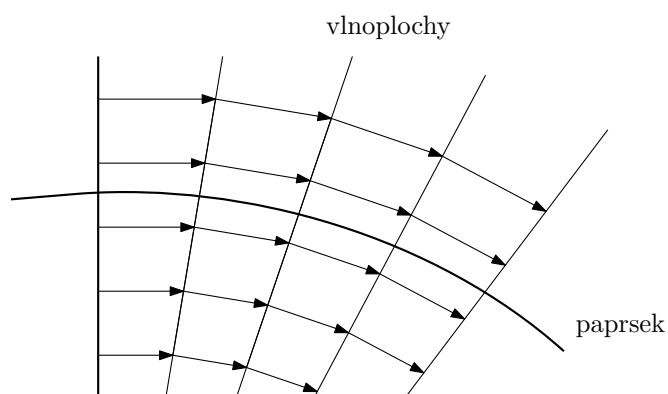
3. Paprsky  $\vec{r}(t)$  jsme definovali jako křivky splňující diferenciální rovnici (9.6),  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ . Nyní stačí jen dosadit za rychlost:

$$\vec{v} = v \vec{n} = v \frac{\vec{k}}{k} = \frac{v^2}{\omega_0} \vec{k} = \frac{v^2}{\omega_0} \text{grad } \varphi_0, \quad (9.25)$$

tedy pomocí funkce fáze  $\varphi_0(\vec{r})$  nalezneme paprsky jako řešení diferenciální rovnice

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{v^2}{\omega_0} \text{grad } \varphi_0. \quad (9.26)$$

Na závěr se podívejme na výše popsanou metodu řešení rovnice eikonálu na konkrétním případě, který je popsán na obrázku 9.4.

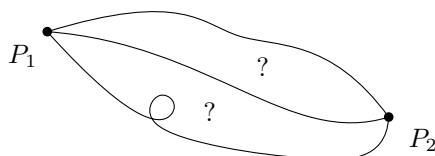


Obrázek 9.4: Ukázka kvalitativního řešení rovnice eikonálu pro počáteční rovinnou nadplochu a prostředí, v němž index lomu  $n$  roste odshora dolů. Takovéto nehomogenní prostředí způsobuje stáčení vlnoploch (a tím pádem i paprsků) směrem dolů. Jednoduchá realizace takového prostředí je nádoba s vodou, kde se na dně rozpouští sůl. Největší koncentrace soli je u dna a postupně se snižuje směrem k hladině. Gradient koncentrace soli způsobuje i proměnný index lomu – největší koncentrace soli odpovídá největšímu indexu lomu a naopak.



### 9.3 \*Fermatův princip

Rovnice eikonálu nám umožnila nalézt funkci fáze  $\varphi_0$ , ze které jsme následně mohli určit chod paprsků jakožto křivek kolmých k vlnoplochám. Fermatův princip naproti tomu postuluje, že skutečné dráhy paprsků jsou takové, které extremalizují tzv. *optickou dráhu* mezi danými koncovými body. Formulujme tento princip nyní přesněji. Uvažujme dva body v prostoru  $P_1$  a  $P_2$  a zajímáme se o to, jak bude vypadat trajektorie paprsku, která mezi těmito body prochází.



Obrázek 9.5: Jakou trajektorii bude sledovat paprsek, který se z bodu  $P_1$  dostane do bodu  $P_2$ ?

Obecně je paprsek křivka  $\vec{r}(\sigma) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , kde parametr  $\sigma$  leží v intervalu  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  a pro koncové body křivky platí

$$\vec{r}(\sigma_1) = P_1, \quad \vec{r}(\sigma_2) = P_2. \quad (9.27)$$

Optická dráha paprsku je délka paprsku vážená indexem lomu, skrze které paprsek prochází. Pokud bychom měli homogenní prostředí s konstantním indexem lomu a délkou paprsku  $l$ , pak je optická dráha  $s$  jednoduše  $s = nl$ . V případě nehomogenního prostředí, kdy je index lomu funkcí prostorových proměnných,  $n(\vec{r})$ , je třeba integrovat

$$s = \int_{P_1}^{P_2} n \, dl. \quad (9.28)$$

Pro každou křivku  $\vec{r}(\sigma)$  můžeme spočítat její optickou dráhu  $s$  a dostat tzv. funkcionál  $S[\vec{r}(\sigma)] = s$ , který je zobrazením z prostoru všech křivek spojujících body  $P_1$  a  $P_2$  do reálných čísel:

$$S[\vec{r}(\sigma)] = \int_{P_1}^{P_2} n \, dl = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} n(\vec{r}(\sigma)) \left| \frac{d\vec{r}}{d\sigma} \right| d\sigma, \quad (9.29)$$

kde jsme v druhé rovnosti použili definici křivkového integrálu<sup>1</sup>. Fermatův princip pak stanoví, že skutečná dráha paprsku je taková, která mezi všemi ostatními paprsky má minimální hodnotu optické dráhy. V řeči variačního počtu je pak skutečná trajektorie paprsku taková, pro něž je variace optické dráhy nulová:

$$\boxed{\delta S = \delta \int_1^2 n \, dl = 0.} \quad (9.30)$$

Pokud bychom do funkcionálu optické dráhy dosadili definici indexu lomu  $n = \frac{c}{v}$ , dospějeme k faktu, že ekvivalentně skutečné trajektorie minimalizují čas, který paprsek potřebuje na cestu mezi body  $P_1$  a  $P_2$ :

$$S = \int_1^2 n \, dl = c \int_1^2 \frac{dl}{v} = c \int_1^2 dt. \quad (9.31)$$

<sup>1</sup>Integrál ze skalární funkce  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  podél křivky  $l$  zadané jako  $\vec{r}(\sigma) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  s koncovými body  $\vec{r}(\sigma_1) = P_1$  a  $\vec{r}(\sigma_2) = P_2$  je definován jako:

$$\int_1^2 f \, dl := \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} f(\vec{r}(\sigma)) \left| \frac{d\vec{r}(\sigma)}{d\sigma} \right| d\sigma,$$

kde integrál vpravo je již obyčejný jednorozměrný Riemannův integrál.

Fermatův princip (9.30) není nic jiného než Hamiltonův princip<sup>2</sup>, který znáte z Lagrangovy formulace mechaniky. Z rozepsaného tvaru funkcionálu optické dráhy (9.29) můžeme vyčíst tvar tzv. *optického Lagrangiánu*:

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = n(\vec{r}) |\dot{\vec{r}}|, \quad (9.32)$$

kde pod symbol  $\dot{\vec{r}}$  rozumíme  $\frac{d\vec{r}}{d\sigma}$ . Vlastní dráha paprsku je pak dána Euler-Lagrangovými rovnicemi,  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$ , které pro optický Lagrangián mají tvar

$$\frac{d}{dt} \left( n \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} \right) = |\dot{\vec{r}}| \text{grad } n. \quad (9.33)$$

Funkcionál  $S$  (9.29) je tzv. invariantní vůči reparametrizaci – výsledná optická dráha je dána pouze trajektorií paprsku a nemá na ni vliv konkrétní parametrizace křivky  $\vec{r}(\sigma)$ <sup>3</sup>. Výslednou diferenciální rovnici (9.33) pro dráhu paprsku pak lze zjednodušit volbou vhodné parametrizace, například volbou tzv. parametrizace drahou  $|\dot{\vec{r}}| = 1$ :

$$\frac{d}{dt} (n \dot{\vec{r}}) = \text{grad } n. \quad (9.34)$$

Jaký je vztah mezi formulací geometrické optiky skrze rovnici eikonálu a skrze Fermatův princip? Tyto formulace poskytují identické předpovědi ohledně trajektorií paprsků<sup>4</sup>. Rovnice eikonálu navíc dává předpověď časového průběhu světla podél trajektorie paprsku. Tuto informaci Fermatův princip technicky vztahu kvůli reparametrizační invarianci neposkytuje, nicméně se dá časová závislost při znalosti trajektorie snadno dopočítat. Toto tvrzení ohledně ekvivalencí dvou formulací geometrické optiky není na první pohled vůbec zřejmé a podrobně se mu nebudeme věnovat<sup>5</sup>.

Z Fermatova principu snadno plyne 5 pravidel chodu paprsků geometrické optiky:

1. V homogenním prostředí se světlo šíří přímočaře. Tento fakt ihned plyne z rovnice (9.34) pro  $n = \text{konst.}$  vztah  $\dot{\vec{r}} = \text{konst.}$  anebo z Fermatova principu lze vytknout konstantní index lomu,  $\int_1^2 n dl = n \int_1^2 dl$  a nejkratší spojnici dvou bodů je přímka.
2. Platí zákon nezávislosti chodu paprsků – paprsky se navzájem neovlivňují. Fermatův princip zjevně neobsahuje interakci různých paprsků.
3. Platí zákon záměnnosti chodu paprsků. Hodnota funkcionálu  $S$  nezávisí na směru integrace,  $\int_1^2 n dl = \int_2^1 n dl$  a tedy paprsky jsou extrémem funkcionálu v přímém i opačném směru.

<sup>2</sup>Hamiltonův princip říká, že fyzikální systém se vyvíjí podél takových drah, které extremalizují funkcionál akce

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) dt, \quad \delta S = 0.$$

Funkce  $L$  se nazývá Lagrangova funkce (Lagrangián) daného systému. V geometrické optice nevystupuje jako nezávislá proměnná čas  $t$  ale křivkový parametr  $\sigma$ .

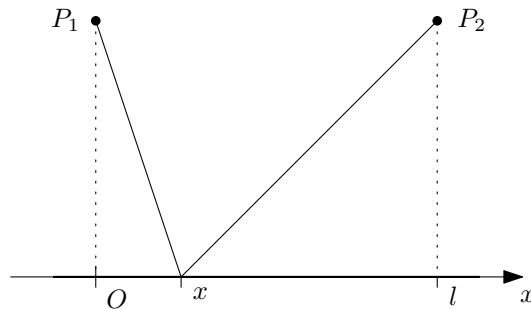
<sup>3</sup>Toto je implicitní vlastnost definice křivkového integrálu, ale dá se to ukázat i explicitně. Uvažujme původní křivku  $\vec{r}(\sigma)$  a její reparametrizaci  $\vec{R}(\kappa) = \vec{r}(\sigma(\kappa))$  danou funkcí  $\sigma(\kappa) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $\vec{R}(\kappa_{1,2}) = P_{1,2}$  a  $\sigma_{1,2} = \sigma(\kappa_{1,2})$ . Potom platí

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} n(\vec{r}(\sigma)) \left| \frac{d\vec{r}}{d\sigma} \right| d\sigma = \left| \sigma = \sigma(\kappa), d\sigma = \frac{d\sigma(\kappa)}{d\kappa} d\kappa \right| = \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} n(\vec{R}(\kappa)) \left| \frac{d\vec{r}}{d\sigma} \right| \frac{d\sigma(\kappa)}{d\kappa} d\kappa = \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} n(\vec{R}(\kappa)) \left| \frac{d\vec{R}}{d\kappa} \right| d\kappa.$$

<sup>4</sup>Samozřejmě za předpokladu nastavení korespondujících počátečních, resp. okrajových, podmínek.

<sup>5</sup>Velmi zhruba řečeno je řešení rovnice eikonálu ekvivalentní Huygensově konstrukci vlnoploch (a paprsků) a Huygensova konstrukce implicitně vytváří paprsky tak, že jejich dráhy extremalizují čas šíření.

4. Platí zákon odrazu. Uvažujme třídu paprsků znázorněných na obrázku 9.6. Celková délka paprsku je  $l(x) = \sqrt{h^2 + x^2} + \sqrt{h^2 + (l-x)^2}$  (optická dráha je jednoduše  $s(x) = nl(x)$ ). Požadavek extremalizace,  $\frac{dl(x)}{dx} = 0$ , vede na podmínku  $x = \frac{l}{2}$  a tedy také rovnost úhlů dopadu a odrazu.

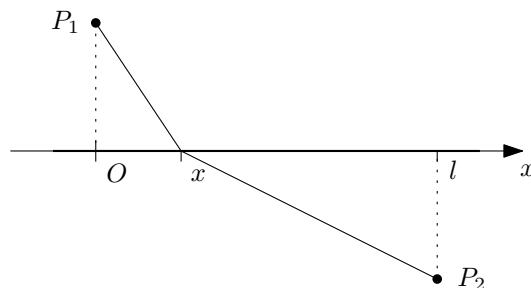


Obrázek 9.6: Třída paprsků pro odvození zákona odrazu z Fermatova principu. Z prvního pravidla chodu paprsků musí být výsledný paprsek složen z dvou úseček. Parametr  $x \in \mathbb{R}$  určuje polohu odrazu na rovinném rozhraní. Kolmé vzdálenosti bodů  $P_1$  a  $P_2$  od rozhraní jsou  $h$ .

5. Platí zákon lomu. Nyní uvažujme třídu paprsků znázorněných na obrázku 9.7. Zde již musíme uvažovat přímo optickou dráhu paprsku:  $s(x) = n_1\sqrt{h_1^2 + x^2} + n_2\sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}$ . Extremalizační podmínka  $\frac{ds(x)}{dx} = 0$  vede na rovnici

$$n_1 \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = n_2 \frac{l-x}{\sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}}. \quad (9.35)$$

Zlomky jsou přímým vyjádřením sinů úhlu dopadu a průchodu,  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ .



Obrázek 9.7: Třída paprsků pro odvození zákona lomu z Fermatova principu. Z prvního pravidla chodu paprsků musí být výsledný paprsek složen z dvou úseček. Parametr  $x \in \mathbb{R}$  určuje polohu přechodu paprsku z jednoho prostředí do druhého na rovinném rozhraní. Kolmé vzdálenosti bodů  $P_1$  a  $P_2$  od rozhraní jsou  $h_1$  a  $h_2$ .



# Kapitola 10

## Limity klasické fyziky

V předchozích kapitolách jsme se podrobně věnovali vlnovým jevům a teorií elektromagnetických vln a podařilo se nám tak vysvětlit řadu fyzikálních jevů. Nyní se podíváme na několik případů, kdy vlnový charakter světla nemůže vysvětlit výsledky experimentálního pozorování. Pro vyřešení těchto rozporů bude třeba postulovat tzv. kvantovou hypotézu – energie některých systémů za jistých situací nemůže nabývat spojitě všech hodnot, ale pouze diskrétně oddělených hladin. Přeneseně nás to vede zpět k částicovému charakteru světla, kdy je světlo tvořeno proudem částic, tzv. fotonů. Zároveň ale čistě částicový charakter světla nedokáže vysvětlit interferenční jevy, kterými jsme se zabývali v předchozích kapitolách. Tento rozpor je vyřešen přijetím tzv. vlnově-částicové duality, kdy fyzikální pole nebo částice mohou mít současně charakter vln i částic. Výsledná teorie zrozená z těchto rozporů se nazývá kvantová mechanika.

### 10.1 Fotoelektrický jev

Fotoelektrický jev je proces, při kterém světlo dopadající na určitý materiál uvolňuje elektrony z jeho povrchu. Popíšeme si nejprve, jak tento jev vysvětluje klasická (vlnová) fyzika.

Klasická představa o tomto efektu, která je schematicky znázorněná na obrázku 10.1, uvažuje dopadající elektromagnetickou vlnu rozkmitávající vázaný elektron na principu buzeného harmonického oscilátoru. V případě, že kinetická energie kmitajícího elektronu překročí vazbovou energii, elektron se uvolní. Charakter efektu by tedy měl být dán vlastnostmi rezonanční křivky: při nízké energii dopadající vlny (nízké amplitudě) se elektrony dostatečně nerozkmitají a uvolňovat se nebudou, dále by hodnota hraniční amplitudy dopadající vlny, při které se elektrony již začnou uvolňovat, měla záviset na frekvenci dopadajícího záření – čím blíže rezonanci, tím menší bude stačit amplituda dopadající vlny. Tato předpověď je zcela chybná.

Experimenty ukazují, že elektrony se uvolňují pouze, pokud je frekvence dopadajícího záření vyšší než jistá hraniční frekvence  $\nu_{\min}$  (daná vlastnostmi materiálu, na který světlo dopadá), a uvolňování elektronů probíhá při jakékoliv intenzitě dopadajícího záření a počet uvolněných elektronů závisí lineárně na této intenzitě. Tato experimentální fakta dokáže plně vysvětlit částicový charakter světla – uvažujeme-li, že světlo se skládá z proudu částic, tzv. fotonů, jejichž energie lineárně závisí na frekvenci světla<sup>1</sup>  $\nu$  jako  $E_f = h\nu$ . Je-li vazebná energie elektronu v atomu  $W$ , pak se elektrony uvolňují pouze v případě, že  $E_f \geq W$  – tedy foton dopadajícího záření má dostatečnou energii na to, aby jeho pohlcením došlo k uvolnění vázaného elektronu. Hraniční frekvence je tedy dána vztahem  $E_f = W$ ,  $h\nu_{\min} = W$ . „Přebytečná“ energie fotonu se přemění na kinetickou energii  $E_k$  uvolněného elektronu. Těmito úvahami jsme dospěli k základní

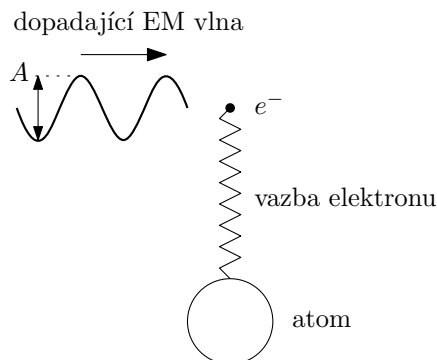
---

<sup>1</sup>Lineární závislost je vysvětlena ve výsledcích experimentu na konci této sekce.

rovnici fotoefektu (pro  $\nu \geq \nu_{\min}$ ):

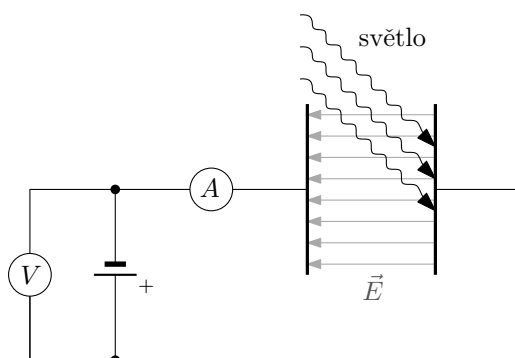
$$\boxed{h\nu = W + E_k}, \quad (10.1)$$

kde  $E_k = \frac{1}{2}m_e v^2$ ,  $v$  je rychlost uvolněného elektronu.



Obrázek 10.1: Klasická představa o fotoelektrickém jevu. Dopadající elektromagnetická vlna rozkmitává elektron vázaný v atomu na principu buzeného harmonického oscilátoru.

Na závěr uvažujme experimentální uspořádání, které je popsáno na obrázku 10.2.

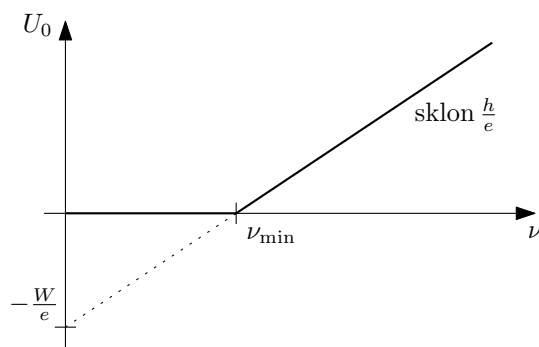


Obrázek 10.2: Experimentální uspořádání pro měření fotoelektrického jevu. Světlo dopadající na elektrodu fotonky uvolňuje elektrony, které musejí překonat potenciální rozdíl  $U$  mezi elektrodami vyvolaný připojeným napětím. Měříme proud  $I$ , který obvodem protéká vlivem uvolňovaných elektronů a jejich transportu mezi elektrodami.

V tomto experimentu pro různé frekvence  $\nu$  dopadajícího záření měříme napětí  $U$ , při kterém právě dojde k vynulování proudu tekoucího obvodem. Uvolňované elektrony mají energii  $E_k = h\nu - W$  a tyto jsou schopny překonat potenciálový rozdíl  $U$  mezi elektrodami pouze pokud  $E_k > Ue$ . Napětí  $U_0$ , kdy dojde právě k vynulování proudu, je zjevně dáno podmínkou  $U_0e = E_k$ , tzn. zkombinováním s rovnicí fotoefektu (10.1) dostáváme předpověď pro nulovací napětí:

$$U_0(\nu) = \frac{h}{e}\nu - \frac{W}{e}. \quad (10.2)$$

Pro frekvence  $\nu < \nu_{\min}$  se žádné frekvence neuvolňují, můžeme proto položit  $U(\nu < \nu_{\min}) = 0$ . Znázornění tohoto jednoduchého vztahu pro napětí  $U_0(\nu)$  je na obrázku 10.3.



Obrázek 10.3: Graf nulovacího napětí  $U_0$ , při kterém dojde k vymizení proudu tekoucího obvodem na obrázku 10.2.

Experimenty skutečně potvrzují tento tvar závislosti  $U_0(\nu)$  a můžeme z něj vyvodit následující tři závěry. Pro  $\nu > \nu_{\min}$  je graf lineární, a tedy se potvrdil předpoklad lineární závislosti energie fotonu na jeho frekvenci  $\nu$ . Ze sklonu přímky můžeme ze znalosti náboje elektronu určit hodnotu Planckovy konstanty  $h$ ! A na závěr z hodnoty  $\nu_{\min}$  můžeme snadno vypočítat materiálovou konstantu velikosti výstupní práce,  $W = h\nu_{\min}$ .

## 10.2 Energie, hybnost a hmotnost fotonu

Ptejme se, jaká je hybnost fotonu, jestliže přijmeme kvantovou hypotézu, že energie fotonu je dána jako

$$E_f = h\nu. \quad (10.3)$$

Jestliže má být postupná elektromagnetická vlna tvořena fotony, musí být energie a hybnost této elektromagnetické vlny tvořena energií a hybností jednotlivých fotonů. V kapitole 6.3 jsme si odvodili vztah mezi hustotou hybnosti  $\vec{g}$  a hustotou energie  $w$  v rovinné postupné EM vlně (6.64):

$$\vec{g} = \frac{w}{c}\vec{n}, \quad g = \frac{w}{c}, \quad (10.4)$$

kde  $\vec{n}$  je směr postupu EM vlny. Tento vztah vede<sup>2</sup> k závěru, že energie a hybnost fotonu,  $E_f$  a  $\vec{p}_f$ , musí být ve stejném vztahu:

$$\vec{p}_f = \frac{E_f}{c}\vec{n} = \frac{h\nu}{c}\vec{n}, \quad p_f = \frac{E_f}{c} = \frac{h\nu}{c}. \quad (10.5)$$

<sup>2</sup>Lze to provést i mírně pořádněji (ale zároven mírně nadbytečně). Uvažujme, že v EM vlně je početní hustota fotonů  $n$ , tzn. v malém objemu  $dV$  je celkem  $dN = n dV$  fotonů. Celková energie  $dE$  a hybnost  $dp$  těchto fotonů je  $dE = E_f dN = h\nu n dV$ ,  $dp = p_f dN = p_f n dV$ . Zároveň z definic hustot energie a hybnosti EM pole platí  $dE = w dV$ ,  $dp = g dV$ . Porovnáním těchto vztahů získáme  $w = h\nu n$  a  $g = pn$ . Jelikož  $g = \frac{w}{c}$ , dostáváme (po vykrácení početních hustot  $n$ )  $p = \frac{h\nu}{c}$ .

Jaká bude hmotnost fotonu  $m_f$ ? Relativistický vztah mezi energií a hybností<sup>3</sup> je

$$(mc^2)^2 = E^2 - p^2c^2. \quad (10.6)$$

Dosadíme-li hodnoty energie  $E_f$  (10.3) a hybnosti  $p_f$  (10.5) fotonu,

$$(m_f c^2)^2 = E^2 - p^2 c^2 = (h\nu)^2 - \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 c^2 = 0, \quad (10.7)$$

vidíme<sup>4</sup>, že foton je nehmotná částice:

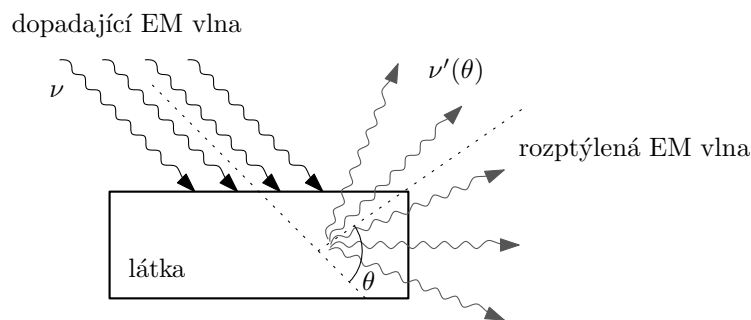
$$\boxed{m_f = 0.} \quad (10.8)$$

Pro úplnost si na závěr explicitně uveďme tvar čtyřhybnosti fotonu  $p^\mu$ :

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = \left(\frac{h\nu}{c}, \frac{h\nu}{c} \vec{n}\right) = \frac{h\nu}{c}(1, \vec{n}). \quad (10.9)$$

### 10.3 Comptonův rozptyl

Uvažujme experiment, při kterém necháme na daný materiál dopadat elektromagnetické záření o frekvenci  $\nu$  a budeme zkoumat s jakou frekvencí  $\nu'$  se vlna rozptýlí v závislosti na úhlu odklonu  $\theta$  od původního směru – tzv. *úhlu rozptylu*  $\theta$ , viz obrázek 10.4.



Obrázek 10.4: Rozptyl dopadající elektromagnetické vlny o frekvenci  $\nu$  na látce. Zajímá nás frekvence rozptýlené vlny  $\nu'$  v závislosti na úhlu rozptylu  $\theta$ .

<sup>3</sup>Čtyřhybnost částice má tvar  $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ . Tzv. relativistickým invariantem, tedy veličinou, která ve všech vztažných soustavách zůstává stejná, je veličina

$$p^\mu p_\mu = -p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2.$$

Pro čtyřhybnost částice vyjádřené v libovolných dvou vztažných soustavách  $p^\mu$  a  $p'^\mu$  pak platí  $p^\mu p_\mu = p'^\mu p'_\mu$ . Pokud si za soustavu ( $S'$ ) zvolíme klidovou soustavu zvolené částice, bude platit  $E' = m_0 c^2$  a  $\vec{p}' = 0$ , a tedy  $p'^\mu = (m_0 c, \vec{0})$ . Dosazením do rovnosti invariantů:

$$-\frac{E^2}{c^2} + |\vec{p}|^2 = -(mc)^2 + \vec{0}^2.$$

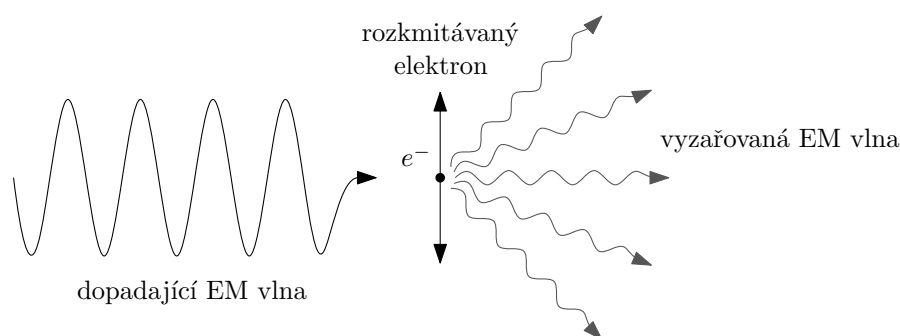
Po jednoduché úpravě získáme finální tvar relativistického vztahu mezi energií a hybností:

$$\boxed{(mc^2)^2 = E^2 - |\vec{p}|^2 c^2.}$$

<sup>4</sup>Striktně vzato je naše dedukce chybná, jelikož relativistický vztah mezi energií a hybností jsme odvodili tak, že jsme přešli do klidové soustavy částice, což s fotonem není možné – nelze přejít do soustavy, která se vůči jiné pohybuje rychlostí světla  $c$ . Zároveň jsme za klidovou energii vzali výraz  $E_0 = mc^2$ , což je veličina, která u fotonu vůbec nemá smysl – v každé vztažné soustavě se foton pohybuje rychlostí  $c$ , nelze ho tedy pozorovat v klidu. Nicméně, jediná hodnota hmotnosti fotonu ve vztahu (10.6) konzistentní s výrazy pro energii a hybnost fotonu je hodnota nulová.

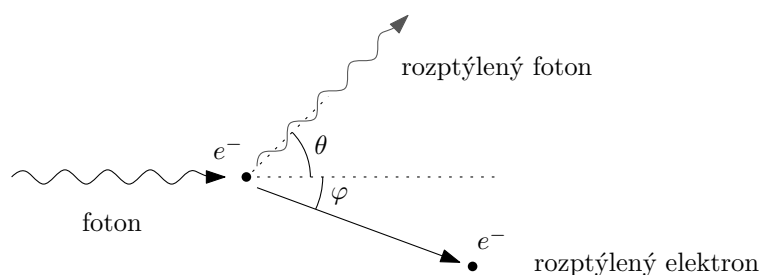


Klasické vysvětlení, kdy uvažujeme vlnový charakter elektromagnetického záření, zní takto: Dopadající elektromagnetická vlna rozkmitává elektrony přítomné v látce a tyto, jakožto urychlené náboje, vyzařují do svého okolí elektromagnetické záření tvořící rozptýlenou elektromagnetickou vlnu, schematicky viz obrázek 10.5. Tomuto klasickému procesu se říká Thompsonův rozptyl. Předpověď vlastností rozptýlené EM vlny je tedy založena na kombinaci buzeného harmonického oscilátoru tvořeného vázanými elektrony v látce rozkmitávaného dopadající EM vlnou a vyzařovanou EM vlnou tvořenou tímto urychlovaným elektronem. Tato předpověď říká, že frekvence rozptýleného záření vůbec nezávisí na úhlu rozptylu  $\theta$  – urychlený náboj do všech směrů vyzařuje EM vlnu stejné frekvence a tento urychlený náboj kmitá se stejnou frekvencí jako dopadající vlna. To znamená, že Thompsonův rozptyl předpovídá jednoduše  $\nu' = \nu$  bez závislosti na úhlu  $\theta$ .



Obrázek 10.5: Klasické vysvětlení rozptylu – Thompsonův rozptyl.

A. H. Compton prováděl roku 1923 výše zmíněný experiment, kde nechal rozptylovat rentgenové záření. Výsledek experimentu odporoval klasickému vysvětlení Thompsonova rozptylu! Frekvence rozptýleného záření závisela na úhlu rozptylu  $\theta$ ! Pro záření s vysokou frekvencí se v tomto experimentu již začíná projevovat částicový charakter světla. Podívejme se nyní na průběh experimentu, pokud si budeme představovat, že dopadající EM vlna je tvořena proudem fotonů. Pro rentgenové záření je energie fotonů o mnoho řádů větší než vazebná energie elektronů (energie fotonů  $E_f = h\nu \approx 10 - 100 \text{ keV}$ , výstupní práce elektronů  $W \approx 1 \text{ eV}$ ), takže efektivně můžeme elektrony v látce považovat za volné. Na obrázku 10.6 je znázorněna geometrie částicového vysvětlení Comptonova rozptylu.



Obrázek 10.6: Geometrie Comptonova rozptylu. Rozptýlený foton se odchýlí od svého původního směru o úhel  $\theta$ , rozptýlený elektron se po srážce s fotonem začne pohybovat ve směru svírající úhel  $\varphi$  s původním směrem fotonu.

Hlavním úkolem, jak již bylo řečeno v úvodu, bude předpovědět funkci frekvence rozptýleného záření (fotonů) v závislosti na úhlu rozptylu  $\theta$ ,  $\nu'(\theta)$ . Využijeme zákonů zachování energie a hybnosti:

$$E_f + E_e = E'_f + E'_e, \quad \vec{p}_f = \vec{p}'_f + \vec{p}'_e, \quad (10.10)$$

kde nečárkované, resp. čárkované, veličiny značí hodnoty před, resp. po, srážce; indexy f, resp. e, značí veličiny pro foton, resp. elektron. Uvažujme elektron na počátku v klidu, tudíž  $\vec{p}_e = 0$ . Ze zákona zachování hybnosti ihned plyne, že problém je rovinný<sup>5</sup>, tzn. úhly rozptylu  $\theta$  a  $\varphi$  plně popisují směry, kterými se budou rozptýlený foton a elektron pohybovat.

Upravme nyní zákon zachování hybnosti a energie do tvarů, kde na pravých stranách vystupují hybnost a energie rozptýleného elektronu:

$$\begin{aligned} \vec{p}_f - \vec{p}'_f &= \vec{p}'_e, \\ p_f^2 + p_f'^2 - 2\underbrace{\vec{p}_f \cdot \vec{p}'_f}_{p_f p_f' \cos \theta} &= p_e'^2, \end{aligned} \quad (10.11)$$

$$E_f - E_f' + E_e = E_e'. \quad (10.12)$$

Hybnost a energii rozptýleného elektronu v látce, do které dopadá záření, nelze jednoduše změřit, je tedy vhodné je ze vztahů eliminovat dosazením do relativistického vztahu mezi energií a hybností:

$$E_e' - p_e'^2 c^2 = E_e^2, \quad (10.13)$$

kde na pravé straně vystupuje klidová energie elektronu  $E_e = m_e c^2$  ( $m_e$  označuje jeho klidovou hmotnost). Tedy dosazením (10.11) a (10.12) do (10.13) dostaneme:

$$(E_f - E_f' + m_e c^2)^2 - (p_f^2 + p_f'^2 - 2p_f p_f' \cos \theta) c^2 = m_e^2 c^4. \quad (10.14)$$

Po dosazení vztahu mezi energií a hybností fotonu  $p_f = \frac{E_f}{c}$ ,  $p_f' = \frac{E_f'}{c}$ , a úpravě:

$$2E_f E_f' (\cos \theta - 1) + 2(E_f - E_f') m_e c^2 = 0. \quad (10.15)$$

Na závěr energie fotonů zapíšeme pomocí frekvencí dopadající a rozptýlené vlny  $\nu$  a  $\nu'$ ,  $E_f = h\nu$  a  $E_f' = h\nu'$  a po drobné úpravě dospějeme k rovnici tvaru:

$$\nu \nu' (\cos \theta - 1) + (\nu - \nu') \frac{m_e c^2}{h} = 0. \quad (10.16)$$

Z téhož již snadno vyjádříme závislost frekvence rozptýlené vlny  $\nu'$  na úhlu rozptylu  $\theta$  popisující Comptonův rozptyl:

$$\boxed{\nu'(\theta) = \frac{\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}}. \quad (10.17)$$

Vidíme, že pro dopadající záření, jehož fotony mají mnohem menší energii než je klidová energie elektronu,  $h\nu \ll m_e c^2$ , Comptonova formule přechází v předpověď klasického Thompsonova rozptylu  $\nu' = \nu$ . Teprve pro vysoké frekvence dopadajícího záření se začne projevovat částicový charakter světla a klasické vysvětlení přestane fungovat.

Ze zákonů zachování energie a hybnosti nelze jednoznačně určit, pod jakým úhlem se foton rozptýlí. Na počátku jsme měli čtyři rovnice (1x ZZE a 3x ZZH). Rovinnost problému nám omezila počet hybnostních rovnic na dvě. Máme tedy tři rovnice pro čtyři neznámé  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\nu'$  a  $E_e'$ . Z rovnic tedy můžeme nalézt například funkce  $\nu'(\theta)$ ,  $E_e'(\theta)$  a  $\varphi(\theta)$ , tzn. závislosti zbylých veličin na úhlu rozptylu fotonu  $\theta$  (my jsme se v textu soustředili pouze na první z nich). Ve skutečnosti neexistuje žádná další rovnice, která by jednoznačně určila úhel rozptylu  $\theta$  – rozptyl má pravděpodobnostní charakter – foton se rozptýlí s různými pravděpodobnostmi pod různými úhly  $\theta$  – tyto pravděpodobnosti předpovídá kvantová elektrodynamika (QED, kvantová teorie pole popisující elektromagnetismus).

<sup>5</sup>Vektor  $\vec{p}_f$  je lineární kombinací  $\vec{p}'_f$  a  $\vec{p}'_e$ , tudíž leží v rovině tvořené těmito vektory.

Na závěr můžeme vztah (10.17) vyjádřit v proměnných vlnové délky,  $\lambda = \frac{c}{\nu}$ ,  $\lambda' = \frac{c}{\nu'}$ , a obdržet vztah  $\lambda'(\theta)$ :

$$\lambda'(\theta) = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) = \lambda + \lambda_C (1 - \cos \theta). \quad (10.18)$$

Veličina  $\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$  se nazývá *Comptonova vlnová délka*. Fotony s Comptonovou vlnovou délkou mají energii o velikosti klidové energie elektronu,  $E_C = h\nu_C = \frac{hc}{\lambda_C} = m_e c^2$ . Sílu Comptonova efektu v závislosti na frekvenci dopadajícího záření můžeme určovat např. pomocí relativní změny vlnové délky při rozptylu:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_C}{\lambda} (1 - \cos \theta). \quad (10.19)$$

## 10.4 Stabilita atomů

V Rutherfordově planetárním modelu atomu elektrony obíhají po kruhových drahách okolo velmi malého a hmotného jádra jako planety okolo Slunce. Ukažme, že tato představa je bez dodatečných předpokladů zcela nekompatibilní s faktem, že urychlené náboje neustále vyzařují elektromagnetické záření a ztrácí tak energii. Jelikož se elektrony pohybují po zakřivených (kruhových) drahách, působí na ně neustále dostředivé zrychlení, toto zrychlení pak vede na vyzařování elektromagnetického záření, jehož energie se musí brát na úkor mechanické energie oběžného pohybu elektronu. Elektron tedy nevyhnutelně spirálovitě padá do jádra atomu. Kvantifikováním výše zmíněných úvah vypočteme dobu pádu elektronu do jádra – tzv. dobu života klasického atomu. Pokud by nám vyšla dostatečně dlouhá, tzn. pád elektronu je dostatečně pomalý, byla by představa Rutherfordova atomu v tomto směru udržitelná. Bohužel uvidíme, že tomu tak není.

Jako jednoduchý příklad vezmeme atom s atomovým číslem  $Z$  (tedy počtem protonů  $Z$  v jádře), ale pouze jedním elektronem v atomovém obalu<sup>6</sup>. Uvažujme Newtonovu pohybovou rovnici v radiálním směru pro tento elektron; tato obsahuje coulombickou přitažlivou sílu mezi jádrem a elektronem:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} = m_e a_r, \quad (10.20)$$

kde  $a_r$  značí radiální složku zrychlení (s kladným směrem směřujícím k jádru). Zapišeme-li radiální zrychlení v polárních souřadnicích  $(r, \varphi)$  a uvažujeme-li, že elektron spiráluje do jádra velmi pomalu<sup>7</sup>, dostaneme

$$a_r = -\ddot{r} + r\dot{\varphi}^2 \approx \frac{v_\varphi^2}{r} \approx \frac{v^2}{r}, \quad (10.21)$$

kde jsme uvažovali  $\ddot{r} \approx 0$ , tečnou složku rychlosti  $v_\varphi = r\dot{\varphi}$  a také  $v \approx v_\varphi$ . Navíc, opět vlivem uvažování pomalého klesání, můžeme vzít celkové zrychlení  $a \approx a_r$ . Dosazením těchto úvah do pohybové rovnice (10.20) můžeme vyjádřit rychlost i zrychlení pohybu v závislosti na vzdálenosti od jádra  $r$ :

$$a^2 = \left( \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2 m_e} \right)^2 = \frac{r_0^2 c^4}{r^4} Z^2, \quad v^2 = ra = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r m_e} = \frac{r_0}{r} c^2 Z, \quad (10.22)$$

kde jsme pro zjednodušení zápisu zavedli pomocnou konstantu  $r_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e c^2}$  zvanou *klasický poloměr elektronu*.

<sup>6</sup>Tedy atom je vždy ionizovaný tak, aby v něm zůstal pouze jeden elektron.

<sup>7</sup>Tzn. do jádra klesá mnohem pomaleji, než jádro obíhá.

Nyní se zaměříme na bilanční energetickou rovnici elektronu,  $\frac{dE}{dt} = P$ , kde  $E$  je celková mechanická energie elektronu a  $P$  je vyzařovaný výkon elektromagnetického záření vlivem urychleného pohybu elektronu. Z této bilanční rovnice nakonec odvodíme časovou závislost poloměru oběhu elektronu  $r(t)$ . Vyzařovaný výkon je dán Larmorovou formulí

$$P = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} a^2 = -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a^2 = -\frac{2}{3} \frac{r_0^3}{r^4} m_e c^3 \quad (10.23)$$

(znaménko minus je zde dáno konvenčně tím, že vyzařovaný výkon se děje na úkor mechanické energie). Celková mechanická energie elektronu je dána součtem jeho kinetické a potenciální energie:

$$E = T + U = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{2r} = -\frac{1}{2} m_e c^2 Z \frac{r_0}{r}, \quad (10.24)$$

kde jsme použili vztah pro elektrostatickou energii dvou nábojů  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$  a dosadili vyjádření pro rychlost z (10.22). Energetická bilanční rovnice po zkombinování (10.23) a (10.24) vyjde:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} m_e c^2 Z \frac{r_0}{r^2} \dot{r} = P = -\frac{2}{3} \frac{r_0^3}{r^4} m_e c^3. \quad (10.25)$$

Po vykrácení společných faktorů na obou stranách dostaneme jednoduchou diferenciální rovnici pro poloměr oběhu elektronu  $r(t)$ :

$$r^2 \dot{r} = -\frac{4}{3Z} r_0^2 c. \quad (10.26)$$

Tuto snadno vyřešíme úpravou  $r^2 \dot{r} = \frac{1}{3} \frac{dr^3}{dt}$  a zintegrováním:

$$\frac{dr^3}{dt} = -\frac{4}{Z} r_0^2 c \quad \longrightarrow \quad \boxed{r^3(t) = a_0^3 - \frac{4}{Z} r_0^2 c t}, \quad (10.27)$$

kde jsme použili počáteční podmínku  $r^3(0) = a_0^3$ ,  $a_0$  tedy značí počáteční poloměr oběhu elektronu (počáteční „rozměr“ atomu). Doba pádu elektronu do jádra atomu  $t_{\text{pád}}$  je dána podmínkou  $r(t_{\text{pád}}) = 0$ , jejím vyřešením obdržíme finální klasickou předpověď:

$$\boxed{t_{\text{pád}} = \frac{Z a_0^3}{4 r_0^2 c}}. \quad (10.28)$$

Klasický poloměr elektronu je číselně  $r_0 = 2,8 \cdot 10^{-15}$  m, pro tzv. Bohrov poloměr atomu vodíku  $a_0 = 5,3 \cdot 10^{-11}$  m (a tedy také  $Z = 1$ ) vychází  $t_{\text{pád}} = 1,6 \cdot 10^{-11}$  s. V klasické fyzice tedy atomy zaniknou v řádu desítek pikosekund! Pokud bychom se podrobněji rozebírali aproximaci  $a \approx a_r$  anebo uvažovali relativistické korekce<sup>8</sup>, problém se ještě zhorší ( $t_{\text{pád}}$  vychází ještě menší)! Tuto situaci řeší Bohrov model atomu, kdy se postuluje, že elektrony mohou obíhat pouze po drahách s jistými diskrétně rozdělenými poloměry. Elektrony pro přeskoky mezi těmito drahami musí přijmout nebo vyzářit konečně velké kvantum energie a toto efektivně znemožňuje vyzařování elektromagnetického záření a spojitý pokles poloměru oběhu.

### 10.4.1 Bohrov model atomu

V Bohrově modelu je postulován princip kvantizace momentu hybnosti jednotlivých orbit elektronu – elektrony mohou obíhat pouze po takových drahách, jejichž moment hybnosti má následující velikost

$$L = n\hbar, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (10.29)$$

<sup>8</sup>V našem newtonovském modelu dosáhne elektron v atomu vodíku rychlosti světla pro  $r = r_0$ , viz (10.22).

kde  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  je tzv. *redukovávaná Planckova konstanta*. Odvodíme na základě tohoto postulátu přípustné poloměry elektronových drah (a také jejich energie). Pro kruhovou orbitu poloměru  $r$  a oběžnou rychlostí  $v$  je moment hybnosti  $L = m|\vec{r} \times \vec{v}| = mvr$ . Pro atom s atomovým číslem  $Z$  jsme již odvodili oběžnou rychlost  $v$  v (10.22) vpravo, dosazením této rychlosti do kvantovací podmínky (10.29),  $m_e v r = n\hbar$ , dostaneme

$$m_e \sqrt{\frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r m_e}} r = n\hbar, \quad (10.30)$$

z této rovnice snadno vyjádříme přípustné poloměry elektronových drah  $r_n$ :

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{Z e^2 m_e}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (10.31)$$

Energie  $E_n$  těchto jednotlivých drah je po dosazení za  $r$  do (10.24):

$$E_n = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{Z^2 e^4 m_e}{2\hbar^2 n^2} = -R_E \frac{Z^2}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (10.32)$$

kde jsme zavedli veličinu  $R_E = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = 13,6 \text{ eV}$  zvanou *Rydbergova energie*. Elektrony pak mohou přeskokovat mezi těmito energetickými hladinami při pohlcení/vyzáření fotonů o energii

$$h\nu_{mn} = \Delta E_{mn} = |E_m - E_n| = R_E Z^2 \left| \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right|, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad (10.33)$$

kde  $m, n$  jsou indexy počátečních a koncové hladiny. Pro  $Z = 1$  se tato formule nazývá *Rydbergova formule* a přesně předpovídá tvar emisního/absorpčního spektra atomu vodíku. Pro vyšší atomová čísla  $Z > 1$  tato formule zůstává v platnosti pro ionizované atomy, v jejichž atomovém obalu zůstane pouze jeden elektron, tzn. pro atomy  $X^{(Z-1)+}$  – např.  $\text{He}^+$ ,  $\text{Li}^{2+}$ , atp. Pro atomy, v jejichž obalu zůstává více než jeden elektron, způsobuje interakce mezi jednotlivými elektrony v atomovém obalu různé posuny (a rozštěpení) jednotlivých spektrálních čar, takže pak jejich emisní/absorpční spektra jsou mnohem složitější než je dáno jednoduchou Rydbergovou formulí.

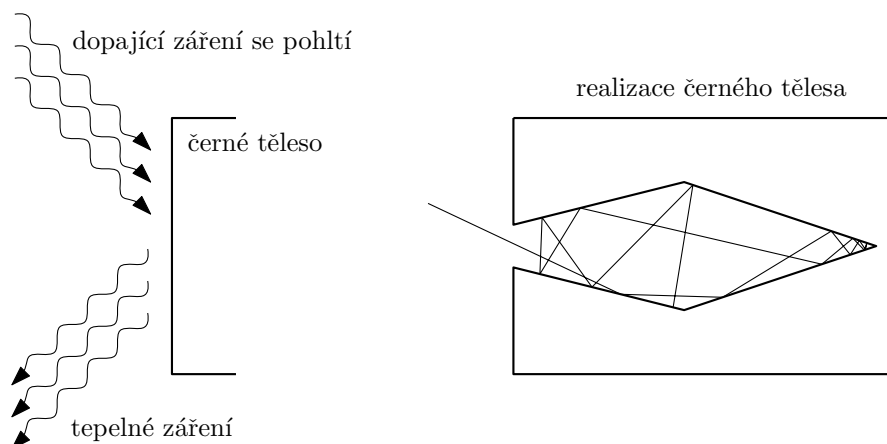
### 10.4.2 Schrödingerův kvantový model atomu

V kvantové mechanice je možno hodnoty energií jednotlivých hladin  $E_n$  (10.32) předpovědět při řešení úlohy „pohybu“ nabité kvantové částice v coulombickém centrálním poli, kde kvantované hladiny přímo vyjdou jako důsledek výpočtu a nikoliv jako ad hoc přidaný předpoklad. Tento výpočet je základem tzv. Schrödingerova kvantového modelu atomu, kdy jednotlivé „dráhy“ (lépe řečeno stavy) elektronů jsou popsány tzv. kvantovými čísly  $(n, l, m, s)$ :

- *Hlavní kvantové číslo*  $n \in \mathbb{N}$  popisuje energii daného elektronového stavu  $E_n$  ve shodě s formulí (10.32).
- *Vedlejší kvantové číslo*  $l \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  udává kvadrát celkového momentu hybnosti elektronu  $L^2 = \hbar^2 l(l+1)$ .
- *Magnetické kvantové číslo*  $m \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\}$  určuje jednu složku z momentu hybnosti elektronu  $\vec{L}$ ,  $L_z = m\hbar$  (typicky se BÚNO bere třetí složka).
- *Spinové kvantové číslo*  $s \in \{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}$  představuje „dodatečný“ vnitřní moment hybnosti (tzv. *spin*) elektronu. Kvadrát jeho velikosti je  $S = \hbar^2 s(s+1)$  a jedna z jeho složek  $S_z = \hbar s$ .

## 10.5 Záření černého tělesa

Černé těleso (někdy také *absolutně černé těleso*) je fyzikální idealizace, kdy veškeré záření dopadající na povrch tohoto tělesa je pohlceno. Zároveň toto těleso vyzařuje tepelné záření – tzv. *záření černého tělesa*. Na obrázku 10.7 vpravo je zobrazena přibližná fyzikální realizace absolutně černého tělesa – tmavá dutina speciálně tvarovaná tak, aby se záření, které se do dutiny dostalo, mnohonásobnými odrazy co nejvíce pohltilo. Vstupní otvor této dutiny se pak chová jako povrch absolutně černého tělesa. Povrch černého tělesa pak vyzařuje tepelné záření, jehož podoba závisí pouze na teplotě  $T$  tohoto tělesa.



Obrázek 10.7: Černé těleso pohlcuje veškeré dopadající záření, naopak vyzařuje tepelné záření černého tělesa. Dutina na pravém obrázku představuje fyzikální realizace černého tělesa, mnohonásobné odrazy způsobují téměř dokonalé pohlcení dopadajícího záření a otvor dutiny se pak chová jako povrch absolutně černého tělesa.

Každé reálné těleso je navíc popsáno parametrem zvaným *emisivita*  $\varepsilon$ , která udává poměr mezi skutečně emitovaným výkonem záření a zářením emitovaným absolutně černým tělesem. Dále je možné zavést parametr zvaný *absorptivita*  $\alpha$ , který naproti tomu udává poměr mezi skutečně pohlceným výkonem a celkovým výkonem záření dopadajícího na těleso. Kirchhoffův zákon tepelného záření říká, že absorptivita  $\alpha$  je vždy rovna emisivitě  $\varepsilon$ ,  $\alpha = \varepsilon$ . Z tohoto pak plyne, že emisivita je vždy menší nebo rovna jedné,  $\varepsilon \leq 1$ , jelikož není možné, aby těleso absorbovalo více energie, než na něj dopadá,  $\varepsilon = \alpha \leq 1$ .

Ve skutečnosti může emisivita záviset na frekvenci vyzařovaného záření,  $\varepsilon(\nu)$ , tedy každá frekvence se může vyzařovat v různém poměru k záření černého tělesa. Funkce emisivity  $\varepsilon(\nu)$  je charakteristikou tělesa a nezávisí na teplotě  $T$ . Budeme-li znát intenzitu záření černého tělesa  $I(T)$ , pak těleso s emisivitou  $\varepsilon$  bude vyzařovat výkon  $\varepsilon I(T)$ ; případně pro emisivitu závislou na frekvenci  $\varepsilon(\nu)$  musíme znát intenzity vyzařování černého tělesa do jednotlivých frekvencí, tzv. *spektrální hustotu*  $i(\nu, T)$ , pak reálné těleso bude vyzařovat intenzitu o hustotě  $\varepsilon(\nu) i(\nu, T)$ .

Podívejme se nyní podrobněji na význam pojmu spektrální hustota. Celková intenzita záření udává výkon vyzařovaného záření z jednotkové plochy tělesa,  $[I] = \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ . Spektrální hustota  $i(\nu)$  této intenzity pak udává výkon  $dI$  vyzařovaný v rozsahu frekvencí  $\langle \nu, \nu + d\nu \rangle$  jako:

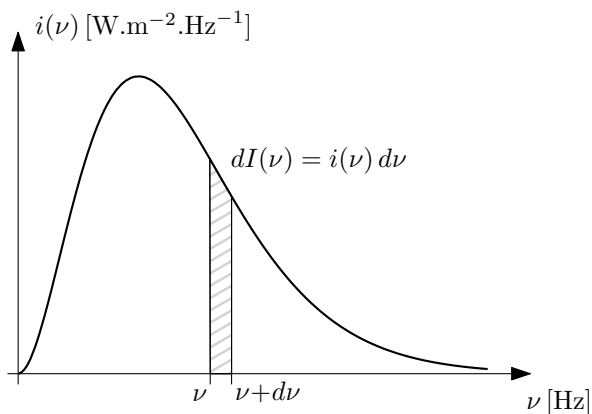
$$dI = i(\nu) d\nu. \quad (10.34)$$

Zjevně jednotka spektrální hustoty je jednotka intenzity záření na Hertz:  $[i(\nu)] = \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1}$ . Pokud se chceme od spektrální hustoty vrátit zpět k celkovému vyzařovanému výkonu, musíme

naintegrovat přes všechny frekvence:

$$I = \int_0^{+\infty} dI(\nu) = \int_0^{+\infty} i(\nu) d\nu. \quad (10.35)$$

Na obrázku 10.8 je schematicky znázorněn vztah mezi spektrální hustotou  $i(\nu)$  a vyzařovaným výkonem  $dI$ .



Obrázek 10.8: Spektrální hustota  $i(\nu)$  a vyzařovaný výkon  $dI$  do rozsahu frekvencí  $\langle \nu, \nu + d\nu \rangle$  – ten je dán obsahem plochy grahu mezi hodnotami frekvence  $\nu$  a  $\nu + d\nu$ . Podobně je vyzařovaný výkon v rozsahu frekvencí  $\langle \nu_1, \nu_2 \rangle$  dán obsahem plochy mezi těmito frekvencemi, tzn.  $I_{\langle \nu_1, \nu_2 \rangle} = \int_{\nu_1}^{\nu_2} i(\nu) d\nu$ .

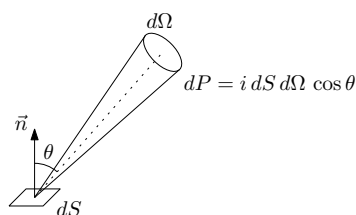
### 10.5.1 Planckův vyzařovací zákon

Planckův vyzařovací zákon udává spektrální hustotu<sup>9</sup> záření černého tělesa. Jeho podoba je následující:

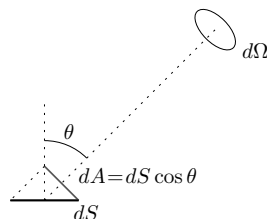
$$i(\nu, T) = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad [i] = \text{W} \cdot \text{m}^{-2}, \text{Hz}^{-1}. \quad (10.36)$$

kde  $h$  je Planckova konstanta,  $c$  je rychlost světla a  $k$  je Boltzmannova konstanta. Grafické znázornění této funkce jakožto funkce proměnné  $\nu$  je na obrázku 10.9.

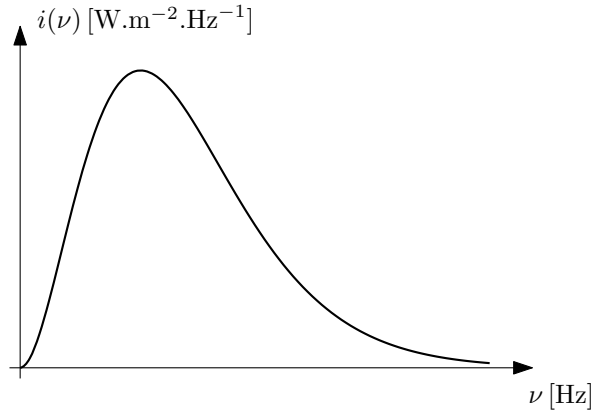
<sup>9</sup>Planckův vyzařovací zákon je často uváděn pomocí veličiny zvané *spektrální radiance*  $i_r$ . Zatímco spektrální hustota  $i$  uvádí celkový vyzařovaný výkon do všech směrů (tedy do celého poloprostoru nad povrchem tělesa), spektrální radiance tento výkon ještě normuje na jednotku prostorového úhlu, tzn. jednotka spektrální radiance je  $[i_r] = [i] \cdot \text{sr}^{-1}$ . Pro izotropně vyzařující těleso (kterým absolutně černé těleso je) platí jednoduchý vztah  $i = \pi i_r$ . Tzn. některé zde uvedené vzorce se mohou od vzorců v jiné literatuře lišit o faktor  $\pi$ . Vyzařovaný výkon  $dP$  z plošky velikosti  $dS$ , do intervalu frekvencí šířky  $d\nu$ , do malého prostorového úhlu velikosti  $d\Omega$  je dán jako  $dP = i d\nu dS d\Omega \cos \theta$ , kde úhel  $\theta$  je úhel odklonu směru vyzařování od normálového vektoru k plošce  $dS$ . Je-li záření vyzařováno pod úhlem  $\theta$ , pak efektivní plocha, ze které záření přichází, je redukována na velikost  $dA = dS \cos \theta$ .



(a) Vyzařování do malého prostorového úhlu  $d\Omega$ .



(b) Grafické vysvětlení faktoru  $\cos \theta$ .



Obrázek 10.9: Planckův vyzařovací zákon. Graf zobrazuje spektrální hustotu  $i(\nu, T)$  pro konstantní hodnotu teploty  $T$ .

Odvození tohoto zákona vyžaduje znalosti statistické fyziky<sup>10</sup> a nebudeme ho zde uvádět. Snad jen uvedeme, že vzorec (10.36) se skládá ze dvou fundamentálních částí:  $i = n\langle E \rangle$ . První část  $n = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}$  je hustota počtu módů elektromagnetického pole v rozsahu frekvencí  $\langle \nu, \nu + d\nu \rangle$ , která plyne z klasické elektromagnetické teorie, kdy uvažujeme EM záření uzavřené v dutině. Druhá část  $\langle E \rangle = \frac{h\nu}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1}$  je střední hodnota energie jednoho elektromagnetického módu v dutině, jak ji předpovídá statistická fyzika. Klíčový Planckův vklad pro zde uvedený výsledek  $\langle E \rangle$  byla úvaha, že energetické hladiny daného módu elektromagnetického pole musí být kvantovány ve tvaru  $E_n = nh\nu$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Klasická představa, kdy energie elektromagnetického pole je spojitá, vedla na nesprávnou předpověď spektrální hustoty tepelného záření ve tvaru tzv. Rayleighova-Jeansova zákona (viz také část 10.5.3 o limitách Planckova zákona).

### 10.5.2 Spektrální hustota v jiných proměnných

V Planckově vyzařovacím zákoně máme za proměnnou, ve které spektrální hustotu vyjadřujeme (a tedy jakým způsobem celkovou intenzitu dělíme), frekvenci  $\nu$  a mohli bychom tedy přesněji funkci  $i(\nu)$  nazývat *frekvenční spektrální hustotou*. Mohli bychom ovšem rozdělovat intenzitu tak, že nás zajímá, kolik energie se vyzařuje například v rozsahu vlnových délek  $\langle \lambda, \lambda + d\lambda \rangle$ :

$$dI = i(\lambda) d\lambda \quad (10.37)$$

a získat tak „vlnově-délkovou“ *spektrální hustotu*  $i(\lambda)$ . V důsledku této definice je zjevně jednotkou  $[i(\lambda)] = \text{W.m}^{-2}.\text{m}^{-1} = \text{W.m}^{-3}$ . Přirozeně se nabízí otázka, jaký je mezi těmito hustotami ( $i(\nu)$  a  $i(\lambda)$ ) vztah? Mezi těmito funkcemi nepřecházíme prostou substitucí! Je to dáno samotnou definicí spektrální hustoty – požadujeme, aby výkon vyzařovaný do korespondujících intervalů frekvencí  $\langle \nu, \nu + d\nu \rangle$  a vlnových délek  $\langle \lambda, \lambda + d\lambda \rangle$  byl stejný<sup>11</sup>:

$$dI = i(\nu) d\nu = i(\lambda) d\lambda. \quad (10.38)$$

Co se myslí slovem korespondující? Přirozeně požadujeme  $\nu = \frac{c}{\lambda}$ , ale i infinitezimální přírůstky těchto veličin si musí odpovídat, tedy provedeme-li diferencování:

$$d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda. \quad (10.39)$$

<sup>10</sup>Které nabydete až na 02TSFA.

<sup>11</sup>A stejně tak pro konečné rozsahy frekvencí a vlnových délek:

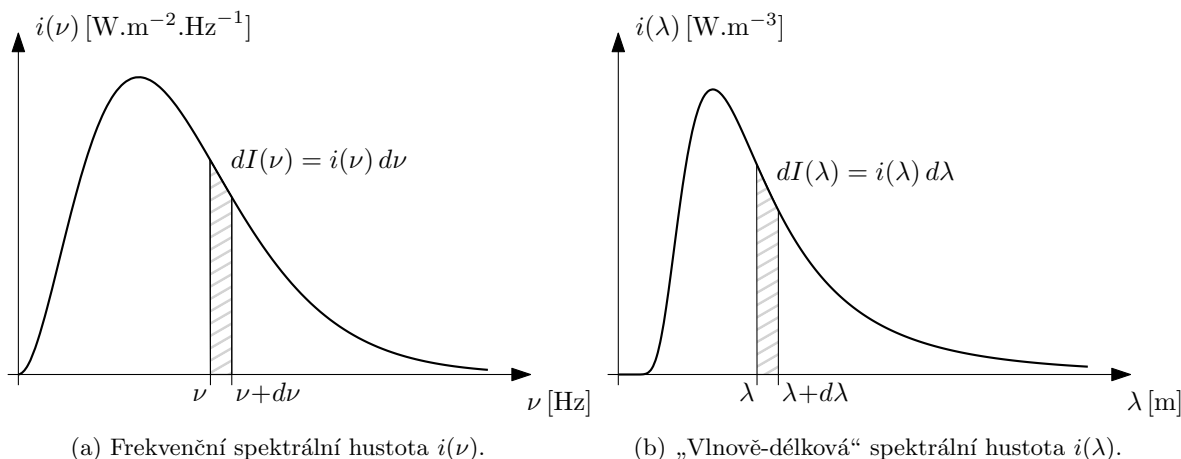
$$\int_{\nu_1}^{\nu_2} i(\nu) d\nu = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} i(\lambda) d\lambda.$$



Znaménko mínus je přirozeně dané tím, že roste-li frekvence záření, klesá jeho vlnová délka. Nás však zajímá spíše vztah mezi velikostmi těchto změn, tudíž v následujícím budeme brát jejich absolutní hodnoty,

$$|d\nu| = \frac{c}{\lambda^2} |d\lambda|, \quad (10.40)$$

a dále je v textu nebudeme explicitně psát.



Obrázek 10.10: Schematické znázornění vztahu mezi frekvenční spektrální hustotou a „vlnově-délkovou“ spektrální hustotou. Nejde o shodnost funkčních hodnot, nýbrž o shodu velikosti plochy  $dI$  v korespondujících intervalech  $\langle \nu, \nu + d\nu \rangle$  a  $\langle \lambda, \lambda + d\lambda \rangle$ , tzn. má platit  $dI = i(\nu) d\nu = i(\lambda) d\lambda$ .

Nyní můžeme vzít Planckův vyzařovací zákon (10.36) jako příklad konkrétní frekvenční spektrální hustoty  $i(\nu)$  a převést jej na funkci vlnové délky  $i(\lambda)$ :

$$dI = i(\nu, T) d\nu = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu = \frac{2\pi h c^3}{c^2} \frac{1}{\lambda^3} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \frac{c}{\lambda^2} d\lambda = i(\lambda, T) d\lambda. \quad (10.41)$$

Z poslední rovnosti vyčteme spektrální hustotu Planckova vyzařovacího zákona pro vlnové délky  $i(\lambda, T)$ :

$$i(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}. \quad (10.42)$$

Podobně by se daly funkce spektrálních hustot převést do dalších proměnných jako je úhlová frekvence  $\omega$ , vlnové číslo  $k$ , atp.

### 10.5.3 Limity Planckova zákona

Historicky byly známy nepřesné předpovědi spektrální hustoty záření černého tělesa, které se ukázaly být pouhými aproximacemi Planckova zákona v limitě nízkých a vysokých frekvencí. Podívejme se nyní na tyto aproximace.

#### Nízké frekvence: Rayleighův-Jeansův zákon

Pro nízké frekvence (vysoké vlnové délky) můžeme rozvinout exponenciálu ve jmenovateli Planckova zákona (10.36) do prvního řádu Taylorova rozvoje,

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}, \quad (10.43)$$

a po dosazení dostaneme *Rayleighův-Jeansův zákon*:

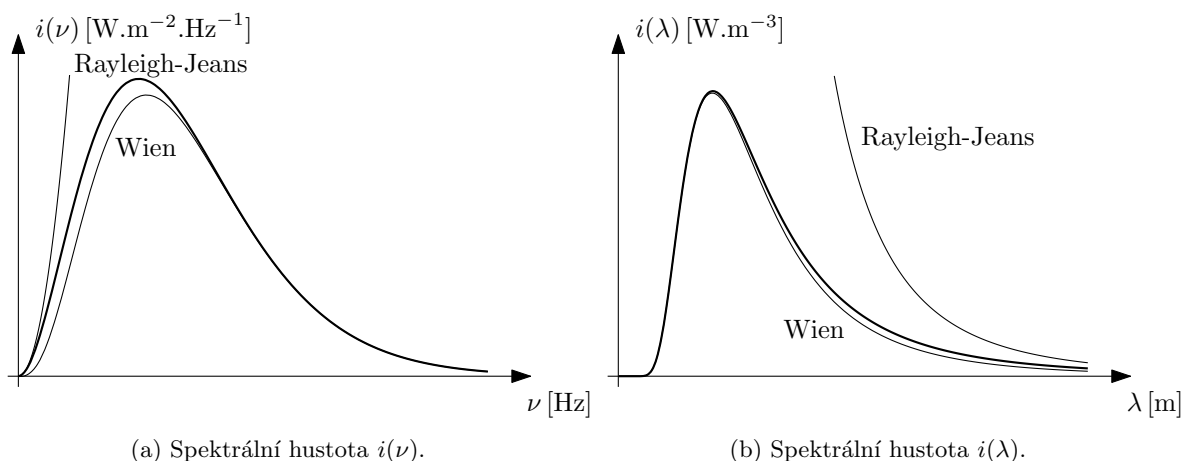
$$i(\nu, T) \approx \frac{2\pi kT\nu^2}{c^2}, \quad \left( i(\lambda, T) \approx \frac{2\pi kTc}{\lambda^4} \right)^{12} \quad (10.44)$$

Jak již bylo naznačeno v kapitole o přesném Planckově zákoně, Rayleighův-Jeansův zákon historicky vyšel jako klasická předpověď spektrální hustoty záření černého tělesa, kdy se předpokládá spojitost energie<sup>13</sup> elektromagnetických módů v dutině černého tělesa. Tento zákon předpovídá, že výkon  $dI$  vyzařovaný v rozsahu frekvencí  $\langle \nu, \nu + d\nu \rangle$  roste kvadraticky s frekvencí  $\nu$ . Pokud se podíváme, kolik energie za jednotku času vyzařuje černé těleso dohromady na všech frekvencích, vyjde nám

$$I(T) = \int_0^{+\infty} i(\nu, T) d\nu = +\infty, \quad \forall T \neq 0. \quad (10.45)$$

Tomuto výsledku se říká *ultrafialová katastrofa*. Předpověď klasické teorie vede na nesmyslný výsledek: těleso, které nemá teplotu absolutní nuly, nutně vyzařuje nekonečně mnoho energie! Zopakujme, že odvození bylo opraveno Planckem, který ad hoc přidal tzv. *kvantovou hypotézu*, kdy předpokládal, že energie módů elektromagnetických vln v dutině černého je kvantována.

Porovnání přesného Planckova zákona a aproximativní Rayleighovy-Jeansovy formule lze vidět na obrázku 10.11.



Obrázek 10.11: Aproximace Planckova zákona spektrální hustoty záření černého tělesa  $i(\nu, T)$ , resp.  $i(\lambda, T)$ : Rayleighův-Jeansův zákon pro nízké frekvence (vysoké vlnové délky) a Wienův zákon pro vysoké frekvence (nízké vlnové délky).

### Vysoké frekvence: Wienův zákon

Pro vysoké frekvence (nízké vlnové délky) platí  $e^{\frac{h\nu}{kT}} \gg 1$  a můžeme tedy v Planckově zákonu (10.36) zanedbat jedničku ve jmenovateli:

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} \gg 1 \quad e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \approx e^{\frac{h\nu}{kT}} \quad (10.46)$$

Výsledná aproximace se nazývá *Wienův zákon*:

$$i(\nu, T) \approx \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}}, \quad \left( i(\lambda, T) \approx \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} \right). \quad (10.47)$$

<sup>12</sup>Pokud bychom totéž provedli pro spektrální hustotu pro vlnové délky, pak v limitě velkých vlnových délek obdržíme tento výraz v závorce.

<sup>13</sup>Pro spojitě rozdělení energií EM módů předpovídá statistická fyzika střední hodnotu energie jednoho módu ve tvaru  $\langle E \rangle = kT$  ( $k$  je opět Boltzmannova konstanta). Což po dosazení do  $i = n\langle E \rangle$  vede na Rayleighův-Jeansův zákon.

Wienův zákon odvodil Wilhelm Wien roku 1896 na základě zkombinování Maxwellova-Boltzmannova rozdělení rychlostí molekul a empiricky známého Stefanova-Boltzmannova zákona.

Porovnání přesného Planckova zákona a přibližné Wienovy formule lze vidět na obrázku 10.11.

### 10.5.4 Wienův posunovací zákon

Jak se bude vyvíjet hodnota vlnové délky  $\lambda_{\max}$  s největší spektrální hustotou v závislosti na teplotě  $T$  černého tělesa? Tzn. na jaké vlnové délce černé těleso nejvíce vyzařuje? Hledejme maximum spektrální hustoty  $i(\lambda, T)$  (10.42):

$$\frac{\partial i(\lambda, T)}{\partial \lambda} = 2\pi hc^2 \left[ -5\lambda^{-6} \frac{1}{e^x - 1} + \lambda^{-5} \frac{\frac{x}{\lambda} e^x}{(e^x - 1)^2} \right] = \frac{2\pi hc^2 \lambda^{-6}}{(e^x - 1)^2} [e^x x - 5(e^x - 1)] \stackrel{!}{=} 0, \quad (10.48)$$

kde jsme si označili  $x = \frac{hc}{\lambda kT} \in \mathbb{R}^+$ . Podmínka nulovosti derivace zjevně vede na rovnici

$$\frac{x e^x}{e^x - 1} = 5. \quad (10.49)$$

Tato rovnice se nedá vyřešit v řeči elementárních funkcí<sup>14</sup>, nicméně číselné řešení je ve tvaru

$$x_{\max} \doteq 4,965114. \quad (10.50)$$

Dosazením této hodnoty zpět do označení  $x = \frac{hc}{\lambda kT}$  získáme hledaný vztah pro hodnotu vlnové délky  $\lambda_{\max}$  s největší spektrální hustotou:

$$x_{\max} = \frac{hc}{\lambda_{\max} kT} \Rightarrow \lambda_{\max} T = \frac{hc}{x_{\max} k} = b, \quad (10.51)$$

kde jsme označili novou konstantu jako  $b = \frac{hc}{x_{\max} k}$ . Tento vztah se nazývá **Wienův posunovací zákon**:

$$\boxed{\lambda_{\max} T = b = \text{konst.} \doteq 2,89777 \cdot 10^{-3} \text{ K.m.}} \quad (10.52)$$

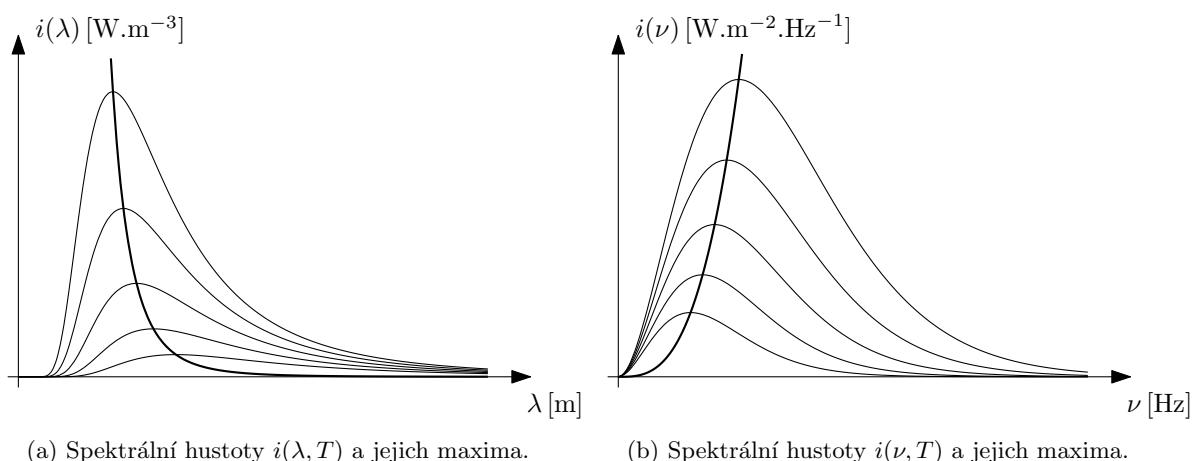
Na obrázku 10.12 vlevo je znázorněn průběh maxim spektrálních hustot  $i(\lambda, T)$  pro různé teploty  $T$ .

<sup>14</sup>Nicméně se dá vyřešit v řeči funkcí speciálních! Lambertova  $W$  funkce (jinak také produktlogaritmus) je definována jako inverzní funkce k funkci  $f(x) = x e^x$ ,  $W(x) := f^{-1}(x)$ , tzn.  $W(y) = x$ , kde  $x$  a  $y$  splňují  $y = x e^x$ . Funkce  $f$  na celém  $\mathbb{R}$  ovšem není prostá! Je třeba vzít  $D_f = H_W = \langle -1, +\infty \rangle$  a  $H_f = D_W = \langle -\frac{1}{e}, +\infty \rangle$ .

Rovnici (10.49), kde na pravé straně můžeme psát obecně  $c$  (pro nás  $c \in \{3, 5\}$ ), lze pak vyřešit jako

$$\frac{x e^x}{e^x - 1} = c, \quad x e^x = c e^x - c, \quad \text{po subst. } x = x' + c: \quad x' e^{x'} = -\frac{c}{e^c}, \quad x' = W\left(-\frac{c}{e^c}\right), \quad \boxed{x = c + W\left(-\frac{c}{e^c}\right)}.$$

Argument funkce  $W$  musí být v definičním oboru, tzn.  $-\frac{c}{e^c} = (-c)e^{-c} = f(-c) \geq -\frac{1}{e}$ , což je vždy splněno.



Obrázek 10.12: Spektrální intenzita záření černého tělesa pro různé teploty  $T$ . Silně je vyznačena spojnice maxim jednotlivých křivek v závislosti na teplotě.

*Poznámka:* Stejnou otázku jako v úvodu této kapitoly si mohu položit i pro frekvenci  $\nu_{\max}$  s největší spektrální hustotou. Postupujeme zcela analogicky jen s hustotou  $i(\nu, T)$  (10.36). Označím-li  $y = \frac{h\nu}{kT}$ , pak požadavek nulovosti derivace,

$$\frac{\partial i(\nu, T)}{\partial \nu} \stackrel{!}{=} 0, \quad (10.53)$$

vede na následující rovnici a její řešení  $y_{\max}$ :

$$e^y y - 3(e^y - 1) = 0, \quad 3 = \frac{y e^y}{e^y - 1}, \quad y_{\max} = 2,82144. \quad (10.54)$$

Dosazení do substituce a vyjádření  $\nu_{\max}$  vede na zákon analogický tomu Wienovu:

$$\boxed{\frac{\nu_{\max}}{T} = \frac{k y_{\max}}{h} = a = \text{konst.} = 0,058789 \text{ THz.K}^{-1}.} \quad (10.55)$$

Na tomto místě je vhodně upozornit, že jelikož vztah mezi spektrálními hustotami  $i(\lambda, T)$  a  $i(\nu, T)$  není dán pouhou substitucí, pak výsledné hodnoty  $\lambda_{\max}$  a  $\nu_{\max}$  nejsou dány pouhým přepočtem  $\lambda_{\max} \neq \frac{c}{\nu_{\max}}$ . Ukažme si to na příkladu Slunce s teplotou povrchu  $T = 6000 \text{ K}$ :  $\lambda_{\max} \doteq 483 \text{ nm}$  (a tomu odpovídající frekvence přibližně  $621 \text{ THz}$ ) a  $\nu_{\max} \doteq 353 \text{ THz}$  (a tomu odpovídající vlnová délka okolo  $850 \text{ nm}$ ).

### 10.5.5 Stefan-Boltzmannův zákon

Podívejme se nyní na to, jaký celkový výkon  $I(T)$  vyzařuje černé těleso při teplotě  $T$  bez ohledu na frekvenci či vlnovou délku záření. Stačí tedy pouze naintegrovat spektrální hustotu  $i(\nu, T)$  přes všechny frekvence  $\nu$  (anebo hustotu  $i(\lambda, T)$  přes všechny vlnové délky  $\lambda$ ):

$$I(T) = \int_0^{+\infty} i(\nu, T) d\nu, \quad \left( I(T) = \int_0^{+\infty} i(\lambda, T) d\lambda \right). \quad (10.56)$$

Po dosazení z Planckova vyzařovacího zákona (10.36) máme výraz

$$I(T) = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^{+\infty} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu. \quad (10.57)$$

Provedením substituce  $x = \frac{h\nu}{kT}$ ,  $\nu = \frac{kTx}{h}$ ,  $d\nu = \frac{kT}{h} dx$  převedeme integrál na tvar

$$I(T) = \left[ \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \right] T^4 = \sigma T^4. \quad (10.58)$$

Výraz v hranaté závorce je již pouhá číselná konstanta, kterou jsme označili  $\sigma$  a nazývá se Stefan-Boltzmannova konstanta. Celkový vyzařovaný výkon tělesa o teplotě  $T$  tedy závisí na čtvrté mocnině této teploty. Tomuto faktu se říká **Stefan-Boltzmannův zákon**:

$$\boxed{I(T) = \sigma T^4}. \quad (10.59)$$

Využijeme-li ještě navíc matematického tvrzení

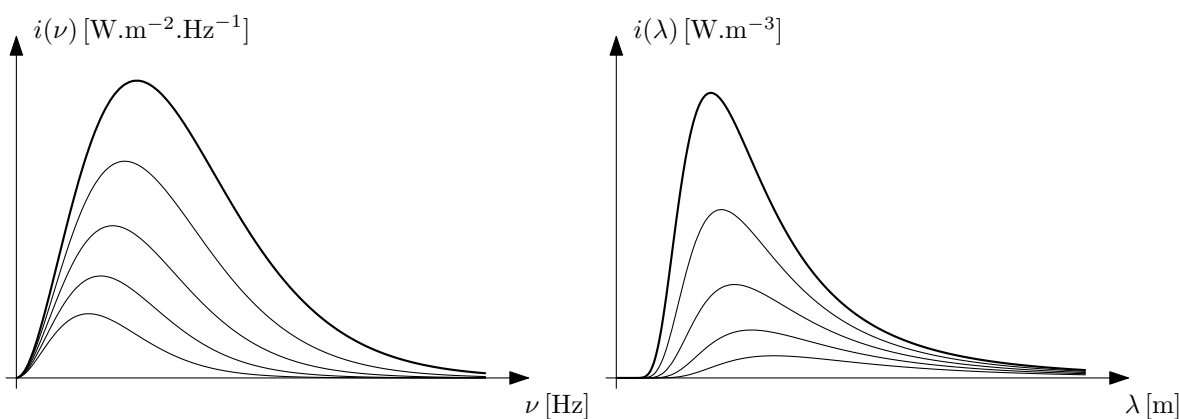
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}, \quad (10.60)$$

kteřé zde nebudeme odvozovat, dostáváme Stefan-Boltzmannovu konstantu tvaru

$$\sigma = \frac{2k^4\pi^5}{15c^2h^3} = 5,6704 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}. \quad (10.61)$$

Výraz pro tuto konstantu tedy plně plyne z Planckova vyzařovacího zákona a její hodnota je plně určena fundamentálními fyzikálními konstantami<sup>15</sup>.

Na obrázku 10.13 jsou znázorněny průběhy funkcí spektrálních intenzit pro různé teploty  $T$ .



(a) Spektrální intenzita  $i(\nu)$  pro různé teploty  $T$ .

(b) Spektrální intenzita  $i(\lambda)$  pro různé teploty  $T$ .

Obrázek 10.13: Grafy spektrální intenzity  $i(\nu, T)$  a  $i(\lambda, T)$  pro různé teploty  $T$ . Celkový vyzařovaný výkon (a tedy obsah plochy pod těmito grafy) dle Stefan-Boltzmannova zákona roste se čtvrtou mocninou teploty  $T^4$ ,  $I(T) = \sigma T^4$ .

<sup>15</sup>A fundamentálními matematickými konstantami 2 a 15. A také  $\pi$ .



# Literatura

- [1] J. Tolar, *Vlnění, optika a atomová fyzika (Základní kurz fyziky FJFI)*, <https://physics.fjfi.cvut.cz/files/predmety/02VOAF/VOAF2017.pdf>, 2017
- [2] J. Tolar, J. Koníček, *Sbírka řešených příkladů z fyziky, Vlnění*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 2005
- [3] F. S. Crawford Jr., *Berkeley Physics Course, Volume 3, Waves (In SI Units)*, McGraw Hill Education (India) Private Limited, New Delhi, 2016
- [4] H. Georgi, *The Physics of Waves*, <http://www.people.fas.harvard.edu/~hgeorgi/new.htm>, 2015
- [5] E. Hecht, *Optics*, Pearson Education Limited, Harlow, 2017
- [6] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics, Electromagnetic Theory of Propagation Interference and Diffraction of Light*, Pergamon Press, Oxford, 1964
- [7] I. Štoll, J. Tolar, *Teoretická fyzika*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 2004
- [8] R. J. Marks, *Handbook of Fourier Analysis and Its Applications*, Oxford University Press, New York, 2009
- [9] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics, Volume II*, Addison-Wesley, London, 1964
- [10] J. Chaves, *Introduction to Nonimaging Optics*, CRC Press, London, 2016
- [11] J. D. Olsen, K. T. McDonald, *Classical Lifetime of a Bohr Atom*, <http://www.physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/orbitdecay.pdf>, 2005