



# OPTIKA

Petr Malý

## Vybrané základní fyzikální konstanty

Rychlost světla ve vakuu	$c_0$	$2,9979 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Náboj elektronu	$e$	$1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Planckova konstanta	$h$	$6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
	$\hbar$	$1,0546 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} (\hbar = h/2\pi)$
Klidová hmotnost elektronu	$m_0$	$9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Elektrická permitivita vakua	$\epsilon_0$	$8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Magnetická permeabilita vakua	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Stefanova konstanta	$\sigma$	$5,671 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
Boltzmannova konstanta	$k_B$	$1,3807 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

# OPTIKA

---

**Petr Malý**

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE  
NAKLADATELSTVÍ KAROLINUM  
2008

Boswell. "Then, Sir, what is poetry?" Johnson. "Why, Sir, it is much easier to say what it is not. We all *know* what light is; but it is not easy to *tell* what it is."

Boswell: „Co je tedy, pane, poezie?“ Johnson: „Víte, pane, ono je snazší říci, co poezie není. Všichni přece víme, co je světlo, ale povědět, co to je, to vůbec není snadné.“

Boswell, James: *Life of Johnson*. London, Oxford University Press, 1965, s. 744  
(11 April 1776)

# OBSAH

ÚVOD.....	11
1 SVĚTLO JAKO ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY .....	18
1.1 Spektrum elektromagnetických vln .....	18
1.2 Vlnová rovnice .....	19
1.3 Rovinné vlny.....	22
1.3.1 Obecná rovinná světelná vlna .....	22
1.3.2 Harmonická rovinná světelná vlna.....	26
1.4 Princip superpozice.....	28
1.5 Komplexní reprezentace .....	29
1.6 Intenzita světla.....	31
1.7 Kulové vlny .....	33
1.8 Šíření světla ve vodivém prostředí.....	35
2 POLARIZACE SVĚTLA ROVINNÉ MONOCHROMATICKÉ VLNY.....	41
2.1 Lineární, kruhová a eliptická polarizace světla.....	41
2.2 Maticový popis polarizace světla.....	44
3 ODRAZ A LOM SVĚTLA NA ROVINNÉM ROZHRAŇÍ DVOU PROSTŘEDÍ ..	51
4 KVAZIMONOCHROMATICKÉ ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY .....	64
4.1 Spektrální rozklad světla.....	64
4.2 Grupová rychlost světla .....	66
5 INTERFERENCE SVĚTLA .....	72
5.1 Dvojsvazková interference .....	73
5.1.1 Interference dvou rovinných světelných vln.....	73
5.1.2 Youngův experiment.....	77
5.1.3 Další příklady dvojsvazkové interference – dělení vlnoplochy .....	79

5.1.4.2.1	Proužky stejného sklonu .....	84
5.1.4.2.2	Proužky stejné tloušťky .....	85
5.1.4.2.3	Antireflexní vrstvy .....	86
5.2	Mnohosvazková interference .....	88
6	KOHERENCE SVĚTLA .....	96
6.1	Úvod do skalární teorie koherence .....	97
6.2	Polarizace světla .....	105
7	HOLOGRAFIE .....	109
8	DIFRAKCE SVĚTLA .....	115
8.1	Fraunhoferova difrakce.....	116
8.1.1	Fraunhoferova difrakce na šterbině .....	116
8.1.2	Difrakce na obdelnikovém otvoru .....	120
8.1.3	Difrakce na kruhovém otvoru .....	120
8.1.4	Fraunhoferova difrakce na řadě šterbin .....	123
8.2	Fresnelova difrakce.....	126
8.2.1	Babinetův princip.....	129
8.2.2	Názorná formulace rozdílu mezi Fraunhoferovou a Fresnelovou difrakcí .....	129
8.2.3	Fresnelovy zóny .....	131
8.2.3.1	Fresnelova difrakce na kruhové apertuře .....	131
8.2.3.2	Fresnelova difrakce v případě válcových vln .....	136
8.2.3.3	Fresnelova difrakce na hraně.....	140
8.3	Matematická teorie .....	141
8.4	Difrakce vln na trojdimenzionálních periodických strukturách .....	146
9	PRINCIP FOURIEROVSKÉ OPTIKY .....	151
10	ZÁKLADY GEOMETRICKÉ OPTIKY .....	159
10.1	Úvod do geometrické optiky.....	159
10.1.1	Eikonálová rovnice .....	159
10.1.2	Zákon lomu pro paprsky .....	162
10.1.3	Intenzita světla v geometrické optice .....	163
10.1.4	Paprsková rovnice.....	165
10.1.5	Fermatův princip.....	166
10.2	Geometrická optika sférických ploch .....	168
10.2.1	Znaménková konvence .....	169
10.2.2	Abbeův invariant .....	170
10.2.3	Kardinální body optické soustavy.....	172
10.2.4	Zobrazovací rovnice .....	174

10.2.5 Zrcadlové plochy .....	176
10.2.6 Zvětšení při optickém zobrazení .....	177
10.2.7 Kombinace dvou zobrazení .....	178
10.2.8 Optická čočka .....	181
10.3 Vybrané zobrazovací přístroje .....	183
10.3.1 Lupa .....	183
10.3.2 Mikroskop .....	186
10.3.3 Teleskop (dalekohled) .....	189
10.3.4 Fotografický přístroj .....	191
10.4 Paraxiální optika maticově .....	194
10.4.1 Maticový formalismus .....	194
10.4.2 Tlustá optická čočka .....	197
10.4.3 Obecná optická soustava, kardinální body .....	199
10.4.4 Laserový rezonátor .....	203
10.5 Vady zobrazení (aberrace) .....	207
10.5.1 Monochromatické aberrace .....	210
10.5.2 Barevné vady zobrazení .....	216
<b>11 SPEKTRÁLNÍ PŘÍSTROJE .....</b>	<b>219</b>
11.1 Spektrometry .....	219
11.1.1 Optický disperzní hranol .....	222
11.1.2 Optická ohybová mřížka .....	223
11.2 Fabry-Perotův interferometr .....	228
<b>12 ZÁKLADY FOTOMETRIE A RADIOMETRIE .....</b>	<b>232</b>
<b>13 ŠÍŘENÍ SVĚTLA V ANIZOTROPNÍCH LÁTKÁCH .....</b>	<b>238</b>
13.1 Vlastnosti tenzoru permitivity .....	239
13.2 Světelné vlny v anizotropním prostředí .....	242
13.2.1 Řádná a mimořádná vlna, Fresnelova rovnice .....	242
13.2.2 Optická indikatrix .....	248
13.2.3 Souvislost mezi geometrickou konstrukcí (indikatrix) a řešením Fresnelovy rovnice .....	249
13.2.4 Šíření světla v anizotropním prostředí: shrnutí .....	251
13.3 Lom světla při dopadu na anizotropní prostředí .....	252
13.3.1 Určení směru mimořádného paprsku pomocí normálové plochy – teoretické zdůvodnění .....	255
13.4 Použití dvojlomných látek .....	257
13.4.1 Polarizátory .....	257
13.4.2 Kompenzátory .....	258
13.4.3 Interference polarizovaných svazků .....	262
13.4.4 Fotoelastické chování .....	263

14 INTERAKCE SVĚTLA S LÁTKOU.....	266
14.1 Klasický model pro výpočet indexu lomu dielektrik .....	268
14.1.1 Lorentzův model pro výpočet indexu lomu dielektrik .....	268
14.1.2 Lokální pole .....	271
14.2 Klasický model pro výpočet indexu lomu kovů .....	273
14.3 Vysvětlení absorpce z mikroskopického hlediska .....	276
14.4 Vysvětlení existence indexu lomu z mikroskopického hlediska.....	280
14.5 Rozptyl světla .....	286
15 ZÁKLADY LASEROVÉ FYZIKY .....	289
15.1 Interakce světla s látkou v případě reálných přechodů mezi energetickými stavy .....	289
15.2 Laser .....	295
16 NELINEÁRNÍ OPTIKA .....	304
16.1 Nelineární optické jevy druhého řádu.....	305
16.2 Nelineární optické jevy třetího řádu .....	310
16.3 Mikroskopický model optických nelinearit druhého řádu .....	314
17 ZÁKLADY VLÁKNOVÉ OPTIKY .....	319
18 ZDROJE A DETEKTORY SVĚTLA .....	325
18.1 Světelné zdroje .....	325
18.2 Detektory .....	327
18.2.1 Tepelné detektory .....	327
18.2.2 Kvantové detektory.....	328
18.2.3 Lidské oko .....	333
19 VLNOVĚ-KORPUSKULÁRNÍ DUALISMUS.....	338
19.1 Tepelné záření.....	338
19.2 Fotony.....	348
19.3 Vlnové vlastnosti částic .....	349
LITERATURA .....	351
REJSTŘÍK.....	353



# ÚVOD

Optika se zabývá světlem: jeho vznikem, šířením, detekcí a interakcí s látkami. V oblasti optiky došlo v několika posledních desetiletích k významným objevům, které přispěly jak k rozvoji fyzikálního poznání, tak k řadě aplikací, které ovlivňují významně náš každodenní život. Jmenujme například laserové čtečky čárových kódů v supermarketech, CD a DVD přehrávače, laserové tiskárny, skenery nebo optické komunikace. Optika patří k nejstarším odvětvím fyziky. Příčina je zřejmá, protože světlo hraje v životě lidí mimořádně důležitou úlohu. Většinu informací získává člověk prostřednictvím zrakového vjemu. Proto je samozřejmé, že chápání a studium světla je spojeno kromě fyziky i s rozvojem filozofie.

Již ve starověkém Řecku bylo známo šíření světla ve formě světelných paprsků, jejich odraz a lom. Staří Řekové řešili například otázku, jak rychle člověk vidí, čímž se myslelo, jak dlouho spatřování trvá: vidění si představovali tak, že člověk z očí vysílá paprsky, které splynou s vnějším světlem, osahají objekt a pak opět dopadnou do oka. Chápání šíření světla bylo do velké míry ovlivněno starověkou geometrií. Například známý zákon lomu pro optické paprsky byl popsán podrobně alexandrijským astronomem CLAUDIEM PTOLEMAIEM (2. stol. př. Kr.), když dával do souvislosti posloupnost úhlů dopadu ze vzduchu a úhlů lomu do vody, ovšem tak, že přiřazoval úhlům lomu hodnoty dané jistou aritmetickou řadou. Zákon lomu neformuloval správně ani JOHANNES KEPLER (1571–1630), který používal vztah platný pouze pro malé úhly. Nicméně úspěšně z něj vycházel při konstrukci teleskopu. Správně zákon lomu světla získal na základě měření WILLEBRORD SNELL (1591–1626, Snellius), na základě částicové teorie ho odvodil RENÉ DESCARTES (1596–1650) a pomocí principu nejkratší dráhy světla PIERRE DE FERMAT (1609–1665). Zákon lomu a odrazu stačí ke správnému popisu zobrazení čočkami a zrcadly, což jsou prvky, kterými jsou tvořeny zobrazovací optické přístroje. Tato oblast optiky bývá ozna-

čována jako geometrická optika, protože se zde v řadě případů dá použít geometrická konstrukce chodu světelných paprsků. Stálý pokrok v konstrukci a kvalitě zobrazovacích prvků je spojen s rozvojem matematických nástrojů pro jejich popis, ať už tradičních analytických řešení a odpovídajících aproximativních metod, např. CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855), ERNST ABBE (1840–1905), LUDWIG SEIDEL (1821–1896), nebo v poslední době numerických metod a počítačových programů.

Celou historii optiky provází otázka, zda je světlo ve své podstatě proud částic (korpuskulární, částicová teorie světla) nebo vlnění (vlnová teorie). Například ISAAC NEWTON (1643–1727), který ukázal ve svém známém experimentu, že se bílé světlo při průchodu skleněným hranolem rozkládá na složky různých barev, byl stejně jako starověcí vědci zastáncem korpuskulární teorie. Pozorování dalších optických jevů, jako ohyb světla, však vedlo postupně k formulaci vlnové teorie. Začíná se objevovat již v 17. století, kdy je spojena se jmény ROBERT HOOKE (1635–1703) a CHRISTIAN HUYGENS (1629–1695), ovšem zcela zvítězila začátkem 19. století. THOMAS YOUNG (1773–1829) provedl svůj známý interferenční pokus, který správně interpretoval, a dal do souvislosti interferenci a ohyb světla. ETIENNE LOUIS MALUS (1775–1812) objevil polarizaci světla (v roce 1809) a zjistil, že odporuje představě, podle níž je světlo tvořeno podélnými vlnami, jak si představoval například Huygens. Pozorování šíření světla v krystalech, které provedl DOMINIQUE FRANCOIS ARAGO (1786–1853), pak vedlo Younga k závěru, že světelné vlny jsou příčné. JEAN FRESNEL (1788–1827) provedl další experimenty s ohybem světla a rozvinul pro jejich popis metodu zón, jež se dnes nazývají Fresnelovy zóny. Vypracoval také popis šíření světla v krystalech, který se stále používá. Vlnovou teorii světla matematicky zpracoval uspokojivě ke konci 19. století GUSTAV ROBERT KIRCHHOFF (1823–1887) a ARNOLD SOMMERFELD (1868–1951). K chápání ohybu světla přispěl svými pozorováními i JOSEPH FRAUNHOFER (1787–1826), jenž objevil optickou ohybovou mřížku (1820) a použil ji k měření vlnové délky světla. To umožnilo vznik optické spektroskopie, která je dnes mimořádně důležitá v řadě oblastí a stále se rozvíjí. V roce 1865 zformuloval JAMES CLERK MAXWELL (1831–1879) rovnice popisující elektrické a magnetické jevy, ukázal, že z nich plyne existence elektromagnetických vln, a navrhl, že k nim patří i světlo. Experimentální prokázání elektromagnetických vln a jejich vlastností shodných s vlastnostmi světla, které provedl v roce 1888 HEINRICH HERTZ (1857–1994), znamenalo jasné vítězství vlnové teorie světla. Pro popis šíření světla v látkách navrhl ještě v 19. století HENDRIK ANTOON LORENTZ (1853–1928) model, který vysvětluje interakci světla

s látkou pomocí pružně vázaných nábojů v látce. Tento model však nevysvětlil dobře proces absorpce a emise světla. Ke konci devatenáctého století byla spokojenost s klasickou vlnovou teorií světla narušena zejména pozorováním tepelného záření (záření černého tělesa) a fotoelektrického jevu. GUSTAV ROBERT KIRCHHOFF (1824–1887) dospěl v roce 1859 k závěru, že v každé dutině obklopené stejně teplými stěnami existuje elektromagnetické záření závislé pouze na teplotě stěn, a ne například na jejich materiálu. Experimentální a teoretické zkoumání tohoto záření, spojené zejména se jmény WILHELM WIEN (1863–1928), LUDWIG EDUARD BOLTZMANN (1843–1906) a JOSEPH STEFAN (1835–1893), bylo zakončeno interpolačním (Planckovým) zákonem, který vlastnosti záření černého tělesa správně popsal. Jeho interpretace vedla v roce 1900 MAXE PLANCKA (1858–1947) k závěru, že světlo může odevzdávat nebo přijímat od látky jen určité, diskrétní hodnoty energie. Tento objev znamenal počátek kvantové teorie. Fotoelektrický jev, tedy uvolňování elektronů z povrchu látky při dopadu světla vhodné vlnové délky, jako první popsal HEINRICH HERTZ roce 1887, když pozoroval, že dopad ultrafialového světla na elektrodu jiskřiště usnadňuje přeskok jiskry mezi jeho elektrodami. Vysvětlení fotoelektrického jevu, zejména skutečnosti, že kinetická energie vyletujících elektronů nezávisí na intenzitě dopadajícího světla, ale na jeho vlnové délce, podal v roce 1905 ALBERT EINSTEIN (1879–1955), podle něhož je samo světlo tvořeno elementárními světelnými „částicemi“. Ty nazval chemik GILBERT LEWIS v roce 1926 fotony. Světlo má tedy jak částicovou, tak vlnovou podstatu, mluví se o korpuskulárně-vlnovém dualismu. Při vysvětlení interakce světla s látkami zavedl Einstein také představu stimulované emise světla, fyzikálního procesu, který je podstatou činnosti laseru. První laser ale sestrojil až v roce 1960 THEODORE HAROLD MAIMAN (1927–2007). LUISE DE BROGLIE (1892–1987) navrhl představu, že vlnově-korpuskulární dualismus se vztahuje i na hmotné objekty, což odpovídá závěrům kvantové mechaniky zformulované později. S rozvojem kvantové teorie látek se rozvíjel také kvantový popis interakce světla s látkou, kvantová elektrodynamika. Statistické vlastnosti světla, tedy optická koherence, byly studovány v souvislosti s interferenčními pokusy (korelace amplitud světelných vln) v rámci klasické fyziky. Korelační měření intenzit světelných vln vedla k rozvoji kvantové teorie optické koherence. Za její vypracování získal Nobelovu cenu za fyziku v roce 2005 ROY J. GLAUBER (nar. 1925), ovšem na jejím rozvoji pracovala řada dalších, například EMIL WOLF (nar. 1922 v Praze, dlouholetý profesor university v Rochestru). Objev laseru a rozšíření laserů s intenzivními světelnými pulzy v šedesátých letech

20. století umožnily studium celé řady nelineárních optických jevů; jako první byla pozorována generace druhé harmonické frekvence rubínového laseru. V sedmdesátých letech se začala rozvíjet kvantová nelineární optika, zabývající se zejména nelineárními jevy spojenými s jednotlivými fotony. V roce 1980 byly demonstrovány zdroje světla s potlačeným šumem (tzv. tiché světlo s fázově citlivým šumem). Optické chlazení a zachycení jednotlivých atomů světelnými svazky, rozvíjené v osmdesátých a devadesátých letech 20. století, umožnilo přesné studium interakce světla s látkou; studuje se například interakce jednoho atomu s jedním módem světla. S optikou je také úzce spojen současný rozvoj nového pojetí zpracování informace, který vede ke kvantové kryptografii a kvantovým počítačům.

Zajímavá je historie optiky v českých zemích. K optikům světového a historického významu patří JAN MAREK MARKŮ z LANŠKROUNA (Joannes Marcus Marci de Cronland, 1595–1667), který byl lékařem, dokonce osobním lékařem Ferdinanda III. a rektorem Karlovy univerzity. Ve vyšším věku vstoupil do jezuitského řádu. V latinském spise „Thaumantias“ z r. 1648 uvedl pozorování, že úhel lomu závisí na vlnové délce, objevil a publikoval tedy disperzi při lomu světla ještě před Newtonem. Poměrně nedávno se také prokázalo, že byl mezi prvními, kdo pozorovali ohyb světla, který objevili nezávisle tři badatelé: Marci, ROBERT BOYLE (1627–1691) a FRANCESCO M. GRIMALDI (1613–1663). AUGUSTIN L. CAUCHY (1789–1857), slavný matematik, který ovšem také vypracoval první matematickou teorii disperze (dodnes se používá tzv. Cauchyho vzorec), žil určitou dobu v Praze jako vychovatel dětí rodiny francouzského krále Karla X. Známy fyziolog JAN EVANGELISTA PURKYNĚ (1787–1869) se zabýval optikou lidského oka, objevil závislost maxima spektrální citlivosti oka na intenzitě dopadajícího světla (Purkyňův jev) a zkoumal setrvačnost zrakového vjemu. FRANTIŠEK KOLÁČEK (1851–1913, 1891 jmenován profesorem české univerzity v Praze) přispěl k teorii disperze. V Praze působili někteří významní světoví vědci v oblasti optiky. Patří k nim bezesporu CHRISTIAN DOPPLER (1803–1853), který byl profesorem v Praze v letech 1841–1848 a který v roce 1842 objevil po něm nazvaný jev, dále ERNST MACH (1838–1916), profesor experimentální fyziky na německé univerzitě v Praze v letech 1867–1895, jenž kromě známých teoretických prací předcházejících teorii relativity publikoval i práce z oblasti optiky, a konečně ALBERT EINSTEIN (na pražské německé univerzitě ve školním roce 1911–12). Z významných jmen v oblasti optiky 20. století můžeme jmenovat například VÁCLAVA DOLEJŠKA (1895–1945), profesora na Přírodovědecké fakultě Univerzity Karlovy, který pracoval v oblasti spektroskopie, nebo ANTONÍNA

VAŠIČKA (1903–1966), profesora na Přírodovědecké fakultě Masarykovy Univerzity v Brně, jenž se zabýval optikou tenkých vrstev. K předním světovým odborníkům v oblasti kvantové a nelineární optiky a teorie koherence světla patří JAN PEŘINA (nar. 1938), profesor Univerzity Palackého v Olomouci.

Výuka optiky na univerzitách je tradičně součástí základního kurzu fyziky. Je tomu tak i na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Tento text vychází z přednášky z optiky pro studenty obecné fyziky, kterou autor posledních patnáct let každý druhý rok vede. Optika zahrnuje dnes velmi širokou oblast, od geometrické a přístrojové optiky (např. mikroskop, spektroskopické přístroje), klasické vlnové optiky (problémy interference a ohybu světla) přes novější vláknovou optiku (optické komunikace), nelineární optiku (optické spínače) až po optiku kvantovou (lasery, kvantová koherence). Každý autor, resp. přednášející, stojí před problémem, co do sylabu přednášky omezené počtem hodin nebo do učebnice omezené rozumným rozsahem zahrnout. Kromě klasických, „povinných“ částí se tak ve většině případů více či méně projeví subjektivní volba přednášejícího. Stejně je tomu i v tomto případě. Snahou autora bylo napsat text, který by byl úvodem pro další studium optiky, ale také zdrojem informací o optice pro studenty, kteří se v budoucnu budou věnovat jiným oborům, na nichž se již optika dále nevyučuje. Proto jsou do knihy zahrnuty některé kapitoly na stručné a přehledové úrovni.

Vzhledem k tomu, že text je určen posluchačům druhého ročníku, je zaměřen na klasickou (tedy ne kvantovou) optiku. Navazuje na přednášku z elektřiny a magnetismu, kde jsou již probírány elektromagnetické vlny. K nim se ještě vrací 1. kapitola. Další kapitoly (2.–5.) jsou věnovány části optiky označované jako vlnová (nebo fyzikální) optika. Ve 2. kapitole je zkoumána polarizace monochromatických rovinných světelných vln, je zaveden její popis pomocí Jonesových vektorů a maticový formalismus, který umožňuje v praktických aplikacích počítat změny polarizačního stavu světla po jeho průchodu různými optickými prvky (polarizátor, kompenzátor apod.). 3. kapitola má klasický obsah, popisuje odraz a lom rovinné vlny na optickém rozhraní mezi dvěma dielektriky. Další kapitola je věnována některým úvahám o světelných vlnách konečné spektrální šířky (kvazimonochromatické světelné signály), zavádí se zde pojem grupové rychlosti a diskutuje se o některých jejích vlastnostech. 5. kapitola popisuje interferenci (skládání) světla. Nejprve se vyšetřuje dvojsvazková interference, jistá pozornost je věnována zejména Youngovu dvojtěštinovému experimentu a Michelsonovu interferometru, stručně jsou ale rozebírány i apli-

kačně významné antireflexní vrstvy. Kapitola končí mnohosvazkovou interferencí, jako důležitý příklad je uveden Fabry-Perotův interferometr. Úvodu do skalární teorie koherence světla je věnována kapitola 6., v jejímž závěru je stručně zmíněna souvislost mezi statistickými vlastnostmi a polarizací světla. V 7. kapitole je stručně vysvětlen princip holografie. Difrakci světla je věnována kapitola 8. Intuitivně je zaveden nejprve popis difrakce ve Fraunhoferově a pak Fresnelově aproximaci a jejich použití v typických případech. V závěru kapitoly jsou uvedeny úvahy, které vedou formálně k formulaci Fresnel-Kirchhoffova difrakčního integrálu. Základy fourierovské optiky a příklad jejího využití k optické filtraci obrazu popisuje stručně kapitola 9. Poměrně rozsáhlá 10. kapitola je věnována geometrické optice. Nejprve je uvedena jako limitní případ vlnové optiky pro velmi krátké vlnové délky, kdy jsou touto limitou získány základní zákony geometrické optiky, jako například zákon lomu pro paprsek. Tyto zákony jsou pak aplikovány na případ lomu a odrazu na sférických rozhraních mezi dielektriky v paraxiální aproximaci, což představuje ovšem nejklaštější a nejjednodušší část klasické optiky, která je sem zařazena pro svůj aplikační význam. Zahrnuje popis některých základních zobrazovacích přístrojů. Uveden je i maticový formalismus, kterého lze využít pro studium složitých optických zobrazovacích soustav. V posledním odstavci 10. kapitoly se probírají stručně vady zobrazování. Na popis zobrazovacích přístrojů navazuje 11. kapitola týkající se základních principů spektrálních přístrojů. Je zde zařazena, protože se optická spektroskopie stává v současné době součástí většiny odvětví fyziky. Kapitoly věnované geometrické a přístrojové optice uzavírá 12. kapitola stručným úvodem do fotometrie. Kapitola 13. se věnuje šíření světla v anizotropních prostředích (látkách). Při šíření světla hraje významnou roli jeho interakce s látkami. Na ní je založena optická spektroskopie, která využívá zkoumání interakce světla s látkami ke studiu vlastností látek. Proto je zařazena kapitola 14. zaměřená na interakci světla s látkou. Je zde zvolen klasický (tj. nekvantový) model oscilátoru ve světelném poli, který, jakkoliv je jednoduchý, poskytuje představu o mikroskopických procesech vedoucích k absorpci a lomu světla. Tento model se využívá ještě v kapitole 16. při výkladu nelineárních optických jevů. Obsah následujících tří kapitol lze považovat za součást tzv. moderní optiky. Zahrnují základy laserové fyziky (kapitola 15.), nelineární optiky (kapitola 16.) a vláknové optiky (kapitola 17.). Stručný přehled zdrojů a detektorů světla je uveden v kapitole 18. Závěrečná 19. kapitola shrnuje některé vlastnosti tepelného optického záření a stručně připomíná vlnově-korpuskulární povahu světla.

Text obsahuje větší objem látky, než lze zahrnout do přednášek současného rozsahu výuky na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy (3 hodiny týdně během jednoho semestru). Autor nepovažuje ovšem za rozumné označovat odstavce adjektivy rozšiřující, nepovinné apod. Nechává na čtenáři, aby si přečetl to, co sám považuje za rozumné nebo zajímavé. Je v tom obsažena autorova naděje, že zde lze něco takového nalézt.

Autor děkuje recenzentům prof. RNDr. Ivanu Pelantovi, DrSc., a doc. RNDr. Pavlu Hlídkovi, CSc., za pečlivé a kritické čtení rukopisu. Autor děkuje také svému synovi Pavlovi Malému, bez něhož by obrázky v textu nemohly vzniknout. Děkuje rovněž redaktorce PhDr. K. Veselé z nakladatelství Karolinum a RNDr. V. Havlíčkovi za péči věnovanou přípravě knihy do tisku.

# 1 SVĚTLO JAKO ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY

## 1.1 SPEKTRUM ELEKTROMAGNETICKÝCH VLN

Elektromagnetické vlny jsou pozorovány v širokém spektrálním intervalu. Spektrální oblasti elektromagnetických vln jsou znázorněny na obr. 1.1. V každé oblasti mají jisté zvláštní projevy nebo účinky. Optika se zabývá elektromagnetickými vlnami, které jsou viditelné lidským okem (viditelná spektrální oblast), a vlnami z ultrafialové a infračervené spektrální oblasti. Mluví se někdy o *optickém záření*. Jeho jednotlivé spektrální oblasti jsou uvedeny v tabulce 1.1.

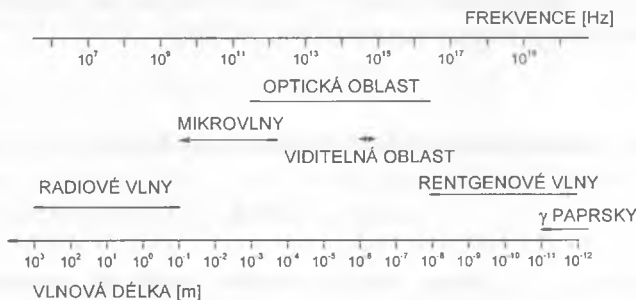
Tabulka 1.1 Spektrální oblasti optického záření

Interval vln. délek	Název oblasti	Zkratka
25–200 nm	Vakuová ultrafialová	VUV
200–400 nm	Ultrafialová	UV
400–700 nm	Viditelná	VIS
700–1000 nm	Blízká infračervená	NIR
1–3 $\mu\text{m}$	Infračervená – krátké vlny	SWIR
3–5 $\mu\text{m}$	Infračervená – střední vlny	MWIR
5–14 $\mu\text{m}$	Infračervená – dlouhé vlny	LWIR
14–30 $\mu\text{m}$	Infračervená – velmi dlouhé vlny	VLWIR
30–100 $\mu\text{m}$	Daleká infračervená	FIR
100–1000 $\mu\text{m}$	Submilimetrová	SubMM



## 1.2 VLNOVÁ ROVNICE

Šíření světla, které je speciálním případem elektromagnetických vln, popisuje vlnová rovnice, jež plyne z Maxwellových rovnic. Připomeňme si nyní, jak z Maxwellových rovnic vlnovou rovnicí dostaneme a jaký má tvar pro různá prostředí. V tomto kontextu lze prostředí rozdělit na prostředí homogenní, nehomogenní, izotropní, anizotropní, vodivá a nevodivá. Homogenní prostředí jsou taková, jejichž vlastnosti jsou ve všech místech stejné, nezávisí na prostorové souřadnici. V prostředích nehomogenních naopak na prostorové souřadnici závisí. Izotropní látky mají vlastnosti nezávislé na směru (šíření světla, polarizace apod.), v anizotropních jsou jejich vlastnosti na směru závislé. Rozdělení látek na vodivé a nevodivé je obvyklé



Obr. 1.1 Spektrum elektromagnetického záření

v učebnicích o elektřině a magnetismu, kde se mluví zpravidla o dielektrikách a vodičích. Vyjdeme z Maxwellových rovnic

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}, \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.4)$$

a obvyklých materiálových vztahů

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (1.5)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (1.6)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (1.7)$$

Zde je použité běžné značení veličin:  $\vec{E}$  je intenzita elektrického pole,  $\vec{D}$  je elektrická indukce,  $\vec{H}$  je magnetická intenzita,  $\vec{B}$  magnetická indukce,  $\vec{P}$  elektrická polarizace,  $\vec{j}$  hustota elektrického proudu,  $\rho$  hustota elektrického náboje,  $\mu$  je magnetická permeabilita,  $\epsilon_0$  permitivita vakua a  $\sigma$  elektrická vodivost. Budeme se zabývat šířením světla v látkách nemagnetických, tedy  $\mu = \mu_0$ . Ve většině případů (kromě 16. kapitoly) budeme také předpokládat lineární závislost polarizace na elektrickém poli, tedy

$$\vec{P} = \epsilon_0 \vec{\chi} \vec{E}, \quad (1.8)$$

kde  $\vec{\chi}$  je elektrická susceptibilita (obecně tenzor) a odkud je

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \vec{\chi}) \vec{E} = \vec{\epsilon} \vec{E}. \quad (1.9)$$

Permitivita  $\vec{\epsilon}$  je obecně tenzorová veličina závislá na prostorových souřadnicích. Výraz v kulatých závorkách v (1.9) definuje relativní permitivitu,  $(1 + \vec{\chi}) = \vec{\epsilon}_r$ . Vlastnosti permitivity podle typu prostředí jsou shrnuty v tabulce 1.2.<sup>1</sup>

**Tabulka 1.2** Přehled klasifikace prostředí a odpovídající charakter permitivity

	homogenní	nehomogenní
izotropní	$\vec{\epsilon}(\vec{r}) = \epsilon$	$\vec{\epsilon}(\vec{r}) = \epsilon(\vec{r})$
anizotropní	$\vec{\epsilon}(\vec{r}) = \vec{\epsilon}$	$\vec{\epsilon}(\vec{r}) = \vec{\epsilon}(\vec{r})$

Nyní se budeme zabývat pouze izotropními prostředími, šíření světla anizotropními prostředími budeme podrobně zkoumat v kapitole 13. Aplikujeme-li operátor  $\nabla \times$  na rovnici (1.1) a uvážíme-li, že můžeme zaměnit pořadí derivací podle času a souřadnice, dostaneme po dosazení z rovnice (1.2)

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \mu \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.10)$$

Můžeme nyní použít vektorovou identitu

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}. \quad (1.11)$$

Obvykle se dále předpokládá, že

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0. \quad (1.12)$$

To je splněno například pro homogenní izotropní prostředí bez volného náboje, jak plyne přímo z rovnice (1.3), nebo v dobrých vodičích, kde je amplituda jakéhokoliv náboje v objemu rychle tlumena.<sup>2</sup>

Platí-li (1.12) a výše uvedené materiálové vztahy, dostáváme vlnovou rovnici ve tvaru ( $\Delta$  je Laplaceův operátor)

$$\Delta \vec{E} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.13)$$

Odtud můžeme získat známé tvary vlnové rovnice. Například pro šíření světla ve vakuu je  $\vec{P} = 0$  a  $\sigma = 0$ . Pro homogenní izotropní dielektrikum ( $\sigma = 0$ ), pro které platí (1.8), máme

$$\Delta \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.14)$$

tedy fázová rychlost šíření je

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}. \quad (1.15)$$

V optice se zavádí veličina *index lomu prostředí*, jako poměr rychlosti světla ve vakuu k rychlosti světla v daném (nemagnetickém) prostředí,<sup>3</sup>

$$n = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\epsilon_r}. \quad (1.16)$$

## 1.3 ROVINNÉ VLNY

Každé řešení vlnové rovnice se nazývá vlnou. Rovnost druhých partiálních derivací podle času a souřadnic (až na druhou mocninu fázové rychlosti) vede k tomu, že v argumentu funkce popisující vlnu musí být čas a prostorová souřadnice spojeny do obecné fáze vlny. To odpovídá tomu, jak chápeme vlnu intuitivně: jedná se o rozruch, který se šíří v prostoru a čase. Nabude určité velikosti v určitém místě a čase, v jiném místě nabude stejné velikosti v jiném čase, až tam vlna dorazí. Geometrické místo bodů, v nichž má obecná fáze vlny pro určitý čas konstantní hodnotu, se nazývá *vlnoplochou* (plocha konstantní fáze). V optice hrají významnou roli *vlny rovinné* (vlnoplochy jsou roviny) a *vlny kulové* (sférické, vlnoplochy jsou kulové plochy). Speciálním případem jsou pak vlny *harmonické*, které jsou popsány funkcí kosinus nebo sinus. Pokud je na vlnoploše konstantní hodnota amplitudy vlny, nazývá se vlna *homogenní*<sup>4</sup>. V případech, kdy je důležitá jen jedna kartézská složka elektrického nebo magnetického pole, je možné uvažovat jen vlnovou rovnici pro tuto složku. Řešení této skalární rovnice se nazývá *skalární vlna*. V optice se dává přednost elektrickému poli, protože při interakci světla s látkou hraje zpravidla dominantní roli (nejsilnější optické přechody v atomech jsou spojeny s jejich elektrickými dipólovými momenty).

### 1.3.1 Obecná rovinná světelná vlna

*Rovinné elektromagnetické vlny*<sup>5</sup> jsou důležitým řešením vlnové rovnice. Budeme se zde zabývat homogenními rovinnými vlnami. V nich závisí elektrické a magnetické pole pouze na vzdálenosti měřené v určitém směru. Pokud vhodně natočíme souřadný systém tak, že tento význačný směr odpovídá směru osy  $z$ , znamená to, že vektory pole se stávají závislé pouze na jedné souřadnici, na  $z$ . Pak má ovšem vlnová rovnice pro libovolnou komponentu vektoru  $\vec{E}$  tvar

$$\frac{\partial^2 E_j}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_j}{\partial t^2} = 0. \quad (1.17)$$

Podobně platí tato jednodimenzionální rovnice i pro pole  $\vec{B}$ . Tuto rovnici je možné přepsat na tvar

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) E_j = 0. \quad (1.18)$$

Přejdeme-li k novým proměnným  $\zeta$  a  $\tau$

$$\zeta = ct - z, \quad (1.19)$$

$$\tau = ct + z, \quad (1.20)$$

máme

$$\frac{\partial}{\partial t} = c \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (1.22)$$

Vlnová rovnice (1.17) má v nových proměnných tvar

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \tau} E_j = 0. \quad (1.23)$$

Obecné řešení této rovnice je zřejmě

$$E_j = f_1(\zeta) + f_2(\tau), \quad (1.24)$$

kde  $f_1, f_2$  jsou libovolné funkce. Dosadíme-li zpět původní proměnné, dostaneme

$$E_j = f_1(ct - z) + f_2(ct + z). \quad (1.25)$$

Řešení má jasný smysl. Pro případ  $f_2 = 0$  máme pro komponentu pole

$$E_j = f_1(ct - z). \quad (1.26)$$

V určité rovině  $z = \text{konst}$  závisí pole jen na čase, v určitém časovém okamžiku závisí pole jen na souřadnici  $z$ . Pole bude mít zřejmě stejnou velikost pro všechny souřadnice a časy, které jsou spojeny výrazem

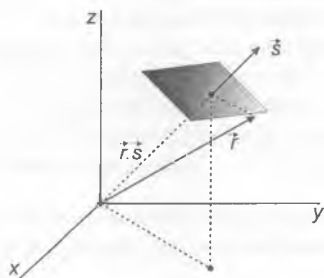
$$ct - z = \text{konst}. \quad (1.27)$$

Pokud například v čase  $t = 0$  a v rovině  $z = 0$  bude mít pole určitou hodnotu, bude v dalším čase nabývat této hodnoty v místech  $z = ct$ . Geomet-

rické místo stejných hodnot pole, rovina, se tedy bude šířit rychlostí  $c$  v kladném směru osy  $z$ . Řešení  $f_2$  odpovídá rovinné vlně, která běží v záporném směru osy  $z$ . Pokud chceme vyjádřit rovinnou vlnu v obecném případě, kdy směr náběhu fáze, směr šíření, je určen jednotkovým vektorem  $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$  (viz obr. 1.2), bude argument rovinné vlny mít tvar  $(ct - \vec{r} \cdot \vec{s})$ , protože skalární součin  $\vec{s} \cdot \vec{r}$  je roven průmětu libovolného polohového vektoru  $\vec{r}$  do směru  $\vec{s}$ , odpovídá tedy výše uvažované souřadnici  $z$ . Tento argument se nazývá *fáze vlny*. Elektrické a magnetické pole rovinné vlny má tedy jednotlivé komponenty, které závisí na fázi vyjádřené v uvedeném tvaru. Aby ovšem vektory elektrického a magnetického pole byly řešením Maxwellových rovnic, musí splňovat ještě další podmínky. Uvažujme tedy vektory

$$\vec{E} = \vec{E}(ct - \vec{r} \cdot \vec{s}), \quad (1.28)$$

$$\vec{B} = \vec{B}(ct - \vec{r} \cdot \vec{s}). \quad (1.29)$$



Obr. 1.2 Šíření rovinné vlny v obecném směru, který je dán jednotkovým vektorem  $\vec{s}$

Zřejmě pro derivace platí

$$\frac{\partial}{\partial t} = c \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = -s_x \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -s_y \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -s_z \frac{\partial}{\partial \zeta}. \quad (1.31)$$

Proto můžeme vyjádřit

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \vec{s} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.32)$$

a z rovnice (1.1) dostáváme

$$\vec{s} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.33)$$

Zcela stejně z rov. (1.2) máme

$$-\vec{s} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = c \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (1.34)$$

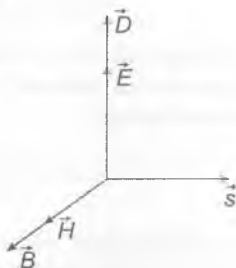
Poslední dvě rovnice je možné integrovat podle času, přičemž integrační konstantu, která by znamenala konstantní hodnotu polí (ne časově proměnné vlnění), položíme rovnou nule. Pak dostaneme dvě rovnice, které spojují vektory  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{s}$

$$\vec{s} \times \vec{E} = c \vec{B}, \quad (1.35)$$

$$\vec{s} \times \vec{B} = -\frac{1}{c} \vec{E}. \quad (1.36)$$

Vztah (1.36) plyne z rov. (1.34) a z materiálových vztahů pro izotropní prostředí. Ze vztahů (1.35), (1.36) je zřejmé, že vektory  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  musí být kolmé na směr šíření (skutečně skalární součin  $\vec{s} \cdot \vec{E} = 0$ ,  $\vec{s} \cdot \vec{B} = 0$ ) i kolmé navzájem.<sup>6</sup> Pro izotropní prostředí jsou ovšem vektory  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ , resp.  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$ , kolineární. Rovinné elektromagnetické vlny jsou tedy v izotropním prostředí

Obr. 1.3 Vzájemná orientace vektorů elektrického a magnetického pole v rovinné vlně



*příčné*, vektory mají vzájemnou orientaci, jak je znázorněno na obr. 1.3. Například z rov. (1.35) vyplývá vztah mezi velikostmi navzájem kolmých vektorů  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  rovinné elektromagnetické vlny

$$B = \frac{1}{c} E, \quad (1.37)$$

odkud

$$E = c B = c \mu H = \frac{\sqrt{\mu_0 \mu_r}}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r}} H = Z H. \quad (1.38)$$

Poslední rovnost definuje *impedanci Z*. *Impedance vakua*  $Z_0$  je rovna

$$Z_0 = \frac{\sqrt{\mu_0}}{\sqrt{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega. \quad (1.39)$$

Podle rov. (1.16) je pro nemagnetické prostředí ( $\mu_r = 1$ ) impedance rovna

$$Z = \frac{Z_0}{n}, \quad (1.40)$$

kde  $n$  je index lomu látky.

### 1.3.2 Harmonická rovinná světelná vlna

Jako jedno z nejjednodušších (a pro optiku nejvýznamnějších) řešení vlnové rovnice můžeme uvést rovinnou *harmonickou vlnu*<sup>7</sup>,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi). \quad (1.41)$$

Zde  $\vec{E}_0$  je amplituda vlny,  $\omega$  *kruhová frekvence*. Protože se jedná o vlnění na jedné pevně dané frekvenci, mluví se o *monochromatické vlně*.  $\vec{k}$  je *vlnový vektor* definovaný

$$\vec{k} = k \vec{s} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{s} = \frac{\omega}{c} \vec{s} = \frac{\omega}{c_0} n \vec{s} = k_0 n \vec{s}. \quad (1.42)$$

Zde  $\vec{s}$  je opět jednotkový vektor ve směru šíření,  $\lambda$  *vlnová délka vlny* v prostředí,  $k_0$  velikost vlnového vektoru ve vakuu. Magnetické pole  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  je vyjádřeno analogicky.

Pro harmonickou časovou závislost světelné vlny lze provést časovou derivaci a psát vlnovou rovnici v *Helmholtzově* tvaru<sup>8</sup>



$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0. \quad (1.43)$$

Připomeňme zde všeobecně známý význam parametrů popisujících harmonickou vlnu na příkladu jednodimenzionální skalární harmonické vlny postupující ve směru osy  $z$

$$E(z, t) = E_0 \cos(\omega t - k z). \quad (1.44)$$

Sledujeme-li výchylku spojenou s vlnou v určitém místě (například  $z = 0$ ) opakuje se její maximální hodnota v čase s periodou  $T$ , která je důsledkem periodicity funkce  $\cos$  a souvisí přímo s kruhovou frekvencí vlny

$$\omega T = 2\pi. \quad (1.45)$$

Frekvence vlnění  $\nu$  je definována jako počet period za jednotku času<sup>9</sup>, tedy

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (1.46)$$

„Zmrazíme-li“ vlnu v pevném čase (například  $t = 0$ ), opakuje se její maximální hodnota v prostoru s periodou  $\lambda$  (vlnovou délkou), která je důsledkem periodicity funkce  $\cos$  a souvisí s velikostí vlnového vektoru

$$k \lambda = 2\pi. \quad (1.47)$$

Vzhledem k podstatě vlnění (posun v čase spojen s posunem v prostoru) musí být

$$cT = \lambda, \quad (1.48)$$

tedy

$$\lambda = \frac{c}{\nu}. \quad (1.49)$$

Dále zřejmě platí<sup>10</sup>

$$\omega = ck. \quad (1.50)$$

Harmonické rovinné vlny jako speciální případ obecných rovinných vln musí být příčné, jak je uvedeno výše. Lze to ukázat ovšem velmi jednoduše, dosadíme-li elektrické pole ve tvaru rovnice (1.41) do Maxwellových rovnic (pro jednoduchost volíme  $\varphi = 0$ ). Uvážíme přitom, že je

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = -\omega \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}), \quad (1.51)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = \vec{k} \cdot \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (1.52)$$

a

$$\nabla \times \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = \vec{k} \times \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (1.53)$$

Pak ovšem dostáváme pro vektorové amplitudy vln vztahy odpovídající Maxwellovým rovnicím (1.1–1.4)

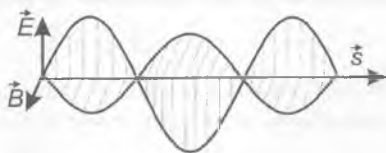
$$\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0, \quad (1.54)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{D}_0 = 0, \quad (1.55)$$

$$\omega \vec{B}_0 = \vec{k} \times \vec{E}_0, \quad (1.56)$$

$$\omega \vec{D}_0 = -\vec{k} \times \vec{H}_0. \quad (1.57)$$

Tyto vztahy ukazují jasně příčnost rovinné (homogenní) harmonické vlny i vzájemnou orientaci vektorů. Harmonická rovinná vlna postupující ve směru osy  $z$  je znázorněna na obr. 1.4.



Obr. 1.4 Rovinná elektromagnetická vlna postupující ve směru osy  $z$

## 1.4 PRINCIP SUPERPOZICE

Šíření světla v prostředí popisují Maxwellovy rovnice s příslušnými materiálovými vztahy. Pokud je prostředí takové, že materiálové vztahy jsou

lineární (vzhledem k tomu, že uvažujeme nemagnetické prostředí, jedná se zejména o linearitu závislosti polarizace  $P$  na elektrickém poli), jsou rovnice popisující šíření světla lineární a platí *princip superpozice*. To znamená, že pokud elektrická pole  $\vec{E}_1, \vec{E}_2$  jsou řešením Maxwellových rovnic pro dané prostředí, je řešením také  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ . Například laserový svazek se nezmění, když se zapne druhý svazek, který se s prvním kříží. Tento princip platí ovšem pro libovolný počet polí. Jsou-li  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3, \vec{E}_4 \dots$  řešeními vlnové rovnice, je řešením i jejich suma

$$\vec{E} = \sum_k \vec{E}_k. \quad (1.58)$$

Princip superpozice neplatí ovšem obecně při šíření optických vln v nelineárních prostředích, jak uvidíme například v kapitole 16.

## 1.5 KOMPLEXNÍ REPREZENTACE

Pro matematické vyjádření vln popsaných harmonickými funkcemi je výhodné zavést komplexní reprezentaci polí. V optice jde zejména o elektrické pole. Zavedení komplexní reprezentace ukážeme názorně na příkladu rovinné monochromatické vlny

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi). \quad (1.59)$$

Vyjádříme-li

$$\exp(\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad (1.60)$$

můžeme pro reálný vektor psát

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left\{ \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)] + \vec{E}_0 \exp[-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)] \right\}. \quad (1.61)$$

Tento výraz můžeme přepsat

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left\{ \vec{E}_0^* \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})] + \vec{E}_0 \exp[-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})] \right\}, \quad (1.62)$$

kde jsme zavedli *komplexní amplitudu*

$$\vec{E}_0^* = \vec{E}_0 \exp(-i\varphi). \quad (1.63)$$

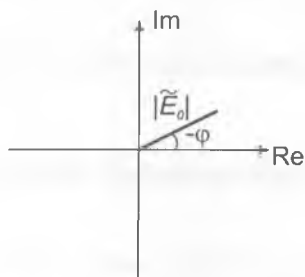
Používáme-li lineární rovnice, tedy v případech, kdy platí princip superpozice, můžeme zřejmě elektrické pole rovinné vlny vyjádřit jako komplexní veličinu

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \tilde{\vec{E}}_0 \exp[-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]. \quad (1.64)$$

Reálné pole pak získáme jako její reálnou část

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\tilde{\vec{E}}(\vec{r}, t)\}. \quad (1.65)$$

Komplexní reprezentaci je tak možné výhodně využívat ve výpočtech a na konci vzít reálnou část. Není to však možné tam, kde jsou vztahy nelineární, tedy zejména při výpočtech energií nebo intenzit a v nelineární optice (kapitola 16). Komplexní amplituda světelné vlny je obecně vektorová veličina. Jejím jednotlivým kartézským komponentám odpovídají skalární komplexní amplitudy. Skalární komplexní amplitudy (stejně jako obecná komplexní čísla) můžeme znázornit graficky v komplexní (Gaussově) rovině. Komplexnímu číslu s určitou reálnou a imaginární částí bude v této rovině odpovídat bod, jehož  $x$ -ová souřadnice je rovna reálné části komplexního čísla a  $y$ -ová souřadnice rovna imaginární části komplexního čísla. Součet komplexních čísel je tvořen součtem jejich reálných a imaginárních částí. Při grafickém znázornění to znamená, že se sčítají  $x$ -ové a  $y$ -ové souřadnice. Je proto výhodné znázornit komplexní číslo vektorem s počátečním bodem v počátku a koncovým bodem v bodě, který odpovídá danému komplexnímu číslu. Znamená to, že vektor komplexní amplitudy má v komplexní rovině komponenty  $\text{Re}\{\tilde{\vec{E}}_0\}$ ,  $\text{Im}\{\tilde{\vec{E}}_0\}$ . Je zřejmé, že součet komplexních čísel odpovídá vektorovému součtu vektorů, kterými jsou znázorněny. Skalární komplexní amplitudu proto můžeme znázornit jako na obr. 1.5, velikost



Obr. 1.5 Grafické znázornění komplexního čísla (komplexní amplitudy)

vektoru odpovídá modulu komplexní amplitudy  $E_0$ , jeho úhel vůči ose  $\text{Re}\{\tilde{E}_0\}$  odpovídá argumentu komplexní amplitudy a je roven  $-\varphi$ . Skládá-li se v určitém místě více vlnění stejné frekvence, která lze popsat skalárními komplexními amplitudami  $\tilde{E}_{0p}$ , je komplexní amplituda výsledné vlny

$$\tilde{E}_0 = \sum_p \tilde{E}_{0p}, \quad (1.66)$$

což odpovídá vektorovému součtu komplexních amplitud jednotlivých vlnění. Tato grafická metoda je velmi přehledná a užívá se například v teorii difrakce.

## 1.6 INTENZITA SVĚTLA

V optice se často používá intenzita světla, která souvisí s hustotou výkonu přenašeného světelnou vlnou. Lze ji zavést pomocí Poyntingova vektoru. Poyntingův vektor je definován

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t). \quad (1.67)$$

Pro rovinné vlny /srov. rov. (1.35, 1.38)/ je

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{Z} E^2(\vec{r}, t) \vec{s}, \quad (1.68)$$

míří tedy ve směru šíření vln. Například dosazením za velikost intenzity monochromatického elektrického pole (oscilujícího na frekvenci  $\omega$ ) ze vztahu (1.61) zjistíme, že velikost Poyntingova vektoru obsahuje časově neproměnnou část a část oscilující na frekvenci  $2\omega$ . *Intenzita světla* se pro obecnou elektromagnetickou vlnu definuje jako časová střední hodnota velikosti Poyntingova vektoru, tedy jako časová střední hodnota hustoty výkonu dopadajícího na jednotkovou plochu kolmou na směr šíření vln (středování v čase odstraní oscilace na frekvenci  $2\omega$ )

$$I(\vec{r}) = \langle S(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} S(\vec{r}, t) dt. \quad (1.69)$$

Zde  $\Delta t$  je doba středování. V případě rovinné vlny je podle rov. (1.68)

$$I(\vec{r}) = \langle S(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{Z} \langle E^2(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{Z} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} E^2(\vec{r}, t) dt. \quad (1.70)$$

Intenzitu světla pro harmonickou (tj. monochromatickou) rovinnou vlnu můžeme vyjádřit pomocí komplexní amplitudy elektrického pole, dosadíme-li do posledního vztahu vyjádření pole pomocí rov. (1.61). Rozvineme-li druhou mocninu a uvážíme-li, že časové střední hodnoty exponenciálních funkcí  $\exp(i2\omega t)$ ,  $\exp(-i2\omega t)$  jsou nulové, máme

$$I = \frac{1}{2Z} \tilde{E}_0 \cdot \tilde{E}_0^*. \quad (1.71)$$

Podle rov. (1.40) lze přepsat impedanci  $Z$  pomocí indexu lomu prostředí<sup>11</sup>

$$I = \frac{n}{2Z_0} |\tilde{E}_0|^2 = \frac{nc_0 \epsilon_0}{2} |\tilde{E}_0|^2. \quad (1.72)$$

Intenzitu světla můžeme vyjádřit pomocí střední časové hodnoty hustoty energie elektromagnetického pole spojeného s rovinnou světelnou vlnou  $w$  ( $\langle w \rangle = 2\langle w_E \rangle$ )

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r |\tilde{E}_0|^2, \quad (1.73)$$

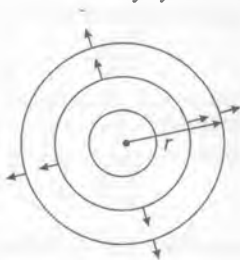
$$I = \frac{c_0}{n} \langle w \rangle = c \langle w \rangle. \quad (1.74)$$

Vyjádření intenzity světla jako střední časové hodnoty velikosti Poyntingova vektoru (1.69) je obecné, pro vlny se složitějšími prostorovými závislostmi může intenzita světla záviset na polohovém vektoru. Pokud se amplitudy vln mění v čase, může být i intenzita světla funkcí času (světelné záblesky, pulzy). Časové středování, jak jsme je popsali výše, je totiž třeba provádět tak, aby se vystředovaly časové změny související s oscilacemi polí na nosné frekvenci (ve viditelné oblasti doby řádově  $10^{-15}$  s). Při reálném sledování intenzity světla „se středuje“ přes dobu danou časovou odezvou použitého detektoru (například fotodiody, oko).

Výrazy (1.72) a (1.74) pro intenzitu světla jsme získali pomocí vztahu mezi vektorem elektrického a magnetického pole příčné rovinné vlny. V kapitole 10 (odstavec 10.1.3) ukážeme, že platí i pro obecnější pole v aproximaci geometrické optiky. I ve většině dalších případů, s nimiž se v optice setkáváme, lze intenzitu světla vyjádřit s dobrou přesností pomocí rov. (1.72).

## 1.7 KULOVÉ VLNY

Dalším důležitým řešením vlnové rovnice jsou kulové vlny, tedy vlny, jejichž vlnoplochy jsou kulové a které vycházejí nebo se sbíhají do středu (například počátku souřadného systému), jak je znázorněno na obr. 1.6. Budeme tedy uvažovat vlnu popsanou skalární funkcí, která závisí na čase  $t$  a na vzdálenosti  $r$  od počátku (skalární sféricky symetrická vlna):



Obr. 1.6 Kulová vlna

$$f = f(r, t). \quad (1.75)$$

Vzdálenost  $r$  je zřejmě rovna

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.76)$$

Laplaceův operátor ve vlnové rovnici lze vyjádřit<sup>12</sup> pomocí derivace podle  $r$  (značíme ji čárkou)

$$\Delta f = f'' + \frac{2}{r} f'. \quad (1.77)$$

Pravou stranu této rovnice můžeme vyjádřit vhodně pomocí další sféricky symetrické funkce

$$g(r) = r f(r). \quad (1.78)$$

Skutečně,

$$g' = r f' + f, \quad (1.79)$$

$$g'' = r f'' + 2 f'. \quad (1.80)$$

Platí tedy

$$\Delta f(r) = \frac{g''}{r} = \frac{(rf)''}{r}. \quad (1.81)$$

Vlnovou rovnicí

$$\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (1.82)$$

můžeme tedy psát

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \quad (1.83)$$

respektive po vynásobení  $r$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0. \quad (1.84)$$

To je ovšem jednorozměrná vlnová rovnice /srov. rov. (1.17)/, jejímž řešením je /srov. rov. (1.25)/

$$g(r, t) = g\left(t \pm \frac{r}{c}\right). \quad (1.85)$$

Podle rov. (1.78) dostáváme sférickou vlnu

$$f(r, t) = \frac{1}{r} g\left(t \pm \frac{r}{c}\right). \quad (1.86)$$

Pro harmonickou vlnu tak máme například

$$f(r, t) = \frac{A}{r} \exp[-i(\omega t \pm kr)]. \quad (1.87)$$

Znaménko + odpovídá sbíhavé vlně (která se sbíhá do počátku), znaménko – vlně rozbíhavé.  $A$  je amplituda. Kulová vlna není dobře definována v bodě  $r = 0$ .

Neuvažovali jsme zde vektorový charakter pole, protože není dobře slučitelný s uvedenou sférickou symetrií. Neexistuje například lineárně polarizovaná vlna s konstantní amplitudou na celé kulové vlnoploše. V reálných případech se ale zabýváme kulovou vlnou jen v určitém prostoro-  
rovém úhlu, ve kterém kulové zakřivení vlnoplochy a vektorová povaha pole nejsou ve sporu. Ve velkých vzdálenostech od bodového zdroje je



možné kulovou vlnu aproximovat vlnou rovinnou. Příčně omezené je i světlo vycházející z plošných (nebo velmi vzdálených zdrojů), jehož vlnoplochy jsou rovinné. Hovoří se pak někdy o kvazirovinných vlnách, které je však možné v určité prostorové oblasti rovinnou vlnou dobře aproximovat. Složitější světelná pole je možné popsat superpozicí jednoduchých, například rovinných vln (rozvoj do rovinných vln).

## 1.8 ŠÍŘENÍ SVĚTLA VE VODIVÉM PROSTŘEDÍ

Uvažujme nyní šíření elektromagnetické harmonické rovinné vlny ve *vodivém* homogenním izotropním prostředí. Dosadíme-li výraz pro pole v komplexním vyjádření (1.64) do rov. (1.13) a použijeme-li rov. (1.8), dostaneme vlnovou rovnici ve tvaru

$$\Delta \tilde{\vec{E}} + (\omega^2 \mu \varepsilon + i \omega \sigma \mu) \tilde{\vec{E}} = 0. \quad (1.88)$$

V analogii k rov. (1.42) zavedeme komplexní vlnový vektor, jehož velikost je nyní dána komplexním číslem

$$\tilde{k} = k_R + i k_I \quad (1.89)$$

$$\tilde{k}^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \left( \varepsilon_r + i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right). \quad (1.90)$$

Podobně můžeme zavést *komplexní relativní permitivitu*

$$\tilde{\varepsilon}_r = \varepsilon_{rR} + i \varepsilon_{rI}, \quad (1.91)$$

respektive *komplexní index lomu*

$$\tilde{n} = n_R + i n_I = \frac{c_0}{\omega} \tilde{k} \quad (1.92)$$

vztahem

$$\tilde{n}^2 = \tilde{\varepsilon}_r = \varepsilon_r + i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}. \quad (1.93)$$

Zde jsme použili obvyklého označení pro reálnou část relativní permitivity,  $\varepsilon_{rR} = \varepsilon_r$ . Vyjádříme-li monochromatickou rovinnou vlnu, která se šíří ve

směru osy  $z$ , pomocí komplexního vlnového vektoru<sup>13</sup>, můžeme do rov. (1.64) dosadit rov. (1.89)

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \exp[-i(\omega t - k_R z)] \exp(-k_I z). \quad (1.94)$$

Dostaneme tedy jakousi obdobu rovinné vlny, jejíž amplituda je při šíření v homogenním prostředí tlumena, tj. rovna  $\vec{E}_0 \exp(-k_I z)$ . Vyjádříme-li nyní intenzitu světla podle rov. (1.72) máme

$$I(z) = I_0 \exp(-a z), \quad (1.95)$$

což je známý *Lambert-Beerův zákon*, který popisuje exponenciální tlumení intenzity vlny při šíření – absorpci<sup>14</sup>. Koeficient  $a$  je absorpční koeficient<sup>15</sup>. Ze vztahu (1.72) mezi intenzitou světla a velikostí elektrické intenzity je zřejmé, že

$$a = 2k_I. \quad (1.96)$$

K absorpčnímu zákonu (1.95) se vrátíme ještě v kapitole 14 /vztah (14.50)/, průběh intenzity světla daný tímto zákonem je znázorněn na obr. 14.4.

Velikost reálné a imaginární části vlnového vektoru můžeme vyjádřit explicitně. Výraz (1.90) lze psát (zde  $k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \epsilon_r$ )

$$\tilde{k}^2 = k^2 \left( 1 + i \frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right). \quad (1.97)$$

Umocněním rov. (1.89) a dosazením do rov. (1.97) máme

$$k_R^2 - k_I^2 = k^2 \quad (1.98)$$

$$2k_R k_I = \frac{\sigma k^2}{\epsilon \omega}. \quad (1.99)$$

Po umocnění rov. (1.99) můžeme dosadit za  $k_I^2$  do rov. (1.98), a získat tak kvadratickou rovnici pro  $k_R^2$ :

$$[k_R^2]^2 - k^2 [k_R^2] - \left( \frac{\sigma k^2}{2\epsilon \omega} \right)^2 = 0. \quad (1.100)$$

Její řešení je

$$k_R = k \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega}\right)^2} + 1}. \quad (1.101)$$

Z rov. (1.99) pak máme

$$k_I = k \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega}\right)^2} - 1}. \quad (1.102)$$

„Běžný“ index lomu, tj. reálná část komplexního indexu lomu, jak je vidět porovnáním vztahů (1.89) a (1.92), je roven

$$n_R = \frac{c_0}{\omega} k_R.$$

Pomocí rov. (1.101) tedy můžeme explicitně psát

$$n_R = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega}\right)^2} + 1}. \quad (1.103)$$

Pro bezztrátová (nevodivá) prostředí, tedy pro  $\sigma=0$ , dostáváme z tohoto obecného vztahu obvykle používaný (1.16). Z rov. (1.96) a (1.102) můžeme vyjádřit absorpční koeficient. Velmi často je veličina  $\frac{\sigma}{\varepsilon \omega}$  malá, takže lze

s dobrou přesností aproximovat odmocninu  $\sqrt{1+x^2} \approx 1+1/2x^2$ , což vede k obvykle užívanému výrazu pro absorpční koeficient

$$a = \frac{\omega}{c_0 \sqrt{\varepsilon_r}} \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} = \frac{\omega}{c_0 n_R} \varepsilon_{rl}. \quad (1.104)$$

### Poznámky

<sup>1</sup> Permittivita v látkách je také funkcí frekvence elektromagnetické vlny. Těto závislosti se říká disperze a látky se nazývají disperzními. Zde disperzi nebereme v úvahu.

<sup>2</sup> Skutečně, platí-li pro homogenní ohmický (tedy  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ) vodič rovnice kontinuity proudu,  $\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , a rov. (1.3), dostáváme pro hustotu náboje diferenciální rovnici

$\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , která má řešení odpovídající exponenciálnímu poklesu:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon} t\right).$$

<sup>3</sup> Vlnová rovnice (1.14) určuje čtverec fázové rychlosti  $c^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}$  a podíl čtverců fázových

rychlostí ve vakuu a v prostředí určuje čtverec indexu lomu  $n^2 = \varepsilon_r \mu_r$ . Pro bezztrátová prostředí jsou všechny veličiny reálné. Obvykle se fázová rychlost a index lomu chápou jako kladné veličiny a znaménka  $\pm$  při odmocňování se interpretují tak, že se světlo může šířit v kladném nebo záporném smyslu. Tak jsme napsali i vztahy (1.15) a (1.16). V tomto duchu se například při odrazu světla na zrcadle může položit  $n \rightarrow -n$ , jak uvedeme např. v odst. 10.2.5. Zpravidla se také implicitně předpokládá, že i veličiny  $\varepsilon_r$  a  $\mu_r$  jsou nezáporné. Ovšem jak uvidíme dále, například při šíření světla plazmatem může být  $\varepsilon_r$  jak kladné, tak záporné (srov. odst. 14.2),  $\mu_r$  může být záporné pro některé látky s magnetickým uspořádáním. Pokud je jedna z veličin  $\varepsilon_r$ ,  $\mu_r$  záporná, vychází index lomu ryze imaginární (dochází k odrazu světla, srov. odst. 14.2). Zajímavý případ nastává, když je současně  $\varepsilon_r < 0$ ,  $\mu_r < 0$ . Index lomu je pak sice reálná veličina, ale jak ukázal v roce 1966 V. G. Veselago, je šíření světla v takovém prostředí popsáno správně záporným indexem lomu, tedy  $n = -\sqrt{\varepsilon_r \mu_r} < 0$ . Znamená to například, že zákon lomu /viz rov. (3.14)/ stále platí, ale lomený paprsek postupuje na opačnou stranu od kolmice než obvykle /jak plyne z (3.14) pro  $n_2 < 0$  a ze znaménkové konvence uvedeně v odst. 10.2.1/. Z Maxwellových rovnic pro  $\varepsilon_r < 0$ ,  $\mu_r < 0$  také plyne, že vektory  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{s}$  tvoří levotočivou trojici (na rozdíl od obvyklého případu znázorněného na obr. 1.3). Proto se takovým prostředím často říká levotočivá. Poyntingův vektor /srov. rov. (1.67)/ míří na opačnou stranu než se šíří vlna, grupová a fázová rychlost jsou opačně orientovány. Materiály uvedených vlastností byly skutečně vyrobeny (například kompozitní materiály složené z kovu a dielektrika, někdy se mluví o metamateriálech) a jejich „zvláštní“ chování bylo experimentálně prokázáno (např. S. Schulze se spolupracovníky v roce 2000). Stále pokračuje jejich výzkum i hledání aplikačních možností.

<sup>4</sup> Je-li například vlna popsána funkcí  $f(\vec{r}, t) = a(\vec{r}) \exp[\omega t - \Phi(\vec{r})]$ , je *plocha konstantní amplitudy* dána rovnicí  $a(\vec{r}) = \text{konst}$ , *vlnoplocha* rovnicí  $\Phi(\vec{r}) = \text{konst}$ . Vlny, pro něž si vlnoplochy a plochy konstantní amplitudy neodpovídají, se nazývají *nehomogenní*.

<sup>5</sup> Název „rovinné vlny“ se obvykle užívá pro „homogenní rovinné vlny“, které uvažujeme také zde.

<sup>6</sup> Ze vztahů (1.35, 1.36) plyne, že pro nulovou hodnotu elektrického pole  $E$  je nulová i hodnota magnetického pole  $B$ , tj. obě pole jsou v postupující elektromagnetické rovinné vlně ve fázi.

<sup>7</sup> Harmonickou vlnu lze ekvivalentně popsat jak funkcí sinus, tak funkcí kosinus, které se liší jen fázovým posuvem. Dáváme zde přednost funkci cos.

<sup>8</sup> V této poznámce použijeme komplexní reprezentaci vln, jak bude zavedena v odstavci 1.5. V optice se často setkáváme se situací, kdy postupuje v určitém směru (osa  $z$ ) vlna, která se málo liší od vlny rovinné. Lze ji popsat podobným výrazem, jako vlnu rovinnou, jen její komplexní amplituda je slabě modulována ve směru osy  $z$  (mění se málo amplituda i fáze). Její vlnoplochy jsou proto málo zakřiveny a světelné paprsky /definované v kapitole 10 jako normály k vlnoplochám, viz rov. (10.24)/ svírají malé úhly s osou  $z$ . Odpovídá to situaci paraxiálního přiblížení v geometrické optice /srov. odst. 10.2/. Pro tento případ lze zjednodušit vlnovou rovnici pro komplexní amplitudy vln. Uvažujme vlnu  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \exp[-(i\omega t - kz)]$ , která splňuje Helmholtzovu vlnovou rovnici (1.43). Malé změny komplexní amplitudy ve směru osy  $z$  lze kvantifikovat tak, že relativní změna amplitudy (reálná i imaginární část) se mění málo na vzdálenosti  $\lambda$ . Tedy

$$\frac{1}{\vec{E}_0} \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial z} \lambda \ll 1, \text{ resp. derivováním také } \frac{1}{\vec{E}_0} \frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial z^2} \lambda^2 \ll 1. \text{ Dosazením pole do rov. (1.43)}$$

a uvážením  $\frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial z^2} \ll k^2 \vec{E}_0$  dostaneme rovnici  $\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \vec{E}_0 + 2ik \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial z} = 0$ , což je tak-

zvaný *paraxiální tvar* Helmholtzovy rovnice, který připomíná Schrödingerovu rovnici kvantové mechaniky. Řešením paraxiální Helmholtzovy rovnice jsou například gaussovské (tj. laserové) svazky, o nichž se zmíníme podrobněji v kapitole 15.

<sup>9</sup> Frekvence se někdy vyjadřuje, zejména ve spektroskopii, pomocí *vlnočtu*:  $\bar{\nu} = 1/\lambda$  (zpravidla se vlnová délka dosazuje v cm, nejčastěji užívanou jednotkou vlnočtu je  $\text{cm}^{-1}$ ).

<sup>10</sup> Je důležité si uvědomit velikosti právě zmíněných veličin pro světelné vlny. Například (ve vakuu,  $c = c_0$ ) vlnové délce  $\lambda = 500 \text{ nm}$  odpovídá  $\bar{\nu} = 20\,000 \text{ cm}^{-1}$ ,  $k = 1,26 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ ,  $\omega = 3,8 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ ,  $\nu = 6 \times 10^{14} \text{ Hz}$ ,  $T = 1,7 \times 10^{-15} \text{ s} = 1,7 \text{ fs}$ .

<sup>11</sup> Intenzita světla závisí tedy nejen na velikosti amplitudy pole, ale i na indexu lomu prostředí, ve kterém se šíří. Intenzitu světla pro rovinnou vlnu můžeme vyjádřit také pomocí amplitudy magnetického pole,  $I = \frac{Z}{2} \vec{H}_0 \cdot \vec{H}_0^*$ .

<sup>12</sup> Výpočet Laplaceova operátoru ve sféricky symetrickém případě:

$$\frac{\partial \varphi(r)}{\partial x} = \varphi' \frac{\partial r}{\partial x} = \varphi' \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \varphi' \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{x}{r} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \varphi' \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \left( \frac{x}{r} \right)^2 \varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' \left( 1 - \frac{x^2}{r^2} \right),$$

a konečně

$$\Delta \varphi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi = \varphi'' + \frac{2}{r} \varphi'.$$

<sup>13</sup> Vlnový vektor míří ve směru osy  $z$ , má tedy jen  $z$ -ovou komponentu, která má reálnou a imaginární složku.

<sup>14</sup> Pokles intenzity světla je zde způsoben vodivostí, tedy z mikroskopického hlediska vodivostními (volnými) elektrony v kovech nebo polovodičích. K absorpci světla může ale docházet také v dielektrikách (izolantech), kde jsou jen vázané elektrony. O mikroskopickém modelu absorpce světla se zmíníme v kapitole 14. Tvar zákona (1.95) je však obecný.

<sup>15</sup> Někdy se místo absorpčního koeficientu užívá *optická hustota vzorku*, značená obvykle  $OD$  (z angl. *optical density*), definovaná vztahem  $I = I_0 10^{-OD}$ . Porovnáním s (1.95) je zřejmé, že  $OD = \frac{az}{\log_e 10} = 0,434 az$ .

# 2 POLARIZACE SVĚTLA

## ROVINNÉ MONOCHROMATICKÉ VLNY

### 2.1 LINEÁRNÍ, KRUHOVÁ A ELIPTICKÁ POLARIZACE SVĚTLA

Jak jsme již uvedli v předchozí kapitole, z Maxwellových rovnic vyplývá, že rovinná světelná vlna je příčná. Světelné vlny jsou příčné ve většině případů, kterými se v optice zabýváme.<sup>1</sup> Znamená to, že vektor elektrické intenzity leží v rovině kolmé ke směru šíření. Polarizace světla je dána směrem vektoru elektrického pole v této rovině. V tomto odstavci budeme uvažovat rovinnou monochromatickou vlnu. Pro určitost předpokládejme, že postupuje ve směru osy  $z$ . Elektrické pole je v uvedeném případě funkcí souřadnice  $z$  a času. Zvolíme-li pevnou hodnotu souřadnice  $z$ , můžeme sledovat chování vektoru  $\vec{E}$  v čase. Je-li nenulová například pouze  $x$ -ová komponenta elektrického pole, je zřejmé, že kmitá konec vektoru  $\vec{E}$  ve směru osy  $x$ . To je speciální případ *lineární polarizace světla*. Za světlo lineárně polarizované lze obecněji pokládat světlo, jehož elektrický vektor kmitá v libovolné (pevné) přímce kolmé k ose  $z$ . Znamená to, že při šíření světla vektor  $\vec{E}$  leží stále v rovině určené směrem jeho kmitů a osou  $z$ . Tato rovina se nazývá polarizační rovinou lineárně polarizovaného světla.

Polarizační stav rovinné monochromatické vlny však může být obecnější.<sup>2</sup> Postupuje-li vlna ve směru osy  $z$ , vektor  $\vec{E}$  kmitá stále v rovině  $x, y$ . Víme-li, že vektory elektrické intenzity směřující ve směru souřadných os,  $E_x, E_y$ , řeší vlnovou rovnici, bude řešením vlnové rovnice i obecnější harmonická monochromatická vlna daná součtem

$$\vec{E}(z, t) = \vec{e}_x E_x(z, t) + \vec{e}_y E_y(z, t). \quad (2.1)$$

Komponenty vektoru elektrické intenzity mají tvar odpovídající rovinné monochromatické vlně

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - kz + \delta_x) = E_{x0} \cos(\varphi + \delta_x) \quad (2.2)$$

$$E_y = E_{y0} \cos(\omega t - kz + \delta_y) = E_{y0} \cos(\varphi + \delta_y) \quad (2.3)$$

$$E_z = 0. \quad (2.4)$$

Zde

$$\varphi = \varphi(z, t) = \omega t - kz. \quad (2.5)$$

V rovnicích pro obě komponenty je zřejmá stejné  $\varphi$ , tedy náběh fáze v čase, resp. v prostoru. To znamená, že se obě komponenty při šíření vyvíjejí podobně, tedy vývoj výsledného vektoru je dán jejich počátečními fázemi a amplitudami. Můžeme se ptát, jakou křivku opisuje v čase konec vektoru  $\vec{E}$  v určité rovině kolmé k ose  $z$ . Je vhodné vyloučit z rovnic (2.2) a (2.3)  $\varphi$ . Vynásobíme (2.2)  $\sin \delta_y$ , (2.3)  $\sin \delta_x$  a rovnice odečteme. Pak vynásobíme rovnice po řadě  $\cos \delta_y$  a  $\cos \delta_x$  a opět je odečteme. Dostaneme tak

$$\frac{E_x}{E_{x0}} \sin \delta_y - \frac{E_y}{E_{y0}} \sin \delta_x = \cos \varphi (\cos \delta_x \sin \delta_y - \cos \delta_y \sin \delta_x) \quad (2.6)$$

a

$$\frac{E_x}{E_{x0}} \cos \delta_y - \frac{E_y}{E_{y0}} \cos \delta_x = \sin \varphi (\cos \delta_x \sin \delta_y - \cos \delta_y \sin \delta_x). \quad (2.7)$$

Kulaté závorky na pravé straně rovnice jsou zřejmě rovny  $\sin(\delta_y - \delta_x)$ . Zavedeme-li rozdíl fází  $\delta = \delta_y - \delta_x$  a sečteme-li po umocnění (2.6) a (2.7), dostaneme

$$\frac{E_x^2}{E_{x0}^2} + \frac{E_y^2}{E_{y0}^2} - 2 \frac{E_x}{E_{x0}} \frac{E_y}{E_{y0}} \cos \delta = \sin^2 \delta. \quad (2.8)$$

Tato rovnice popisuje obecný vztah mezi komponentami pole v rovině  $x, y$ . Je to zřejmě rovnice křivky druhého řádu,  $ax^2 + 2bxy + cy^2 + d = 0$ , a protože

$$\left| \begin{array}{cc} a & b \\ b & c \end{array} \right| = \frac{1 - \cos^2 \delta}{E_{x0}^2 E_{y0}^2} \geq 0, \quad (2.9)$$

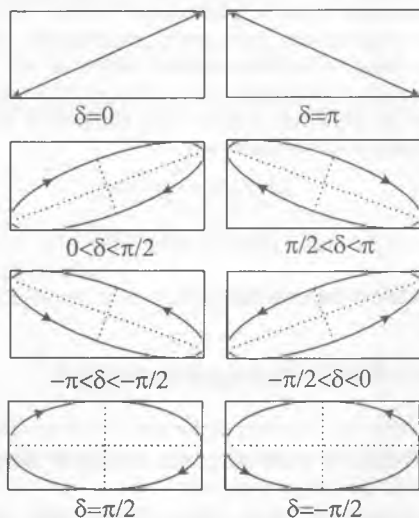


jedná se o elipsu. Konec vektoru  $\vec{E}$  tedy opisuje elipsu. Úhel  $\alpha$  mezi osou elipsy a souřadnou osou  $x$  je

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2b}{a-c} = \frac{2E_{x0} E_{y0}}{E_{x0}^2 - E_{y0}^2} \cos \delta. \quad (2.10)$$

Díváme-li se proti směru šíření světla (tedy z kladného konce osy  $z$  směrem ke konci zápornému), může se vektor  $\vec{E}$  otáčet ve směru hodinových ručiček (vpravo), pak se mluví o *pravotočivé eliptické polarizaci*, pokud se otáčí proti směru hodinových ručiček (vlevo), jde o polarizaci *levotočivou*. Při pravotočivé polarizaci musí zřejmě komponenta  $y$  předbíhat komponentu  $x$ , tedy musí být  $\delta_y > \delta_x$ , což znamená  $\delta > 0$  /pro rozdíl  $\delta$  z intervalu  $(-\pi, \pi)$ /.

Ve speciálním případě, kdy  $E_{x0} = E_{y0}$  a  $\delta = m \frac{\pi}{2}$ ,  $m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ , obíhá konec vektoru po kružnici; světlo je *kruhově polarizované*.



Obr. 2.1 Křivky opisované koncem vektoru elektrického pole v rovině  $x, y$ , znázorněné pro různé hodnoty fázového rozdílu

Pokud je  $\delta = m\pi$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , je v rov. (2.8)  $\sin \delta = 0$ ,  $\cos \delta = (-1)^m$ , a rovnice přejde na tvar

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{E_{y0}}{E_{x0}} (-1)^m, \quad (2.11)$$

což znamená, že světlo je *lineárně polarizované*. Různé stavy polarizace jsou znázorněny na obr. 2.1.

Až dosud jsme se zabývali rovinnými monochromatickými vlnami. Ve skutečnosti se ovšem setkáváme se složitějšími světelnými poli, která se popsané situaci více nebo méně blíží. Často se jedná o světlo, které je vysíláno například Sluncem nebo žárovkou. Elektrické pole není v takových případech popsáno harmonickými funkcemi, má složitý, stochastický průběh. Je-li například průběh  $x$ -ové a  $y$ -ové komponenty zcela stochastický a navzájem nezávislý, bude orientace vektoru  $\vec{E}$  složitou, stochastickou funkcí času. V případě, že všechny směry jsou stejně pravděpodobné, mluvíme o *nepolarizovaném* (někdy „přirozeném“) světle. Je tedy zřejmé, že polarizační stav světla souvisí úzce s jeho statistickými vlastnostmi, tedy s jeho koherencí, které se budeme věnovat podrobně v 6. kapitole. Zcela obecně je možné popsat polarizační stav světla *polarizační maticí*, ve které vystupují komplexní amplitudy jednotlivých komponent elektrického pole (zde pro světlo, které se šíří ve směru osy  $z$ ):

$$J = \begin{pmatrix} \langle \vec{E}_x \vec{E}_x^* \rangle & \langle \vec{E}_x \vec{E}_y^* \rangle \\ \langle \vec{E}_y \vec{E}_x^* \rangle & \langle \vec{E}_y \vec{E}_y^* \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Zde  $\langle \rangle$  znamená střední časovou hodnotu.

## 2.2 MATICOVÝ POPIS POLARIZACE SVĚTLA

Uvedeme zde maticový popis polarizace rovinných monochromatických vln, jak ho zavedl R. C. Jones v roce 1941.

Při popisu polarizačního stavu světla můžeme opět využít komplexní reprezentace. Uvažujeme-li stále rovinnou vlnu postupující ve směru osy  $z$ , můžeme ji vyjádřit

$$\begin{aligned} \vec{E}(z,t) &= \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[ \vec{e}_x E_{x0} \exp(-i\delta_x) + \vec{e}_y E_{y0} \exp(-i\delta_y) \right] \exp[-i(\omega t - kz)] + c.c. \right\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(z,t) &= \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[ \vec{e}_x E_{x0} + \vec{e}_y E_{y0} \exp[-i(\delta_y - \delta_x)] \right] \exp(-i\delta_x) \exp[-i(\omega t - kz)] + c.c. \right\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

neboli

$$\vec{E}(z,t) = \frac{1}{2} \left\{ \vec{\tilde{E}} \exp[-i(\omega t - kz)] + c.c. \right\} \quad (2.15)$$

kde jsme zavedli komplexní amplitudu  $\vec{\tilde{E}} = \vec{e} \tilde{E}_0$ . Například komplexní amplitudu světla lineárně polarizovaného ve směru osy  $x$  je možné vyjádřit pomocí jednotkového polarizačního vektoru  $\vec{e} = \vec{e}_x$  takto

$$\vec{\tilde{E}} = \vec{e} \tilde{E}_x = \vec{e}_x E_{x0} \exp(-i\delta_x). \quad (2.16)$$

Jednotkový polarizační vektor pro kruhově polarizovanou vlnu ( $E_{x0} = E_{y0}$ ) je komplexní

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y), \quad (2.17)$$

kde znaménko  $+$  odpovídá levotočivému a znaménko  $-$  pravotočivému směru kruhové polarizace.

Komplexní amplitudu je možné vyjádřit pomocí tzv. *Jonesova vektoru*

$$\vec{\tilde{E}} \rightarrow \begin{pmatrix} E_{x0} \\ E_{y0} \exp[-i(\delta_y - \delta_x)] \end{pmatrix} \exp[-i\delta_x]. \quad (2.18)$$

Při popisu polarizace světla nemusíme poslední člen brát v úvahu, protože roli hraje jen rozdíl fází  $\delta = \delta_y - \delta_x$ . Jonesův vektor (komplexní) proto lze psát

$$V = \begin{pmatrix} E_{x0} \\ E_{y0} \exp[-i\delta] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B - iC \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

kde  $A = E_{x0}$ ,  $B = E_{y0} \cos \delta$ ,  $C = E_{y0} \sin \delta$ .

Podobně je důležitý jen poměr velikostí  $x$ -ové a  $y$ -ové komponenty, je proto možné Jonesovy vektory normovat (faktorem  $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ ), respektive psát ve tvaru, kdy  $A = 1$ . Jonesovy matice pro různé polarizační stavy světla získáme dosazením příslušných hodnot amplitud komponent pole a fázového rozdílu  $\delta$  do vztahu (2.19). Získáme tak Jonesovy vektory pro různé polarizační stavy světla:

Lineární polarizace ve směru osy  $x$

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

Lineární polarizace ve směru osy  $y$

$$V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

Lineární polarizace ve směru, který je dán úhlem  $\alpha$  vůči ose  $x$

$$V = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

Kruhová polarizace (levotočivá +, pravotočivá -)

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

Obecná eliptická polarizace

$$V = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{pmatrix} A \\ B \pm iC \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Světlo může při svém šíření procházet optickými prvky, které mění jeho polarizační stav. Tyto prvky lze popsat Jonesovými maticemi ( $2 \times 2$ )

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

a Jonesův vektor odpovídající výslednému polarizačnímu stavu  $V'$  získat jako součin matice  $T$  a původního Jonesova vektoru  $V$ .

$$V' = TV. \quad (2.26)$$

Například fázový kompenzátor je prvek, v němž při průchodu dochází k odlišnému fázovému posunu pro  $x$ -ovou a  $y$ -ovou komponentu pole (popíšeme ho podrobněji v kapitole 13), tedy

$$E_x \rightarrow E_x \exp(-i\varphi_x), \quad (2.27)$$

$$E_y \rightarrow E_y \exp(-i\varphi_y). \quad (2.28)$$

Podle (2.19) a (2.27–2.28) je zřejmé, že výsledný Jonesův vektor lze psát

$$V' = \begin{pmatrix} E_{x0} \\ E_{y0} \exp[-i(\delta + \varphi_y - \varphi_x)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{x0} \\ E_{y0} \exp(-i\delta) \exp[-i(\varphi_y - \varphi_x)] \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Napišeme-li součin (2.26)

$$\begin{pmatrix} E_{x0} \\ E_{y0} \exp(-i\delta) \exp[-i(\varphi_y - \varphi_x)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{x0} \\ E_{y0} \exp(-i\delta) \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

dostaneme rovnice, z nichž lze určit prvky matice pro kompenzátor. Skutečně

$$E_{x0} = a E_{x0} + b E_{y0} \exp(-i\delta) \quad (2.31)$$

$$E_{y0} \exp(-i\delta) \exp[-i(\varphi_y - \varphi_x)] = c E_{x0} + d E_{y0} \exp(-i\delta), \quad (2.32)$$

tedy

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = \exp[-i(\varphi_y - \varphi_x)]. \quad (2.33)$$

Jonesova matice pro kompenzátor má tedy tvar

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp[-i(\varphi_y - \varphi_x)] \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Podobně jako u Jonesových vektorů i u matic není jejich vyjádření jednoznačné (díky tomu, že polarizační stav je dán fázovým rozdílem a podílem velikostí amplitud jednotlivých složek pole). Důležitým případem kompenzátoru je například čtvrtlnová, resp. polovlnová destička, pro kterou je

$\varphi_y - \varphi_x = \frac{\pi}{2}$ , resp.  $\pi$ , jak se ještě zmíníme ve 13. kapitole.

Polarizátor je optický prvek, který propustí z dopadajícího světla jen komponenty lineárně polarizované v určitém směru.<sup>3</sup> Je-li tento směr určen úhlem  $\beta$  vůči ose  $x$ , projdou polarizátorem průměty složky  $x$  a  $y$  pole, tj. prošlé pole bude lineárně polarizované ve směru  $\beta$ , a jeho velikost bude

$$E_{\beta 0} = E_{x0} \cos \beta + E_{y0} \sin \beta, \quad (2.35)$$

kde  $E_{x0}$  a  $E_{y0}$  jsou kartézské komponenty amplitudy dopadajícího světla. Komponenty pole za polarizátorem jsou

$$E'_{x0} = E_{\beta 0} \cos \beta, \quad (2.36)$$

resp.

$$E'_{y0} = E_{\beta 0} \sin \beta. \quad (2.37)$$

Rozepíšeme-li součin (2.26) dostaneme tvar Jonesovy matice pro polarizátor

$$T = \begin{pmatrix} \cos^2 \beta & \sin \beta \cos \beta \\ \sin \beta \cos \beta & \sin^2 \beta \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Jiný prvek může stáčet rovinu lineárně polarizovaného světla, tj. světlo polarizované lineárně ve směru  $\alpha$  vůči ose  $x$  bude po průchodu polarizované ve směru  $\alpha + \beta$ . Jonesův vektor vstupujícího a vystupujícího pole můžeme tedy psát

$$V = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

a

$$V' = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Jonesova matice odpovídající tomuto elementu je

$$T = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

což opět zjistíme rozepsáním součinu (2.26) a použitím součtových vzorců pro sinus, resp. kosinus.

Je-li zařazeno za sebou více prvků, které mění polarizaci světla, můžeme celkový polarizační stav dostat postupným násobením matic, tedy celková matice  $T$

$$T = T_n \dots T_2 T_1. \quad (2.42)$$

Násobení normovaného vektoru maticemi ve tvaru, jak jsme ho zde uvedli, může v některých případech vést k tomu, že výsledný vektor nebude už normovaný. Je ho možné ovšem normovat následně, nemá to žádný vliv na polarizační stav světla. Někdy se normování zahrnuje již přímo do tvaru matice. Tak například matice pro polarizátor s osou ve směru  $x$  /viz rov. (2.38)/ je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

pro polarizátor s osou natočenou pod úhlem  $45^\circ$  je

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ nebo } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Použití maticového formalismu je velmi efektivní. Jako příklad uvedeme čtvrtlínovou destičku, na níž dopadá kolmo světlo lineárně polarizované ve směru, který svírá úhel  $\alpha = 45^\circ$  s osou  $x$ . Jonesův vektor vstupujícího světla je podle rov. (2.22)

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

matice  $T$  podle rov. (2.34)

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

tedy výsledný vektor

$$V' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

odpovídá pravotočivé kruhové polarizaci.<sup>4</sup>

## Poznámky

- <sup>1</sup> Řešením Maxwellových rovnic mohou být v určitých případech i podélné vlny. Příklad podélných vln uvedeme v kapitole 14 (viz pozn. 6) pro případ šíření světla v látce ve speciálním případě, když je pro určitou frekvenci  $\epsilon_r = 0$ . Světlo má většinou charakter příčného vlnění, ale striktně příčné elektromagnetické vlny mohou být řešením Maxwellových rovnic jen v případě nekonečně rozlehlých (například rovinných) vln.
- <sup>2</sup> Rovinné elektromagnetické vlny jsou takto polarizované, protože jsou příčné. To, že světlo může být polarizované popsáním způsobem, lze považovat za důkaz toho, že se jedná o příčné vlnění.
- <sup>3</sup> Polarizátor může být například tvořen polymerním filmem, který absorbuje silně světlo s určitým směrem kmitů elektrického pole a propouští světlo kmitající ve směru kolmém, tzv. *dichroismus*. Pravděpodobně nejznámější je Polaroid, vyrobený poprvé v roce 1938. Jiný typ polarizátorů, které jsou založené na dvojlomu světla popíšeme podrobně ve 13. kapitole. Světlo může být lineárně polarizováno také při odraze na optickém rozhraní mezi dvěma dielektriky, jak uvedeme v kapitole 3.
- <sup>4</sup> Jak je destička vyrobena, uvedeme v kapitole 13 (viz odst. 13.4.2). Podle jejího natočení může být také  $\varphi_y - \varphi_x = -\pi/2$  a vystupující světlo může být kruhově polarizováno levotočivě.



# 3 ODRAZ A LOM SVĚTLA NA ROVINNÉM ROZHRAŇÍ DVOU PROSTŘEDÍ

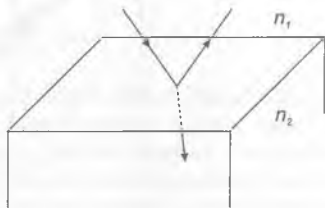
Budeme se zabývat situací, kdy světlo při svém šíření dopadá na rozhraní dvou různých optických prostředí. Pro jednoduchost budeme uvažovat monochromatické rovinné vlny a rovinné rozhraní mezi dvěma dielektriky, která mají reálné indexy lomu  $n_1$  a  $n_2$ . Dopadající vlna s frekvencí  $\omega$  a vlnovým vektorem  $\vec{k}$  postupuje v prostředí 1 (v komplexním vyjádření):

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]. \quad (3.1)$$

V obecném případě, jak je dobře známo, se vlna částečně odrazí a částečně prochází do prostředí 2 (viz obr. 3.1). Vlnu *odraženou* a *prošlou* můžeme psát

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} \exp[-i(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})], \quad (3.2)$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} \exp[-i(\omega_t t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})]. \quad (3.3)$$



Obr. 3.1 Světlo dopadající na optické rozhraní dvou dielektrik se částečně odrazí a částečně prochází (láme se)

Předpokládejme, že rovina rozhraní leží v rovině  $x, y$ . V této rovině existují všechny vlny v jednom bodě současně, musí mít tedy stejnou fázi. To ovšem platí pro libovolný bod roviny a libovolný čas. Musí tedy platit

$$\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \omega_t t - \vec{k}_t \cdot \vec{r}. \quad (3.4)$$

Speciálně pro  $\vec{r} = 0$  tedy dostáváme

$$\omega t = \omega_r t = \omega_t t, \quad (3.5)$$

a tedy

$$\omega = \omega_r = \omega_t, \quad (3.6)$$

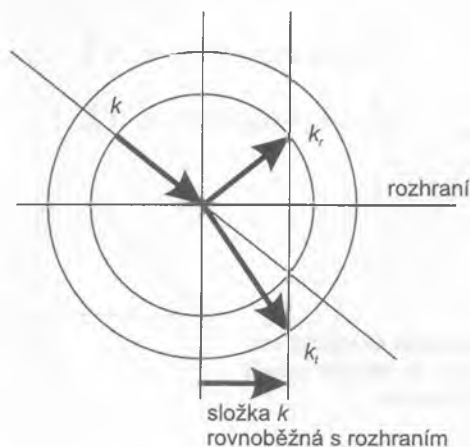
všechny frekvence jsou stejné. Podobně pro  $t = 0$  je v rovině  $x, y$  ( $\vec{r}$  leží v rovině  $x, y$ )

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r}, \quad (3.7)$$

čili

$$(\vec{k} - \vec{k}_r) \cdot \vec{r} = (\vec{k} - \vec{k}_t) \cdot \vec{r} = (\vec{k}_r - \vec{k}_t) \cdot \vec{r} = 0. \quad (3.8)$$

Vzhledem k tomu, že vektor  $\vec{r}$  leží v rovině rozhraní, je z nulovosti skalárního součinu zřejmé, že vektor odpovídající změně vlnového vektoru při odrazu, resp. průchodu světla, je kolmý k rovině  $x, y$ . To znamená, že vlnové vektory dopadající, prošlé i odražené vlny leží v rovině *dopadu*, která je určena směrem vlnového vektoru dopadající vlny  $\vec{k}$  a normálou k rozhraní



**Obr. 3.2** Geometrická konstrukce směru vlnového vektoru odražené a prošlé vlny. Na obrázku je vyznačena velikost složky vektorů  $k$  rovnoběžná s rozhráním, která se při průchodu a odrazu nemění

(v daném případě osou  $z$ ). Skutečnost, že se komponenta vlnového vektoru rovnoběžná s rozhraním nemění, je základem jednoduché geometrické konstrukce směru odražené a prošlé (lomené) vlny, jak je naznačena na obr. 3.2. Stačí jen vzít v úvahu, že velikost vlnového vektoru je úměrná indexu lomu prostředí /srov. (1.42)/. Je-li index lomu, resp. vlnový vektor, komplexní, platí vše pro jeho reálnou část, která určuje fázi vln.

Směry dopadající, odražené a lomené vlny se obvykle určují pomocí *úhlu dopadu, odrazu a lomu*  $\theta, \theta_r, \theta_l$ , které se měří od normály k rozhraní ke směru vlnového vektoru, jejichž hodnoty mohou nabývat  $0-90^\circ$ . Podle (3.7) je

$$k_r \cos(90^\circ + \theta) = k_r \cos(90^\circ + \theta_r), \quad (3.9)$$

a protože  $k_r = k$ , vzhledem k tomu, že se jedná o šíření světla v jednom prostředí, platí

$$\theta_r = \theta, \quad (3.10)$$

což je známý *zákon odrazu* (úhel odrazu se rovná úhlu dopadu). Podobně

$$k_r \cos(90^\circ + \theta) = k_l \cos(90^\circ + \theta_l), \quad (3.11)$$

a protože

$$k = \frac{\omega}{c_0} n_1 \quad (3.12)$$

a

$$k_l = \frac{\omega}{c_0} n_2, \quad (3.13)$$

dostáváme známý *zákon lomu*<sup>1</sup> (*Snell*):

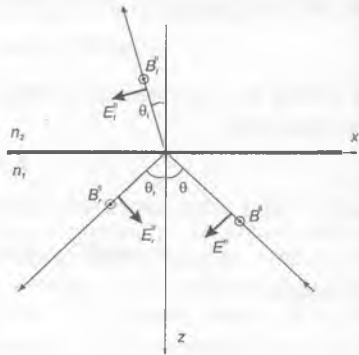
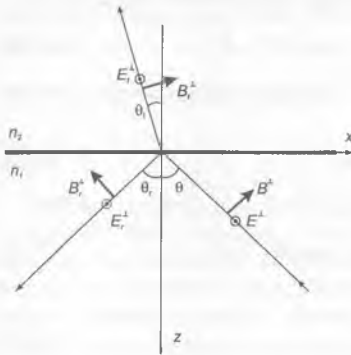
$$n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta_l. \quad (3.14)$$

Kromě směrů šíření odražené a lomené vlny je důležité také vědět, jaké jsou relativní amplitudy těchto vln vůči vlně dopadající. K jejich určení využijeme okrajové podmínky pro vektor elektrické intenzity a magnetické indukce na rozhraní dvou nemagnetických prostředí bez plošných proudů. Pak jsou ovšem tečné složky obou vektorů na rozhraní spojité. Vzhledem k symetrii úlohy je vhodné rozložit vektory  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$  na složky rovnoběžné a kolmé k rovině dopadu. Svírá-li například vektor elektrického pole (amplituda  $E_0$ ) s rovinou dopadu úhel  $\alpha$ , budou amplitudy jednotlivých komponent rovny

$$E_0^{\parallel} = E_0 \cos \alpha$$

$$E_0^{\perp} = E_0 \sin \alpha. \quad (3.15)$$

Nyní budeme uvažovat zvlášť případ, když je vektor elektrického pole  $\vec{E}$  kolmý k rovině dopadu (obr. 3.3a) a případ, když je s ní rovnoběžný (obr. 3.3b). Budeme je rozlišovat symboly  $\perp$ , resp.  $\parallel$ . Zvolili jsme kladné směry vektorů tak, jak je uvedeno na obrázcích.



**Obr. 3.3a** Geometrie použitá při odvozování Fresnelových vzorců (elektrické pole polarizováno kolmo k rovině dopadu)

**Obr. 3.3b** Geometrie použitá při odvozování Fresnelových vzorců (elektrické pole polarizováno v rovině dopadu)

Podle obr. 3.3a jsou okrajové podmínky

$$E_0^{\perp} + E_{0r}^{\perp} = E_{0t}^{\perp}, \quad (3.16)$$

$$B_0^{\perp} \cos \theta - B_{0r}^{\perp} \cos \theta = B_{0t}^{\perp} \cos \theta_r, \quad (3.17)$$

a podle obr. 3.2b

$$B_0^{\parallel} + B_{0r}^{\parallel} = B_{0t}^{\parallel}, \quad (3.18)$$

$$-E_0^{\parallel} \cos \theta + E_{0r}^{\parallel} \cos \theta = -E_{0t}^{\parallel} \cos \theta_r. \quad (3.19)$$

Amplitudy elektrického a magnetického pole jsou spolu spojeny /srov. (1.37), stále uvažujeme nemagnetická prostředí, tj.  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ /

$$E = c B = \frac{c_0}{n} B. \quad (3.20)$$

Výše uvedené vztahy můžeme tedy přepsat

$$E_0^\perp + E_{0r}^\perp = E_{0t}^\perp \quad (3.21)$$

$$n_1 E_0^\perp \cos \theta - n_1 E_{0r}^\perp \cos \theta = n_2 E_{0t}^\perp \cos \theta_t, \quad (3.22)$$

$$n_1 E_0^\parallel + n_1 E_{0r}^\parallel = n_2 E_{0t}^\parallel \quad (3.23)$$

$$-E_0^\parallel \cos \theta + E_{0r}^\parallel \cos \theta = -E_{0t}^\parallel \cos \theta_t. \quad (3.24)$$

Je zřejmé, že okrajové podmínky spojují mezi sebou vždy kolmé a rovnoběžné složky vektorů („složky kolmé a rovnoběžné se nemíchají“). Nyní již můžeme vyjádřit amplitudové koeficienty odrazu a transmise pro obě polarizace:

$$r^\perp = \frac{E_{0r}^\perp}{E_0^\perp} = \frac{n_1 \cos \theta - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta + n_2 \cos \theta_t}, \quad (3.25)$$

$$r^\parallel = \frac{E_{0r}^\parallel}{E_0^\parallel} = \frac{n_2 \cos \theta - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta + n_1 \cos \theta_t}. \quad (3.26)$$

$$t_\perp = \frac{E_{0t}^\perp}{E_0^\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta}{n_1 \cos \theta + n_2 \cos \theta_t} \quad (3.27)$$

$$t_\parallel = \frac{E_{0t}^\parallel}{E_0^\parallel} = \frac{2n_1 \cos \theta}{n_2 \cos \theta + n_1 \cos \theta_t} \quad (3.28)$$

To jsou *Fresnelovy vzorce*.<sup>2</sup> Úhel dopadu je svázán s úhlem lomu zákonem lomu, pravé strany Fresnelových vzorců je proto možné přepsat pouze pomocí úhlu dopadu.

Kromě toho, jak se při odrazu a průchodu mění amplituda, je důležité také vědět, jak se mění intenzita světla. Uvažujme část rovinné vlny, která dopadá na plochu a rozhraní, jak je znázorněno na obr. 3.4. Intenzita světla, určená vztahem (1.72) je úměrná indexu lomu prostředí. V našem případě jsou intenzity dopadající, odražené a prošlé vlny rovny

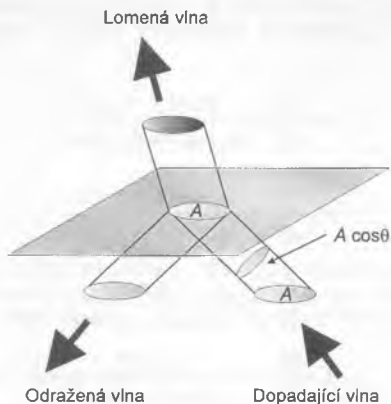
$$I = n_1 \frac{c_0 \varepsilon_0}{2} |E_0|^2 \quad (3.29)$$

$$I_r = n_1 \frac{c_0 \epsilon_0}{2} |E_{0r}|^2 \quad (3.30)$$

$$I_t = n_2 \frac{c_0 \epsilon_0}{2} |E_{0t}|^2. \quad (3.31)$$

Intenzita představuje časovou střední hodnotu energie, která projde za jednotku času jednotkovou plochou, která je kolmá na směr šíření vlny. Podle zákona zachování energie musí platit, že výkon  $J$  dopadající na plochu  $A$  musí být roven součtu výkonů ve vlně odražené ( $J_r$ ) od plochy a prošlé ( $J_t$ ) plochou  $A$

$$J = J_r + J_t. \quad (3.32)$$



Obr. 3.4 Dopadající, odražený a lomený svazek světla spojený s kruhovou plochou na rozhraní

Jak je zřejmé z geometrie (viz obr. 3.4), dopadá-li svazek světla na plochu rozhraní  $A$  pod úhlem  $\theta$ , je odpovídající plocha průřezu svazku rovna  $A \cos \theta$ . Proto

$$J = I A \cos \theta \quad (3.33)$$

$$J_r = I_r A \cos \theta \quad (3.34)$$

$$J_t = I_t A \cos \theta, \quad (3.35)$$

Nyní můžeme zavést „intenzitní“ koeficienty odrazu  $R$  a propustnosti  $T$

$$R = \frac{J_r}{J}, \quad (3.36)$$

$$T = \frac{J_t}{J}. \quad (3.37)$$

Z rov. (3.32), (3.36) a (3.37) máme zřejmě

$$R + T = 1. \quad (3.38)$$

Vzhledem k nezávislosti komponent  $\parallel$  a  $\perp$  můžeme psát uvedené vztahy pro komponentu kolmou, resp. pro komponentu rovnoběžnou. Pomocí rov. (3.29) až (3.37) a definice amplitudových koeficientů dostaneme pro intenzitní koeficienty odrazu a propustnosti

$$R^{\perp, \parallel} = \frac{J_r^{\perp, \parallel}}{J^{\perp, \parallel}} = (r^{\perp, \parallel})^2 \quad (3.39)$$

$$T^{\perp, \parallel} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta} (t^{\perp, \parallel})^2 \quad (3.40)$$

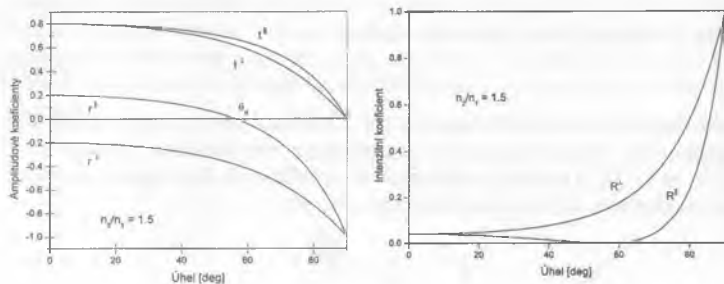
Pro každou komponentu zvlášť platí rov. (3.39), (3.40). V obecném případě, kdy vektor elektrického pole svírá s rovinou dopadu úhel  $\alpha$ , je podle (3.15)

$$R = R^{\perp} \sin^2 \alpha + R^{\parallel} \cos^2 \alpha. \quad (3.41)$$

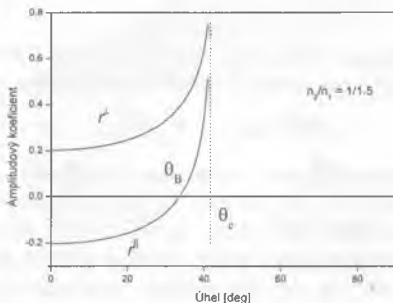
Odvozené Fresnelovy vzorce ilustrujeme pro častý případ rozhraní vzduch – sklo na obr. 3.5 a 3.6. Na obr. 3.5 je znázorněn případ odrazu od prostředí opticky hustšího, tedy když  $n_2 > n_1$ . V levé části obrázku jsou uvedeny amplitudové koeficienty (vztahy 3.25 až 3.28), v pravé koeficienty intenzitní (vztah 3.39). Na obr. 3.6 uvádíme amplitudové koeficienty pro případ  $n_2 < n_1$ .

Jak je patrné z obr. 3.5, 3.6, pro určitý úhel dopadu  $\theta_B$ , který se nazývá *Brewsterův úhel*, je koeficient  $r^{\parallel} = 0$ . V kapitole 14 budeme mluvit o mikroskopické podstatě indexu lomu a budeme se zabývat interakcí světla s látkami v rámci Lorentzova modelu, kdy látka je modelována jako soubor pružně vázaných nábojů (elektronů), které pod vlivem vnějšího pole oscilují a vyzařují elektromagnetické pole (dipólové záření). Vznik odražené vlny lze chápat jako skládání elektromagnetických vln od jednotlivých oscilujících dipólů. V prostředí postupuje vlna pod úhlem  $\theta_i$  vůči normále

k rozhraní, vektor elektrického pole způsobuje oscilace elektronů látky ve směru kolmém ke směru šíření vlny. Pro případ komponenty  $E^{\parallel}$  se jedná o kmity v rovině dopadu. Jak je známé z elektromagnetické teorie, kmitající elektrický dipól nevyzařuje ve směru svých kmitů (vyzařovací diagram). Je proto skutečně možné očekávat, že pokud budou dipóly oscilovat ve směru



Obr. 3.5 Koeficienty odrazu a propustnosti pro případ  $n_2 > n_1$  jako funkce úhlu dopadu



Obr. 3.6 Amplitudové koeficienty odrazu pro případ  $n_1 > n_2$  jako funkce úhlu dopadu

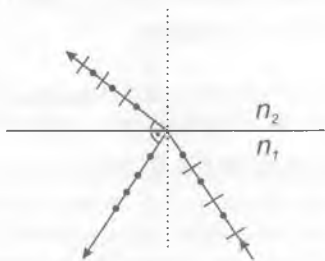
odražené vlny, bude její intenzita nulová. To zřejmě nastane pro případ, kdy směry vlny odražené a lomené svírají pravý úhel (viz obr. 3.7). Pak je ovšem

$$\theta_B + \theta_i = \frac{\pi}{2}. \quad (3.42)$$



Ze zákona lomu můžeme určit úhel dopadu, pro který tato situace nastává /užijeme  $\sin(\pi/2 - \theta) = \cos \theta$  /

$$\operatorname{tg} \theta_R = \frac{n_2}{n_1} . \quad (3.43)$$



Obr. 3.7 Brewsterův úhel (symboly na přímkách znázorňujících paprsky označují směr polarizace v rovině obrázku a kolmo)

Přímým dosazením do rov. (3.26) lze ověřit, že pak  $r^{\parallel} = 0$ . Hodnota Brewsterova úhlu při dopadu světla ze vzduchu na běžné sklo ( $n_2 = 1,5$ ) je přibližně  $57^\circ$ . Pro dopad světla pod Brewsterovým úhlem je tedy intenzita odražené vlny nulová, což znamená, že intenzita lomené vlny odpovídá intenzitě vlny dopadající. Tato vlastnost se v optice užívá v praktických uspořádáních. Například v laserech, kdy je aktivní prostředí tvořeno krystalem, bývá krystal vyříznut tak, aby byl vložen do svazku laseru v rezonátoru pod Brewsterovým úhlem. Velikost komponenty  $E^{\parallel}$  elektrického pole pak není na povrchu krystalu ovlivňována, zatímco kolmá komponenta je částečně odražena. Laser pak generuje světlo, které je (s dostatečně velkým stupněm) lineárně polarizováno a jsou minimalizovány ztráty odrazem na rozhraní aktivního prostředí. Dopadá-li nepolarizované světlo na rozhraní pod Brewsterovým úhlem, dojde k jeho polarizaci odrazem. To je jev známý i z běžného života, kdy řidiči dávají přednost polarizačním slunečním brýlím, které zeslabují světlo polarizované odrazem na sklech ostatních automobilů.

Dopadá-li světlo na optické rozhraní ze strany opticky hustšího prostředí, tedy pro  $n_2 < n_1$ , je podle zákona lomu (3.14) zřejmě  $\theta_t > \theta_i$ , říká se, že světlo se láme od kolmice. Pro rostoucí hodnotu úhlu dopadu  $\theta$  roste i  $\theta_t$ , až dosáhne  $90^\circ$  pro *kritický úhel dopadu*  $\theta = \theta_c$ . Jeho hodnotu dává zákon lomu (3.14)

$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \sin 90^\circ = n_2 . \quad (3.44)$$

Pro kosinus úhlu  $\theta_t$ , který vystupuje ve Fresnelových vzorcích, máme

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta}. \quad (3.45)$$

Pro úhel dopadu  $\theta > \theta_c$  je výraz (3.45) ryze imaginární, do Fresnelových vzorců tedy dosadíme

$$\cos \theta_t = i \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta - 1}. \quad (3.46)$$

Pak například z (3.25) máme

$$r^\perp = \frac{E_{0r}^\perp}{E_0^\perp} = \frac{n_1 \cos \theta - i n_2 \sqrt{\frac{n_1^2 \sin^2 \theta}{n_2^2} - 1}}{n_1 \cos \theta + i n_2 \sqrt{\frac{n_1^2 \sin^2 \theta}{n_2^2} - 1}}. \quad (3.47)$$

Tento výraz má tvar podílu dvou komplexně sdružených čísel

$$r^\perp = \frac{a - ib}{a + ib} = \frac{c \exp(i\alpha)}{c \exp(-i\alpha)} = \exp(2i\alpha), \quad (3.48)$$

kde

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-b}{a}. \quad (3.49)$$

Koeficient odrazu má tedy podle (3.48) velikost

$$|r^\perp| = 1 \quad (3.50)$$

a fázi

$$\delta_\perp = 2\alpha, \quad (3.51)$$

kteřá je podle (3.49) rovna

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_\perp}{2} = \frac{-n_2 \left( \sqrt{\frac{n_1^2 \sin^2 \theta}{n_2^2} - 1} \right)}{n_1 \cos \theta} = \frac{-\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta - n_2^2}}{n_1 \cos \theta}. \quad (3.52)$$

Analogicky získáme z (3.26)

$$|r^{\parallel}| = 1 \quad (3.53)$$

a

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} = \frac{-n_1 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta - n_2^2}}{n_2^2 \cos \theta}. \quad (3.54)$$

To tedy znamená, že velikost amplitudy (tedy i intenzita) odražené vlny je rovna velikosti amplitudy (intenzity) dopadající vlny; dochází k *úplnému (totálnímu) odrazu světla*.

Kritický úhel a totální odraz je možné velmi dobře znázornit ve schématu podle obr. 3.2. Pro odraz na opticky řidším prostředí,  $n_2 < n_1$ , jsou velikosti vlnových vektorů  $k_t < k$ , což znamená, že kružnice odpovídající vektoru  $k_t$  má menší poloměr než kružnice pro vektor  $k$ . Ze schématu je pak velmi názorně vidět, že může nastat případ, kdy je  $x$ -ová komponenta vlnového vektoru  $k_x$  dopadající vlny větší než velikost  $k_t$ . Ovšem jak jsme ukázali na začátku této kapitoly,  $x$ -ová komponenta vlnových vektorů se musí zachovávat. Je-li úhel dopadu roven  $\theta_c$ , je  $k_x = k_t$ . Pro úhly větší, kdy dochází k totálnímu odrazu, musí být  $k_x = k_{tx} > k_t$ . To je možné splnit pro  $k_t = (k_{tx}, 0, k_{tz})$ , kde  $z$ -ová komponenta je ryze imaginární,  $k_{tz} = i b$ . Pak může být totiž

$$k_t^2 = k_{tx}^2 + k_{tz}^2 = k_{tx}^2 - b^2. \quad (3.55)$$

Zřejmě je

$$k_x = k \sin \theta = k_{tx}, \quad (3.56)$$

$$k_t = \frac{\omega}{c_0} n_2. \quad (3.57)$$

Z (3.55 až 3.57) dostaneme

$$b = -\frac{\omega n_2}{c_0} \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta - 1}. \quad (3.58)$$

S komplexním vlnovým vektorem jsme se setkali v kapitole 1, kde jsme ukázali jeho souvislost s komplexním indexem lomu. Modifikovaný vztah mezi velikostmi vektorů  $E$ ,  $B$  vede například ke vztahu (3.46), což zdůvodňuje použití (3.47). Okrajové podmínky pro vektory elektromagnetického

pole vyžadují nenulovost amplitudy pole v prostředí 2 i v případě úplného odrazu. Vlna v prostředí 2 má však komplexní vlnový vektor

$$\vec{E}_t = E_{t0} \exp \left[ -i \left( \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right] = E_{t0} \exp \left[ -i \left( \omega t - k_x x - i b z \right) \right]. \quad (3.59)$$

Tedy

$$\vec{E}_t = E_{t0} \exp(-b z) \exp[-i(\omega t - k_x x)]. \quad (3.60)$$

To znamená, že vlna se šíří podél rozhraní, její amplituda  $A$  však klesá se vzdáleností  $z$  od rozhraní exponenciálně,

$$A = E_{t0} \exp(-b z), \quad (3.61)$$

přičemž  $b$  je dáno vztahem (3.58) (záporné znaménko u odmocniny jsme vybrali proto, aby bylo pole při rostoucí vzdálenosti od rozhraní skutečně tlumeno –  $z$  je totiž v prostředí 2 záporné, viz obr. 3.3. Kladné znaménko u odmocniny v (3.58) by vedlo k zřejmě nereálnému neomezenému nárůstu pole). Přibližně je

$$b = \frac{1}{\lambda}, \quad (3.62)$$

což znamená, že vlna je utlumena na vzdálenosti odpovídající délce vlny. Dá se ukázat, že energetický tok spojený s touto vlnou je nulový ve směru kolmém k rozhraní. Existence prošlého pole je důležitá v optických vlnovodných strukturách (*evanescentní vlna*).

Závěrem připomeneme, že velmi často je nutné vyšetřovat případ, kdy dopadá světlo na rozhraní dvou dielektrik kolmo ( $\theta = 0$ ). Fresnelovy vzorce (3.25 až 3.28) pro tento případ mají tvar

$$r^\perp = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad (3.63)$$

$$r^\parallel = -\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad (3.64)$$

$$t^\perp = t^\parallel = \frac{2}{\frac{n_2}{n_1} + 1}. \quad (3.65)$$

Pro kolmý dopad nemá smysl rozlišovat mezi kolmou a rovnoběžnou složkou pole, protože rovina dopadu není dobře definovaná. Rozdíl ve znaménku ve vztazích (3.63) a (3.64) je důsledkem volby kladných smyslů vektoru  $E$ , viz obr. 3.3a a 3.3b. Při kolmém dopadu na opticky hustší prostředí ( $n_2 > n_1$ ) je  $r^\perp < 0$ , elektrické pole  $E$  mění fázi o  $\pi$ , a  $r^\parallel > 0$ , vektor  $E$  mění rovněž fázi o  $\pi$ . Přitom v obou případech magnetické pole  $B$  nemění fázi, jen tak může být zachována správná orientace vektorů  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$  v rovinné vlně.

### Poznámky

<sup>1</sup> Zákon objevil experimentálně v roce 1621 Willebrord Snell, jehož jméno se někdy uvádí v literatuře jako Snellius.

<sup>2</sup> Poprvé zákony zformuloval A. Fresnel v roce 1823. V této kapitole není důsledně používáno značení komplexních veličin vlnovkou. Pokud je rozhraní tvořeno prostředími s reálnými indexy lomu, může se fáze vln při odrazu měnit pouze o 0 nebo  $\pi$  a koeficienty  $r$  jsou reálné. Pro prostředí charakterizované komplexním indexem lomu může být změna fáze obecná a koeficienty jsou komplexní čísla. Jsou také komplexní pro případ totálního odrazu /srov. například rov. (3.47)/.

# 4 KVAZIMONOCHROMATICKÉ ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY

## 4.1 SPEKTRÁLNÍ ROZKLAD SVĚTLA

Dosud jsme uvažovali o světle především jako o rovinných vlnách oscilujících na jedné frekvenci, tedy o *monochromatickém světle*. V reálných situacích ovšem světlo má složitější spektrální průběh i prostorové rozložení. Nejprve se zaměříme na spektrální vlastnosti, prostorovým chováním se budeme zabývat později. Tento odstavec věnujeme formálnímu uvedení spektrálního rozkladu světla. Předpokládáme, že světlo se šíří v prostředí, kde platí princip superpozice.

Pokud má světlo složitější spektrální průběh, můžeme ho chápat jako složené z jednotlivých monochromatických složek. Pro časový průběh elektrického pole<sup>1</sup> složeného ze dvou vln /srov. (1.59)/ máme<sup>2</sup> v určitém místě, například  $\vec{r} = 0$ ,

$$E(t) = E_0(\nu_1) \cos(2\pi\nu_1 t + \varphi(\nu_1)) + E_0(\nu_2) \cos(2\pi\nu_2 t + \varphi(\nu_2)). \quad (4.1)$$

Pro spojitě rozložené frekvence je možné psát

$$E(t) = \int_0^{\infty} E_0(\nu) \cos(2\pi\nu t + \varphi(\nu)) d\nu. \quad (4.2)$$

Podle (1.61) můžeme psát

$$E(t) = \left. \begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\infty} E_0(\nu) \exp\{-i[2\pi\nu t + \varphi(\nu)]\} d\nu + \int_0^{\infty} E_0(\nu) \exp\{+i[2\pi\nu t + \varphi(\nu)]\} d\nu \right] \end{aligned} \right] \quad (4.3)$$

a po další formální úpravě

$$E(t) = \left[ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E_0(\nu) \exp \{-i[2\pi\nu t + \varphi(\nu)]\} d\nu + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 E_0(-\nu) \exp \{+i[-2\pi\nu t + \varphi(-\nu)]\} d\nu \right]. \quad (4.4)$$

Zavedeme-li frekvenčně závislou ( $\nu \geq 0$ ) komplexní amplitudu pole

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\nu) &= \frac{E_0(\nu)}{2} \exp \{-i\varphi(\nu)\}, \\ \tilde{A}(-\nu) &= \frac{E_0(\nu)}{2} \exp \{+i\varphi(\nu)\}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

můžeme rovnici (4.4) psát (zde integrační proměnná  $\nu$  nabývá i záporných hodnot)

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(\nu) \exp \{-i2\pi\nu t\} d\nu, \quad (4.6)$$

Vztah (4.6) ovšem vyjadřuje skutečnost, že časový průběh pole je Fourierovým obrazem spektrální komplexní amplitudy. Inverzní Fourierova transformace dovoluje pak vyjádřit spektrální komplexní amplitudu

$$\tilde{A}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) \exp \{+2i\pi\nu t\} dt. \quad (4.7)$$

Protože je pole  $E(t)$  reálné (ovšem i  $E_0(\nu)$  je reálné), je zřejmě komplexní amplituda

$$\tilde{A}(\nu) = |\tilde{A}(\nu)| \exp \{i\alpha(\nu)\}, \quad (4.8)$$

kde

$$|\tilde{A}(\nu)| = \frac{E_0(\nu)}{2}, \quad \alpha(\nu) = -\varphi(\nu). \quad (4.9)$$

Spektrální komplexní amplituda tedy udává, s jakou vahou a s jakou fází přispívají kmity elektrického pole na frekvenci  $\nu$  k výslednému světelnému signálu. Je zřejmé, že  $\tilde{A}(\nu)$  je analogií komplexní amplitudy, jak jsme ji zavedli pro monochromatická pole (liši se faktorem  $1/2$ ). Podobně jako

u monochromatických polí je vhodné používat i pro časový průběh obecných světelných polí jejich komplexní reprezentaci<sup>3</sup> /, vezmeme jen první část reálného výrazu (4.4)“/, tedy

$$\tilde{E}(t) = \left[ \int_0^{\infty} E_0(\nu) \exp \{ -i[2\pi\nu t + \varphi(\nu)] \} d\nu \right] \quad (4.10)$$

a pak dostaneme reálné pole

$$E(t) = \text{Re} \{ \tilde{E}(t) \}. \quad (4.11)$$

Experimentálně je možné rozklad světla do spektrálních složek realizovat poměrně jednoduše, všeobecně známý je rozklad bílého, například slunečního, světla skleněným hranolem (Newtonův experiment).<sup>4</sup> Okem nebo vhodným detektorem se zaznamenává spektrální průběh výkonového toku  $I(\nu)$ , který je úměrný  $|\tilde{A}(\nu)|^2$ .

Spektrální a s ním spojený časový průběh světelného signálu může být složitý. Spektrum světla souvisí s jeho statistickými (koherentními) vlastnostmi. Například spektrálně velmi široké *bílé světlo* (Slunce) odpovídá neuspořádanému časovému průběhu světla, světlo s velmi úzkou spektrální čarou (generované například laserem) může mít v čase téměř monochromatický kosinový průběh.<sup>5</sup> Pokud jsou spektrální komponenty nenulové jen v nějakém úzkém spektrálním intervalu šířky  $\Delta\nu$ , tak, že platí  $\Delta\nu/\nu \ll 1$ , mluví se o *kvazimonochromatickém světle*.

## 4.2 GRUPOVÁ RYCHLOST SVĚTLA

Fázová rychlost i vlnový vektor rovinné vlny, jak jsme vysvětlili v kapitole 1, závisí na indexu lomu prostředí, v němž se světlo šíří. Index lomu látek závisí obecně na frekvenci (vlnové délce) světla, tedy

$$n = n(\omega). \quad (4.12)$$

Tato vlastnost indexu lomu se obvykle nazývá *disperzí materiálu*. Explicitní průběh závislosti (4.12) budeme probírat dále (14. kapitola) v souvislosti s jejím mikroskopickým mechanismem. Z rov. (4.4) a z (1.16 a 1.42) je zřejmé, že



$$c = c(\omega) = \frac{c_0}{n(\omega)} \quad (4.13)$$

a

$$\bar{k} = \bar{k}(\omega) = \bar{k}_0 n(\omega). \quad (4.14)$$

Uvažujme nyní šíření kvazimonochromatického světla, které je tvořeno rovinnými vlnami postupujícími ve směru osy  $z$ , a jehož spektrální komponenty jsou nenulové na spektrálním intervalu  $(\omega_0 - \Delta\omega/2, \omega_0 + \Delta\omega/2)$ . Pro výsledné elektrické pole můžeme psát

$$\bar{E}(z, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} E_0(\omega) \exp[-i(\omega t - k(\omega)z)] d\omega. \quad (4.15)$$

Je vhodné zavést

$$\delta\omega = \omega - \omega_0, \quad (4.16)$$

pak

$$\bar{E}(z, t) = \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} E_0(\omega_0 + \delta\omega) \exp\{-i[(\omega_0 + \delta\omega)t - k(\omega_0 + \delta\omega)z]\} d(\delta\omega). \quad (4.17)$$

Závislost velikosti vlnového vektoru na frekvenci můžeme pro frekvence blízké střední frekvenci  $\omega_0$  aproximovat Taylorovým rozvojem

$$k(\omega) = k(\omega_0) + k' \delta\omega + \frac{1}{2} k'' \delta\omega^2 + \dots, \quad (4.18)$$

zde derivace jsou v bodě  $\omega_0$ ,

$$k' = \frac{dk}{d\omega}(\omega_0), \quad k'' = \frac{d^2k}{d\omega^2}(\omega_0). \quad (4.19)$$

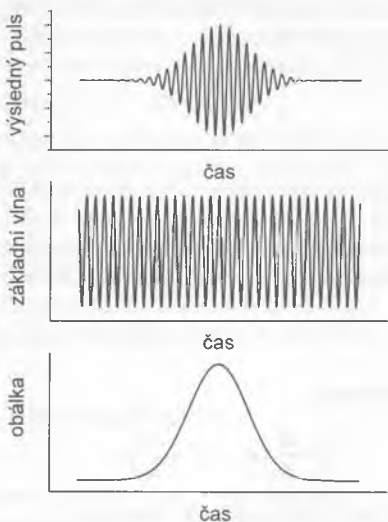
Omezíme-li se na lineární člen podle  $\delta\omega$ , dostaneme

$$\bar{E}(z, t) = \exp[-i(\omega_0 t - k(\omega_0)z)] \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} E_0(\omega_0 + \delta\omega) \exp[-i(\delta\omega t - k' \delta\omega z)] d(\delta\omega) \quad (4.20)$$

Vzhledem k tomu, že se jedná o kvazimonochromatické světlo (tj.  $\Delta\omega \ll \omega_0$ ), jsou časové a prostorové změny uvnitř integrálu podstatně pomalejší, než

závislost faktoru před integrálem. Světlo se tedy v daném případě šíří jako rovinná vlna s frekvencí  $\omega_0$  a vlnovým vektorem  $k(\omega_0)$ , které odpovídají střední frekvenci („*nosná vlna*“), amplituda vlny je ovšem v čase a prostoru modulována („*obálka*“), ale tato modulace je podstatně pomalejší. Situace je znázorněna na obr. 4.1. Aníž bychom explicitně prováděli integraci pro speciální rozložení spektrálních amplitud, je z (4.20) zřejmé, že obálka v prostoru postupuje s rychlostí<sup>6</sup>

$$v_g = \frac{1}{k'} = \frac{d\omega}{dk} \quad (4.21)$$

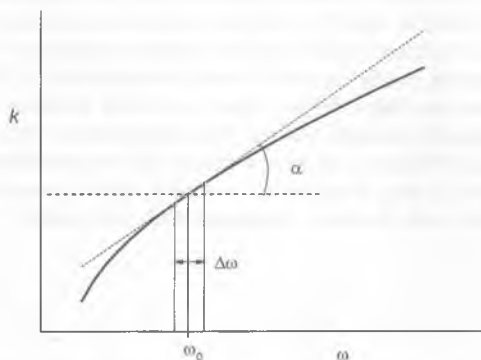


Obr. 4.1 Světelný puls: zesodu obálka, nosná vlna a výsledný puls

Šíření světla je tedy v daném případě charakterizováno dvěma rychlostmi: nosná vlna postupuje s fázovou rychlostí

$$c = \frac{\omega}{k}, \quad (4.22)$$

a amplituda s rychlostí  $v_g$ . Tato rychlost se nazývá *grupová rychlost*, protože popisuje šíření shluku (skupiny, grupy) vln, které se liší frekvencí.



Obr. 4.2 Ilustrace možné závislosti velikosti vlnového vektoru na kruhové frekvenci (silná čára). Kvazimono chromatický světelný signál se střední frekvencí  $\omega_0$  a spektrální šířkou  $\Delta\omega$  má grupovou rychlost, která se určí podle vztahu (4.20), tedy jako  $1/\tan \alpha$  neboli jako převrácená hodnota derivace  $dk/d\omega$  v bodě  $\omega_0$ . Uvedená závislost velikosti vlnového vektoru na frekvenci odpovídá disperzi ve vodivém prostředí pro frekvence nad plazmovou frekvencí, jak uvedeme v kapitole 14 /viz vztah  $\vec{k}^2 = \tilde{n}^2 \frac{\omega^2}{c_0^2}$  a (14.31)/.

Zajímavá je otázka, jak souvisí grupová rychlost s fázovou. Chceme-li přenášet například pomocí světla nějaké informace, musíme světlo modulovat, rychlost šíření pak bude popisovat grupová rychlost. Podle definice je

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(c k)}{dk} = c + k \frac{d(c)}{dk} \quad (4.23)$$

Pomocí rov. (1.10) a (1.12) lze grupovou rychlost vyjádřit pomocí disperze materiálu, tedy pomocí derivací indexu lomu na frekvenci či vlnové délce

$$v_g = c \left( 1 - \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} \right) = c \left( 1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right) \quad (4.24)$$

Podle znaménka a velikosti disperze materiálu,  $dn/d\lambda$ , může být grupová rychlost menší nebo větší než rychlost fázová. V oblastech, kde jsou materiály průhledné, klesá index lomu s rostoucí vlnovou délkou  $dn/d\lambda < 0$ , pak se

mluví o *normální disperzi*. Ve spektrální oblasti, kde látka absorbuje, může být  $dn/d\lambda > 0$ , tedy *disperze anomální*. Vhodnou volbou disperzních vlastností lze proto dosáhnout v oblasti normální disperze značného zpomalení šíření světla, v poslední době byly experimentálně pozorovány velmi nízké hodnoty grupové rychlosti (řádově desítky metrů za sekundu), dokonce bylo dosaženo „zastavení světla“ na dobu stovek mikrosekund. Při silné závislosti indexu lomu na vlnové délce v oblasti anomální disperze může vycházet velikost grupové rychlosti větší než vakuová rychlost světla  $c_0$ . Přestože se v minulosti vysvětlovalo, že takový případ není experimentálně realizovatelný vzhledem k silné absorpci ve spektrální oblasti anomální disperze, byly v poslední době skutečně experimentálně realizovány situace, kdy  $u_g > c_0$ .

### Poznámky

- <sup>1</sup> Jedná se zde o reálné pole, užíváme skalární aproximaci, protože se zaměřujeme na spektrální, resp. časový průběh.
- <sup>2</sup> Používáme v tomto odstavci frekvenci  $\nu$  místo kruhové frekvence  $\omega$ , abychom mohli psát Fourierovu transformaci v symetrickém tvaru – srov. (1.46).
- <sup>3</sup> V optické literatuře se dnes často můžeme setkat s analogií komplexní amplitudy, s tzv. *komplexním analytickým signálem*,  $\tilde{V}(t) = \frac{\tilde{E}(t)}{2}$ , který je Fourierovou transformací pouze „kladné frekvenční části“ spektrální komplexní amplitudy, tedy funkce

$$\tilde{z}(\nu) = \frac{E_0(\nu)}{2} \exp\{-i\varphi(\nu)\}, \quad \nu \geq 0,$$

$$\tilde{z}(\nu) = 0, \quad \nu < 0.$$

Komplexní analytický signál má výhodné matematické vlastnosti a jeho tvar je vhodný pro kvantovou optiku.

- <sup>4</sup> Spektrálními přístroji se budeme zabývat podrobně v 11. kapitole.
- <sup>5</sup> Lasery mohou ovšem generovat i velmi krátké světelné záblesky (pulzy), které mají velmi dobře definovaný časový průběh, ale intenzita světla je modulovaná. Z vlastností Fourierovy transformace plyne, že součin spektrální  $\Delta\nu$  a časové  $\Delta t$  šířky je přibližně roven jedné. Speciální lasery dnes generují světelné pulzy časové délky jednotek femtosekund ( $1 \text{ fs} = 10^{-15} \text{ s}$ ), jejichž spektrální šířka zabírá celou oblast viditelného spektra ( $\Delta\nu = 10^{15} \text{ Hz}$ ).

<sup>6</sup> Rychlost je ovšem vektorová veličina (stejně jako vlnový vektor). Vektorově se definuje grupová rychlost vztahem  $\vec{v}_g = \left( \frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right)$ .

# 5 INTERFERENCE SVĚTLA

Z principu superpozice vyplývá, že pokud jednotlivá světelná pole jsou řešením vlnové rovnice, je řešením i jejich součet. Pokud se tedy v prostoru setkávají například dvě světelné vlny  $\vec{E}_1(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{E}_2(\vec{r}, t)$ , je výsledné pole dáno součtem

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}, t) + \vec{E}_2(\vec{r}, t). \quad (5.1)$$

Okem a detektory však zaznamenáváme intenzitu světla, která je dána výrazem (1.70). To ovšem znamená, že odpovídají-li zmíněným dvěma světelným polím intenzity  $I_1$  a  $I_2$ , není obecně výsledná intenzita  $I$  rovna součtu jednotlivých intenzit,  $I \neq I_1 + I_2$ . Ukazuje se naopak, že v určitých místech může být intenzita větší než součet, jinde menší nebo dokonce nulová. Jevy, v nichž skládání dvou nebo více polí vede k prostorové modulaci intenzity výsledného pole, se nazývají *interferenčními jevy*. *Interference světla* je tedy skládání světla. Protože výsledná modulace světelné intenzity je přímým důsledkem vlnové povahy světla, považovala se v historii vždy existence interference za přímý důkaz vlnové povahy světla. Slavný je zejména Youngův interferenční experiment, který popíšeme v dalších odstavcích.

Jakkoliv není z teoretického hlediska interference nic jiného než správné sčítání vektorů elektrické intenzity a pak výpočet intenzity světla, z hlediska optických jevů zahrnují interferenční jevy širokou škálu situací – od interferometrů pro spektrální měření přes laserové rezonátory až po barevné jevy na olejových skvrnách na vodě či barevná křídla motýlů. Proto stojí za jistou námahu vypsát sčítání polí v některých typických situacích explicitně.<sup>1</sup>

## 5.1 DVOJSVAZKOVÁ INTERFERENCE

### 5.1.1 Interference dvou rovinných světelných vln

Nejprve se budeme zabývat interferencí dvou světelných svazků. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že interferují dvě rovinné monochromatické vlny se stejnou frekvencí  $\omega$ . Popíšeme je pomocí komplexní reprezentace ( $j=1,2$ )

$$\vec{E}_j(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0j} \exp[-i(\omega t)], \quad (5.2)$$

kde jsme do komplexní amplitudy započítali i náběh fáze vlny šířením, tedy

$$\vec{E}_{01}(\vec{r}) = \vec{E}_{01} \exp[i(-\varphi_1 + \vec{k}_1 \cdot \vec{r})] = \vec{E}_{01} \exp[i\Phi_1(\vec{r})] \quad (5.3)$$

$$\vec{E}_{02}(\vec{r}) = \vec{E}_{02} \exp[i(-\varphi_2 + \vec{k}_2 \cdot \vec{r})] = \vec{E}_{02} \exp[i\Phi_2(\vec{r})]. \quad (5.4)$$

Výsledné pole s komplexní amplitudou  $\vec{E}_0$  dostaneme podle (5.1). V této kapitole budeme při vyšetřování interferenčních jevů, jak je často zvykem, vyjadřovat intenzitu<sup>2</sup>

$$I(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cdot \vec{E}_0^*(\vec{r}). \quad (5.5)$$

Získáme ji z rov. (1.71), kde pro jednoduchost klademe  $2Z=1$ , protože se zabýváme spíše modulací intenzity v prostředí se stejnou impedancí než její skutečnou hodnotou.

Přímým dosazením (5.3, 5.4) do (5.1) a (5.5) dostaneme (fáze a komplexní amplitudy jsou závislé na  $\vec{r}$ , pro přehlednost argumenty nevypisujeme) pro výslednou intenzitu světla v určitém místě daném polohovým vektorem  $\vec{r}$

$$I(\vec{r}) = I_1 + I_2 + \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}^* + \vec{E}_{02} \cdot \vec{E}_{01}^* = I_1 + I_2 + 2 \operatorname{Re}\{\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}^*\}, \quad (5.6)$$

tedy,

$$I(\vec{r}) = I_1 + I_2 + 2 \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos(\Phi_2 - \Phi_1). \quad (5.7)$$

Je zřejmé, že výsledná intenzita dvou světelných polí je dána jejich součtem plus *interferenčním členem*, jehož velikost závisí na skalárním součinu reál-

ných amplitud obou polí a na kosinu jejich fázového rozdílu v daném místě (obsahuje jak „počáteční fáze vln“, tak náběh fáze získaný šířením). Fázový rozdíl mezi dvěma interferujícími vlnami budeme označovat jako  $\delta$ ,

$$\delta = \Phi_2 - \Phi_1. \quad (5.8)$$

Z rov. (5.6) je zřejmé, že velikost interferenčního členu je úměrná skalárnímu součinu reálných amplitud světelných vln. Pro navzájem kolmo lineárně polarizované vlny je tedy interferenční člen roven nule.

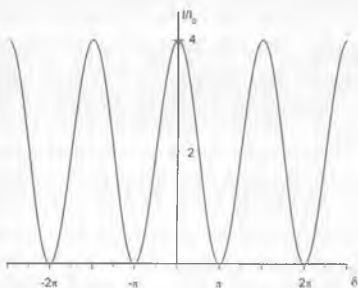
Uvažujme nejprve velmi jednoduchou situaci, kdy interferují dvě vlny, jejichž vlnové vektory leží v rovině  $y, z$ , které jsou shodně lineárně polarizované ve směru osy  $x$ . Mají-li navíc stejnou velikost amplitudy (tj. i intenzitu), platí

$$\vec{E}_{01,02} = (E_{01}, 0, 0), I_1 = I_2. \quad (5.9)$$

Pak dostáváme z (5.7) pro intenzitu světla

$$I = 2 I_1 [1 + \cos \delta] = 4 I_1 \cos^2 \left( \frac{\delta}{2} \right). \quad (5.10)$$

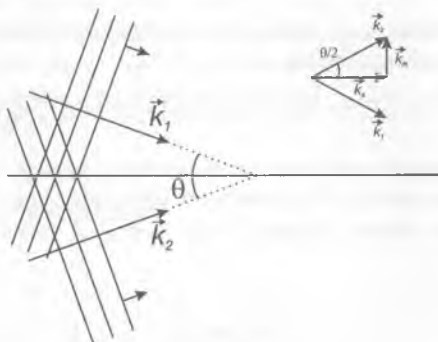
Ve fázovém rozdílu  $\delta = \delta(\vec{r})$  je obsažena prostorová závislost, v různých bodech prostoru je různý fázový rozdíl. Čtverec kosinu může nabývat hodnot od nuly do jedné. Je tedy patrné, že v prostoru, kde se skládají dvě stejně intenzivní vlny, vzniká prostorová modulace intenzity, *interferenční obrazec*. Intenzita se zde mění od nuly do čtyřnásobku intenzity každého ze svazků. Závislost intenzity je znázorněna na obr. 5.1.



Obr. 5.1 Průběh výsledné intenzity světla v závislosti na fázovém rozdílu  $\delta$  mezi dvěma stejně intenzivními interferujícími vlnami



Nyní blíže rozebereme, jaká prostorová struktura výsledného světelného pole vzniká interferencí dvou rovinných vln. Budeme vyšetřovat případ, kdy vlnové vektory obou vln leží v rovině  $y, z$ , mají stejné velikosti a svírají úhel  $\theta$ , viz obr. 5.2. Pro jednoduchost opět



Obr. 5.2 Geometrie interference dvou rovinných vln

předpokládáme pro obě vlny stejnou amplitudu a lineární polarizaci ve směru osy  $x$ ,  $E_{10} = E_{20} = E_0$ . Vzhledem k symetrii lze očekávat modulaci interferenčního obrazce ve směru kolmém k ose úhlu, který svírají vlny. Tento směr odpovídá směru vektoru

$$\vec{k}_m = \frac{\vec{k}_2 - \vec{k}_1}{2}, \quad (5.11)$$

ve směru osy úhlu je vektor

$$\vec{k}_s = \frac{\vec{k}_2 + \vec{k}_1}{2}, \quad (5.12)$$

analogicky můžeme zavést fáze

$$\varphi_m = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}, \quad (5.13)$$

a

$$\varphi_s = \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}. \quad (5.14)$$

Výsledné pole je tedy rovno /jednotlivé vlny vyjádříme pomocí rov. (5.1)-(5.4)/

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_{10} \exp[-i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_1)] + E_{20} \exp[-i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_2)]. \quad (5.15)$$

Přímým vyjádřením  $k_1$ ,  $k_2$ , resp.  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  pomocí nově zavedených veličin dostaneme výsledné pole ve tvaru

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = 2 E_0 \cos(\vec{k}_m \cdot \vec{r} + \varphi_m) \exp[-i(\omega t - \vec{k}_s \cdot \vec{r} + \varphi_s)]. \quad (5.16)$$

Tento výraz můžeme opět považovat za složený z „obálky“ a „nosné vlny“. Výsledné vlnění se tedy šíří ve směru osy úhlu obou vln s vlnovým vektorem  $\vec{k}_s$ , jehož velikost je podle (5.12) a obr. 5.2 rovna (připomínáme  $k_1 = k_2$ )

$$k_s = k_1 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (5.17)$$

Amplituda této vlny je v kolmém směru periodicky prostorově modulována. Velikost vektoru  $\vec{k}_m$  je rovna

$$k_m = k_1 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (5.18)$$

Odpovídající prostorové rozložení intenzity výsledného pole dostaneme podle (5.5),

$$I(\vec{r}) = 4 I_0 \cos^2(\vec{k}_m \cdot \vec{r} + \varphi_m). \quad (5.19)$$

Zde<sup>3</sup>  $I_0 = E_0^2$ . Tento výsledek souhlasí ovšem s (5.10). Prostorová perioda modulace intenzity je tedy rovna (druhá mocnina kosinu vede ke dvojnásobné frekvenci)

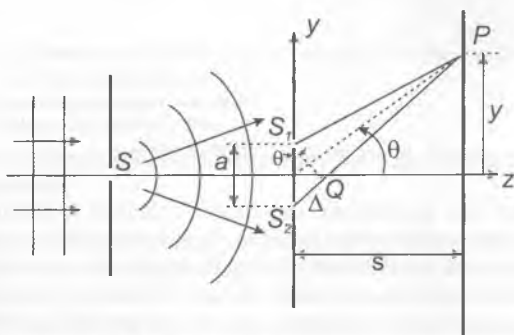
$$\Lambda = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{k_m} = \frac{\lambda}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (5.20)$$

Interference dvou (téměř) rovinných vln se využívá například při přípravě holografických mřížek, kdy se umístí fotocitlivá deska kolmo na směr osy

dvou vln a prostorová modulace interferenčního pole vede k periodicky modulované expozici vrstvy. Po vyvolání tak vznikne optická difrakční mřížka, kterou se podrobněji zabýváme v kapitolách 8 a 11.

Speciální případ nastává, když dvě rovinné vlny postupují proti sobě, tedy pro případ  $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$ . Pak ovšem  $\vec{k}_m = -\vec{k}_1$ ,  $\vec{k}_s = 0$ . Nulová hodnota vlnového vektoru  $k_s$  znamená, že se nejedná o postupnou vlnu, výsledné vlnění se nazývá *stojatá vlna*. Amplituda stojaté vlny je i tomto případě modulována ve směru daném směrem vektoru  $\vec{k}_m$ , který je ovšem kolineární se směrem šíření vln.<sup>4</sup>

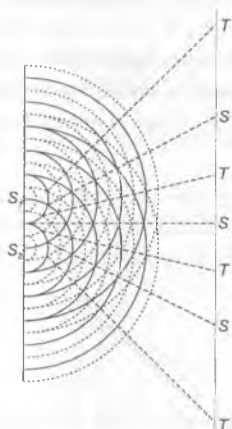
### 5.1.2 Youngův experiment



Obr. 5.3 Schéma Youngova experimentu

Právě popsaná interference dvou svazků odpovídá řadě experimentálních uspořádání. Nejznámější je pravděpodobně Youngův pokus (Thomas Young, 1802), jehož uspořádání je schematicky znázorněno na obr. 5.3. Ve stínítku jsou dva malé otvory  $S_1$ ,  $S_2$ , které jsou v malé vzdálenosti od sebe a osvětleny tak, aby byly zdrojem vln, jež jsou navzájem koherentní (viz dále). To je například splněno tehdy, pokud vlny vycházející z otvorů mají stejné amplitudy a fáze. Toho je možné dosáhnout tím, že stínítko je osvětleno laserovým svazkem nebo – jako v původním Youngově uspořádání – je použito kvazimonochromatické světlo termického zdroje, kterým se osvětlí otvor  $S$  v jiném stínítku, jež je nastaveno tak, že první otvor je umístěn symetricky mezi oběma dalšími otvory. To znamená, že sférická vlna, která

vychází z prvního otvoru, dopadá na oba otvory ve fázi a ty jsou pak zdroji světla, které může interferovat. Podrobněji se k rozboru této experimentální situace vrátíme při výkladu koherence světla v následující kapitole.

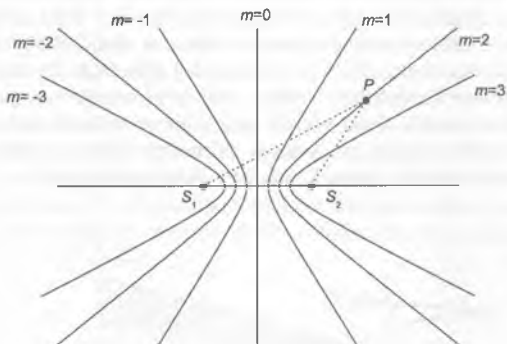


**Obr. 5.4** Youngův experiment: střídání míst s velkou (S) a malou (T) intenzitou světla

Uvažujme tedy geometrické uspořádání Youngova experimentu podle obr. 5.3. Téměř bodové zdroje světla  $S_1$ ,  $S_2$  vyzařují sférické vlny, které se šíří v poloprostoru za stínítkem. Obě pole interferují a v celém prostoru vzniká interferenční pole. V bodech prostoru, kde se vlny (s nulovým relativním fázovým posuvem v otvorech,  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ ) setkávají „ve fázi“, tj. tak, že jejich vzájemný fázový posuv  $\delta(\vec{r}) = m 2\pi$ , je velká intenzita světla. Například na ose mezi oběma otvory dopadají obě vlny po průchodu stejně dlouhou dráhou, jejich dráhový (tj. i fázový) rozdíl je tudíž nulový. Vznik tmavých a světlých míst je znázorněn schematicky na obr. 5.4. Geometrické místo bodů, kde je intenzita maximální, je tedy dáno podmínkou, že dráhový rozdíl obou svazků je

$$|S_1P - S_2P| = m\lambda. \quad (5.21)$$

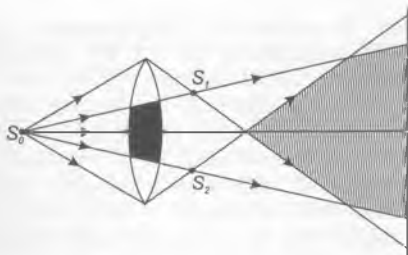
Toto je rovnice hyperbolických ploch, jak jsou znázorněny na obr. 5.5. V blízkosti osy jsou na stínítku přibližně ekvidistantní proužky.<sup>5</sup>



Obr. 5.5 Youngův experiment: Poloha světých proužků pro určitou velikost dráhového rozdílu  $m\lambda$  určuje hyperbolickou plochu

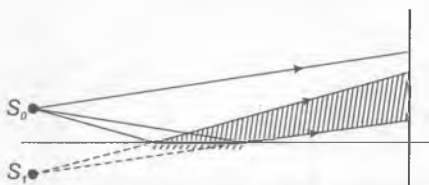
### 5.1.3 Další příklady dvojsvazkové interference – dělení vlnoplochy

S interferencí dvou vln (svazků) se setkáváme v řadě dalších případů – ať již v různých optických uspořádáních, nebo v každodenním životě. Dva interferující svazky zpravidla vzniknou dělením jednoho svazku (i když je možné pozorovat interferenci svazků vycházejících ze dvou laserů). Podle toho, jak dva svazky vzniknou, se dělí uspořádání pro pozorování interference na případy s *dělením amplitudy* a na případy s *dělením vlnoplochy*.



Obr. 5.6 Biletova dvojčochka

Dva příklady experimentálních uspořádání s dělením vlnoplochy, jak se často uvádějí v učebnicích, jsou uvedeny na obr. 5.6 a 5.7. Jedná se o Billetovu dvojčočku a Lloydovo zrcadlo. Billetova dvojčočka je tvořena dvěma částmi čočky, mezi nimiž je neprůhledná překážka. Bodový zdroj světla  $S_0$  je zobrazen každou částí čočky, vzniknou (reálně) obrazy  $S_1$  a  $S_2$ . Vlny vycházející z těchto dvou zdrojů interferují ve vyšrafované oblasti. U Lloydova zrcadla vzniká při odrazu (virtuální) obraz  $S_1$  zdroje  $S_0$  a dochází k interferenci vln zdrojů  $S_1$  a  $S_0$  ve vyšrafované oblasti.



Obr. 5.7 Lloydovo zrcadlo

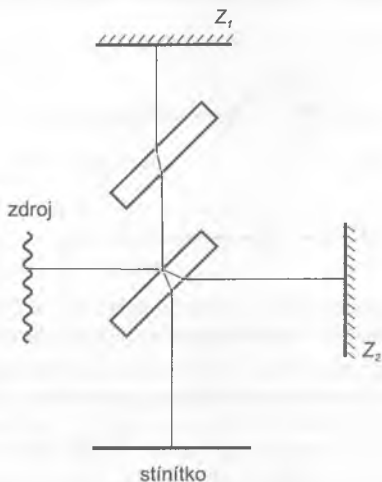
## 5.1.4 Další příklady dvojsvazkové interference – dělení amplitudy

### 5.1.4.1 Michelsonův interferometr

Jak je zřejmé, jsou interferenční obrazce závislé silně na vlnové délce světla. Je proto možné interferenční jevy používat ke studiu spektrálních vlastností světla. Zařízení, které studuje vlastnosti světla na základě jeho interference, tedy studuje kvantitativně interferenci, se nazývá *interferometrem*.

Velmi známým dvojsvazkovým interferometrem je *Michelsonův interferometr*, který je znázorněn na obr. 5.8. Byl zkonstruován Albertem Michelsonem v roce 1881. Sehrál důležitou roli ve vývoji fyziky. Kromě jiného Michelson a Morley použili tento interferometr ke konci 19. století ve svém klasickém experimentu, který patří k nejvýznamnějším pokusům v historii fyziky. Ukázali, že není žádný rozdíl v rychlosti světla ve dvou navzájem kolmých směrech, což vedlo k formulaci obecného principu, podle nějž je rychlost světla konstantní ve všech směrech, nezávislá na rychlosti pohybu zdroje světla. Je to jeden z principů Einsteinovy teorie relativity.

Interferometr patří k uspořádáním s dělením amplitudy. Světlo ze zdroje dopadá na dělič svazku (tenký dielektrický nebo kovový film na povrchu skleněné desky), kde se rozdělí na dva svazky stejné intenzity. Ty se odrážejí na zrcadlech  $Z_1$  a  $Z_2$ , postupují pak v obráceném směru, na děliči svazku se opět setkávají a vystupují směrem na stínítko. Setkávají se ovšem se vzájemným fázovým zpožděním, které odpovídá rozdílu optických drah obou paprsků. Jedno ze zrcadel je na posuvném zařízení, takže je možné měnit optickou dráhu světla v jednom rameni; lze také nastavovat náklon zrcadel. Svazek, který postupuje na obr. 5.8 horizontálně, prochází deskou děliče svazku třikrát, zatímco druhý svazek prochází deskou jen jednou.



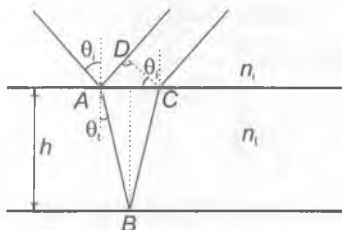
**Obr. 5.8** Michelsonův interferometr

V některých případech, když se užívá bílé světlo, je nezbytné, aby optické dráhy obou svazků byly stejné. To lze sice zařídit posuvem jednoho ze zrcadel, ale velikost posuvu je závislá na vlnové délce. Proto se zpravidla užívá kompenzační desky, která je vyrobena ze stejného materiálu jako dělič svazku. V případě, že interferometrem procházejí rovinné vlny dopadající kolmo na plochy zrcadel, je stínítko rovnoměrně osvětlené, intenzita osvětlení se mění se vzájemným fázovým posuvem svazků podle vztahu (5.10). Pokud se jedno ze zrcadel skloní, objeví se na stínítku soustava rovnoběžných světlých a tmavých interferenčních proužků (tzv. proužky stejné tloušťky). Pokud interferometrem prochází divergentní vlny, jako v případě

plošného zdroje, vzniká na stínítku soustava soustředných kruhů. Tento případ odpovídá vzniku kroužků stejného sklonu.

#### 5.1.4.2 Interference na dielektrických vrstvách

Představme si, že monochromatická vlna dopadá na planoparalelní dielektrickou vrstvu (sklíčko, mýdlová blána). Pro pozorování interference v bílém (nekoherentním) světle – viz další kapitola, je nutné aby vrstva byla tenká, s tloušťkou nepřesahující příliš délku vlny světla. Oba povrchy filmu částečně odrážejí a propouštějí světlo. Vypočítáme nyní fázový rozdíl mezi paprskem 1, který se odráží od vrchní plochy, a paprskem 2, který se odráží



Obr. 5.9 Výpočet fázového rozdílu dvou svazků interferujících při odrazu na planoparalelní desce (filmu)

od spodní plochy a vychází zpět nahoru. Situace je schematicky znázorněna na obr. 5.9. Úhel dopadu, resp. lomu, je  $\theta_i$ , resp.  $\theta_t$ . Tloušťka filmu je  $h$ , index lomu filmu je  $n_i$ , index lomu okolního prostředí (vzduchu například) je  $n_1$ . Urazí-li světlo dráhu  $z$ , změní se jeho fáze („náběh fáze“) o

$$\delta = k z = k_0 n z, \quad (5.22)$$

kde  $k_0$  je velikost vlnového vektoru ve vakuu a  $n$  je index lomu prostředí, ve kterém se světlo šíří. Je výhodné zavést *optickou dráhu*, jež budeme označovat indexem  $z_{OD}$ , která je definována jako součin dráhy geometrické a indexu lomu:

$$z_{OD} = z n. \quad (5.23)$$

Náběh fáze je pak

$$\delta = z_{OD} k_0. \quad (5.24)$$

Rozdíl optických drah mezi paprskem 1 a 2 na obr. 5.9 je



$$\Delta_{OD} = n_i (AB + BC) - n_i AD. \quad (5.25)$$

Z geometrie plyne

$$AB = BC = \frac{h}{\cos \theta_i}, \quad (5.26)$$

$$AD = AC \sin \theta_i, \quad (5.27)$$

$$AC = 2h \operatorname{tg} \theta_i. \quad (5.28)$$

Dosazením (5.14) do (5.13) máme

$$\Delta_{OD} = 2h \left[ n_i \frac{1}{\cos \theta_i} - n_i \operatorname{tg} \theta_i \sin \theta_i \right]. \quad (5.29)$$

Vyjádríme-li  $\sin \theta_i$  pomocí zákona lomu, dostaneme

$$\Delta_{OD} = 2h n_i \cos \theta_i. \quad (5.30)$$

Fázový rozdíl mezi oběma svazky je tedy

$$\delta = k_0 \Delta_{OD} = \frac{4\pi}{\lambda_0} h n_i \cos \theta_i. \quad (5.31)$$

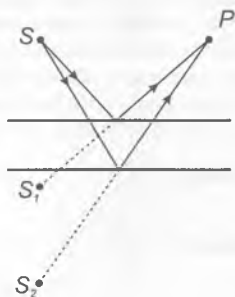
Pro závěry o průběhu interference je si ovšem třeba uvědomit, že paprsky mohou získávat dodatečný fázový posun  $\delta_{odr}$  při odrazu na horní a spodní ploše tvořící film (viz kapitola 3). Pokud jde například o vrstvu oleje na hladině vody, jedná se u obou odrazů o rozhraní z prostředí opticky řidšího do prostředí opticky hustšího (vzduch – olej – voda) a změna fáze při odrazu je v obou případech stejná. Podobně je tomu v opačném případě (oba odrazy od rozhraní mezi opticky hustším a řidším prostředím). V těchto případech je  $\delta_{odr} = 0$ . Obecně ovšem může být dodatečný fázový posuv nenulový, jako v případě rozhraní vzduch – sklo – vzduch, kdy rozdíl fází, který vznikne mezi oběma svazky, je  $|\delta_{odr}| = \pi$ . Podmínku maxima interference v odraženém světle je proto možné v uvažovaných případech psát

$$\delta + \delta_{odr} = 2p\pi, \quad (5.32)$$

kde  $p$  je celé číslo. Podmínka pro minimum je

$$\delta + \delta_{odr} = (2p+1)\pi. \quad (5.33)$$

Na obr. 5.10 je znázorněn případ interference, která vzniká dělením amplitudy vlny generované bodovým zdrojem světla  $S$ . Fresnelovými odrazy na plochách desky vznikají dva virtuální zdroje  $S_1, S_2$ . Dvě kulové vlny vycházející z těchto zdrojů interferují v celém prostoru nad deskou; interferenční proužky jsou delokalizované.



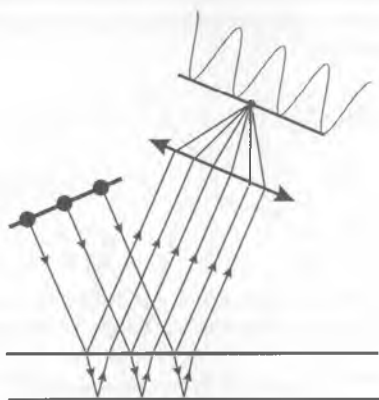
Obr. 5.10 Interference na planoparalelní tenké vrstvě – bodový zdroj světla

#### 5.1.4.2.1 Proužky stejného sklonu

Často se setkáváme s plošným zdrojem světla, který je možné si představit jako soubor nezávislých bodových zdrojů světla. Pokud je zdroj kvazi-monochromatický, každý z bodových zdrojů vyzařuje na stejné frekvenci, ale bez vzájemných fázových vztahů. Každý bodový zdroj vytváří svoje interferenční pole a výsledné interferenční pole je dáno součtem polí jednotlivých zdrojů. Jinými slovy, vlny vycházející z různých bodových zdrojů spolu neinterferují. Při pozorování interference s plošným zdrojem budou interferenční proužky pozorovatelné tam, kde poloha a vzdálenost jednotlivých proužků není ovlivněna polohou jednotlivých bodů plošného zdroje. Například nulový rozdíl optických drah odpovídá světlému proužku. V určitém místě, kde je nulový rozdíl optických drah nezávisle na poloze bodového zdroje, bude světlý proužek tvořen interferencí všech bodů plošného zdroje – bude dobrý kontrast. Obecně platí, že dobrý kontrast proužků v případě plošného zdroje bude v oblasti, kde je rozdíl optických drah mezi interferujícími svazky malý.

Osvětlení planoparalelní desky (filmu) plošným zdrojem je znázorněno na obr. 5.11. Je zřejmé, že v každém bodě prostoru budou interferovat paprsky z různých bodů plošného zdroje, a to vždy s různými vzájemnými fázovými rozdíly, protože rozdíl optických drah závisí na úhlu dopadu (rov. 5.31). Umístíme-li však do odraženého světla čočku, budou se v každém bodě její

ohniskové roviny setkávat paprsky, které vycházejí z desky pod stejným úhlem. Těmto navzájem rovnoběžným vycházejícím paprskům odpovídají ovšem rovnoběžné dopadající paprsky, z nichž každý se rozdělí na rozhraní na dva. Každý pár paprsků pak interferuje (se stejným fázovým rozdílem) v bodě na stínítku. Výsledkem je interferenční obrazec s vysokým kontrastem. Interferenční proužky není možné pozorovat všude v prostoru, ale jen pomocí čočky v její ohniskové rovině. Interferenční proužky jsou proto *lokalizované*, (v ohniskové rovině čočky, tedy v nekonečnu). Takto vznikajícím



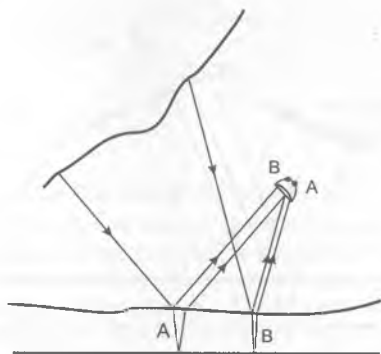
Obr. 5.11 Interference světla na planparalelním filmu – plošný zdroj světla

proužkům se říká též proužky (nebo kroužky – podle geometrického tvaru *stejněho sklonu*, protože určitý proužek odpovídá určitému sklonu dopadajících rovnoběžných paprsků. Nazývají se také *Haidingerovy kroužky*. Paprsky dopadající pod určitým úhlem vůči normále, jak je znázorněno na obrázku, jsou fokusovány do určitého bodu v ohniskové rovině. Při dostatečně velkých rozměrech plošného zdroje dopadají paprsky ze všech stran a body v ohniskové rovině, do kterých se zobrazí, leží na kružnici. Vznikají tak interferenční kroužky.

#### 5.1.4.2.2 Proužky stejné tloušťky

Pokud je tloušťka filmu proměnná, závisí fázový rozdíl mezi dvojicí interferujících svazků (vznikajících štěpením paprsku z určitého bodu zdroje) nejen na úhlu, ale také na tloušťce filmu (viz vztah 5.31). Když je ovšem směr paprsků pevný (například kolmý dopad), objeví se tmavé

a světlé proužky podle příslušného fázového rozdílu daného tloušťkou filmu v určitém místě. Interferenční proužky se pak nazývají *proužky stejné tloušťky*. Možné uspořádání pro jejich pozorování na klínovitém filmu je znázorněno na obr. 5.12. Dvojice interferujících paprsků (vycházejících z jednoho bodu zdroje) po odrazu z obou ploch filmu se při vzdalování roz-  
bíhá – nevznikají proto reálné – delokalizované proužky, ale proužky virtuální, které je možné vidět okem. Jak je znázorněno na obr. 5.12, oko zaostřené na povrch filmu fokusuje dvojici paprsků, vybírá místo na povrchu filmu a (svou polohou a malým průměrem vstupní pupily) směr paprsků. Proužky jsou lokalizované na povrchu filmu, nazývají se také *Fizeauovy proužky*.



**Obr. 5.12** Pozorování proužků stejné tloušťky (obrazy *A*, *B* v oku odpovídají různým místům na vrstvě)

Pokud je tenký film osvětlen zdrojem bílého světla, může se jevit jako zbarvený, jak můžeme pozorovat například u olejových skvrn na loužích. V určité části filmu může být jeho tloušťka taková, že dochází ke konstruktivní interferenci pro vlnové délky z červené části spektra s dráhovým rozdílem určitého počtu vlnových délek,  $m\lambda$ . Pokud interference pro  $m' = m \pm 1$  odpovídá vlnovým délkám mimo viditelnou oblast světla, jeví se film červený. Tato situace je jistě splněna, pokud je  $m$  malé, tedy optická tloušťka filmu je srovnatelná s vlnovou délkou světla.

#### 5.1.4.2.3 Antireflexní vrstvy

S interferencí na tenkých filmech se setkáváme běžně u antireflexních vrstev, kterými se pokrývají čočky fotografických aparátů nebo brýlí. Cílem použití těchto vrstev je minimalizovat ztráty procházejícího světelného toku

způsobené odrazem na rozhraní vzduch – sklo (fresnelovské ztráty). U objektivů tvořených řadou (někdy třeba 20) čoček mohou být tyto ztráty značné, u brýlí hraje roli potlačení odrazů pozorovaných jinými osobami (i estetický faktor). Antireflexní vrstvu je možné vytvořit z materiálu, který ve viditelné oblasti neabsorbuje. Na povrchu skla se vytvoří vrstva vhodné tloušťky  $h$ , tak, aby se vlny odražené na jejím horním a dolním rozhraní vzájemnou interferencí vyrušily. Jsou-li indexy lomu vzduchu  $n_v$ , filmu  $n_f$ , a skla  $n_s$  takové, že  $n_v < n_f < n_s$ , je možné zvolit čtvrtvlnovou tloušťku vrstvy. Skutečně, pro uvedené velikosti indexů lomu při odrazu nedochází ke změně fáze ( $\delta_{odr} = 0$ ) a podmínka pro minimum (5.33) spolu s (5.31) dává pro  $\theta = 0$

$$\frac{4\pi}{\lambda_0} h n_f = (2p + 1)\pi. \quad (5.34)$$

Nejmenší tloušťka<sup>6</sup> vrstvy je tedy ( $p = 0$ )

$$n_f h = \frac{\lambda_0}{4}. \quad (5.35)$$

Aby odražená vlna vymizela, musí být intenzita v interferenčním minimu nulová, tedy amplitudy obou odražených stejné. Znamená to /viz (3.39) a (3.63)/

$$\left(\frac{n_v - n_f}{n_v + n_f}\right)^2 = \left(\frac{n_f - n_s}{n_f + n_s}\right)^2, \quad (5.36)$$

neboli

$$\left(\frac{1 - \frac{n_f}{n_v}}{1 + \frac{n_f}{n_v}}\right)^2 = \left(\frac{1 - \frac{n_s}{n_f}}{1 + \frac{n_s}{n_f}}\right)^2. \quad (5.37)$$

Na obou stranách této rovnosti jsou stejné funkce, rovny si mohou být pouze, pokud

$$\frac{n_f}{n_v} = \frac{n_s}{n_f}. \quad (5.38)$$

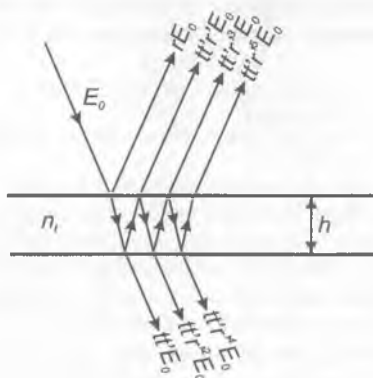
Odtud dostáváme podmínku pro index lomu antireflexní vrstvy

$$n_f = \sqrt{n_v n_s} . \quad (5.39)$$

Například pro  $n_v = 1$ ,  $n_s = 1,5$ , vychází  $n_f \approx 1,22$ . Používá se často vrstva  $\text{MgF}_2$  s blízkým indexem lomu 1,38. Nedojde ovšem k úplnému potlačení odrazu.<sup>7</sup> Její minimální tloušťka pro  $\lambda_0 = 550$  nm podle (5.35) vychází asi 100 nm.

## 5.2 MNOHOSVAZKOVÁ INTERFERENCE

Nyní se budeme zabývat případem, kdy dopadá rovinná monochromatická vlna na planoparalelní desku (například skleněnou), jejíž plochy jsou pokryty tenkými vrstvami s velkou odrazivostí. V takovém případě se vlny na horní i dolní ploše částečně odrážejí a částečně procházejí a vzhledem k tomu, že je odrazivost velká, je nutné při interferenci uvažovat velký počet vln. Situace je schematicky znázorněna na obr. 5.13. Rovinná monochromatická vlna dopadá pod úhlem  $\theta_i$ , její amplituda je  $E_0$ . Pro jednoduchost



Obr. 5.13 Mnohosvazková interference na planoparalelní vrstvě; u jednotlivých paprsků jsou uvedeny jejich amplitudy

budeme uvažovat reálnou skalární amplitudu. Na obrázku jsou znázorněny jednotlivé paprsky, které vznikají různým počtem průchodů a odrazů. Kromě různých velikostí amplitud, které jsou důsledkem násobení původní amplitudy relevantními koeficienty propustnosti a odrazivosti, mají vlny také různé fáze. Fázový rozdíl  $\delta$  mezi dvěma následujícími paprsky jsme

vypočítali již dříve, je dán vztahem (5.31). Při dopadu světla na plochu desky z okolního prostředí (vzduchu například) jsou amplitudové koeficienty odrazu  $r$  a propustnosti  $t$ , při dopadu z desky do vzduchu  $r'$  a  $t'$ . Pomocí Fresnelových vzorců lze ukázat platnost tzv. *Stokesových vztahů*

$$r = -r', \quad (5.40)$$

$$r^2 + tt' = 1. \quad (5.41)$$

Vypočítáme nyní výsledné pole, které projde deskou. Dopadající vlnu bereme reálnou, paprsek 1 prošlý deskou bez odrazu má fázový posuv vůči dopadající vlně daný náběhem fáze při jednom průchodu deskou  $\delta_0$ . Jednotlivé svazky mají komplexní amplitudy

$$\begin{aligned} & 1. \quad tt'E_0 \exp(i\delta_0), \\ & 2. \quad tt'r'^2 E_0 \exp(i\delta_0) \exp(i\delta), \\ & 3. \quad tt'r'^4 E_0 \exp(i\delta_0) \exp(i2\delta), \\ & 4. \quad tt'r'^6 E_0 \exp(i\delta_0) \exp(i3\delta), \\ & \text{atd.} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Celkové pole prošlé deskou je tedy rovno součtu dílčích vln,

$$\bar{E}_i = tt'E_0 \exp(i\delta_0) [1 + r'^2 \exp(i\delta) + \dots]. \quad (5.43)$$

V hranaté závorce je součet geometrické řady s kvocientem

$$q = r'^2 \exp(i\delta). \quad (5.44)$$

Součet řady je  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$  (pro  $|q| < 1$ , což je jistě v našem případě splněno).

Komplexní amplituda prošlého pole je tedy

$$\bar{E}_i = \frac{tt'E_0 \exp(i\delta_0)}{1 - r'^2 \exp(i\delta)}. \quad (5.45)$$

Důležitá je intenzita světla, která podle vztahu (5.5) je

$$I_i = \bar{E}_i \bar{E}_i^* = \frac{(tt')^2 |E_0|^2}{1 + r'^4 - r'^2 [\exp(i\delta) + \exp(-i\delta)]}. \quad (5.46)$$

Po úpravách a využitím Stokesových vztahů (5.40, 5.41) máme

$$I_t = \frac{(1-R)^2 |E_0|^2}{1+R^2-2R \cos \delta}, \quad (5.47)$$

neboli

$$I_t = I_0 \frac{1}{1+F \sin^2 \frac{\delta}{2}}. \quad (5.48)$$

Zde

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2} \quad (5.49)$$

je parametr nazývaný *jemností* ( $R=r'^2$  je intenzitní odrazivost na rozhraní). Závisí silně na odrazivosti  $R$ , jejímž krajním hodnotám 0 a 1 odpovídají pro  $F$  krajní hodnoty 0 a nekonečno.

Propustnost desky je možné zavést jako

$$T_d = \frac{I_t}{I_0}, \quad (5.50)$$

zde jako výše je  $I_0$  intenzita dopadajícího světla. Pokud uvažujeme desku bez absorpce, musí pro intenzitu odraženou od desky platit

$$I_r = I_0 - I_t. \quad (5.51)$$

Zavedeme-li odrazivost desky jako

$$R_d = \frac{I_r}{I_0}, \quad (5.52)$$

musí zřejmě být

$$R_d + T_d = 1. \quad (5.53)$$

Propustnost, resp. odrazivost desky vypočítaná podle rov. (5.48), (5.50), (5.51) a (5.52) je jako funkce  $\delta$  znázorněna na obr. 5.14 (*Airyho funkce*). Je zřejmé, že tvar Airyho funkce závisí na parametru  $F$ , který charakterizuje kontrast funkce. Skutečně, podle vztahu (5.48) je maximum propustnosti  $T_d$  rovno 1 a minimum  $1/(1+F)$ . Kontrast můžeme charakterizovat výrazem



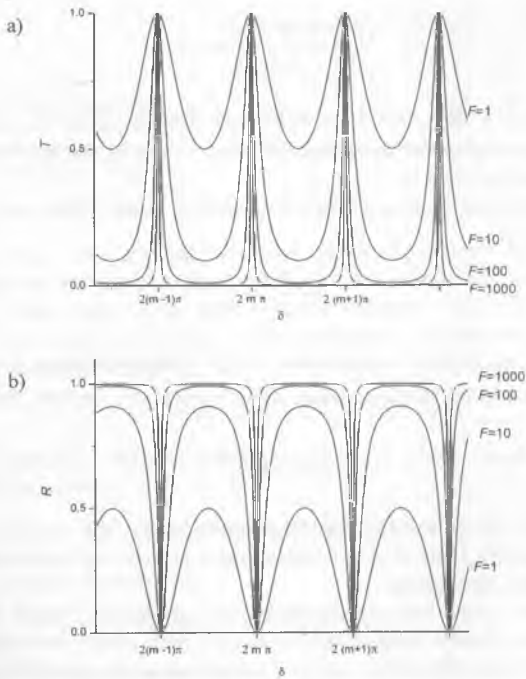
$$\frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\min}} = F. \quad (5.54)$$

Ze vztahů (5.48) a (5.50) je zřejmé, že maximální hodnota propustnosti je rovna jedné. Tento případ nastane vždy, když  $\sin$  ve jmenovateli vymizí, tedy pro

$$\delta = 2m\pi. \quad (5.55)$$

V tomto případě je tedy

$$T_d = 1, R_d = 0. \quad (5.56)$$



Obr. 5.14 a) Propustnost  $T$ , b) odrazivost  $R$  planparalelní desky při mnohosvazkové interferenci jako funkce fázového zpoždění  $\delta$  (Airyho funkce)

Přitom se ovšem samozřejmě odráží první svazek. Nulová hodnota celkové odrazivosti tedy znamená, že intenzita prvního odraženého svazku musí být stejně velká jako celkový příspěvek do „odraženého“ světla (pole s opačnou fází) pocházející od všech dalších paprsků. Jak plyne z Fresnelových vzorců, fáze vlny se při průchodu rozhraním nemění. Proto je první odražený paprsek v protifázi k ostatním paprskům, protože platí  $r = -r'$ . Interferenci světla na planoparalelní desce jsme rozebírali již dříve jako dvousvazkovou interferenci. Kdy se tedy můžeme omezit pouze na první dva paprsky (odrazy)? Jako kritérium můžeme vzít velikost podílu amplitud druhého a prvního paprsku – pokud se bude blížit jedné, v případě splnění odpovídající fázové podmínky se dva paprsky téměř vyruší a další není nutné uvažovat. Zmíněný podíl amplitud je roven

$$\left| \frac{E_2}{E_1} \right| = \left| \frac{t' r' E_0}{r E_0} \right| = 1 - R. \quad (5.57)$$

Například pro kolmý dopad na skleněnou destičku ( $n_1 = 1,5$ ) je  $R = r^2 = 0,04$  a zmíněný podíl je roven 0,96, což znamená, že se dva odražené paprsky vyruší až na 4 %.

Speciálním, ale častým případem je kolmý dopad vlny na desku. Pak podle (5.31) je

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} h n_1, \quad (5.58)$$

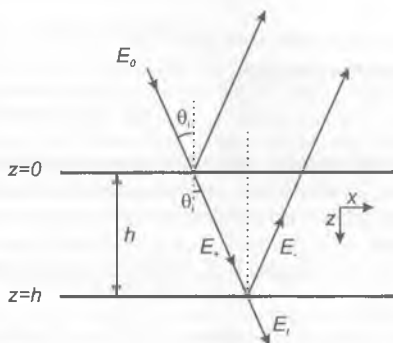
a podmínka maximální propustnosti (5.32) (předpokládáme zde  $\delta_{ord} = 0$ ) vede k výrazu spojujícímu optickou tloušťku desky s vlnovou délkou světla ve vakuu

$$h n_1 = m \frac{\lambda_0}{2}, \quad (5.59)$$

tedy řečeno slovy: optická tloušťka desky musí být rovna celistvému násobku polovln. Číslo  $m$ , které udává počet polovln na tloušťce desky, se nazývá řádem interference.

Stejně lze vyšetřovat mnohosvazkovou interferenci, která vzniká při odrazech mezi dvěma rovnoběžnými zrcadly, mezi nimiž je vzduchová mezera. Takové uspořádání se užívá v interferometrii a nazývá se *Fabry-Perotův interferometr*. Podrobně budeme jeho vlastnosti rozebírat v odstavci 11.2.

Jakkoliv je uvedené odvození názorné, můžeme Airyho funkci odvodit i jednoduchou úvahou založenou na poměrech amplitud při odrazu a průchodu. Ukážeme to na Fabry-Perotově interferometru, který je tvořen dvěma planoparalelními zrcadly. Geometrie je podobná jako u desky, pro zrcadla ovšem  $\theta_t = \theta_i$ , prostor mezi zrcadly je vyplněn vzduchem, tj.  $n_i = n_t \approx 1$ . Amplitudové propustnosti a odrazivosti opět označíme  $t$  a  $r$



Obr. 5.15 Mnohosvazková interference na dvou planoparalelních zrcadlech, alternativní odvození Airyho funkce

„zvenku“, resp.  $t'$  a  $r'$  „zevnitř“. Budeme uvažovat postup vln v rovině obrázku, zvolíme souřadný systém tak, že osa  $z$  bude mít směr normály k povrchu desky, osa  $x$  bude ležet v rovině obrázku – viz obr. 5.15. Pole mezi povrchy desky je složeno z vlny postupující v kladném směru osy  $z$  (ve směru dopadající vlny)

$$E_+ \exp(-i(\omega t - k_x x - k_z z)) \quad (5.60)$$

a vlny postupující v opačném směru (po odrazu – mění se pouze znaménko u členu se souřadnicí  $z$ )

$$E_- \exp(-i(\omega t - k_x x + k_z z)). \quad (5.61)$$

Zvenku na zrcadlo dopadá vlna

$$E_0 \exp(-i(\omega t - k_x x - k_z z)), \quad (5.62)$$

prošlá vlna za výstupním zrcadlem je

$$E_t \exp(-i(\omega t - k_x x - k_z z)). \quad (5.63)$$

Pomineme-li na chvíli časovou a  $x$ -ovou závislost, která je pro všechny vlny stejná, můžeme jednoduše sestavit rovnice vyjadřující propustnost a odrazivost na obou zrcadlech. Na prvním zrcadle ( $z = 0$ )

$$E_+ = t E_0 + r' E_- . \quad (5.64)$$

Na druhém zrcadle ( $z = h$ )

$$E_- \exp(-i k_z h) = r' E_+ \exp(i k_z h) \quad (5.65)$$

a procházející pole

$$E_t = t' E_+ \exp(i k_z h) . \quad (5.66)$$

Protože chceme najít vztah mezi polem dopadajícím a propuštěným, vyjádříme  $E_+$  pomocí  $E_0$  z (5.64) a (5.65) a dosadíme do (5.66). Dostaneme (po vynásobení faktorem obsahujícím časovou a  $x$ -ovou závislost)

$$E_t = \frac{E_0 t t'}{1 - r'^2 \exp(2i k_z h)} \exp(i k_z h) \exp[-i(\omega t - k_x x)] , \quad (5.67)$$

což souhlasí se vztahem (5.45), který jsme odvodili výše, vzhledem k tomu, že

$$k_z = k \cos \theta_1 . \quad (5.68)$$

### Poznámky

<sup>1</sup> V řadě praktických případů se ovšem interference neprojevuje. Například příspěvky světelných toků jednotlivých žárovek na lustru se jednoduše sčítají. V tomto případě se totiž nesčítají uspořádané monochromatické vlny, ale neuspořádané světlo s amplitudou nebo fázemi náhodně se měnícími v čase. Středování při výpočtu výsledné intenzity světla pak vede k nulové hodnotě interferenčního členu. Statistické vlastnosti světla se kvantifikují v teorii koherence, kterou se budeme částečně zabývat v kapitole 6.

<sup>2</sup> Platnost tohoto vztahu jsme rozebírali v odstavci 1.6. Uvedli jsme zde, že platí přesně pro rovinnou vlnu, dále pokud platí aproximace geometrické optiky (srov. odst. 10.1.3), ale je dobrým a užívaným přiblížením i pro obecnější světelná pole.

<sup>3</sup> Tento výsledek, který jsme dostali z rov. (5.5), je přibližný, platí dobře pro malé úhly  $\theta$ . Interferenci vzniklé elektromagnetické pole totiž není již rovinnou vlnou. Výsledný

Poyntingův vektor, jak můžeme zjistit přímým výpočtem, má směr vektoru  $\vec{k}_z$  a jeho velikost má časovou střední hodnotu (odpovídající podle definice intenzitě světla)

$$\langle S \rangle = \frac{4E_0^2}{2Z} \cos \frac{\theta}{2} \cos^2(\vec{k}_m \cdot \vec{r} + \varphi_m). \text{ Tento výraz se liší od rov. (5.19) faktorem } \frac{\cos(\theta/2)}{2Z}.$$

Kromě toho, že v této kapitole pokládáme  $2Z = 1$ , je tento faktor důsledkem použití přibližného vztahu pro výpočet intenzity – viz pozn. 2 a odst. 1.6. Pro malé úhly  $\theta$  je  $\cos(\theta/2) \approx 1$  a rozdíl v hodnotě maximální intenzity zanedbatelný.

<sup>4</sup> Místa, kde je amplituda pole nulová, se nazývají uzly, místa, kde dosahuje maximální hodnoty se nazývají kmitny. Vzdálenost uzlů (kmiten) je  $\lambda/2$ . Vzhledem ke vzájemné orientaci vektorů elektrického a magnetického pole v rovinné vlně (viz obr. 1.3) vychází polohy uzlů elektrického a magnetického pole navzájem posunuty o  $\lambda/4$ , tj. uzly magnetického pole odpovídají kmitnám pole elektrického. Stojatá optická vlna vzniká často interferencí dopadající a odražené vlny (například od zrcadla). V takovém případě je na odrazné ploše uzel elektrického pole a kmitna magnetického pole.

<sup>5</sup> Skutečně, v blízkosti osy  $z$  je úhel  $\theta$  malý, proto  $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ . Podle obr. 5.3 je zřejmé, že pro velkou vzdálenost stínítka od štěrbin je rozdíl drah pro  $m$ -té maximum  $\Delta_m = a \theta_m$ ,

$$\theta_m = \frac{y_m}{s}. \text{ Podmínka pro maxima je } \Delta_m = m\lambda, \text{ odtud } y_m = m \frac{s}{a} \lambda. \text{ Rozdíl mezi polohami}$$

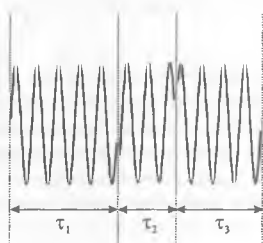
následujících maxim je zřejmě konstantní, roven  $(s/a)\lambda$ . Význam veličin je zřejmý z obr. 5.3.

<sup>6</sup> Součin tloušťky a indexu lomu se nazývá *optická tloušťka*. Navrhuje se pro zvolenou vlnovou délku. Volba  $p = 0$  je výhodná, protože vede k menší závislosti na vlnové délce než vyšší interferenční řády. Pro antireflexní pokrytí je typické zabarvení povrchu v odraženém světle. Pokrytí čoček dalekohledů bývá růžové (odrazivost je minimální pro světlo zelené barvy, v odraženém světle převládá modrá a červená). Zabavení čoček brýlí lze volit podle módy, zpravidla převládá modrá barva (ovšem spíše proto, aby se více odráželo světlo modré a ultrafialové).

<sup>7</sup> Většina pevných látek má index lomu ve viditelné oblasti větší než 1,5, a proto volba materiálu není jednoduchá. Vrstvy se většinou nanášejí napařováním, materiál by měl být proto také vhodný z technologického hlediska.

# 6 KOHERENCE SVĚTLA

Koherence světla popisuje statistické vlastnosti světla. Z experimentálního hlediska se dá přibližně říci, že světlo je koherentní, pokud „dobře interferuje“. Jednoduchou představu můžeme získat, když si představíme (viz obr. 6.1), že zdroj světla vyzařuje dobře definovanou sinovou vlnu po určitou dobu,  $\tau_j$ , pak dojde ke skoku fáze o náhodnou hodnotu a opět bude vyzařována sinová vlna pod dobu  $\tau_{j+1}$ . Střední doba mezi fázovými skoky je  $\tau_0$ .



Obr. 6.1 Světlo složené ze sinových vln časových délek  $\tau_j$

Podle Fourierovy transformace takové vlně odpovídá<sup>1</sup> spektrální šířka

$$\Delta \nu \approx \frac{1}{\tau_0} \quad (6.1)$$

Celková délka vyzařované vlny je zřejmě rovna

$$l_c = c \tau_0 \approx \frac{c}{\Delta \nu} \quad (6.2)$$

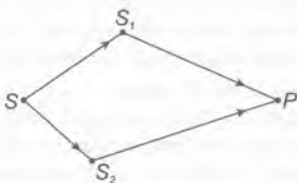
Uvážíme-li vztah mezi frekvencí a vlnovou délkou, můžeme vyjádřit (6.2) jako ( $\lambda$  je zde střední vlnová délka světla)

$$l_c \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}. \quad (6.3)$$

Pro bílé světlo (například svíčky) je  $\Delta\lambda \approx 300$  nm,  $\lambda \approx 500$  nm, odpovídající hodnota je  $l_c \approx 800$  nm  $\approx 2\lambda$ . Čára rtuťové výbojky má vlnovou délku 546 nm, její šířka je 0,025 nm a výsledek je  $l_c \approx 1$  cm. Pro lasery může být délka  $l_c$  rovna  $10^3$  km. Představme si nyní, že rozštěpíme uvažovanou vlnu na dva svazky, které pak s jistým vzájemným zpožděním skládáme; provádíme klasický dvojsvazkový interferenční experiment. Při popisu interference rozhodovalo o výsledném poli relativní dráhové zpoždění dvou svazků (až na celistvý násobek vlnové délky). V případě uvažovaných svazků je situace složitější, protože pokud bude dráhový rozdíl větší než délka  $l_c$ , nebude světlo interferovat: bude se skládat s náhodnými fázovými rozdíly a při středování přes velmi dlouhý časový interval bude střední hodnota interferenčního členu nulová.

## 6.1 ÚVOD DO SKALÁRNÍ TEORIE KOHERENCE

Nyní zkusíme charakterizovat koherenci světla kvantitativně. Uvažujme dvousvazkový experiment v uspořádání podle obr. 6.2. Kvazimonochromatické vlny z bodového zdroje  $S$  se šíří štěrbinou  $S_1$  resp.  $S_2$  a sledujeme jejich interferenci v bodě  $P$ . Budeme uvažovat skalární aproximaci, tj. například situaci, kdy se vlny šíří v rovině obrázku a jsou lineárně polarizované ve směru kolmém k rovině obrázku.



**Obr. 6.2** Schematické znázornění experimentálního uspořádání pro měření koherence světla

Pokud se skládají v pevném bodě  $P$ , můžeme uvažovat pouze jejich časovou závislost a pro výsledné pole psát

$$E_p(t) = E_1(t - \tau_1) + E_2(t - \tau_2). \quad (6.4)$$

Zde  $\tau_1$ , resp.  $\tau_2$ , jsou časová zpoždění, která vzniknou díky průletu světla po dráze  $SS_1P$ , resp.  $SS_2P$ . Intenzita světla je rovna<sup>2</sup>

$$I_p = \langle \tilde{E}_p \tilde{E}_p^* \rangle = \langle \tilde{E}_1(t - \tau_1) \tilde{E}_1^*(t - \tau_1) + \tilde{E}_2(t - \tau_2) \tilde{E}_2^*(t - \tau_2) + \tilde{E}_1(t - \tau_1) \tilde{E}_2^*(t - \tau_2) + \tilde{E}_2(t - \tau_2) \tilde{E}_1^*(t - \tau_1) \rangle. \quad (6.5)$$

Tedy

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\text{Re} \left\{ \langle \tilde{E}_1(t - \tau_1) \tilde{E}_2^*(t - \tau_2) \rangle \right\}. \quad (6.6)$$

První dva členy odpovídají intenzitám prvního a druhého svazku, třetí člen vyjadřuje interferenční člen, o který se liší výsledné pole od jednoduchého součtu intenzit obou svazků. Jeho velikost je dána korelací mezi poli obou svazků v bodě  $P$ . Tu lze charakterizovat pomocí *korelační funkce*<sup>3</sup> ( $\tau = \tau_2 - \tau_1$ )

$$\tilde{\Gamma}_{12}(\tau) = \langle \tilde{E}_1(t) \tilde{E}_2^*(t + \tau) \rangle. \quad (6.7)$$

Vhodnější je používat normovanou korelační funkci, *komplexní stupeň koherence*,

$$\tilde{\gamma}_{12}(\tau) = \frac{\tilde{\Gamma}_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1 I_2}}. \quad (6.8)$$

Intenzitu v bodě  $P$  můžeme zřejmě vyjádřit pomocí (6.8) takto

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \text{Re} \left\{ \tilde{\gamma}_{12}(\tau) \right\}. \quad (6.9)$$

Uvažujme nyní jednoduchý model statistického chování světla, na kterém objasníme podrobněji význam stupně koherence. Předpokládejme, že průběh elektrického pole určitého zdroje v čase lze popsat tak, že po dobu  $\tau_0$  má harmonický průběh, je tedy popsáno dobře kosinovou funkcí, pak dojde ke skoku ve fázi s náhodnou velikostí, a dále se proces opakuje. Průběh je znázorněn schematicky na obr. 6.3. Koherenci světla můžeme, jak jsme již popsali, vyšetřovat ve dvousvazkovém interferenčním experimentu, kdy interferují svazky  $E_1$  a  $E_2$ , které vznikají amplitudovým dělením světla ze zdroje a jejich vzájemným zpožděním o dobu  $\tau$ . Pokud bude zpoždění  $\tau > \tau_0$ , nebudou vlny v klasickém smyslu interferovat, protože se inter-

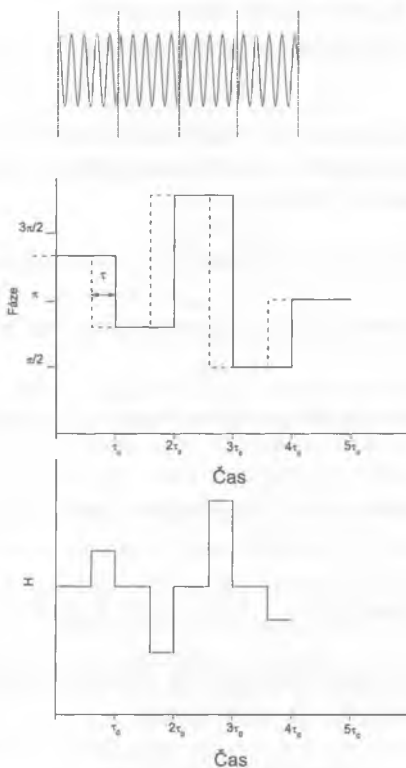


ferenční člen vyruší při středování přes dlouhý časový interval vzhledem ke zcela náhodným skokům ve fázi vln. Jaká bude interference pro  $\tau < \tau_0$ ?

Dva interferující svazky v bodě  $P$  můžeme popsat

$$\tilde{E}_1(t) = E_0 \exp\{-i[\omega t - \varphi(t)]\} \quad (6.10)$$

$$\tilde{E}_2(t) = E_0 \exp\{-i[\omega(t + \tau) - \varphi(t + \tau)]\}. \quad (6.11)$$



Obr. 6.3 Model statistického chování světla pro objasnění fyzikálního významu stupně koherence

Podle (6.8) můžeme vyjádřit stupeň koherence

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_{12}(\tau) &= \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{I} \left\langle \exp\{-i[\omega t - \varphi(t)]\} \exp\{i[\omega(t+\tau) - \varphi(t+\tau)]\} \right\rangle = \\ &= \exp\{i\omega\tau\} \left\langle \exp\{i[\varphi(t) - \varphi(t+\tau)]\} \right\rangle. \quad (6.12)\end{aligned}$$

Vzhledem k charakteru uvažovaného pole, je rozdíl fází pro časový interval  $l$  (tedy interval  $\langle 0, \tau_0 \rangle$ ) roven, jak je patrné z obr. 6.3

$$\begin{aligned}\varphi(t) - \varphi(t+\tau) &= 0, \quad 0 < t < (\tau_0 - \tau) \\ &= H_1, \quad (\tau_0 - \tau) < t < \tau_0\end{aligned} \quad (6.13)$$

Rozdíl lze vyjádřit analogicky pro všechny další intervaly s tím, že pro  $i$ -tý interval je místo  $H_1$  hodnota  $H_i$ , která se mění interval od intervalu zcela náhodně. Pokračujeme ve výpočtu (6.12):

$$\tilde{\gamma}_{12}(\tau) = \exp(i\omega\tau) \frac{1}{T} \int_0^{\tau} \exp\{i[\varphi(t) - \varphi(t+\tau)]\} dt. \quad (6.14)$$

Časový interval středování je libovolný (dost dlouhý), můžeme zvolit

$$T = N\tau_0. \quad (6.15)$$

Integraci v (6.14) lze rozdělit na intervaly délky  $\tau_0$ , s využitím (6.13) tak máme

$$\tilde{\gamma}_{12}(\tau) = \exp(i\omega\tau) \frac{1}{N\tau_0} \left[ \int_0^{\tau_0-\tau} \exp(i0) dt + \int_0^{\tau_0-\tau} \exp(iH_1) dt + \dots \right], \quad (6.16)$$

$$\tilde{\gamma}_{12}(\tau) = \exp(i\omega\tau) \frac{1}{N\tau_0} \left[ N(\tau_0 - \tau) + \tau \sum_{k=1}^N \exp(iH_k) \right]. \quad (6.17)$$

Vzhledem k tomu, že předpokládáme zcela náhodné hodnoty  $H_k$ , je suma v hranaté závorce vztahu (6.17) nulová a máme

$$\tilde{\gamma}_{12}(\tau) = \exp(i\omega\tau) \frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0}. \quad (6.18)$$

Zjevně

$$|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| = 1 - \frac{\tau}{\tau_0} \quad (6.19)$$

a

$$\operatorname{Re}\{\tilde{\gamma}_{12}(\tau)\} = \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) \cos(\omega\tau). \quad (6.20)$$

Intenzita světla, které je výsledkem interference v bodě  $P$ , je tedy rovna

$$I_P = 2I + 2I \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) \cos(\omega\tau). \quad (6.21)$$

Viditelnost (*ostrost*) interferenčních proužků  $V$  je dána výrazem

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (6.22)$$

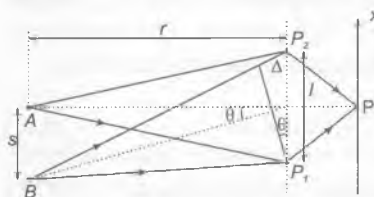
Dosažením (6.21) do (6.22) máme

$$V = |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|. \quad (6.23)$$

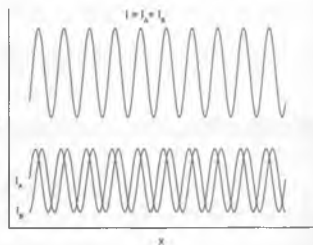
Tento vztah vyjadřuje fyzikální význam absolutní hodnoty stupně koherence. Ukazuje také, že v experimentu lze změřit přímo absolutní hodnotu komplexního stupně koherence. V uvažovaném modelu má smysl velikost  $\tau$  v intervalu od 0 do  $\tau_0$ . Zcela koherentnímu světlu odpovídá případ  $\tau_0 \rightarrow \infty$ , tedy  $V = |\tilde{\gamma}_{12}| = 1$ . Naopak pro světlo zcela nekoherentní je  $\tau_0 \rightarrow \tau$  (pro libovolné zpoždění  $\tau$  jsou fáze dvou vln nekorelované, velikost integračního intervalu  $(\tau_0 - \tau)$ , v němž je fázový rozdíl dvou vln nulový, je tedy nulová). Pro zcela nekoherentní světlo je proto  $V = |\tilde{\gamma}_{12}| = 0$ . Obecný případ částečné koherence světla odpovídá případu, kdy  $0 < \tau < \tau_0$ .

Dosud jsme se zabývali časovou koherencí, tedy korelací pole v určitém bodě prostoru v různých časech. Časovou koherenci jsme spojovali s představou průměrné délky harmonických vln, které jsou vysílány zdrojem světla. Často se mluví o délce koherence. Pokud zkoumáme korelace pole v různých bodech prostoru ve stejném čase, mluví se o *prostorové* (příčné) koherenci světla. Prostorová koherence je opět spojena s vlastnostmi zdroje,

který světlo vyzařuje.<sup>4</sup> Uvažujme nyní experimentální situaci podle obr. 6.4a. Chceme vyšetřovat prostorovou koherenci světelného pole v bodech  $P_1, P_2$ . Pro jednoduchost budeme předpokládat, že pole je vyzařované dvěma stejně intenzivními bodovými zdroji  $A, B$ .



Obr. 6.4a Geometrie uspořádání pro studium prostorové koherence



Obr. 6.4b Průběh intenzity světla na stínítku (v závislosti na souřadnici  $x$ ) pro případ, kdy jsou body  $A, B$  v určité vzdálenosti  $s$ : Příklad příspěvek bodu  $A$  a  $B$  (dole) a jejich součet  $I = I_A + I_B$  (nahore)

Koherenci pole v bodech  $P_1, P_2$  můžeme sledovat tak, že okolo bodů vytvoříme dvě štěrbin v neprůhledné desce a pozorujeme interferenci na stínítku. Pokud bude bodový zdroj  $A$  ležet na ose úsečky  $P_1, P_2$  (ve vzdálenosti  $r$  od plochy štěrbin), bude v bodě  $P$  na téže ose maximum, okolo bude interferenční obraz odpovídající Youngovu pokusu. Nyní uvažujme druhý bodový zdroj  $B$ , který vyzařuje nekoherenčně se zdrojem  $A$ . Pokud jsou oba zdroje umístěny v jednom bodě, vytváří každý z nich interferenční obrazec, oba obrazce jsou však identické a splývají; světlo je tedy prostorově koherentní. Pokud nyní budeme posouvat zdroj  $B$  dolů z místa zdroje  $A$ , budou se interferenční obrazce vůči sobě posouvat. Pokud bude posunutí takové, že maxima jednoho obrazce nastanou v minimech druhého obrazce, výsledné rozložení pole nebude vykazovat interferenční proužky; světlo v bodech  $P_1, P_2$  bude nekoherentní. Jaká může být vzdálenost  $s$  mezi body  $A, B$ , aby světlo bylo ještě (v jisté míře) koherentní, tedy aby nevymizela interference? V bodě  $P$  na stínítku je interferenční maximum interferenčního obrazce tvořeného světlem, které vyzařuje bodový zdroj  $A$ . To je zřejmé z platnosti rovnosti drah obou svazků  $AP_1P$  a  $AP_2P$ , což znamená

$$AP_1 - AP_2 = 0. \quad (6.24)$$

Interferenční obrazec tvořený světlem vyzařovaným bodovým zdrojem  $B$  bude mít v bodě  $P$  minimum (první, tedy odpovídající co nejmenšímu posuvu  $s$ ), pokud bude platit (zde opět  $\lambda$  je střední vlnová délka světla)

$$BP_2 - BP_1 = \Delta = \frac{\lambda}{2}. \quad (6.25)$$

Z geometrie podle obrázku plyne

$$\theta \approx \frac{s}{r}, \quad (6.26)$$

$$\Delta \approx l\theta. \quad (6.27)$$

Je tedy

$$\Delta \approx \frac{sl}{r}. \quad (6.28)$$

Ze vztahů (6.25) a (6.28) plyne

$$s \approx \frac{r\lambda}{2l}. \quad (6.29)$$

Dospěli jsme tedy k závěru, že bude patrná interference, pokud bude vzdálenost  $AB$  menší než hodnota  $s$  daná vztahem (6.29), tedy světlo bude koherentní, pokud

$$AB < s \approx \frac{r\lambda}{2l}. \quad (6.30)$$

Pokud bychom vyšetřovali situaci, kdy prostor mezi body  $AB$  by byl vyplněn nekoherentními bodovými zdroji, dostali bychom pro „vymizení“ interference analogickou podmínku jako (6.30), pouze s tím rozdílem, že by ve jmenovateli nebyl faktor 2. Považujeme-li rozměr  $AB$  takového zdroje za konstantní, můžeme pomocí uvedené podmínky určit vzdálenost  $l_s$  mezi body  $P_1, P_2$ , pro kterou je ještě pole v těchto bodech koherentní, tedy *šířku koherence*

$$l_s < \frac{r\lambda}{s} \approx \frac{\lambda}{\theta}. \quad (6.31)$$

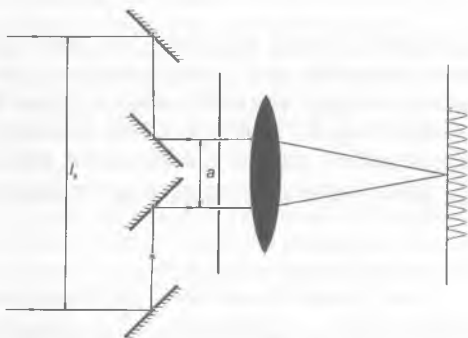
Pokud tedy budeme pozorovat interferenci, bude se viditelnost interferenčních proužků zvětšovat se zmenšováním vzdáleností  $P_1, P_2$ . Když bude nao-

pak vzdálenost  $P_1, P_2$  větší než  $l_s$ , ostrost interferenčních proužků opět vzroste, pak opět klesá. Přesným rozbořem se dá ukázat, že závislost stupně koherence na prostorové vzdálenosti bodů  $P_1, P_2$  je stejná jako prostorový průběh intenzity difrakce světla na apertuře, která svým umístěním a rozměry odpovídá ploše zdroje. Toto tvrzení se nazývá *van Cittert-Zernikeovou větou*.

Vztah (6.31) je možné využít k měření úhlových rozměrů zdrojů. Pro hvězdy to navrhl poprvé Michelson; jeho uspořádání se nyní nazývá *stelární Michelsonův interferometr*. Předpokládáme-li, že hvězda je kruhový nekoherentní zdroj světla, je mezní (kdy vymizí interference) vzdálenost dvou štěrbin

$$l_s = 1,22 \frac{\lambda}{\theta}. \quad (6.32)$$

Číselný faktor 1,22 pochází z použití van Cittert-Zernikeovy věty, tedy odpovídá faktoru při difrakci světla na kruhovém otvoru. Úhlové rozměry hvězd jsou malé, proto je vzdálenost  $l_s$  velká, což by komplikovalo pozorování interferenčních proužků. Proto se užívá experimentální uspořádání se zrcadly podle obr. 6.5. Pak je viditelnost interferenčních proužků dána vzdáleností vstupních zrcadel  $l_s$ , ale jejich prostorová perioda je určena vzdáleností a štěrbin. Například hvězda Betelgeuse (souhvězdí Orionu) má úhlový průměr  $\theta \cong 2,3 \times 10^{-7}$  rad. Podle vztahu (6.32) tomu odpovídá  $l_s \approx 2,7$  m pro střední vlnovou délku  $\lambda = 500$  nm.



Obr. 6.5 Michelsonův stelární interferometr

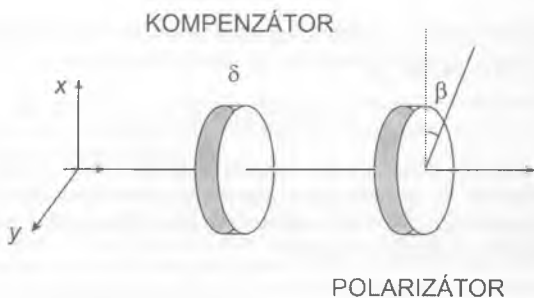
## 6.2 POLARIZACE SVĚTLA

Dosud jsme se zabývali koherencí ve skalární aproximaci, viděli jsme, že korelace mezi fluktuujícími vlnami vedou ke vzniku interference. V tomto odstavci se zmíníme o vektorových polích. Korelace mezi složkami vektoru elektrické intenzity fluktuujícího světelného pole vede k polarizaci světla. Budeme uvažovat kvazimonochromatické světlo šířící se ve směru  $z$ . Můžeme ho vyjádřit pomocí komplexních amplitud jeho dvou složek ( $E_{x0}$ ,  $E_{y0}$  jsou reálné)

$$\tilde{E}_x(t) = E_{x0}(t) \exp[-i(\omega t - \varphi_x(t))], \quad (6.33)$$

$$\tilde{E}_y(t) = E_{y0}(t) \exp[-i(\omega t - \varphi_y(t))]. \quad (6.34)$$

Amplitudy i fáze, které vystupují v komplexních amplitudách jednotlivých komponent, se mohou v čase náhodně měnit, ovšem tak, že jejich změny jsou zanedbatelné za jednu periodu kmitů na frekvenci  $\omega$ .  $X$ -ová a  $y$ -ová složka pole mohou být korelovány. Míru korelace je možné studovat ve vhodném experimentálním uspořádání. Představme si situaci (jako na obr. 6.6), kde uvedené světlo projde kompenzátozem, který zavádí pro jednotlivé komponenty časově neproměnný náběh fáze  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ , a polarizátorem, který svírá úhel  $\beta$  s osou  $x$ . Působení těchto optických prvků na polarizační stav světla jsme probírali ve 2. kapitole v souvislosti s maticovým formalismem. Podle (2.35) a (2.39) je intenzita světla propuštěného polarizátorem



Obr. 6.6 Průchod světla kompenzátozem a polarizátorem

$$\begin{aligned}
I(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \beta) = & \langle \tilde{E}_x^*(t) \tilde{E}_x(t) \rangle \cos^2 \beta + \langle \tilde{E}_y^*(t) \tilde{E}_y(t) \rangle \sin^2 \beta + \\
& + \langle \tilde{E}_x^*(t) \tilde{E}_y(t) \rangle \exp[i(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)] \sin \beta \cos \beta + \\
& + \langle \tilde{E}_x(t) \tilde{E}_y^*(t) \rangle \exp[-i(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)] \sin \beta \cos \beta.
\end{aligned} \quad (6.35)$$

Střední hodnoty součinů komplexních amplitud polí můžeme uspořádat do matice  $J_{ij}$ , která se nazývá *koherenční* (někdy *polarizační*) maticí /srov. (2.12)/. Zřejmě je

$$\tilde{J}_{ij} = \tilde{J}_{ji}^* \quad (6.36)$$

Uspořádání, které jsme uvedli, dovoluje experimentálně určit komponenty koherenční matice. Ve výrazu pro intenzitu prošlého světla (6.35) vystupuje pouze rozdíl fázových náběhů v kompenzátoru  $\delta = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ . Pak  $I(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \beta) = I(\delta, \beta)$ . Vhodnou volbou parametrů  $\delta, \beta$  můžeme zjistit prvky matice  $J$ . Jak je bezprostředně zřejmé z (6.35), například  $J_{xx} = I(0, 0)$ ,  $J_{yy} = I(0, 90)$ ,

$$\tilde{J}_{xy} = \tilde{J}_{yx}^* = \frac{1}{2} \{ I(0, 45^\circ) - I(0, 135^\circ) + i [ I(90^\circ, 45^\circ) - I(90^\circ, 135^\circ) ] \}$$

Veličina  $\tilde{j}_{xy}$  zavedená vztahem

$$\tilde{j}_{xy} = \frac{\tilde{J}_{xy}}{(J_{xx})^{1/2} (J_{yy})^{1/2}} \quad (6.37)$$

má absolutní hodnotu  $|\tilde{j}_{xy}|$ , která vyjadřuje míru korelace mezi složkami pole  $E_x, E_y$ . Dá se ukázat, že

$$0 \leq |\tilde{j}_{xy}| \leq 1. \quad (6.38)$$

Pro deterministicky polarizované monochromatické světlo, o kterém jsme mluvili v kapitole 2, je komplexní amplituda dána vztahy (6.33, 6.34), v nichž ani amplitudy ani fáze nezávisí na čase. Koherenční matice (jak zjistíme přímým dosazením) vychází

$$J = \begin{pmatrix} E_{x0}^2 & E_{x0} E_{y0} \exp[i(\varphi_y - \varphi_x)] \\ E_{x0} E_{y0} \exp[-i(\varphi_y - \varphi_x)] & E_{y0}^2 \end{pmatrix} \quad (6.39)$$



Zřejmě je tedy pro takové zcela polarizované světlo

$$|\tilde{j}_{xy}|=1. \quad (6.40)$$

Tuto podmínku je možné zobecnit: každé světlo, pro něž platí (6.40) je *úplně polarizované* (složky pole  $E_x$ ,  $E_y$  jsou zcela korelované)<sup>5</sup>. Pro světlo, v němž není korelace mezi komponentami  $E_x$ ,  $E_y$  (mění se náhodně) naproti tomu vymizí nediagonální členy koherenční matice<sup>6</sup>

$$|\tilde{j}_{xy}|=0. \quad (6.41)$$

Podle (6.37) musí v tomto případě být  $J_{xy}=0$ . Uvážením, jak se transformují souřadnice  $x$ ,  $y$  při rotacích okolo osy  $z$ , můžeme dospět k závěru, že z (6.41) plyne, že musí stále platit  $J_{xx} = J_{yy}$ . Tento závěr je v souladu s intuitivní představou: pro zcela nekorelované složky pole ve dvou navzájem kolmých ale libovolně natočených směrech musí být střední hodnota korelace ve směru  $x$  konstantní. To ale znamená podle (6.35), že intenzita světla po průchodu kompenzátozem a polarizátorem je konstantní, nezávisí ani na zavedeném fázovém zpoždění, ani na natočení polarizátoru,  $I(\delta, \beta)=0$ . Takové světlo se nazývá *nepolarizované* nebo též *přirozené*.

V této kapitole jsme se zabývali teorií koherence 2. řádu. Je možné vyšetřovat korelace vyšších řádů a věnovat se například teorii koherence 4. řádu, která se zabývá korelacemi mezi intenzitami světelných vln. Je úzce svázána s fotoelektrickou detekcí světelných signálů, kterou je možné dobře popsat pouze kvantovou teorií.

## Poznámky

<sup>1</sup> To lze ukázat přímým výpočtem Fourierovy transformace „oseknuté“ sinové funkce.

<sup>2</sup> Uvažujeme zde obecná pole proměnná v čase, proto ponecháváme středování, nemůžeme použít výrazy pro jednoduchou harmonickou vlnu. Stejně jako v předchozí kapitole zde vynecháváme konstantu úměrnosti.

<sup>3</sup> Obvykle se setkáváme se světelnými poli, která jsou statisticky stacionární (charakter fluktuací se nemění s časem, tj. při časovém středování nezávisí na volbě časového počátku). Záleží proto jen na rozdílu zpoždění  $\tau = \tau_2 - \tau_1$ . Obvykle se také předpokládá, že pole jsou ergodická a středování přes soubor a čas jsou stejná. Jedná se zde o korelační funkci pole 2. řádu, proto se teorie, kterou se zabýváme, nazývá teorií koherence 2. řádu.

<sup>4</sup> Prostorová i časová koherence spolu souvisí, vypovídá o korelacích pole v různých časech a místech. Klasická skalární teorie koherence 2. řádu vychází proto z korelační funkce  $\bar{I}_{12}(\bar{r}_1, \bar{r}_2, t_1, t_2) = \langle \tilde{E}(\bar{r}_1, t_1) \tilde{E}^*(\bar{r}_2, t_2) \rangle$  (ještě přesněji, místo komplexních amplitud se používá komplexní analytický signál). Obecně není možné prostorovou a časovou koherenci oddělovat.

<sup>5</sup> Bílé světlo (sluneční) může být polarizované (vidíme polarizačními slunečními brýlemi). Pole je nekoherentní, mění se náhodně, ale jeho komponenty  $E_x$ ,  $E_y$  jsou navzájem korelovány (svázaný, například  $E_y(t) = \text{konst } E_x(t)$ ).

<sup>6</sup> Pro libovolnou orientaci os  $x$ ,  $y$ .

# 7 HOLOGRAFIE

Holografie je dnes dobře známá široké veřejnosti.<sup>1</sup> „Trojdimenzionální fotografie“ nachází uplatnění v umění, reklamách, v muzeích apod. „Normální fotografie“ je dvojdimenzionální obraz trojrozměrné scény, jak je zobrazena čočkou (resp. objektivem) v rovině filmu. Ztrácí se vnímání hloubky, perspektivy, které je vlastní přímému pozorování scény. Naproti tomu v hologramu je zaznamenána světelná vlna, která nese celkovou informaci o scéně, jak ji může pozorovatel vidět. Při pozorování hologramu místo scény (při rekonstrukci hologramu) je původní vlna rekonstruována a při pohledu na hologram vidí pozorovatel totéž, co by viděl, kdyby pozoroval scénu oknem hologramu. Zachovává se tedy prostorová hloubka vjemu a perspektiva; například nakláněním hlavy můžeme nahlédnout za roh předmětu.

Při záznamu běžné fotografie se používá fotografický film nebo matice fotodetektorů (v případě digitálních přístrojů). Obě tato záznamová prostředí jsou citlivá pouze k hodnotám energetických toků. Například na fotografickém filmu po jeho vyvolání odpovídá zčernání v určitém bodě (optická hustota emulze) celkové světelné energii, která do daného bodu dopadla. Zaznamenává se pouze energie, tedy výkon (který souvisí s amplitudou světelné vlny) za určitou expoziční dobu a všechny informace o fázi osvětlující vlny jsou ztraceny. Aby byla zaznamenána i fáze, je nutné převést informaci o fázi na modulaci amplitudy. Princip, kterého se v holografii využívá, je *interference světla*. V 5. kapitole jsme popisovali, jak interference dvou vln vede ke vzniku interferenčního obrazce, v němž jsou světlá, resp. tmavá místa podle toho, s jakým relativním vzájemným fázovým rozdílem se vlny setkávají. Toho se užívá při záznamu hologramu: světelná vlna, ve které je zaznamenána informace o scéně, se nechá interferovat s koherentní referenční vlnou. Interferenční obrazec, který vznikne, obsahuje informaci o relativní fázi zaznamenávané vlny vůči vlně referenční.

V analogii s komunikační technikou lze mluvit o nosné vlně (referenční vlna), která je modulována vlnou signální. Z předchozí kapitoly je zřejmé, že vlny musí být dobře koherentní.

V případě běžné ostré fotografie odpovídá každému bodu scény jeden sdružený bod obrazu v rovině filmu. Při tvorbě hologramu se neužívá žádná čočka. Hologram je zaznamenaný interferenční obrazec, tedy soustava světlých a tmavých proužků. Do každého bodu hologramu dopadá světlo z mnoha bodů scény, a naopak, světlo vycházející z každého bodu scény osvětluje celý hologram. Na útržku fotografie zbude jen část pozorované scény, na kousku hologramu je stále informace o celé scéně, i když pozorované menším okénkem (klíčovou dírkou).

Uvažujme tedy, že na film dopadá referenční vlna  $E_R$  a signální vlna  $E_S$ . Referenční vlna je

$$\tilde{E}_R = A_R \exp[-i(\omega t + \varphi)], \quad (7.1)$$

a signální vlna

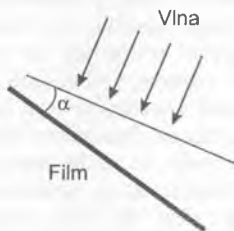
$$\tilde{E}_S = A_S \exp[-i(\omega t + \theta)]. \quad (7.2)$$

Přítom amplitudy  $A_R$  a  $A_S$  jsou funkcemi souřadnic v rovině filmu  $(x, y)$ , budeme předpokládat, že jsou reálné. Rovněž fáze  $\theta = \theta(x, y)$ . Amplituda a fáze signální vlny nesou informaci o objektu, amplituda a fáze referenční vlny je dána parametry dopadající vlny. Předpokládáme-li, že referenční vlna je rovinná, je amplituda  $A_R$  konstantní a

$$\varphi = k x \sin \alpha \approx k x \alpha, \quad (7.3)$$

viz obr. 7.1. Výsledné pole na filmu je

$$\tilde{E}_F = \tilde{E}_R + \tilde{E}_S. \quad (7.4)$$



Obr. 7.1 Geometrie dopadu rovinné referenční vlny na film

Intenzita světla je

$$I_F(x, y) \propto (\tilde{E}_R + \tilde{E}_S)(\tilde{E}_R^* + \tilde{E}_S^*) = \tilde{E}_R \tilde{E}_R^* + \tilde{E}_S \tilde{E}_S^* + \tilde{E}_R \tilde{E}_S^* + \tilde{E}_R^* \tilde{E}_S. \quad (7.5)$$

Dosazením rov. (7.1), (7.2) máme

$$I_F(x, y) \propto A_R^2 + A_S^2 + A_R A_S \exp[-i(\varphi - \theta)] + A_R A_S \exp[-i(\theta - \varphi)]. \quad (7.6)$$

Tímto rozložením intenzity je po určitou dobu exponován film, jeho zčernání po vyvolání je úměrné expozici (viz odst. 10.3.4), pokud je v lineárním režimu zčernání. To znamená, že jeho propustnost je pak

$$t(x, y) = t_0 - a I_F(x, y), \quad (7.7)$$

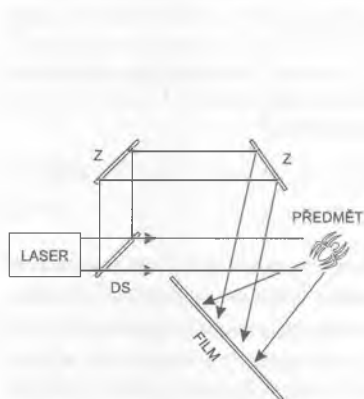
kde  $a$  je konstanta. Osvětíme-li nyní výsledný hologram za identických podmínek jako při jeho expozici pouze referenční vlnou (7.1), je pole, které vznikne po průchodu referenční vlny hologramem

$$\begin{aligned} \tilde{E}_H = t(x, y) \tilde{E}_R = t_0 \tilde{E}_R - a \{ & (A_R^2 + A_S^2) \tilde{E}_R + A_R^2 A_S \exp[-i(\omega t - \theta + 2\varphi)] + \\ & + A_R^2 A_S \exp[-i(\omega t + \theta)] \}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

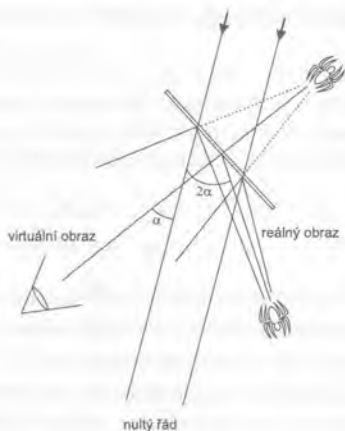
První člen a první člen ve složené závorce představují vlnu postupující ve směru referenční vlny, která nenese žádnou informaci o objektu. Třetí člen ve složené závorce je roven  $A_R^2 E_S$ , odpovídá původní signální vlně. Při pohledu do hologramu oko zobrazuje tedy tuto vlnu vycházející z hologramu (rozbíhavá vlna), vidíme zdánlivý obraz objektu v původní poloze. Dochází k věrné reprodukci (až na velikost intenzity). Druhý člen ve složené závorce představuje vlnu, která má opět amplitudu úměrnou amplitudě signální vlny, ale její fáze je opačná (znaménko  $-$ ) a navíc je fáze posunuta o  $2\varphi$ . Fázový úhel ovšem souvisí přímo s úhlem šíření vlny, rov. (7.3). Posuv fáze o úhel  $2\varphi$  znamená tedy šíření pod úhlem  $2\alpha$  vůči původnímu směru signální vlny. Opačná fáze znamená, že rozbíhavá vlna se mění na vlnu sbíhavou, vzniká tedy reálný obraz, jenž je umístěn symetricky vůči referenční vlně – viz obr 7.3.

Pokud má fotografická emulze jistou nezanedbatelnou tloušťku – větší než několik vlnových délek světla – je zaznamenán interferenční obrazec v objemu. Pokud je hologram zaznamenán tak, že referenční a signální vlna postupují z různých stran hologramu, vzniká interferenční obrazec, jehož interferenční plochy jsou preferenčně orientovány rovnoběžně s plochou

fotografické desky. Vzdálenost interferenčních rovin je blízká k  $\frac{\lambda}{2n}$  ( $n$  je index lomu).<sup>2</sup> Takovému hologramu se říká *reflexní hologram*, protože při rekonstrukci referenční vlna dopadá na hologram a rekonstruovaná vlna vychází z hologramu; dochází k odrazu světla. Situace odpovídá Braggovu odrazu na ekvidistantních rovinách. Každá z rovin odráží část intenzity a podmínka toho, aby se jednotlivé odražené vlny setkávaly ve fázi, je splněna jen pro určitý úhel. V tomto případě tedy nevzniká reálný obraz



Obr. 7.2 Expozice hologramu  
(DS – dělč svazku, Z – zrcadlo)



Obr. 7.3 Rekonstrukce hologramu

(Braggův úhel je jen jeden). Interference závisí silně na vlnové délce světla, různým vlnovým délkám odpovídají různé úhly, pod nimiž je při odrazu maximum. Při rekonstrukci reflexního hologramu je možné používat bílé světlo – díky mnohanásobné interferenci vznikají rekonstruované vlny pro různé barvy pod různými úhly (někdy se mluví o duhovém hologramu).

Tenký hologram je možné také rekonstruovat pomocí bílého světla, pokud je rekonstruovaný objekt velmi blízko ploše hologramu. Představme si hologram bodu (zdroje sférické vlny), který byl zaznamenán pomocí rovinné referenční vlny, srov. obr. 7.4.

Z geometrie uvedené na obrázku je zřejmé, že dráhový rozdíl  $\Delta$  mezi kulovou a rovinnou vlnou ve vzdálenosti  $\rho$  od osy je

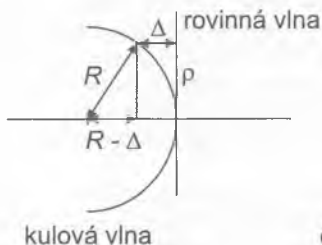
$$\Delta = \frac{\rho^2}{2R}, \quad (7.9)$$

což plyne přímo z Pythagorovy věty podle obrázku

$$(R - \Delta)^2 + \rho^2 = R^2 \quad (7.10)$$

po zanedbání členu  $\Delta^2$ . Odpovídající fázový rozdíl je

$$\delta = k\Delta = \frac{\pi \rho^2}{\lambda R}. \quad (7.11)$$



Obr. 7.4 Hologram „bodu“

Tento vztah určuje polohu interferenčních kroužků. Pokud rekonstruujeme hologram světlem jiné vlnové délky než při záznamu, vznikne rekonstruovaný bod v jiné vzdálenosti  $R'$ . Pokud bude původní vzdálenost velmi malá, bude se nová poloha bodu lišit od původní velmi málo. Při rekonstrukci bílým světlem budeme proto okem vnímat pro různé barvy málo vůči sobě posunuté body, tedy obraz bodu s možným barevným „rozmazáním“. Hologram s malou vzdáleností objektu je možné vyrobit tak, že se předmět nejprve opticky zobrazí s malou hloubkou do blízkosti fotografické desky. Tento obraz je objektem při vzniku hologramu. Vzniklý hologram je možné rekonstruovat pomocí bílého světla. Pokud se podloží zrcadlem, je možné pozorovat obraz v odraženém světle. Tento typ hologramu (rovinného obrazu) se používá v každodenním životě, například na kreditních kartách.

## Poznámky

<sup>1</sup> Princip holografie zformuloval již v roce 1948 Dennis Gabor, ale skutečná holografie, jak ji známe dnes, se začala rozvíjet až po objevu laserů. Známé jsou první práce Emmetta Leitha a Jurise Upatniekse z roku 1962.

<sup>2</sup> Tato vzdálenost odpovídá vzdálenosti maxim ve stojatém vlnění – viz vztah (5.20) a následující text.



# 8 DIFRAKCE SVĚTLA

O *ohybu* neboli *difrakci světla* lze mluvit, když se světlo nešíří přímočaře, ale za překážkami zahýbá.<sup>1</sup> Pozorování a teoretický rozbor difrakce světla sehrály významnou roli v historii fyziky a lidského poznání vůbec, protože je to jeden z projevů vlnové povahy světla. Difrakční jevy jsou ovšem také velmi důležité v optických aplikacích. Způsobují například rozbíhavost laserových svazků, ovlivňují kvalitu zobrazení v optických přístrojích atd.

Difrakci světla lze považovat za projev jeho vlnové podstaty. Již koncem 17. století Huygens použil představu o vlnách, aby objasnil mechanismus šíření světla. Jeho vysvětlení je dnes známo jako *Huygensův princip*. Podle něj se světelná vlna šíří podobně jako vlna na vodě, každý bod vlnoplochy je zdrojem sekundární kulové vlny. Vlnoplocha je vždy po určitém čase dána obálkou sekundárních vlnek. Huygensův princip je znázorněn na obr. 8.1.



Obr. 8.1 Huygensův princip; sekundární Huygensovy vlny vytvářejí vlnoplochu v dalším okamžiku

Na počátku 19. století doplnil Huygensův princip Fresnel, podle nějž při šíření sekundární vlnky interferují, tedy skládají se s příslušným fázovým rozdílem. Mluví se o *Huygens-Fresnelově principu*. Fresnel na základě svého předpokladu byl schopen velmi uspokojivě vypočítat rozdělení intenzity světla pozorované při difrakčních experimentech.

Difrakci světla je možné vyšetřovat v různých stupních aproximace. Jedná se v podstatě o výpočet rozložení intenzity elektromagnetického pole, které vzniká při průchodu elektromagnetických vln v okolí překážek. Jde tedy o úlohu řešit Maxwellovy rovnice se správnými okrajovými a počátečními podmínkami. To je možné za různých přiblížení, která se volí tak, aby analýza byla co nejjednodušší a přitom závěry teorie byly správné. Omezíme se pouze na skalární teorii difrakce, kdy se nebere v úvahu vektorový charakter polí.<sup>2</sup> Budeme také používat nejobvyklejší typ okrajové podmínky, která se nazývá *Kirchhoffova okrajová podmínka*. Podle ní se předpokládá, že skalární pole v rovině apertur (které jsou tvořené velmi tenkými stínítky), je stejné jako pole dopadající. Apertury tedy ovlivňují pole ve své rovině pouze tak, že ho v určitých oblastech nepropouštějí („nulují“). Tyto aproximace, které jsou v řadě případů velmi dobré, vedou k popisu difrakce světla pomocí *Kirchhoff-Fresnelova integrálu*. Tento integrál, jehož formulaci uvádíme v odstavci 8.3, lze dále zjednodušit tak, že vystihuje dvě v optice velmi důležité aproximace: *Fresnelovu difrakci* a *Fraunhoferovu difrakci*. V této kapitole uvedeme obě aproximace intuitivně a použijeme je na některé důležité případy.

## 8.1 FRAUNHOFEROVA DIFRAKCE

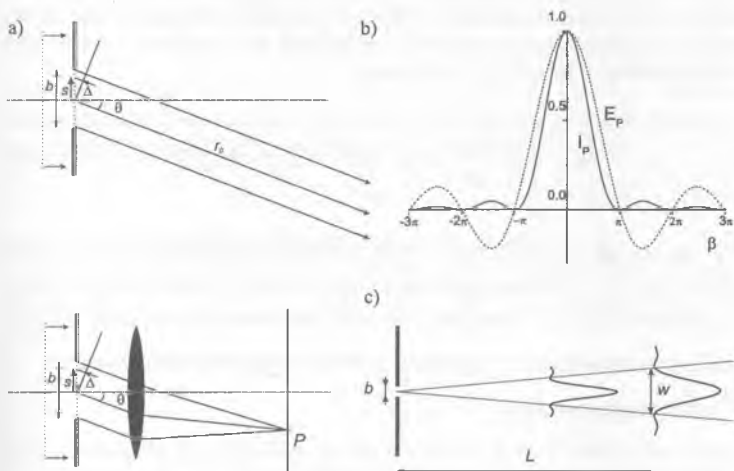
Budeme se nejprve zabývat experimentálními situacemi, kdy na aperturu dopadá rovinná vlna a kdy sledujeme difrakční obrazec ve velké vzdálenosti (ideálně v nekonečno) za aperturou. Podobně jako u interference je možné „nahradit nekonečno“ spojnou čočkou a sledovat rozložení intenzity v její ohniskové rovině. V tomto případě se mluví o *Fraunhoferově difrakci*.

### 8.1.1 Fraunhoferova difrakce na štěrbině

Nejprve budeme vyšetřovat difrakci na štěrbině, viz obr. 8.2a. Dopadající vlna je rovinná monochromatická, dopadá kolmo na štěrbinu, a má tedy v ploše štěrbině konstantní fázi, jejíž hodnotu položíme rovnou nule. Bu-

deme uvažovat jednoduchou okrajovou podmínku: pole mimo otvor apertury je nulové, pole uvnitř apertury je stejné, jako bez apertury. Hledáme výslednou amplitudu, resp. intenzitu světla, v obecném<sup>3</sup> bodě  $P$  jako výsledek skládání sekundárních Huygensových vlnek podle Huygens-Fresnelova principu. Příspěvek pole z elementu  $dS$  vlnoplochy je

$$d\tilde{E}_p = \frac{E_A dS}{r} \exp[-i(\omega t - kr)]. \quad (8.1)$$



Obr. 8.2 Difrakce na štěrbině (Fraunhoferova aproximace): a) geometrie, b) průběh amplitudy  $[\sin\beta/\beta]$  a intenzity  $[(\sin\beta/\beta)^2]$ , c) rozbíhavost svazku

Zde  $E_A$  je úměrné amplitudě rovinné vlny osvětlující aperturu ( $E_A dS$  je amplituda sekundární sférické vlny vysílané elementem apertury  $dS$  v jednotkové vzdálenosti),  $r$  je vzdálenost od elementu plochy  $dS$  apertury do bodu  $P$ . Vzdálenost  $r$  se mění s polohou elementu vlnoplochy (a bodu  $P$ , který ovšem považujeme nyní za pevný). Bod  $P$  je bodem v ohniskové rovině čočky, dopadají tedy do něj paprsky postupující před čočkou pod určitým směrem, například pod úhlem  $\theta$  vůči ose  $z$  jako na obrázku. Můžeme pak vyjádřit vzdálenost  $r$  jako funkci vzdálenosti  $s$  elementu vlnoplochy od osy  $z$ . Je-li  $r_0$  vzdálenost, kterou urazí paprsek procházející středem apertury, je vzdálenost paprsku vycházejícího z elementu apertury vzdáleného  $s$  od osy  $z$  rovna

$$r(s) = r_0 + \Delta(s), \quad (8.2)$$

příčemž pro dráhový rozdíl  $\Delta$  máme podle obrázku

$$\Delta(s) = s \sin \theta. \quad (8.3)$$

Celková amplituda pole v bodě  $P$  je pak dána součtem všech příspěvků z různých částí vlnoplochy. Vzhledem k tomu, že máme vzdálenost  $r$  v rovnici (8.2) vyjádřenou pomocí  $s$ , bude výsledné pole dáno integrací přes aperturu, tedy přes vzdálenost  $s$ . Tedy ( $E_L$  je opět úměrné amplitudě dopadající vlny, má význam amplitudy sekundární vlny vysílané jednotkovou šířkou štěrbin v jednotkové vzdálenosti)

$$\tilde{E}_P = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{E_L}{r_0 + \Delta(s)} \exp(-i\{\omega t - k[r_0 + \Delta(s)]\}) ds. \quad (8.4)$$

Ve jmenovateli je součet  $r_0 + \Delta$ , který můžeme aproximovat  $r_0 + \Delta \approx r_0$  pro případ  $\Delta \ll r_0$ . Podobnou aproximaci nelze udělat v argumentu exponenciály, protože tam je  $\Delta$  v součinu s vlnovým vektorem  $k$ , a roli hraje velikost součinu ve srovnání s  $\pi$  (fázovému rozdílu  $\pi$  odpovídá dráhový rozdíl  $\frac{\lambda}{2}$ ).

V uvedené aproximaci je

$$\tilde{E}_P = \frac{E_L}{r_0} \exp[-i(\omega t - k r_0)] \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \exp(i k s \sin \theta) ds. \quad (8.5)$$

Integrál je roven  $b \frac{\sin \beta}{\beta}$ , kde

$$\beta = \frac{1}{2} k b \sin \theta. \quad (8.6)$$

Máme tedy

$$\tilde{E}_P = \frac{E_L b}{r_0} \exp[-i(\omega t - k r_0)] \frac{\sin \beta}{\beta}. \quad (8.7)$$

Odpovídající intenzita světla v bodě  $P$  je podle (1.71)

$$I_p = I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}, \quad (8.8)$$

kde  $I_0$  maximální hodnota intenzity. Průběh amplitudy i intenzity pole jako funkce  $\beta$  je znázorněn na obr. 8.2b. Hlavní maximum nastává pro  $\beta=0$ , protože

$$\lim \left\{ \frac{\sin \beta}{\beta} \right\} = 1 \text{ pro } \beta \rightarrow 0. \quad (8.9)$$

Nuly nastávají pro  $\sin \beta = 0$ , tedy pro  $\beta = m\pi$ , kde  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Maxima neleží uprostřed mezi minimy intenzity, ale je možné je nalézt hledáním maxima funkce  $(\sin \beta / \beta)$ , což vede pro  $\beta \neq 0$  k rovnici

$$\beta = \text{tg } \beta. \quad (8.10)$$

Jejích několik nejmenších řešení je  $1,43\pi, 2,46\pi, 3,47\pi$ .

První minima intenzity určují úhlovou „šířku štěrbiny“, tedy hodnoty argumentu  $\beta_1 = -\pi$ ,  $\beta_2 = +\pi$ . Odtud podle (8.6) pro úhlovou šířku  $\Delta\theta$  plyne<sup>4</sup>

$$\Delta\theta \approx \frac{2\lambda}{b}, \quad (8.11)$$

kteřá charakterizuje rozbíhavost svazku, viz obr. 8.2c. V limitě nekonečně široké štěrbiny se svazek nerozbíhá ( $\Delta\theta \approx 0$  pro  $b \rightarrow \infty$ ). Geometrická šířka svazku ve vzdálenosti  $L$  za štěrbinou je

$$w \approx \Delta\theta L. \quad (8.12)$$

Zřejmě je rozumné, aby byla šířka svazku větší nebo rovna šířce štěrbiny:

$$w \geq b. \quad (8.13)$$

Ze vztahů (8.11 až 8.13) máme

$$L \geq \frac{b^2}{2\lambda}. \quad (8.14)$$

Tato podmínka dovoluje odhadnout oblast vzdáleností  $L$ , kde je Fraunhoferova aproximace použitelná:

$$L \gg \frac{b^2}{\lambda}, \quad (8.15)$$

kteřá se nazývá oblastí *dalekého pole*. Na obr. 8.3 uvádíme difrakční obrazec pro štěrbinu dvou šířek  $b=20\mu\text{m}$ ,  $b=100\mu\text{m}$ .



Obr. 8.3 Difrakční obrazec při Fraunhoferově difrakci na štěrbinách šířky a)  $b=20\mu\text{m}$  a b)  $b=100\mu\text{m}$ , štěrbiny byly osvětleny kolimovaným svazkem helium-neonového laseru o vlnové délce  $594\text{ nm}$

### 8.1.2 Difrakce na obdélníkovém otvoru

Difrakci na obdélníkovém otvoru můžeme vyšetřovat stejně jako v předchozím případě, integrál je nyní nutno brát ve dvou dimenzích apertury. Výsledná intenzita světla je dána součinem funkcí (8.8), tedy

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}. \quad (8.16)$$

Zde  $\alpha$ ,  $\beta$  jsou definovány analogicky jako v rov. (8.6).

### 8.1.3 Difrakce na kruhovém otvoru

Při výpočtu pole při Fraunhoferově difrakci na kruhové apertuře vyjdeme opět z integrálu / (srov. 8.1 a 8.5)/

$$\tilde{E}_r = \frac{E_A}{r_0} \exp[-i(\omega t - k r_0)] \iint_A \exp(iks \sin \theta) dA. \quad (8.17)$$

Integrujeme nyní přes plochu kruhové apertury o poloměru  $R$ . To můžeme udělat například tak, že budeme integrovat ve svislém směru (přes vzdálenost od středu kruhu  $s$ , tedy integrujeme od  $-R$  do  $+R$ ), přitom element plochy je  $dA = x ds$ , kde  $x$  je délka tětivy kružnice ve vzdálenosti  $s$  od středu, tedy platí

$$x = 2\sqrt{R^2 - s^2}. \quad (8.18)$$

Integrál je roven

$$\iint_A \exp(iks \sin \theta) dA = \int_{-R}^R \exp(ik s \sin \theta) 2\sqrt{R^2 - s^2} ds = \int_{-1}^1 \exp(i\gamma v) R^2 \sqrt{1 - v^2} dv. \quad (8.19)$$

Poslední rovnost vyplývá ze substituce

$$v = \frac{s}{R} \quad (8.20)$$

po označení

$$\gamma = k R \sin \theta. \quad (8.21)$$

Ovšem integrál na pravé straně rov. (8.19) lze vyjádřit pomocí Besselovy funkce 1. druhu, 1. řádu

$$\int_{-1}^1 \exp\{i\gamma v\} \sqrt{1 - v^2} dv = \frac{\pi J_1(\gamma)}{\gamma}. \quad (8.22)$$

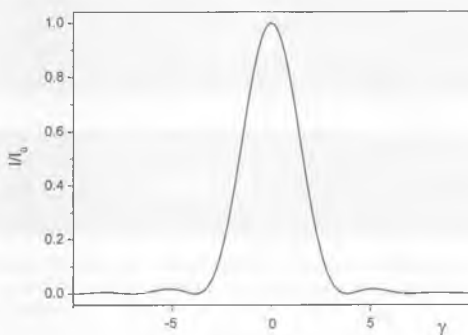
Průběh funkce  $\frac{J_1(\gamma)}{\gamma}$  je do jisté míry podobný průběhu funkce  $\frac{\sin \gamma}{\gamma}$ , ovšem limita

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{J_1(\gamma)}{\gamma} = 0,5. \quad (8.23)$$

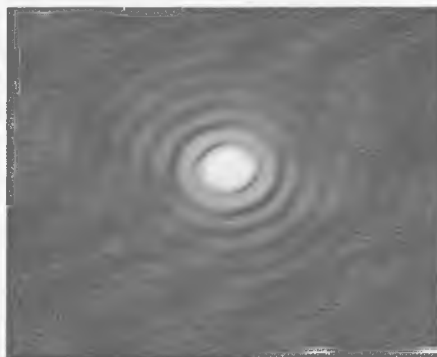
Intenzitu světla při difrakci na kruhovém otvoru můžeme tedy psát ( $I_0$  je maximální hodnota intenzity v difrakčním poli)

$$I = I_0 \left[ \frac{2J_1(\gamma)}{\gamma} \right]^2. \quad (8.24)$$

Průběh této funkce je na obr. 8.4. Z jejího průběhu je zřejmé, že většina světla je soustředěna do středového kroužku, který se nazývá *Airyho kroužek*. Jeho poloměr je určen první nulou Besselovy funkce, která nastává pro  $\gamma = 1,22\pi$ . Velikost tohoto kroužku určuje rozlišení například při zobrazení teleskopy (viz odstavec 10.3.3). Difrakční obrazec pro kruhový (přibližně) otvor je uveden na obr. 8.5.



**Obr. 8.4** Průběh funkce intenzity světla při difrakci na kruhovém otvoru

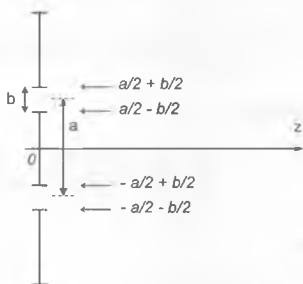


**Obr. 8.5** Difrakční obrazec při Fraunhoferově difrakci na (přibližně) kruhovém otvoru. Otvor byl osvětlen kolimovaným svazkem helium-neonového laseru o vlnové délce 594 nm



### 8.1.4 Fraunhoferova difrakce na řadě štěrbin

Nyní se budeme zabývat Fraunhoferovou difrakcí na pravidelné řadě štěrbin (geometrie podle obr. 8.6, kde jsou znázorněny jen první dvě štěrbin). Zvolíme například sudý počet  $N$  vodorovných štěrbin, jejichž výška je  $b$  a jejichž vzdálenost je  $a$ . Zvolíme souřadný systém tak, že soustava štěrbin leží v rovině kolmé k ose  $z$ , která prochází středem soustavy. To znamená, že středy prvních štěrbin jsou vzdáleny od osy  $z$  o  $\pm a/2$ . Pole



**Obr. 8.6** Geometrie stínítka s více štěrbinami (znázorněny jsou pouze dvě štěrbin, další stejné štěrbin jsou umístěny symetricky ve stejných vzdálenostech)

v obecném bodě  $P$  (v dalekém poli) získáme opět pomocí integrálu v rov. (8.5). Opět použijeme okrajové podmínky takové, že pole uvnitř štěrbin je rovno dopadajícímu (rovinná vlna, kolmý dopad), jinak je amplituda pole nulová. Pro jednoduchost nebudeme ve výrazech pro pole psát faktor  $\exp[-i(\omega t - k r_0)]$  – srov. rov. (8.17). Integrál pro amplitudu pole v bodě  $P$  lze pak psát

$$\tilde{E}_p = \frac{E_L}{r_0} \sum_{j=1}^{N/2} \int_{\frac{(2j-1)a}{2} - \frac{b}{2}}^{\frac{(2j-1)a}{2} + \frac{b}{2}} \exp(i s k \sin \theta) ds + \frac{E_L}{r_0} \sum_{j=1}^{N/2} \int_{\frac{-(2j-1)a}{2} - \frac{b}{2}}^{\frac{-(2j-1)a}{2} + \frac{b}{2}} \exp(i s k \sin \theta) ds \quad (8.25)$$

Hodnoty integračních mezí jsou patrné z obr. 8.6. Po přímé integraci dostaneme

$$\tilde{E}_p = \frac{E_L}{r_0} \frac{1}{ik \sin \theta} \sum_{j=1}^{N/2} \{ \exp[i(2j-1)\alpha] [\exp(i\beta) - \exp(-i\beta)] + \exp[-i(2j-1)\alpha] [\exp(i\beta) - \exp(-i\beta)] \} \quad (8.26)$$

Zde jsme zavedli označení

$$\alpha = k \frac{a}{2} \sin \theta, \quad (8.27)$$

$$\beta = k \frac{b}{2} \sin \theta. \quad (8.28)$$

Další úpravou (8.26) dostáváme

$$\tilde{E}_p = \frac{E_L}{r_0} \frac{b}{2i\beta} \sum_{j=1}^{N/2} \{ \exp(i(2j-1)\alpha) (2i \sin \beta) + \exp[-i(2j-1)\alpha] (2i \sin \beta) \}, \quad (8.29)$$

respektive

$$\tilde{E}_p = \frac{E_L}{r_0} \frac{b \sin \beta}{\beta} \sum_{j=1}^{N/2} \{ \exp[i(2j-1)\alpha] + \exp[-i(2j-1)\alpha] \}, \quad (8.30)$$

tedy

$$\tilde{E}_p = \frac{E_L}{r_0} \frac{b \sin \beta}{\beta} \sum_{j=1}^{N/2} [2 \operatorname{Re} \{ \exp[i(2j-1)\alpha] \}] = \frac{E_L}{r_0} \frac{b \sin \beta}{\beta} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^{N/2} \exp[i(2j-1)\alpha] \right\}. \quad (8.31)$$

Suma v reálné části je rovna

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N/2} \exp[i(2j-1)\alpha] &= \exp(i\alpha) \sum_{l=0}^{N/2-1} \exp(i2l\alpha) = \\ &= \frac{1 - \exp(i\alpha N)}{\exp(-i\alpha) - \exp(i\alpha)} = \frac{\sin N\alpha + i(1 - \cos N\alpha)}{2 \sin \alpha}. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Vezmeme-li reálnou část posledního výrazu, dostáváme konečně

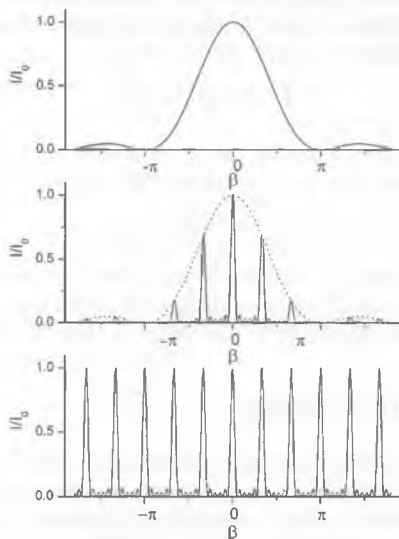
$$\tilde{E}_p = b \frac{E_L}{r_0} \frac{\sin \beta}{\beta} \frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha}. \quad (8.33)$$

Je vhodné připomenout, že v (8.33) bychom měli doplnit faktor  $\exp[-i(\omega t - kr_0)]$ .

Intenzita světla je rovna

$$I_p = I_0 \left[ \frac{\sin \beta}{\beta} \right]^2 \left[ \frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right]^2. \quad (8.34)$$

Průběh této funkce je znázorněn na obr. 8.7 (uprostřed). Výraz (8.34) se stává zřejmě ze dvou činitelů: první souvisí s difrakcí světla na jedné šterbině (obr. 8.7 nahoře), druhý je „interferenční člen“ (obr. 8.7 dole), který je



Obr. 8.7 Difrakce světla na 6 šterbinách, jejichž vzdálenost je rovna trojnásobku jejich šířky ( $N = 6$ ,  $\alpha = 3\beta$ ). Výsledná intenzita jako funkce  $\beta$  je uprostřed (rov. 8.34). Je výsledkem součinu funkcí  $\left[ \frac{\sin \beta}{\beta} \right]^2$  (horní graf) a  $\left[ \frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right]^2$  (dolní graf).

důsledkem skládání vln z různých šterbin. Pro úzké šterbiny první člen jen pomalu moduluje intenzitu. Interferenční člen má hlavní maxima pro

$$\alpha = m\pi \quad (m - \text{celé číslo}), \quad (8.35)$$

kdy nabývá hodnoty  $N^2$ , protože

$$\lim_{\alpha \rightarrow m\pi} \frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} = \pm N. \quad (8.36)$$

Tato podmínka pro maxima se může přepsat, uvážíme-li definici  $\alpha$  v rov. (8.27), jako

$$a \sin \theta = \lambda m. \quad (8.37)$$

Tento vztah určuje úhly, pod kterými vznikají maxima. Protože pravidelnému uspořádání štěrbin se také někdy říká optická ohybová mřížka, nazývá se vztah (8.37) *mřížkovou rovnicí*. Nulové hodnoty nabude interferenční člen v případě, že je nulový sinus v čitateli, tedy

$$N\alpha = p\pi \quad (p - \text{celé}), \quad (8.38)$$

tedy pro

$$\alpha = \frac{p}{N}\pi, \quad (8.39)$$

ovšem s výjimkou, kdy  $\frac{p}{N}$  je celé číslo (tj.  $p = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$ ) a nastává případ hlavního maxima, jak jsme už uvedli.

## 8.2 FRESNELOVA DIFRAKCE

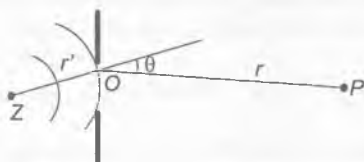
Dosud jsme se zabývali jednoduchým případem, kdy bylo možné považovat dopadající i difragované vlny za rovinné. Jak jsme uvedli, znamená to, že difrakci pozorujeme ve velké vzdálenosti od stínítka, v daleké zóně. Jak lze tuto zónu přesněji definovat, uvedeme později. Pokud tedy pozorujeme světlo, které projde otvorem či překoná překážku, vidíme v dalekém poli difrakční obrazec, který vůbec svým tvarem nepřipomíná tvar překážky, se kterou se světlo setkává. Pokud bychom stínítko, kde světlo pozorujeme, přiblížili těsně za aperturu, viděli bychom tvar otvoru, tedy to, co předpokládá geometrická optika. Pro malé vzdálenosti za aperturou je rozložení světla takové, že připomíná její tvar, ale s modulací intenzity a s dodatečnými proužky. Této oblasti se říká Fresnelova oblast, mluví se o *Fresnelově difrakci*.

Uvažujme situaci podle obr. 8.8. Bodový zdroj světla  $Z$  vyzářuje kulovou vlnu, která osvětluje aperturu v neprůhledném stínítku. V obecném bodě  $P$

pozorujeme intenzitu světla. Kulová vlnoplocha vyplňuje aperturu, zvolíme na ní libovolný bod  $O$ . Označíme vzdálenosti:

$$ZO=r', \quad OP=r.$$

Ve smyslu Huygens-Fresnelova principu můžeme nalézt amplitudu pole v bodě  $P$  jako superpozici všech sekundárních Huygensových vlnek



Obr. 8.8 Ilustrace k výkladu Fresnelovy difrakce

z různých bodů  $O$ , resp. elementárních plošek  $dS$  vlnoplochy uvnitř apertury. Příspěvek takové plošky vlnoplochy k poli v bodě  $P$  je roven

$$d\tilde{E}(P) = \frac{\tilde{E}(O)dS}{r} \exp(ikr), \quad (8.40)$$

což je kulová vlna s amplitudou úměrnou intenzitě pole v bodě  $O$  a velikosti elementu plošky  $dS$ . Jaká je amplituda  $E(O)$  osvětlení apertury? Je to amplituda kulové vlny zdroje  $Z$ , tedy

$$\tilde{E}(O) = \frac{A}{r'} \exp(ikr'). \quad (8.50)$$

Celkem tedy

$$d\tilde{E}(P) = \frac{A dS}{r r'} \exp[ik(r+r')] \quad (8.51)$$

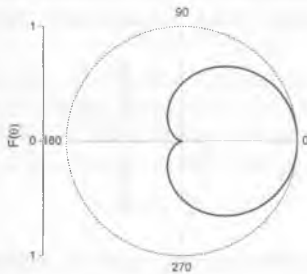
a pole z celé apertury je rovno

$$\tilde{E}(P) = A \int_{\text{APERTURA}} \frac{1}{r r'} \exp[ik(r+r')] dS. \quad (8.52)$$

Poslední integrál, který jsme intuitivně napsali, není přesný. Nezapočítává skutečnost, že příspěvky jednotlivých bodů  $O$  vlnoplochy závisí na směru normály k vlnoploše v bodě  $O$  vůči směru  $OP$  (svírají úhel  $\theta$ ). Je proto nutné dodat takzvaný *činitel sklonu*  $F(\theta)$ , který lze vyjádřit jako

$$F(\theta) = \frac{1 + \cos\theta}{2}. \quad (8.53)$$

Polární graf činitele sklonu<sup>5</sup> je uveden na obr. 8.9.



Obr. 8.9 Polární graf činitele sklonu  $F(\theta)$

Dále je třeba doplnit činitel  $\frac{-i}{\lambda}$ . Celkově je tvar tzv. *Fresnel-Kirchhoffova integrálu*

$$\tilde{E}(P) = \frac{-i}{\lambda} A \int_{\text{APERTURA}} F(\theta) \frac{1}{r r'} \exp[i k (r + r')] dS. \quad (8.54)$$

Celý tvar integrálu lze odvodit, jak popíšeme v odstavci 8.3. Jak jsme uvedli již v úvodu, různé aproximace vedou k zjednodušení tohoto integrálu. Pokud se ve jmenovateli (8.54) nahradí vzdálenosti  $r$ ,  $r'$  vzdálenostmi na ose  $z$ ,  $z'$ , jde o paraxiální aproximaci, která se nazývá *Fresnelova difrakce*. Vzdálenosti  $r$ ,  $r'$  v součinu s velikostí vlnového vektoru ovšem zanedbat nemůžeme protože i malé rozdíly ve vzdálenostech vedou ke značným fázovým rozdílům. To je zřejmé, uvědomíme-li si, že prostorový posuv o vlnovou délku odpovídá fázovému posuvu o  $2\pi$  ( $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , tedy  $kr = 2\pi \frac{r}{\lambda}$ ).

Pokud jsou vlnoplochy dopadající a difragované vlny rovinné, lze integrál dále zjednodušit a používat *Fraunhoferovy aproximace*, jak byla uvedena v odstavci 8.1.

## 8.2.1 Babinetův princip

Amplitudu elektrického pole  $E_A(P)$  obecném bodě  $P$  za otvorem ve stínítku dostaneme pomocí integrálu přes plochu otvoru  $S_A$ , viz rov. (8.54). Pokud budeme mít doplňkové stínítko, tedy místo otvoru bude terčík, dostaneme integraci přes nezakrytou plochu  $S_B$  amplitudu  $E_B(P)$ . Pokud ovšem odstraníme stínítko úplně, dostaneme dopadající vlnu  $E(P)$ , která musí odpovídat integraci přes nekonečnou plochu. Tento integrál je ale roven součtu integrálů přes plochu  $S_A$  a  $S_B$ . Musí proto platit

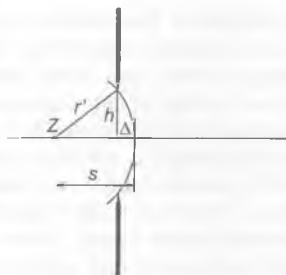
$$\widetilde{E}_A(P) + \widetilde{E}_B(P) = \widetilde{E}(P). \quad (8.55)$$

Toto tvrzení se nazývá *Babinetovým principem*.<sup>6</sup> Když například je v určitém bodě při difrakci na otvoru pole nulové, má tam při difrakci na terčíku hodnotu odpovídající dopadající vlně.

## 8.2.2 Názorná formulace rozdílu mezi Fraunhoferovou a Fresnelovou difrakcí

Kdy musíme uvažovat Fresnelovu difrakci, tj. vzít v úvahu zakřivení vlnoplochy? Na obr. 8.10 je znázorněn bodový zdroj světla  $Z$ , z něhož vychází kulová vlna, jejíž poloměr je  $r'$ , když vyplňuje aperturu. Uvážíme-li vzdálenosti definované na obrázku, máme podle Pythagorovy věty

$$\Delta = r' - r' \sqrt{1 - \frac{h^2}{r'^2}}. \quad (8.56)$$



Obr. 8.10 Geometrie k výkladu Fraunhoferovy versus Fresnelovy difrakce: vliv zakřivení vlnoplochy dopadající kulové vlny vysílané bodovým zdrojem  $Z$

Použijeme-li první dva členy rozvoje

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2}, \quad (8.57)$$

máme

$$\Delta = \frac{h^2}{2r'}, \quad (8.58)$$

Tato veličina charakterizuje zakřivení vlnoplochy, které bude výrazné, pokud

$$\Delta > \lambda. \quad (8.59)$$

Tato podmínka charakterizuje případ, kdy je nutné použít Fresnelovu analýzu difrakce. Podobnou úvahu bychom mohli provést pro situaci, kdy se kulová vlna, která vyplňuje aperturu, sbíhá do bodu pozorování. Pak máme opět rovnici (8.58) ovšem s  $r$  ve jmenovateli. Čtverec rozměru apertury je úměrný ploše apertury  $S$  – můžeme tedy pro oblast Fresnelovy difrakce psát podmínku

$$L < \frac{S}{\lambda}. \quad (8.60)$$

Zde  $L$  je vzdálenost zdroje světla nebo bodu pozorování od stínítka s aperturou plochy  $S$ . Naproti tomu, pokud platí

$$L \gg \frac{S}{\lambda}, \quad (8.61)$$

platí velmi dobře Fraunhoferova aproximace, jde o oblast dalekého pole. Stejnou úvahu můžeme provést pro kulovou vlnu sbíhající se do bodu  $P$ .

Existuje ovšem ještě jedna velmi důležitá situace, kdy lze difrakci vyšetřovat ve Fraunhoferově aproximaci, i když je vzdálenost zdroje světla nebo bodu pozorování od stínítka s aperturou malá. Je to případ, kdy je vytvářen obraz zdroje, tj. difrakce se pozoruje v rovině, v níž leží obraz zdroje vytvořený optickou soustavou (která obsahuje aperturu, na které dochází k difrakci). Skutečně, podle Fermatova principu (viz 10. kapitola) nezávisí při zobrazení optická dráha, kterou urazí paprsek mezi vzorem a obrazem, na vzdálenosti paprsku od optické osy. V tomto případě neobsahuje fázový člen vln kvadratické členy souřadnic, a tím je zcela splněna podmínka Fraunhoferovy difrakce. Toto je důvod, proč lze *vliv difrakce na zobrazení*



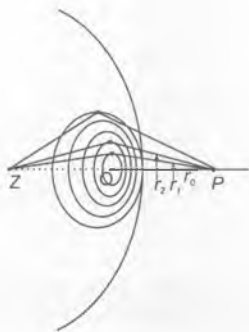
v optických přístrojích vyšetřovat v rámci (jednoduché) *Fraunhoferovy aproximace*.

### 8.2.3 Fresnelovy zóny

Chceme-li zjistit, jak se bude světlo šířit za překážkami, musíme tedy řešit integrál (8.54) pro každý bod v prostoru, který nás zajímá. Obvykle se studuje rozložení pole v určité rovině („na stínítku“). Fresnel navrhl jednoduchou a názornou metodu na zjištění rozložení světla bez nutnosti výpočtu integrálu. Vlnoplochu, z níž v apertuře vycházejí sekundární vlny, rozdělil na oblasti – *Fresnelovy zóny* tak, že se světlo ze sousedních zón skládá v bodě pozorování v protifázi (to znamená, že je mezi nimi fázový rozdíl  $\pi$ , dráhový rozdíl  $\frac{\lambda}{2}$ ). Tuto metodu nyní použijeme na několik důležitých případů.

#### 8.2.3.1 Fresnelova difrakce na kruhové apertuře

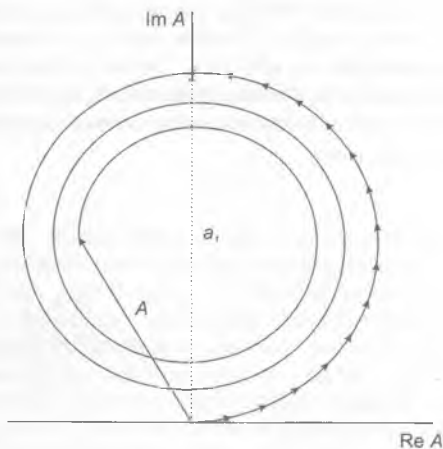
Předpokládejme, že světlo bodového zdroje osvětluje kruhovou aperturu a že pozorujeme světlo v bodě  $P$ . Zvolíme ho tak, že úsečka  $ZP$  je osou apertury, jak je znázorněno na obr. 8.11. V tomto případě jsou hranicemi Fresnelových zón kružnice se středem na úsečce  $ZP$ , jejichž rovina je kolmá k  $ZP$ . Je-li  $PO=r_0$ , jsou vzdálenosti kružnic vymežujících první, druhou a další Fresnelovu zónu rovny



**Obr. 8.11** Znázornění Fresnelových zón na kulové vlnoploše,  $Z$  je bodový zdroj a  $P$  je bod pozorování

$$\begin{aligned}
 r_1 &= r_0 + \frac{\lambda}{2} \\
 r_2 &= r_0 + 2\frac{\lambda}{2} \\
 &\vdots \\
 r_n &= r_0 + n\frac{\lambda}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{8.62}$$

Každou z těchto zón můžeme rozdělit dalšími kružnicemi na menší oblasti, pro něž se fáze vlnění v  $P$  mění postupně v intervalu šířky  $\pi$ . To je znázorněno na obr. 8.12, kde jsou Fresnelovy zóny rozděleny na 15 menších oblastí. Fáze příspěvku první oblasti je přibližně rovna 0 (libovolná volba relativní fáze), další příspěvky mají stále větší fázi, až poslední příspěvek má fázi  $\pi$  (je v protifázi k příspěvku prvnímu). Výsledný příspěvek 1. Fresnelovy zóny je  $a_1$ , jeho fáze je  $\frac{\pi}{2}$ . Pro rozdělení zóny na malé oblasti tak dostaneme polokružnici s poloměrem  $a_1$ . Tak bychom mohli pokračovat



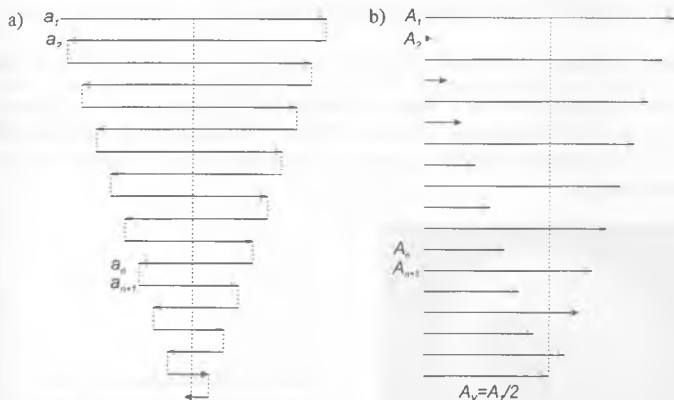
**Obr. 8.12** Příspěvek první Fresnelovy zóny  $a_1$  rozdělený na dílčí příspěvky 15 podzón a výsledná amplituda pole  $A$  (pro případ difrakce na kruhovém otvoru, když zůstává 5,5 zón nezakrytých)

s druhou a dalšími Fresnelovými zónami. Příspěvek 2. zóny má fázi  $3\pi/2$ . Z prvních dvou zón bychom tak dostali uzavřenou kružnici, jejich celkový příspěvek by byl nulový. Ve skutečnosti ale se velikost příspěvku jednotlivých zón mění. V případě kulové symetrie, o němž nyní mluvíme, velikost příspěvků jednotlivých Fresnelových zón klesá s rostoucím číslem zón. Jaká je příčina tohoto poklesu? Je nutné vzít v úvahu pokles amplitudy díky poklesu faktoru sklonu  $F(\theta)$  s rostoucím úhlem a dále pokles amplitudy díky rostoucí vzdálenosti od elementu vlnoplochy k bodu pozorování ( $\propto \frac{1}{r_n}$ ).

Naproti tomu ovšem zóny s vyšším číslem mají větší plochu. Plocha  $n$ -té Fresnelovy zóny je

$$S_n = \frac{\pi r_0' r_0^2}{r_0' + r_0} \left[ \frac{\lambda}{r_0} + (2n-1) \frac{\lambda^2}{4r_0^2} \right]. \quad (8.63)$$

Růst velikosti amplitudy příspěvku díky větší ploše zóny je roven, jak lze ukázat, poklesu amplitudy díky změně vzdálenosti  $r_n$ . Celkově je tedy velikost příspěvku dána faktorem sklonu, tedy se zmenšuje. Proto v obr. 8.12 nedostaneme kružnici, ale spirálu, příspěvky se postupně zmenšují. Znamená to, že příspěvky prvních dvou (a dalších zón) se nevyruší. Je zřejmé,



Obr. 8.13 a) Příspěvky jednotlivých Fresnelových zón (dva následující příspěvky se liší ve fázi vždy o  $\pi$ ), b) výsledná amplituda, která vzniká sčítáním příspěvků uvedených v obr. 8.13a

že příspěvky lichých zón mají fázi  $\pi/2$ , příspěvky zón sudých mají fázi  $3\pi/2$ . Zvolíme-li amplitudy lichých zón za kladné (viz obr. 8.13a), jsou příspěvky sudých zón záporné. Celkově můžeme znázornovat sčítání jednotlivých příspěvků jako ve schématu na obr. 8.13b, odkud plyne řada zajímavých závěrů. Výsledná amplituda pro velký počet zón je rovna

$$A_n = \frac{a_1}{2}. \quad (8.64)$$

Pro sčítání malého počtu Fresnelových zón je

$$a_n \approx a_1, \quad (8.65)$$

což znamená, že výsledná amplituda je přibližně rovna příspěvku první zóny pro lichý počet zón a rovna nule pro sudý počet zón. Pro velký počet zón je výsledná amplituda přibližně rovna polovině příspěvku první zóny.

V experimentu lze pak pozorovat zajímavé jevy, které plynou z právě popsaných závěrů. Například prochází-li světlo aperturou odpovídající první Fresnelově zóně, je intenzita v bodě  $P$  rovna  $a_1^2$ , v případě, že se apertura odstraní, tedy jsou odkryty všechny Fresnelovy zóny, je intenzita světla

v bodě  $P$  rovna  $\frac{a_1^2}{4}$ , tedy čtyřikrát menší. Pokud dochází k difrakci na plně překážce (terčičku), která zakryje první Fresnelovu zónu, jsou zbývající zóny nezakryty a celková intenzita v bodě  $P$  je rovna  $\frac{a_2^2}{4}$ , tedy přibližně rovna

intenzitě v případě, kdy není žádná překážka. Světlý bod na ose za překážkou se nazývá Poissonova skvrna. Příklad Poissonovy skvrny je na obr. 8.14, kde uvádíme difrakční obrazec, který vzniká při osvětlení kuličky na tyčce, osvětlení helium-neonovým laserem na vlnové délce 594 nm)



**Obr. 8.14** Pozorování Poissonovy skvrny (difrakční obrazec, který vzniká při osvětlení kuličky na tyčce, osvětlení helium-neonovým laserem na vlnové délce 594 nm)

Když jsme sestavovali schéma na obr. 8.13, zvolili jsme fázi prvního příspěvku rovnou 0. Viděli jsme, že příspěvek první zóny má fázi  $\pi/2$  (zpoždění oproti středu). V případě, když jsou všechny zóny odkryty, je z toho, co jsme již výše uvedli, zřejmé, že má celkové pole v bodě  $P$  stejnou fázi jako příspěvek první zóny, tedy posunutou oproti fázi světla, které dopadne do bodu  $P$  přímo. Aby se tato nesrovnalost odstranila, zavedl Fresnel činitel obsahující  $-i$ , jak jsme ho již ve vztahu (8.54) napsali.

Pokud se vyrobí stínítko tak, že se zakryje každá druhá Fresnelova zóna, chybí při sčítání jednotlivých příspěvků záporné členy a výsledné pole v bodě  $P$  může být velké. Uvedené stínítko se nazývá *Fresnelova zónová deska*.

Jaké jsou poloměry Fresnelových zón? Uvažujme schéma na obr. 8.15,  $R_1$  je poloměr první Fresnelovy zóny. Podle Pythagorovy věty platí

$$R_1^2 + (s - \Delta)^2 = s^2, \quad (8.66)$$

$$R_1^2 = \left(r_0 + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (r_0 + \Delta)^2. \quad (8.67)$$

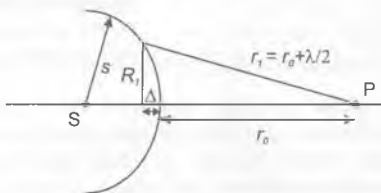
Odtud můžeme vyjádřit úsek  $\Delta$

$$\Delta = \frac{\lambda r_0}{2(s + r_0)}, \quad (8.68)$$

pokud zanedbáme malé členy  $\frac{\lambda^2}{4} \approx 0$  a  $\Delta^2 \approx 0$  oproti ostatním členům.

Poloměr  $R_1$  je roven

$$R_1 \approx \sqrt{\frac{\lambda s r_0}{s + r_0}}. \quad (8.69)$$



Obr. 8.15 Výpočet poloměru první Fresnelovy zóny na kulové vlnoploše

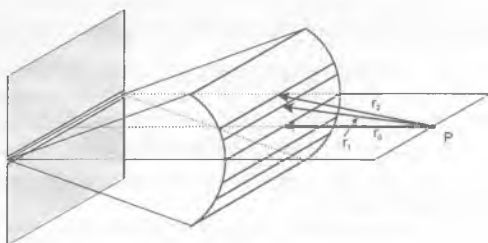
Pro vyšší zóny je výpočet zcela analogický a pro poloměr  $N$ -té zóny dostáváme

$$R_N \approx \sqrt{N \frac{\lambda s r_0}{s + r_0}}. \quad (8.70)$$

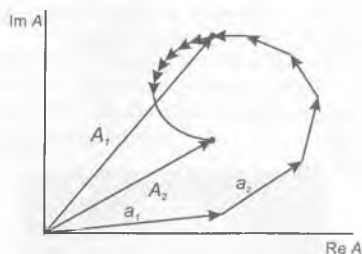
Je-li dopadající vlna rovinná, je  $s \rightarrow \infty$  a poloměry zón jsou rovny

$$R_N = \sqrt{N \lambda r_0}. \quad (8.71)$$

### 8.2.3.2 Fresnelova difrakce v případě válcových vln



Obr. 8.16 Fresnelovy zóny na válcové vlnoploše odpovídající bodu pozorování  $P$



Obr. 8.17 Příspěvky dvou Fresnelových zón k amplitudě pole pro válcovou vlnu

Lineární zdroj světla generuje vlny s válcovou (cylindrickou) vlnoplochou. Ve skutečnosti se setkáváme se světelným zdrojem ve tvaru pásku (tenkého obdélníka), kterým se pak osvětlují různé předměty podobné symetrie (hrana, pravoúhlá štěrbina, drát apod.). V tomto případě je vhodné použít analýzu difrakce pomocí válcové vlnoplochy, v podstatě se pak jedná

o jednodimenzionální problém. Fresnelovy zóny mají nyní obdélníkový tvar (viz obr. 8.16) a platí pro ně analogicky vše, co platilo v případě kulové vlnoplochy. Nicméně vzhledem k odlišné geometrii velikost jednotlivých Fresnelových zón klesá s jejich rostoucím číslem. To znamená, že velikosti příspěvků pro vyšší zóny klesají výrazně. Na obr. 8.17 jsou znázorněny, podobně jako pro sférickou vlnoplochu dříve, příspěvky první ( $A_1$ ) a druhé Fresnelovy zóny ( $A_2$ ). Pokud bychom zvolili rozdělení každé ze zón jemnější, dostali bychom hladkou křivku. Po zahrnutí dalších zón bychom získali spirálu, která se navíjí na bod  $E$  (oko spirály). Tato spirála se nazývá *Cornuova spirála*. Výslednice všech Fresnelových zón nad osou je tedy  $OE$ , pokud započítáváme zóny pod osou, dostaneme symetrickou spirálu ve třetím kvadrantu.

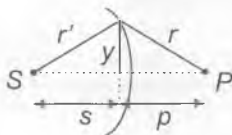
Výsledky, které jsme takto získali, lze kvalitativně počítat řešením příslušného difrakčního integrálu. Cornuovu spirálu můžeme získat z příbližného tvaru Fresnel-Kirchhoffova integrálu, v němž zanedbáme faktor sklonu a úbytek amplitudy pole díky rostoucí vzdálenosti. Integrál má tak jednoduchý tvar

$$\vec{E}_p = K \iint_{\text{APERTURA}} \exp[ik(r+r')] dS, \quad (8.72)$$

kde jsme zavedli konstantu  $K$ , která zahrnuje všechny konstantní faktory. Integruje se jen přes plochu apertury, protože jako dříve předpokládáme, že je jinde pole nulové. Uvažujme geometrii podle obr. 8.18. Podle Pythagorovy věty platí

$$r'^2 = s^2 + y^2. \quad (8.73)$$

Obr. 8.18 Difrakce válcové vlny, schéma k odvození Fresnelových integrálů



Pro  $r'$  tak máme (po rozvoji odmocniny do druhého členu)

$$r' = s \left( 1 + \frac{y^2}{2s^2} \right), \quad (8.74)$$

a analogický výraz pro  $r$ :

$$r = p \left( 1 + \frac{y^2}{2p^2} \right). \quad (8.75)$$

Pak

$$r + r' = s + p + \frac{y^2}{2} \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{p} \right). \quad (8.76)$$

První dva členy na pravé straně jsou konstantní a činitel  $\exp[ik(s+p)]$  lze vyjmout před integrál a zahrnout do konstanty  $K$ . Element plochy apertury můžeme vyjádřit pomocí šířky apertury  $a$  a elementu souřadnice  $y$ , tedy  $dS = a dy$ . Konstantní šířku apertury lze ovšem též zahrnout do konstanty  $K$ . Zavedeme-li novou proměnnou vztahem

$$v^2 = \frac{2y^2}{\lambda L}, \quad (8.77)$$

v němž

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{s} + \frac{1}{p}, \quad (8.78)$$

bude mít integrál tvar

$$\tilde{E}_p = K \int \exp \left[ i \pi \frac{v^2}{2} \right] dv. \quad (8.79)$$

Můžeme tedy psát

$$\tilde{E}_p = K [C(v) + i S(v)], \quad (8.80)$$

kde  $C$  je *Fresnelův kosinový* a  $S$  *Fresnelův sinový integrál*, které jsou definovány

$$C(v) = \int_0^v \cos \left( \pi \frac{v'^2}{2} \right) dv' \quad (8.81)$$

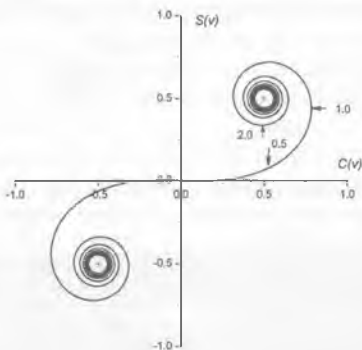
$$S(v) = \int_0^v \sin \left( \pi \frac{v'^2}{2} \right) dv'. \quad (8.82)$$



Horní mez integrace je zřejmě dána vertikálním rozměrem apertury. Intenzita světla je jako obvykle  $I_P \propto |E_P|^2$ , tedy

$$I_P = I_0(C^2 + S^2). \quad (8.83)$$

Pokud se nakreslí hodnoty Fresnelových integrálů, které jsou tabelovány jako funkce parametru  $v$  tak, že  $C$  je reálná souřadnice a  $S$  imaginární souřadnice v komplexní rovině, získá se graf křivky, která je *Cornuovou spirálou* – viz obr. 8.19. Z výrazu (8.83) pro intenzitu je zřejmé, že intenzita pole v bodě  $P$  je úměrná (rovná až na konstantu  $I_0$ ) velikosti úsečky vedené mezi dvěma body Cornuovy spirály, které odpovídají hodnotám proměnné  $v$  pro dolní a horní okraj apertury. Limitní případ spojnice mezi dvěma oky spirály odpovídá nekonečně velké apertuře (tj. žádná apertura),  $v \rightarrow \pm\infty$ .



**Obr. 8.19** Cornuova spirála, délka měřená po křivce odpovídá proměnné  $v$ . Na křivce jsou označeny body, které odpovídají  $v = 0,5, 1,0, 2,0$ . Křížky označují oka spirály odpovídající limitě  $v \rightarrow \pm\infty$ . Kladná a záporná část spirály je symetrická. Pro přehlednost nekreslíme spirálu v blízkém okolí jejích ok

Délka křivky po spirále odpovídá proměnné  $v$ . Skutečně, přírůstek délky obecné křivky  $dl$  je

$$dl^2 = dX^2 + dY^2. \quad (8.84)$$

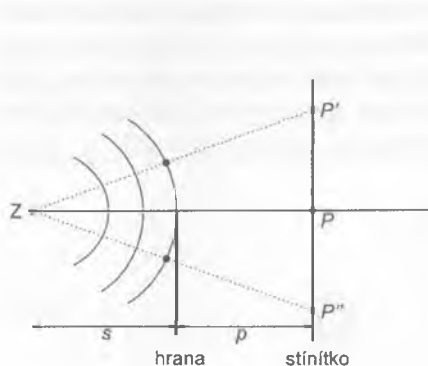
V našem případě ovšem  $X, Y$  jsou Fresnelovy integrály, jejich elementární přírůstky jsou dány argumenty integrálů, tedy

$$dl^2 = \left[ \cos^2 \left( \pi \frac{v^2}{2} \right) + \sin^2 \left( \pi \frac{v^2}{2} \right) \right] dv^2, \quad (8.85)$$

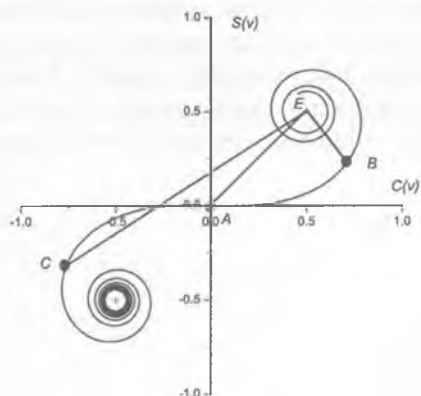
tedy

$$dl = dv. \quad (8.86)$$

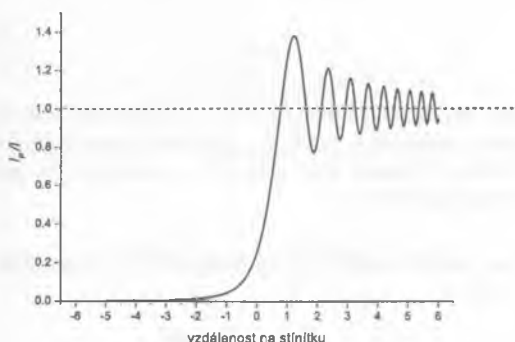
### 8.2.3.3 Fresnelova difrakce na hraně



Obr. 8.20a Geometrie Fresnelovy difrakce na hraně; vřlcovř vřna ze zdroje Z dopadř na hranu, pole se pozoruje na střnitku



Obr. 8.20b Geometrickř znřzorněni amplitud difragovaněho pole pomoci Cornuovy spirřly (pro přehlednost nekreslřme řřsti spirřly v okolř jejich ok)



Obr. 8.20c Difrakce na hraně; přběh intenzity v zřvislosti na poloze na střnitku ( $y = 0$  odpovřdř hranici geometrickěho střnu)

Pole při difrakci na hraně lze určit pomocí Cornuovy spirály, jak je znázorněno na obr. 8.20. Na obr. 8.20a uvádíme geometrii, na obr. 8.20b získání velikosti amplitud pole pomocí Cornuovy spirály. Pro bod  $P$  na hranici geometrického stínu je  $v = 0$ , příspěvek pole je dán délkou  $AE$  (vrchní část spirály), jeho velikost je  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , intenzita v bodě  $P$  je tedy  $I_P = \frac{I_0}{2}$ . Pro

body, které leží dolů pod hranicí stínu (tj. v oblasti geometrického stínu), např.  $P''$  je nutné uvažovat Fresnelovy zóny vůči ose  $ZP''$ . Nyní je celá spodní část spirály „zakryta“, z horní poloviny je zakryta část, odpovídající příspěvek je roven podle obrázku  $BE$ . Pokud budeme uvažovat bod  $P''$  ležící stále níž, bude se pohybovat bod  $B$  po spirále od bodu  $A$ , intenzita bude monotónně klesat. Naopak v případě, že budeme vyšetřovat pole v bodě  $P'$ , který leží nad hranicí geometrického stínu, budeme uvažovat novou osu  $ZP'$ , jak je zřejmé z obrázku. Pak ovšem bude k výslednému poli přispívat celá horní polovina spirály plus část její spodní poloviny (od bodu  $C$ ). Jak se bude bod  $C$  posouvat po spirále dolů směrem od bodu  $A$ , bude velikost pole, daná úsečkou  $CE$  oscilovat.<sup>7</sup> Průběh intenzity v závislosti na poloze na stínítku je uveden na obr. 8.20c.

Podobným postupem bychom mohli vyšetřovat difrakci na jiných překážkách. Například na obr. 8.21 je difrakční obrazec, který vzniká při difrakci laserového světla na vlasu.



Obr. 8.21 Difrakce světla na vlasu; střed obrazce je překryt přímo procházejícím laserovým svazkem helium-neonového laseru na vlnové délce 594 nm

### 8.3 MATEMATICKÁ TEORIE

Nyní stručně naznačíme matematické zdůvodnění platnosti Fresnel-Kirchhoffova difrakčního integrálu, který je matematickou formulací Huygens-Fresnelova principu. Budeme předpokládat skalární aproximaci a monochromatické harmonické vlny. Pole tedy bude mít tvar

$$\tilde{E}(\vec{r}, t) = \tilde{E}_0(\vec{r}) \exp(-i \omega t). \quad (8.87)$$

Uvažujme uzavřenou plochu  $S$ , která ohraničuje objem  $V$ . Použijeme tzv. 2. Greenovu větu vektorové analýzy<sup>8</sup>, podle níž pro skalární funkce souřadnic  $\varphi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$  (vhodných vlastností) platí

$$\oint_S (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) \cdot \vec{n} dS = - \int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV. \quad (8.88)$$

Zde  $\vec{n}$  je vnitřní normála k ploše  $S$ . Zvolíme nyní za funkci  $\varphi$  amplitudu obecné skalární světelné vlny  $\tilde{E}_0(\vec{r})$ , za funkci  $\psi$  speciální tvar, komplexní amplitudu kulové vlny (opět předpokládáme její harmonickou časovou závislost)

$$\tilde{E}_{10}(\vec{r}) = \tilde{E}_{10}(\rho) = \frac{\exp(ik\rho)}{\rho}. \quad (8.89)$$

Zde  $\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}_p$  je polohový vektor s počátkem v libovolném pevném bodě  $P$ . Monochromatická světelná vlna musí být řešením Helmholtzovy vlnové rovnice (1.43), proto

$$\Delta \tilde{E}_0(\vec{r}) = -k^2 \tilde{E}_0(\vec{r}) \quad (8.90)$$

a

$$\Delta \tilde{E}_{10}(\rho) = -k^2 \tilde{E}_{10}(\rho). \quad (8.91)$$

Po dosazení  $\tilde{E}_0(\vec{r})$  a  $\tilde{E}_{10}(\vec{r})$  plyne přímo ze vztahů (8.90) a (8.91), že pravá strana rovnice (8.88) je rovna nule, kromě bodu  $\rho=0$ , kde funkce (8.89) není dobře definována. Abychom tento bod mohli vynechat, budeme uvažovat objem  $V$  ohraničený dvěma plochami  $S, S'$ , jak je znázorněno na obr. 8.22. Vnitřní plochu  $S'$  zvolíme kulovou se středem v bodě  $P$ , její poloměr je  $\varepsilon$ . Na takto vymezený objem můžeme použít vztah (8.88) s nulovou pravou stranou, tedy

$$\oint_{S+S'} (\tilde{E}_0 \nabla \tilde{E}_{10} - \tilde{E}_{10} \nabla \tilde{E}_0) \cdot \vec{n} dS = 0. \quad (8.92)$$

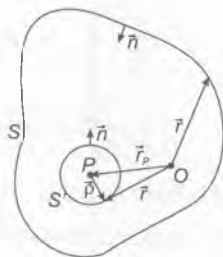
Nejprve vypočítáme integrál přes kulovou plochu  $S'$ , kde  $\rho = \varepsilon$ , tedy<sup>9</sup>

$$\oint_{S'} \left[ \tilde{E}_0 \nabla \left( \frac{\exp(ik\rho)}{\rho} \right) - \frac{\exp(ik\rho)}{\rho} \nabla \tilde{E}_0 \right] \cdot \vec{n} dS'. \quad (8.93)$$

Protože

$$\nabla \left( \frac{\exp(ik\rho)}{\rho} \right) = \frac{\exp(ik\rho)}{\rho} \left( ik - \frac{1}{\rho} \right) \frac{\vec{\rho}}{\rho}, \quad (8.94)$$

a jak je patrné z obr. 8.22



Obr. 8.22 Ilustrace k odvození difrakčního integrálu; plochy ohraničující objem  $V$

$$\frac{\vec{\rho}}{\rho} \cdot \vec{n} = 1, \quad (8.95)$$

máme

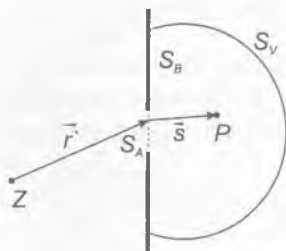
$$\begin{aligned} \oint_{S'} \left[ \vec{E}_0 \nabla \left( \frac{\exp(ik\rho)}{\rho} \right) - \frac{\exp(ik\rho)}{\rho} \nabla \vec{E}_0 \right] \cdot \vec{n} dS' = \\ = \oint_{S'} \left[ \vec{E}_0 \frac{\exp(ik\rho)}{\rho} \left( ik - \frac{1}{\rho} \right) - \frac{\exp(ik\rho)}{\rho} \vec{n} \cdot \nabla \vec{E}_0 \right] dS'. \end{aligned} \quad (8.96)$$

Vzhledem k tomu, že kulová plocha i kulová vlnoplocha mají shodný střed  $P$ , je  $\rho = \varepsilon$ . Pokud nyní budeme zmenšovat poloměr kulové plochy tak, že  $\varepsilon \rightarrow 0$ , přejde<sup>10</sup> integrál (8.96) k  $-4\pi \vec{E}_0(P)$ . Z (8.92) dostáváme tedy

$$\vec{E}_0(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left( \vec{E}_0 \vec{n} \cdot \nabla \left( \frac{\exp[ik\rho]}{\rho} \right) - \frac{\exp[ik\rho]}{\rho} \vec{n} \cdot \nabla \vec{E}_0 \right) dS, \quad (8.97)$$

což se někdy nazývá jako Kirchhoff-Helmholtzův integrální teorém. Pokud je na ploše  $S$  dáno  $\vec{E}_0$  a  $\frac{\partial \vec{E}_0}{\partial n} = \vec{n} \cdot \nabla \vec{E}_0$ , je možné podle (8.97) získat hodnotu pole v bodě  $P$ .

Nyní použijeme tento výsledek na typický příklad, se kterým se často setkáváme, totiž na aperturu v nepropustném stínítku, jak je znázorněno na obr. 8.23.  $S_A$  je plocha apertury,  $S_B$  je plocha stínítka a  $S_V$  je obecná plocha, která uzavírá celý objem. Na aperturu dopadá vlna (amplituda  $\vec{E}_{i0}$ ), zajímá nás pole v obecném bodě  $P$ . Protože vyšetřujeme světlo, které z apertury



Obr. 8.23 Difrakce na apertuře – schéma k odvození difrakčního integrálu

dopadá do bodu  $P$ , charakterizuje se obvykle vzájemná poloha elementu plochy apertury a bodu  $P$  pomocí vektoru  $\vec{s} = \vec{r}_p - \vec{r}$ . (Opět se integruje, resp. derivuje, podle souřadnic vektoru  $\vec{r}$ .) Problémem je, jaké hodnoty pole a jeho derivací na jednotlivých plochách bychom měli do vztahu (8.97) dosadit. K zadání těchto hodnot se používají jisté přibližné okrajové podmínky. Nejčastěji se užívá *Kirchhoffových okrajových podmínek*, podle nichž se uvažuje pole uvnitř apertury za rovné pole dopadajícímu a pole na zadní straně apertury za nulové (i jeho derivace), tedy

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_{i0}, \quad \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial n} = \frac{\partial \vec{E}_{i0}}{\partial n} \text{ na ploše } S_A, \quad (8.98)$$

$$\vec{E}_0 = 0, \quad \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial n} = 0 \text{ na ploše } S_B. \quad (8.99)$$

Tyto podmínky, i když nejsou matematicky korektní, dávají dobré výsledky. Zbývá ještě určit hodnoty pole na ploše  $S_V$ . Pro reálnou situaci můžeme považovat tuto plochu za velmi vzdálenou. Na ní můžeme opět brát

$$\vec{E}_0 = 0, \quad \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial n} = 0 \text{ na ploše } S_V, \quad (8.100)$$

což lze zdůvodnit například tím, že rozměry plochy (i neprůhledné části stínítka) zvětšíme tak, že než k nim světlo doletí, skončíme s pozorováním<sup>11</sup>.

Budeme nyní předpokládat, že na aperturu dopadá kulová vlna vycházející z bodu  $Z$  (viz obr. 8.23)

$$\tilde{E}_{i,0} = A \frac{\exp(ikr')}{r'}, \quad (8.101)$$

zde  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_z$ . Nyní máme pro libovolný bod apertury

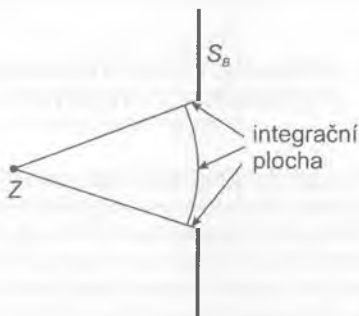
$$\nabla \tilde{E}_{i,0} = \left( ik - \frac{1}{r'} \right) \frac{A \exp(ikr')}{r'} \frac{\vec{r}'}{r'}, \quad (8.102)$$

$$\nabla \left( \frac{\exp(iks)}{s} \right) = \left( ik - \frac{1}{s} \right) \frac{\exp(iks)}{s} \left( \frac{-\vec{s}}{s} \right). \quad (8.103)$$

Pokud uvažujeme situaci, kdy vzdálenosti jsou podstatně větší než vlnová délka světla, je  $\frac{1}{s} \ll k$ , resp.  $\frac{1}{r'} \ll k$ , a v kulatých závorkách v (8.102) a (8.103) můžeme zanedbat reciproké vzdálenosti. Nyní dostaneme z (8.97) (integrujeme pouze přes plochu apertury vzhledem k užitým okrajovým podmínkám)

$$\tilde{E}_0(P) = -\frac{ikA}{4\pi} \int_{S_A} \left[ \frac{\exp(ikr')}{r'} \frac{\exp(iks)}{s} \left( \frac{\vec{s}}{s} \cdot \vec{n} + \frac{\vec{r}'}{r'} \cdot \vec{n} \right) \right] dS_A. \quad (8.104)$$

To je *Fresnel-Kirchhoffův difrakční integrál*. Můžeme nyní provést další aproximaci, kdy místo přes plochu apertury budeme integrovat přes kulovou plochu tvořenou dopadající vlnoplochou a „kousky“ doplňující zbytek (viz obr. 8.24), které ovšem zanedbáme. Aproximace tedy spočívá v tom, že není

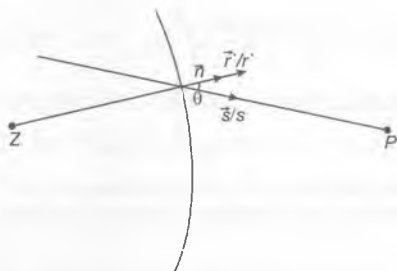


Obr. 8.24 Schéma k odvození difrakčního integrálu – integrační plocha složená z kulové vlnoplochy a „okrajů“

velký rozdíl mezi integrací po vlnoploše a přes plochu apertury. Na vlnoploše je poloměr plochy konstantní  $r' = R_0$  a lze ho vytknout před integrál. Navíc (viz obr. 8.25)

$$\frac{\vec{s}}{s} \cdot \vec{n} = \cos \theta, \quad (8.105)$$

$$\frac{\vec{r}'}{r'} \cdot \vec{n} = 1. \quad (8.106)$$



Obr. 8.25 Schéma k odvození difrakčního integrálu – původ faktoru sklonu

Celkově tedy (nahradíme opět integraci po vlnoploše integrací přes aperturu)

$$\tilde{E}_0(P) = -\frac{i}{\lambda} A \int_{S_A} \frac{\exp[i(r'+s)k]}{r's} \frac{[1 + \cos(\theta)]}{2} dS_A. \quad (8.107)$$

Zde se objevuje činitel sklonu /rov. (8.53); integrál odpovídá vztahu (8.54)/.

## 8.4 DIFRAKCE VLN NA TROJDIMENZIONÁLNÍCH PERIODICKÝCH STRUKTURÁCH

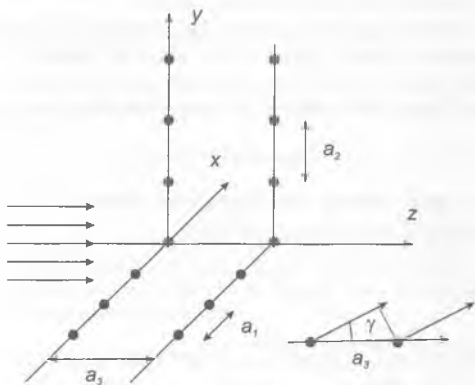
Krystaly pevných látek jsou tvořeny pravidelným uspořádáním atomů v prostoru. Prostorová perioda je řádově  $10^{-10}$  m (1 Å), tedy menší než vlnová délka viditelného světla. Nicméně elektromagnetické vlny z rentgenové spektrální oblasti mají vlnovou délku této velikosti. Proto je možné pozorovat difrakci rentgenového záření na krystalech. Ve skutečnosti se dnes rentgenová difrakce široce používá ke studiu struktury kondenzova-



ných látek. I když rentgenová difrakce nespadá vzhledem ke spektrální oblasti do optiky v pravém slova smyslu, krátce si difrakce vln na prostorových periodických strukturách všimneme. S difrakcí světla na periodické struktuře jsme se setkali v odstavci 8.1.4, kde jsme vyšetřovali případ Fraunhoferovy difrakce na řadě štěrbin. Jednalo se o jednodimenzionální problém. Při kolmém dopadu rovinné vlny na stínítko (mřížku) nastávají difrakční maxima pod úhly  $\theta$  (měřené od normály k ploše mřížky) danými mřížkovou rovnicí (8.37), tedy  $a \sin \theta = m \lambda$  (zde opět je  $a$  vzdálenost sousedních štěrbin a  $m$  celé číslo). Uvažujme nyní strukturu tvořenou dvěma navzájem kolmými mřížkami s periodami  $a_1$ ,  $a_2$ . Směry, ve kterých nastávají maxima, jsou určeny úhly /úhly  $\alpha$ ,  $\beta$  se zde měří od roviny mřížky, proto je v rovnicích (8.108), (8.109) kosinus/

$$a_1 \cos \alpha = m_1 \lambda, \quad (8.108)$$

$$a_2 \cos \beta = m_2 \lambda. \quad (8.109)$$



Obr. 8.26 Difrakce na trojrozměrné krystalické mřížce

Dvě zkřížené soustavy štěrbin odpovídají periodickému uspořádání otvorů. Pokud budeme nyní tuto strukturu posouvat periodicky ve směru osy  $z$  vždy o periodu  $a_3$ , vznikne pravidelná prostorová struktura (model krystalu, v krystalu rozptylují záření jednotlivé atomy) – viz obr. 8.26. Můžeme si tedy představit, že difrakce vln v krystalu odpovídá difrakci jednotlivými rovinami atomů. V podmínce pro maximum difrakce se musí přidat ještě

jedna, která bude odpovídat tomu, že vlnění difragovaná následujícími rovinami budou ve fázi. Podle obr. 8.26 je zřejmé, že musí platit

$$a_3 - a_3 \cos \gamma = m_3 \lambda. \quad (8.110)$$

Směr difrakčních maxim je tedy dán jednotkovým směrovým vektorem  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ . Zobecníme-li podmínky (8.108 až 8.110) pro obecný směr dopadu  $(\cos \alpha_0, \cos \beta_0, \cos \gamma_0)$ , mají tvar ( $m_j$  jsou celá čísla)

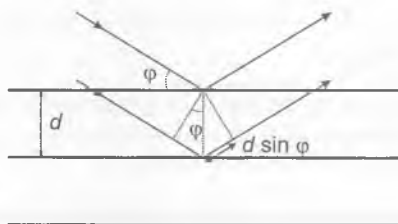
$$\begin{aligned} a_1 (\cos \alpha_0 - \cos \alpha) &= m_1 \lambda \\ a_2 (\cos \beta_0 - \cos \beta) &= m_2 \lambda \\ a_3 (\cos \gamma_0 - \cos \gamma) &= m_3 \lambda. \end{aligned} \quad (8.111)$$

Tyto rovnice se nazývají *Laueho rovnice*. Pro daný směr krystalu je třeba použít spektrálně široký zdroj rentgenového záření, aby bylo možné pro některé vlnové délky podmínky splnit. Jinou možností je pro danou vlnovou délku otáčet krystalem, až jsou podmínky splněny.

Lze ukázat, že tyto podmínky odpovídají představě, že maxima difrakce vznikají ve směrech daných zrcadlovým odrazem dopadajícího vlnění od krystalických rovin (tj. rovin, které procházejí atomy krystalické mřížky. Tato podmínka (srov. geometrii na obr. 8.27) se nazývá *Braggova podmínka*,

$$2d_{(hkl)} \sin \varphi = m \lambda, \quad (8.110)$$

kde  $\varphi$  je úhel dopadu měřený vůči krystalické rovině a indexy  $h, k, l$  označují různé krystalické roviny,  $m$  je celé číslo.



Obr. 8.27 Braggova difrakční podmínka

#### Poznámky

<sup>1</sup> Někdy se uvádí, že difrakce nastává vždy, když při šíření světla dochází k odchýlkám od přímočarého šíření, pokud nenastává odraz nebo lom. Tato formulace pochází údajně od

Sommerfelda. Z praktického hlediska znamená v optice difrakce výskyt světla v oblasti geometrického stínu. Název difrakce zavedl v roce 1665 Grimaldi, když vytvořil slovo z latinského frangere (lámat) a dis- (opak). Nazýval tak šíření světla, které se od přímočarého odlišuje jinak než lomem.

<sup>2</sup> Skalární teorie difrakce vychází ze skalární vlnové rovnice. Dává správné výsledky, pokud se v určitém bodě pozorování sčítají příspěvky elektrického (resp. magnetického) pole, které jsou téměř rovnoběžné. Pak není rozdíl mezi vektorovým a skalárním součtem. Obecně je ovšem nutné vyšetřovat difrakci vektorově.

<sup>3</sup> Jak bylo již řečeno, v reálné situaci se jedná zpravidla o bod ležící v ohniskové rovině spojné čočky umístěné za stínítkem, nebo (bez čočky) o bod ve velké vzdálenosti za stínítkem.

<sup>4</sup> Užíváme pro malé úhly  $\sin\theta \approx \theta$ .

<sup>5</sup> Ve většině případů se vyšetřuje difrakce blízko směru šíření, takže činitel sklonu je přibližně roven 1. Kdybychom se měli zabývat difrakcí ve velmi odlišných směrech (velký faktor sklonu), pak bychom ale také museli sčítat pole vektorově, tedy přejít k vektorové difrakční teorii.

<sup>6</sup> Jedná se zde o amplitudy elektrického pole, ne o intenzity světla.

<sup>7</sup> Zde  $v = y\sqrt{\frac{k}{\pi z}}$ , podle uvedených úvah je výsledný průběh intenzity při Fresnelově difrakci na hraně dán  $I(y, z) = \frac{1}{2} I_0 [(C(v) - 0,5)^2 + (S(v) - 0,5)^2]$ , protože  $C(\infty) = S(\infty) = 0,5$ .

<sup>8</sup> Tato Greenova věta odvozená ze Stokesovy věty se používá např. v učebnici [1]. Zpravidla se užívá vnější normála k ploše, ale zde používáme normálu vnitřní, která je pro vyšetřování difrakce vhodnější. Vzhledem k tomu, že získáme vztah (8.92) s nulou na pravé straně, nehraje orientace normály roli.

<sup>9</sup> Skalární součin, který ve vztahu vystupuje, je roven derivaci ve směru normály k ploše

$$\vec{n} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial n}.$$

<sup>10</sup> Skutečně element plochy lze vyjádřit pomocí objemového úhlu,  $dS' = \varepsilon^2 d\Omega$ , a převést integraci přes plochu na integraci přes prostorový úhel. Pro  $\varepsilon \rightarrow 0$  jdou všechny členy v (8.96) k nule kromě

$$\int_{\Omega} \vec{E}_0(\vec{r}) \frac{\exp(-ik\varepsilon)}{\varepsilon^2} \varepsilon^2 d\Omega \rightarrow 4\pi \vec{E}_0(P).$$

<sup>11</sup> Toto zúvodnění je ovšem ve sporu se stacionárností vlnění (a tedy jeho monochromaticitou). Kirchhoffovy podmínky jsou ve skutečnosti matematicky i fyzikálně nekorektní. Pokud je skalární pole na určité části plochy nulové a pokud jsou nulové i jeho derivace ve směru normály k ploše, pak je pole nulové v celém prostoru. Proto si odporují navzájem již dvě podmínky (8.98) a (8.99). Ovšem ukazuje se, že Kirchhoffův integrál s okrajovými podmínkami dává ve vzdálenostech větších než vlnová délka za stínítkem správné výsledky. Matematicky korektní odvození difrakčního integrálu podal

Sommerfeld, který použil podmínku  $\lim_{r \rightarrow \infty} \left( r \frac{\partial E}{\partial r} - ikE \right) = 0$ .

# 9 PRINCIP FOURIEROVSKÉ OPTIKY

Dosud jsme hovořili o šíření světla v prostředích a situacích, kdy všechny relevantní rovnice byly lineární, a platil proto princip superpozice. V takovém případě je možné pro vyšetřování optických polí, které mají složitý průběh v čase nebo prostoru, použít postup Fourierovy analýzy. Nejprve se pole rozvine do Fourierových složek (analýza), vyšetří se šíření pro každou složku a pak se jednotlivé komponenty sečtou (syntéza), aby se získalo výsledné pole. Na rozdíl od řady jiných lineárních systémů, kde se tento postup také používá, je v optice možné Fourierovy transformace jednoduše ve skutečnosti realizovat. Oblast optiky, v níž se užívá Fourierova transformace, se nazývá *fourierovskou optikou*.

Připomeneme nejprve dobře známou Fourierovu transformaci funkce času  $f(t)$ :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad (9.1)$$

zpětná transformace, určující  $g(\omega)$  je

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(+i\omega t) dt. \quad (9.2)$$

Podobně pro funkci jedné prostorové souřadnice máme

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) \exp(ikx) dk. \quad (9.3)$$

Tento vztah lze chápat jako rozvoj funkce do rovinných vln (faktor  $\exp(ikx)$ ) s amplitudami  $g(k)$ , které jsou dány

$$g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ikx) dx. \quad (9.4)$$

V případě šíření světla je důležitý případ Fourierovy transformace funkce dvou prostorových proměnných  $x, y$

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(k_x, k_y) \exp[i(k_x x + k_y y)] dk_x dk_y, \quad (9.5)$$

a opačná transformace

$$g(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i(k_x x + k_y y)] dx dy. \quad (9.6)$$

Prostorové frekvence  $k_x, k_y$  je možné spojit s prostorovými periodami vztahy

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x}, \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda_y}. \quad (9.7)$$

Nyní ukážeme, že je možné uskutečnit dvojdimenzionální prostorovou Fourierovu transformaci pomocí difrakce světla v dalekém poli nebo pomocí působení čočky.

Uvažujme nejprve difrakci světla v dalekém poli (Fraunhoferova difrakce). V rovině  $z = 0$  bude umístěna apertura, v níž bude dáno rozložení intenzity elektrického pole  $E_S(x, y)$ , viz obr. 9.1. Jaké bude pole  $E(x', y')$  v rovině  $z = z'$ , které vznikne difrakcí? Vyjdeme z Fresnel-Kirchhoffova difrakčního integrálu (8.54)

$$\tilde{E}(x', y') = \frac{-i}{\lambda} A \int_{\text{APERTURA}} F(\theta) \frac{1}{r r_z} \exp[ik(r + r_z)] dS, \quad (9.8)$$

(zde  $r_z$  je vzdálenost bodového zdroje od apertury), který pro případ známého rozložení pole v apertuře a pro případ, kdy se zajímáme o oblast blízko osy  $z$  (paraxiální aproximace,  $\theta \approx 0$ ,  $F(\theta) \approx 1$ ) má jednodušší tvar

$$\tilde{E}(x', y') = \frac{-i}{\lambda} \int_{\text{APERTURA}} \tilde{E}_S(x, y) \frac{1}{r} \exp(ikr) dx dy. \quad (9.9)$$

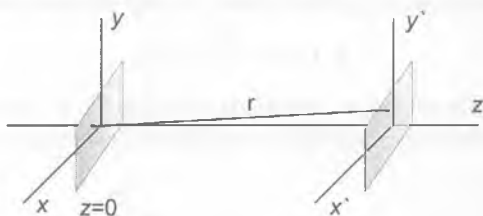
V duchu paraxiální aproximace můžeme položit v integrandu  $1/r = 1/z$ , a pro  $r$  v exponenciální funkci užít rozvoj (nelze nahradit přímo  $z$ , protože je v součinu s  $k$ , „zmizela by difrakce“):

$$r = \sqrt{z^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2} \approx z + \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z}. \quad (9.10)$$

Dosazením do (9.9) dostaneme

$$\begin{aligned} \tilde{E}(x', y') = \\ = \frac{-i}{\lambda} \frac{1}{z} \exp(ikz) \int_{\text{APERTURA}} \tilde{E}_S(x, y) \exp\left\{\frac{ik}{2z} [(x-x')^2 + (y-y')^2]\right\} dx dy, \end{aligned} \quad (9.11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}(x', y') = \frac{-i}{\lambda} \frac{1}{z} \exp(ikz) \exp\left[\frac{ik}{2z}(x'^2 + y'^2)\right] \times \\ \times \int_{\text{APERTURA}} \tilde{E}_S(x, y) \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \exp\left[\frac{-ik}{z}(xx' + yy')\right] dx dy. \end{aligned} \quad (9.12)$$



Obr. 9.1 Souřadnice při výkladu realizace Fourierovy transformace difrakcí světla v dalekém poli

To je tvar integrálu ve *Fresnelově aproximaci*. Pro vyšetřování difrakce ve *Fraunhoferově aproximaci* položíme v integrandu (9.12)

$$\frac{x^2 + y^2}{2z} \approx 0, \quad (9.13)$$

pole v rovině  $z$  bude rovno

$$\begin{aligned} \tilde{E}(x', y') = \\ = \frac{-i}{\lambda} \frac{1}{z} \exp(ikz) \exp\left[\frac{ik}{2z}(x'^2 + y'^2)\right] \int_{\text{APERTURA}} \tilde{E}_S(x, y) \exp\left[\frac{-ik}{z}(xx' + yy')\right] dx dy. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Člen  $\exp\left[\frac{ik}{2z}(x'^2 + y'^2)\right]$  před integrálem vyjadřuje zklenutí pole, pro body  $(x', y')$  blízké k ose  $z$  je tento člen přibližně konstantní a lze psát

$$\tilde{E}(x', y') = \tilde{E}(k_x, k_y) = \tilde{A} \int_{\text{APERATURA}} \tilde{E}_S(x, y) \exp[-i(k_x x + k_y y)] dx dy, \quad (9.15)$$

kde  $\tilde{A}$  je (komplexní) konstanta a  $k_x, k_y$  jsou *prostorové frekvence*

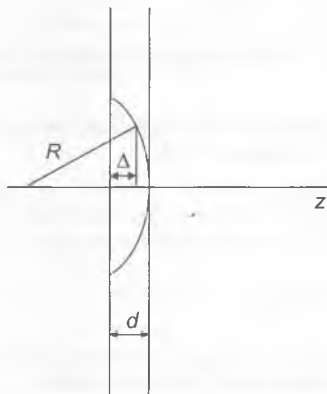
$$k_x = \frac{k x'}{z}, \quad k_y = \frac{k y'}{z}. \quad (9.16)$$

Je tedy zřejmé, že při Fraunhoferově difrakci je difragované pole úměrné /podle (9.15)/ dvojdimenzionální Fourierově transformaci pole  $E_S$  v apertuře (srov. 9.6).

Často je pole v apertuře  $E_S$  výsledkem toho, že je dopadající vlna  $E_0$  (v nejjednodušším případě rovinná vlna s konstantní amplitudou) modulována průchodem nějakým prvkem s danou funkcí propustnosti  $t(x, y)$

$$\tilde{E}_S(x, y) = \tilde{E}_0 \tilde{t}(x, y). \quad (9.17)$$

Přitom může být modulována amplituda vlny (například po průchodu diapositivem), nebo fáze vlny (například po průchodu čočkou), nebo obojí.



Obr. 9.2 K výpočtu fázového zpoždění vlny při průchodu ploskovypukou čočkou



Budeme se nyní zabývat případem, kdy je v apertuře umístěna spojná čočka. Pro jednoduchost zvolíme ploskovypuklou čočku, jak je znázorněno na obr. 9.2.  $R$  je poloměr kulové plochy čočky,  $d$  je její tloušťka,  $n$  její index lomu. Najdeme nyní její funkci propustnosti

$$\tilde{t}(x, y) = \exp[i\varphi(x, y)]. \quad (9.18)$$

Podle obr. 9.2 je fázový náběh spojený se šířením světla ve vrstvě tloušťky  $d$  v místě apertury  $(x, y)$  (pro zdůraznění toho, že užíváme velikost vlnového vektoru ve vakuu, používáme v tomto odstavci index 0)

$$\varphi(x, y) = k_0 d + (n-1)k_0 \Delta(x, y), \quad (9.19)$$

přítom

$$\Delta(x, y) = d - \left( R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right), \quad (9.20)$$

$$\Delta(x, y) = d - R \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2}} \right), \quad (9.21)$$

a pro  $x^2 + y^2 \ll R^2$

$$\Delta(x, y) = d - \frac{x^2 + y^2}{2R}, \quad (9.22)$$

protože

$$\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2}} \approx 1 - \frac{x^2 + y^2}{2R^2}. \quad (9.23)$$

Podle (9.19, 9.18) je

$$\tilde{t}(x, y) = \exp(i\varphi_0) \exp\left(-ik_0 \frac{x^2 + y^2}{2f'}\right), \quad (9.24)$$

kde jsme označili

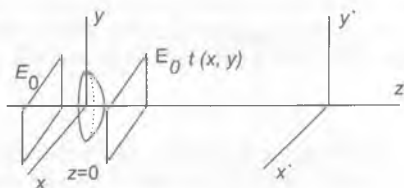
$$\varphi_0 = k_0 d, \quad (9.25)$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{n-1}{R}. \quad (9.26)$$

Jak uvidíme v kapitole 10, je  $f'$  velikost obrazové ohniskové vzdálenosti uvažované čočky.

Budeme nyní vyšetřovat pole, které vznikne difrakcí rovinné vlny po průchodu aperturou s čočkou, jak je naznačeno na obr. 9.3. Pole v apertuře je dáno (9.17) po dosazení (9.24). Použijeme integrál (9.12) a dostaneme pro pole v rovině  $z$

$$\begin{aligned} \tilde{E}(x', y') &= \\ &= \frac{-i}{\lambda z} \exp(ikz + i\varphi_0) \exp\left(ik \frac{x'^2 + y'^2}{2z}\right) \times \\ &\times \iint_{\text{APERTURA}} \tilde{E}_0 \exp\left[ik \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f'}\right)\right] \exp\left[-\frac{ik}{z}(xx' + yy')\right] dx dy. \end{aligned} \quad (9.27)$$



Obr.9.3 K výkladu realizace Fourierovy transformace pomocí spojné čočky

Společně s čočkou můžeme modifikovat dopadající světlo i modulací amplitudy, pak ovšem bude  $\tilde{E}_0 = \tilde{E}_0(x, y)$ . Pokud budeme sledovat difrakci v rovině

$$z = f', \quad (9.28)$$

tedy v ohniskové rovině čočky, dostaneme pro libovolný bod  $(x', y')$

$$\tilde{E}(x', y') = \tilde{E}(k_x, k_y) = \tilde{B} \int_{\text{APERTURA}} \tilde{E}_s(x, y) \exp[-i(k_x x + k_y y)] dx dy, \quad (9.29)$$

kde  $\tilde{B}$  je (komplexní) konstanta, pokud zanedbáme kvadratické členy v exponenciále před integrálem v (9.27). Prostorové frekvence jsou opět definovány vztahem (9.16) s (9.28). Máme tedy znovu Fourierovu transformaci, viz rov. (9.6).

Fourierovu transformaci je možné využívat ke zpracování obrazu. Jako jednoduchý příklad můžeme uvést situaci, kdy rovinná vlna dopadá na am-

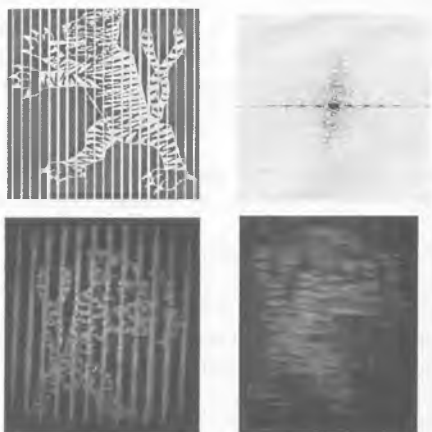
plitudovou optickou mřížku s mřížkovou konstantou  $a$  (například řada štěrbin ve směru  $x$ ) a prochází spojnou čočkou s ohniskovou vzdáleností  $f'$ , takže v její ohniskové rovině je Fourierův obraz podle (9.29). Uvedená situace odpovídá ovšem Fraunhoferově difrakci na mřížce, tedy platí mřížková rovnice (8.37), která určuje souřadnice  $y'_m$  difrakčních maxim jednotlivých řádů (pro úhly  $\theta_m = y'_m / f'$ )

$$y'_m = m \frac{\lambda f'}{a}. \quad (9.30)$$

Z (9.16) a (9.28) máme

$$k_{ym} = \frac{m2\pi}{a}. \quad (9.31)$$

Je zřejmé, že velikost prostorových frekvencí je nepřímo úměrná mřížkové konstantě  $a$ , tedy vyšší prostorové frekvence odpovídají větším detailům v modulaci vstupujícího optického pole. Následnou (zpětnou) Fourierovou



**Obr. 9.4** (Vlevo nahoře) průsvitka s obrázkem, tygr v kleci. (Vpravo nahoře) Fourierova transformace s výraznými maximy odpovídajícími difrakci na mřížích. (Vlevo dole) zpětná Fourierova transformace bez prostorové filtrace. (Vpravo dole) po odfiltrování vyšších prostorových frekvencí štěrbinou je tygr osvobozen z klece

transformací získáme rozložení pole, které odpovídá původní vstupní modulaci díky mřížce. Pokud ale do ohniskové roviny první čočky umístíme šěrbinu, která ve směru  $y$  potlačí vyšší prostorové frekvence, bude výsledné rozložení pole změněné, budou chybět odfiltrované vyšší frekvence. Popsanému procesu se říká *prostorová filtrace*. Ukázku<sup>1</sup> takové filtrace uvádíme na obr. 9.4. Je to jeden z příkladů *zpracování obrazu*.

### Poznámky

<sup>1</sup> S laskavým svolením autorů, kteří filtraci experimentálně realizovali, J. Preclíkové a K. Žídka (studentský projekt řešený na Katedře chemické fyziky a optiky, vedoucí RNDr. Miroslav Šimurda, Ph.D., UK MFF, 2002).

# 10 ZÁKLADY GEOMETRICKÉ OPTIKY

## 10.1 ÚVOD DO GEOMETRICKÉ OPTIKY

### 10.1.1 Eikonálová rovnice

Geometrická optika popisuje šíření světla pomocí *paprsků světla*. Paprsek světla intuitivně dobře chápeme, geometrická optika patří k nejstarším odvětvím fyziky. Lze paprsek zavést přesněji? V tomto odstavci ukážeme, že *geometrickou optiku* lze chápat jako limitní případ optiky „fyzikální“, tedy vlnové, v případě, že délka vlny je velmi malá, tedy symbolicky pro  $\lambda \rightarrow 0$ .

Uvažujme světelné pole, které popíšeme vektorem elektrické intenzity  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ . V komplexní symbolice máme pro speciální případ harmonické rovinné vlny faktor popisující šíření vlny („náběh fáze šířením“) ve tvaru  $\exp(+i\vec{k} \cdot \vec{r})$ , kde  $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_0 n \vec{s} \cdot \vec{r} = k_0 d$ . Zde  $n$  je index lomu (homogenního, izotropního) prostředí, a  $d$  je *optická dráha* světla. Uvažujme nyní šíření světla v izotropním prostředí, které není již opticky homogenní, tedy

$$n = n(\vec{r}), \quad \varepsilon = \varepsilon(\vec{r}). \quad (10.1)$$

Budeme vyšetřovat šíření harmonické vlny s obecnějším prostorovým charakterem ve tvaru, který vychází z výrazu pro rovinnou vlnu:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \exp[ik_0 S(\vec{r})] \exp(-i\omega t). \quad (10.2)$$

Zde  $\vec{E}_0(\vec{r})$  je amplituda pole, která se mění „pomalu“ na vzdálenosti odpovídající vlnové délce (přesněji viz dále). Zavedená skalární funkce souřadnic  $S(\vec{r})$  se nazývá *eikonálem*, podle řeckého εικόν (obraz). Analogicky popíšeme magnetickou intenzitu,

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0(\vec{r}) \exp[ik_0 S(\vec{r})] \exp(-i\omega t). \quad (10.3)$$

Budeme zde předpokládat, že amplitudy  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  elektrického a magnetického pole jsou reálné (vhodná volba časového počátku). Za určitých

přiblížení, která vymezují geometrickou optiku, můžeme z Maxwellových rovnic odvodit diferenciální rovnici pro eikonál  $S$ , v níž nebudou vystupovat amplitudy polí, která jednoznačně popisuje šíření vlny bez ohledu na její intenzitu.

Do „rotačních“ Maxwellových rovnic, rov. (1.1, 1.2), pro případ dielektrika ( $\vec{j}=0$ )

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= 0\end{aligned}\quad (10.4)$$

dosadíme za intenzity pole z (10.2) a (10.3). Budeme uvažovat materiálové vztahy

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (10.5)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu \vec{H}(\vec{r}, t). \quad (10.6)$$

Použijeme dále vztah pro rotaci součinu vektoru a skaláru

$$\nabla \times \vec{a} \varphi = \varphi (\nabla \times \vec{a}) + (\nabla \varphi \times \vec{a}). \quad (10.7)$$

Tak z rovnice pro rotaci magnetické intenzity dostáváme

$$(\nabla \times \vec{H}_0) \exp(i k_0 S) + i k_0 (\nabla S \times \vec{H}_0) \exp(i k_0 S) + i \omega \varepsilon \vec{E}_0 \exp(i k_0 S) = 0. \quad (10.8)$$

V posledním členu je podle definice velikosti vlnového vektoru

$$\omega \varepsilon = c_0 \varepsilon k_0. \quad (10.9)$$

Z (10.8) máme

$$(\nabla \times \vec{H}_0) \frac{1}{k_0} + i (\nabla S \times \vec{H}_0) + i c_0 \varepsilon \vec{E}_0 = 0. \quad (10.10)$$

V limitě  $\lambda \rightarrow 0$ , je  $k_0 \rightarrow \infty$ , a první člen v rovnici (10.10) můžeme zanedbat. Ve skutečnosti je  $k_0$  velké, například pro vlnovou délku 550 nm (zelené světlo) je  $k_0 \approx 1 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ . Rotace amplitudy vektoru  $\vec{H}_0$  vynásobená  $1/k_0$  obsahuje členy typu

$$\frac{\partial H_{0i}}{\partial x_j} \frac{1}{k_0} \approx \lambda \frac{\partial H_{0i}}{\partial x_j}. \quad (10.11)$$

Tyto členy je možné zanedbat, pokud budou velmi malé, tedy pokud bude amplituda pole taková, že její změna na vzdálenostech odpovídající vlnové délce bude zanedbatelná.

Rovnice (10.10) v uvažované limitě přejde na tvar

$$(\nabla S \times \vec{H}_0) + c_0 \varepsilon \vec{E}_0 = 0. \quad (10.12)$$

Zcela analogicky můžeme z „rotační“ rovnice pro intenzitu elektrického pole odvodit rovnici

$$(\nabla S \times \vec{E}_0) - c_0 \mu \vec{H}_0 = 0. \quad (10.13)$$

Z (10.13) lze vyjádřit explicitně  $\vec{H}_0$ :

$$\vec{H}_0 = \frac{(\nabla S \times \vec{E}_0)}{c_0 \mu} \quad (10.14)$$

a dosadit do (10.12). Získáme tak

$$\left( \nabla S \times \frac{(\nabla S \times \vec{E}_0)}{c_0 \mu} \right) + c_0 \varepsilon \vec{E}_0 = 0. \quad (10.15)$$

Využijeme-li výraz pro vektorový součin

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

máme

$$\nabla S (\nabla S \cdot \vec{E}_0) - \vec{E}_0 (\nabla S \cdot \nabla S) + c_0^2 \varepsilon \mu \vec{E}_0 = 0. \quad (10.16)$$

Ovšem pro amplitudu elektrického pole máme z (10.12)

$$\vec{E}_0 = \frac{(\nabla S \times \vec{H}_0)}{c_0 \varepsilon}. \quad (10.17)$$

Odtud zřejmě plyne

$$\vec{E}_0 \cdot \nabla S = 0 \quad (10.18)$$

a tedy první člen v (10.16) je roven vždy nule. Z (10.16) tedy máme

$$[(\nabla S)^2 - c_0^2 \varepsilon \mu] \vec{E}_0 = 0 \quad (10.19)$$

a pro nenulové pole

$$(\nabla S)^2 = n^2. \quad (10.20)$$

Využili jsme zde vztahu

$$c_0^2 \varepsilon \mu = \varepsilon_r = n^2. \quad (10.21)$$

Rovnice (10.20) se nazývá *eikonálová rovnice*.

Ve složkách má tvar

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2(x, y, z). \quad (10.22)$$

Geometrické místo bodů s konstantní hodnotou eikonálu

$$S(\vec{r}) = \text{konst.} \quad (10.23)$$

určuje *vlnoplochu* (ve smyslu geometrické optiky). *Paprsek*, který je velmi dobře intuitivně chápán, můžeme nyní definovat přesně jako normálu k vlnoploše. Jednotkový *paprskový vektor* je tedy určen /jak je zřejmé z (10.20)/

$$\vec{s} = \frac{\nabla S}{n}. \quad (10.24)$$

Z rovnic (10.14) a (10.17) plyne, že amplitudové vektory  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{H}_0$  jsou kolmé na směr paprsku (i navzájem), což odpovídá případu rovinné vlny, světlo má tedy v případě geometrické optiky lokálně charakter rovinné vlny.

### 10.1.2 Zákon lomu pro paprsky

Nyní si všimneme vlastností vektoru  $(n\vec{s})$ . Rotace tohoto vektoru je rovna nule, jak plyne přímo z (10.24)

$$\nabla \times (n\vec{s}) = \nabla \times (\nabla S) \equiv 0. \quad (10.25)$$

To ovšem podle Stokesovy věty (vektorová analýza) znamená, že také cirkulace uvedeného vektoru po uzavřené křivce je nulová,

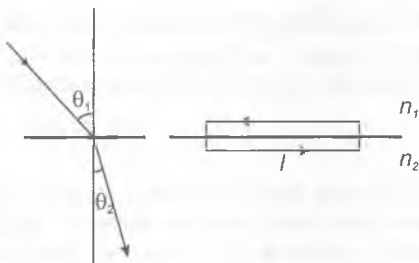


$$\oint n \vec{s} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (10.26)$$

Poslední rovnice se nazývá *Lagrangeovým invariantem*. Můžeme ji využít pro odvození *zákona lomu pro paprsek*. Uvažujme rozhraní oddělující dvě optická prostředí s indexy lomu  $n_1, n_2$ . Počítáme-li cirkulaci (10.26) po obvodu obdélníka jako na obr. 10.1 máme v limitě, kdy výšku obdélníka „stáhneme“ k rozhraní (ve skalárním součinu ve (10.26) je kosinus doplňkových úhlů k  $\theta_1, \theta_2$ ),

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2, \quad (10.27)$$

tedy *zákon lomu pro paprsek*. Ten je ovšem základním vztahem geometrické optiky<sup>1</sup>.



Obr.10.1 Schéma k odvození zákona lomu pro paprsky

### 10.1.3 Intenzita světla v geometrické optice

Intenzita světla je rovna časové střední hodnotě velikosti Poyntingova vektoru /viz rov. (1.69)/, tedy

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = \langle |\vec{E} \times \vec{H}| \rangle. \quad (10.28)$$

V uvažovaném tvaru vln (amplitudy jsou reálné), můžeme psát

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \frac{1}{2} \vec{E}_0 \times \vec{H}_0. \quad (10.29)$$

Dosadíme-li za  $\vec{H}_0$  z (10.14), dostaneme

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu c_0} E_0^2 \nabla S, \quad (10.30)$$

použijeme-li výraz pro trojný vektorový součin a uvážíme-li, že platí (10.18), /v (10.30) se projevuje poněkud nešťastné označení eikonálu a Poyntingova vektoru stejným písmenem/. Do výrazu pro intenzitu můžeme dosadit paprskový vektor (10.24), pak

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{n}{2\mu c_0} E_0^2 \vec{s}, \quad (10.31)$$

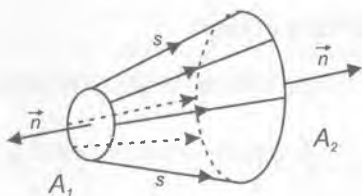
tedy

$$I = \langle \vec{S} \rangle = c \langle w \rangle \vec{s} \quad (10.32)$$

kde  $\langle w \rangle$  je časová střední hodnota elektromagnetické hustoty energie. Vztah (10.32) je stejný jako v případě rovinné vlny /srov. (1.74)/. Z Poyntingovy věty pro časově neproměnnou hustotu energie plyne

$$\oint_A \vec{S} \cdot \vec{n} dA = 0, \quad (10.33)$$

což je plošný integrál Poyntingova vektoru přes uzavřenou plochu  $A$ . Použijeme nyní tento vztah pro situaci na obr. 10.2, tj. na plochu tvořenou částmi („podstavami“)  $A_1$ , resp.  $A_2$ , které jsou kolmé na paprsky a částí, která je tvořena paprsky („plášť“).



**Obr. 10.2** Intenzita světla v geometrické optice

Integrál přes plášť je roven nule vzhledem ke směru toku energie. Pokud jsou plochy malé, přejde integrál na násobení, je nutné uvážit směry normál k plochám. Po provedení časového středování dostaneme zákon změny intenzity pro geometrickou optiku, tj.

$$A_1 I_1 = A_2 I_2. \quad (10.34)$$

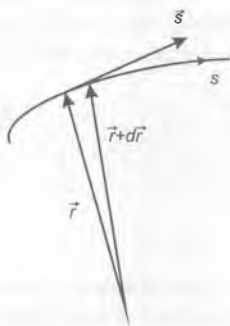
### 10.1.4 Paprsková rovnice

Kromě eikonálové rovnice je výhodné zformulovat rovnici, která by popisovala přímo paprsek, tedy paprskovou rovnici. Pokud určitý bod paprsku – viz obr. 10.3 – má polohový vektor  $\vec{r}$ , změní se při posunu o délku  $ds$  po paprsku polohový vektor o

$$d\vec{r} = ds \vec{s}. \quad (10.35)$$

Pro polohový vektor jako funkci délky paprsku  $s$  tedy máme

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{s}. \quad (10.36)$$



Obr. 10.3 Schéma k odvození paprskové rovnice

Po vynásobení obou stran rovnice (10.36) (prostorově závislým) indexem lomu a derivování podle  $s$ , tedy ve směru  $\vec{s}$  (podle paprsku), dostaneme

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \right) = \nabla n, \quad (10.37)$$

což je *paprsková rovnice*. Platnost vektorové rovnice (10.37) ukážeme ve složkách. Například  $x$ -ovou složku levé strany (10.37) můžeme podle (10.36) a podle definice derivace ve směru (pro jednoduchost označíme  $n\vec{s} = \vec{a}$ ) formálně přepsat

$$\left[ \frac{d}{ds} \left( n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) \right]_x = (\vec{s} \cdot \nabla)(n\vec{s})_x = (\vec{s} \cdot \nabla)a_x = s_x \frac{\partial a_x}{\partial x} + s_y \frac{\partial a_x}{\partial y} + s_z \frac{\partial a_x}{\partial z}. \quad (10.38)$$

Protože podle (10.25) je  $\nabla \times \vec{a} = 0$ , jak plyne z eikonálové rovnice, platí pro parciální derivace komponent  $a_j$

$$\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} = 0. \quad (10.39)$$

Vztah (10.38) můžeme podle (10.39) ( $\vec{s}$  je jednotkový vektor) upravit

$$\left[ \frac{d}{ds} \left( n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) \right]_x = s_x \frac{\partial a_x}{\partial x} + s_y \frac{\partial a_y}{\partial x} + s_z \frac{\partial a_z}{\partial x} = (s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) \frac{\partial n}{\partial x} = (\nabla n)_x, \quad (10.40)$$

což je již paprsková rovnice (10.37) pro  $x$ -ovou složku.

Vyřešením paprskové rovnice pro danou závislost  $n = n(\vec{r})$  dostaneme dráhu paprsku, tedy  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ . Jako příklad můžeme uvést šíření v prostředí s konstantním indexem lomu. Pak bude mít paprsková rovnice jednoduchý tvar

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = 0. \quad (10.41)$$

Její řešení je

$$\vec{r} = \vec{a}s + \vec{b}, \quad (10.42)$$

kde  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$  jsou konstantní vektory. V tomto případě se tedy šíří světlo po přímce, přímočaře. Rovnici můžeme ovšem použít k výpočtům i v obecném případě proměnného indexu lomu, kdy paprsky mohou být složité křivky.

### 10.1.5 Fermatův princip

Nyní ukážeme, že platí *Fermatův princip*, který je často považován za základní východisko geometrické optiky (Pierre de Fermat, 1662). Uvažujme paprsky jako na obr. 10.4, dva blízké paprsky například procházejí mezi body  $P_1, P_2$ , respektive  $P'_1, P'_2$ . V jejich blízkém okolí uvažujme libovolnou křivku  $AP_1P_2B$ .

Jsou zde také zakresleny dvě blízké plochy konstantního eikonálu s hodnotami  $S$  a  $S + dS$ . Podle vztahu (10.26) platí  $\oint n \vec{s} \cdot d\vec{l} = 0$ . Počítáme-li cirkulaci po křivce tvořené malými úseky  $P_1P'_1P_2P'_2$ , máme

$$(n \vec{s} \cdot d\vec{l})_{P_1 P_1'} + (n \vec{s} \cdot d\vec{l})_{P_2' P_2} - (n \vec{s} \cdot d\vec{l})_{P_2 P_1} = 0. \quad (10.43)$$

Poslední člen představuje část cirkulace po paprsku. Prostřední člen odpovídající úseku  $P_2 P_2'$  je roven nule,

$$(n \vec{s} \cdot d\vec{l})_{P_2' P_2} = 0, \quad (10.44)$$

protože je zřejmě podle (10.24) vektor  $\vec{s}$  kolmý k ploše konstantního eikonálu, po níž se integruje. Pro optickou délku úseku křivky  $P_1 P_2'$  platí zřejmě

$$(n dl)_{P_1 P_2'} \geq (n dl \cos \alpha)_{P_1 P_2'} \quad (10.45)$$

pro libovolný úhel  $\alpha$ . Je-li to úhel mezi vektory  $\vec{s}$  a  $d\vec{l}$ , je

$$(n dl \cos \alpha)_{P_1 P_2'} = (n \vec{s} \cdot d\vec{l})_{P_1 P_2'}. \quad (10.46)$$



Obr. 10.4 K výkladu Fermatova principu

Z rov. (10.43 až 46) plyne

$$(n dl)_{P_1 P_2'} \geq (n dl)_{P_1 P_2} = (n dl)_{P_1' P_2}, \quad (10.47)$$

poslední rovnost platí, protože se jedná o velikosti optické dráhy po paprscích mezi plochami stejného eikonálu. Nerovnost (10.47) znamená, že délka optické dráhy po úseku libovolné křivky je větší než délka optické dráhy po odpovídajícím úseku paprsku. Uvedený postup můžeme opakovat pro další úseky zvolené křivky  $AB$ . Odtud tedy plyne závěr, že optická dráha po (libovolné) křivce  $AB$  je větší než optická dráha po paprsku. To je jedna z formulací *Fermatova principu*:

$$\int_{\text{LIBOVOLNÁ KŘIVKA}} n dl \geq \int_{\text{PAPRSEK}} n dl. \quad (10.48)$$

Světlo se tedy šíří tak, že délka optické dráhy po paprsku je kratší než délky optických drah po libovolných jiných křivkách, které leží v okolí paprsku.

Doba šíření světla je rovna podílu délky optické dráhy a rychlosti světla ve vakuu. Fermatův princip bývá proto také často formulován jako princip nejkratšího času, tedy, že světlo se šíří mezi dvěma body tak, aby doba šíření byla co nejkratší. Takto ho také Fermat původně (1891) vyslovil. Obecněji je ovšem možné ho formulovat tak, že optická dráha mezi dvěma body, kterými prochází světelný paprsek, je extrémální (tj. musí být minimální, maximální nebo musí odpovídat inflexnímu bodu). Řečeno jinak, variace dráhy musí být nulová. Princip se vztahuje na křivky v blízkém okolí, nemusí jít o globální extrém.

## 10.2 GEOMETRICKÁ OPTIKA SFÉRICKÝCH PLOCH

Pod pojmem geometrická optika se většinou chápe nauka zabývající se průchodem optických paprsků čočkami, zrcadly a jinými zobrazovacími prvky, tedy optickým zobrazením. Z hlediska základních zákonů fyziky stačí pro naprostou většinu vyšetřovaných případů znalost zákona lomu. Šíření světla soustavou je pak možné studovat tak, že z jednotlivých bodů předmětu necháme vystupovat myšlené paprsky pod různými směry a necháme je lámat a odrážet na jednotlivých optických rozhraních. Současné počítače tak dovolují vyšetřit šíření velkého počtu paprsků a úlohu vyřešit. Této metodě se říká obvykle *metoda sledování paprsků* („ray tracing“). Po staletí se však vyvíjely i jiné postupy výpočtu zobrazovacích soustav v různých stupních aproximací. Byly také řešeny základní otázky související s optickým zobrazením, tedy co to je dokonalé zobrazení, jaká matematická transformace mu odpovídá a za jakých experimentálních podmínek je možné ho realizovat. Nebudeme se zde obecně těmito problémy zabývat, jejich rozbor je možné nalézt například v knize Borna a Wolfa. Připomeneme pouze, že při ideálním zobrazení odpovídá každému bodu předmětového prostoru právě jeden bod prostoru obrazového (sdružené body), podobně každé úsečce, resp. rovině, odpovídá sdružená úsečka, resp. rovina. Obraz vytvořený v rovině kolmé k ose soustavy (v osově symetrické soustavě) je v geometrickém smyslu podobný předmětu.

Omezíme se zde na případ zobrazení, ke kterému dochází při lomu světla na kulových rozhraních mezi prostředími s různými indexy lomu a při odrazu světla na kulových zrcadlech. Budeme se zabývat nejjednodušším případem, kdy paprsky šířící se osově symetrickou soustavou svírají malé úhly s osou soustavy. Tento případ se nazývá paraxiální aproximací. Odvo-

díme příslušné *zobrazovací rovnice*, které spojují souřadnice vzoru a obrazu. Vzhledem k osově souměrnosti zobrazovacích soustav stačí užívat dvě souřadnice, „příčnou“ ve směru kolmém k ose soustavy, kterou budeme označovat  $y$ , a podélnou ve směru optické osy, kterou budeme označovat  $z$ . K zvláštnostem geometrické optiky patří, že se zavádí při výpočtu celá řada souřadných soustav: s každým optickým prvkem je spojena souřadná soustava předmětová (v předmětovém prostoru) a souřadná soustava obrazová (v obrazovém prostoru). Důvodem je skutečnost, že zobrazovací rovnice je možné psát ve stejném tvaru pro každý optický prvek.

## 10.2.1 Znaménková konvence

K další zvláštnosti geometrické optiky patří *znaménková konvence*, která zavádí vzdálenosti a úhly jako orientované veličiny. Důsledně užívaná konvence umožňuje používat zobrazovací rovnice ve stejném tvaru pro různé případy a získat přímočaře výsledky se správnými znaménky (například, zda je čočka spojná či rozptylná). Ke koloritu geometrické optiky patří, že většina učebnic a knih užívá znaménkovou konvenci, ale každá jinou. Zvolená konvence vede ovšem k jisté modifikaci rovnic a vztahů geometrické optiky, proto je nutné převzít vztahy i s příslušnou konvencí. Zavedeme zde znaménkovou konvenci, kterou dále budeme v geometrické optice užívat. Vycházíme přitom z konvence normy DIN 1335.

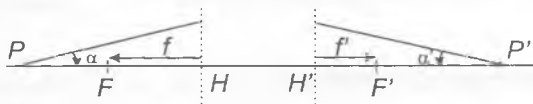
Kladné jsou všechny dráhy a úsečky odměřované od vztažného bodu ve směru šíření světelných paprsků a od vztažného bodu směrem nahoru. Schémata se zakreslují tak, že světlo se šíří zleva doprava, po odraze na zrcadle může být ovšem směr opačný. Vzdálenosti se znázorňují orientovanými úsečkami s počátkem ve vztažném bodě. Vztažnými body jsou:

1. pro kulové plochy body na ploše (poloměr křivosti je orientován od bodu na ploše do středu křivosti plochy);
2. pro ohniskové vzdálenosti příslušné hlavní body (ohnisková vzdálenost je orientována od hlavního bodu k ohniskovému bodu);
3. pro souřadnice bodů počátky odpovídajících souřadných systémů, obvykle buď hlavní body, nebo ohniska. Souřadnice v souřadném systému s počátkem v hlavním bodě se označují malými písmeny, tj.  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , v souřadném systému spojeném s ohnisky velkými písmeny, tj.  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ). Pro souřadnici  $z$  měřenou od hlavního bodu se často z historických důvodů používá označení  $a$ . U kulových ploch se často měří vzdálenost od vrcholu lámavé plochy (vztažný bod), která se označuje  $s$ .

Úhly se měří od vztažného ramene k druhému rameni. Pokud postupujeme od vztažného ramene k druhému rameni v kladném smyslu (proti směru pohybu hodinových ručiček), je úhel kladný. Vztažným ramenem je:

1. pro úhly dopadu kolmice dopadu,
2. pro úhly paprsků a poloměrů křivosti paprsky a poloměry křivosti (například úhel, který svírá paprsek s osou soustavy se měří od paprsku k ose).

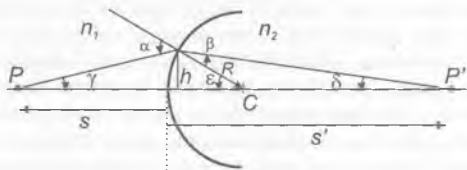
Uvedená znaménková konvence je ilustrována na obr. 10.5.



**Obr. 10.5** Ilustrace znaménkové konvence. Paprsek vycházející z bodu  $P$  dopadá po průchodu optickou soustavou do bodu  $P'$ .  $H, H'$  jsou předměťový, resp. obrazový hlavní bod, od nichž se měří předmětová ohnisková vzdálenost  $f$ , resp. obrazová ohnisková vzdálenost  $f'$ . Podle konvence je na obrázku vzdálenost  $f'$  kladná,  $f$  záporná, úhel  $\alpha$  záporný, úhel  $\alpha'$  kladný

## 10.2.2 Abbeův invariant

Nyní se budeme zabývat lomem a odrazem světla na kulovém optickém rozhraní. Na obr. 10.6 je znázorněna kulová plocha o poloměru  $R$  se středem v bodě  $C$ , která odděluje prostředí s indexem lomu  $n_1$  a  $n_2$ . Z bodu  $P$  vychází paprsek, který dopadá na optické rozhraní a láme se do bodu  $P'$ . Přímka  $PP'$  prochází středem křivosti plochy, v uvedeném kontextu se nazývá osou zobrazovacího prvku. Bod, v němž dopadá paprsek na kulové rozhraní, je ve vzdálenosti  $h$  od osy  $PP'$ . Vzdálenosti bodu  $P$ , resp.  $P'$ , od vrcholu kulové plochy jsou  $s$ , resp.  $s'$ . Budeme je udávat v zavedené konvenci geometrické optiky. Na obr. 10.6 jsou vyznačeny úhly (je použita znaménková konvence). Z geometrie zřejmě plyne



**Obr. 10.6** K odvození Abbeovy rovnice pro lom paprsků na kulovém optickém rozhraní



$$\alpha = -\gamma + \varepsilon \quad (10.49)$$

$$\varepsilon = \beta + \delta \quad (10.50)$$

Budeme dále předpokládat, že vzdálenost  $h$  je tak malá, že úhly jsou natolik malé, že jejich tangenty můžeme nahradit s dobrou přesností jejich argumenty. Tato aproximace se nazývá *paraxiální aproximací*. V uvedené aproximaci platí

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{h}{s} \quad (10.51)$$

$$\delta \approx \operatorname{tg} \delta = \frac{h}{s'} \quad (10.52)$$

$$\varepsilon \approx \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{h}{R} \quad (10.53)$$

Podle zákona lomu v paraxiální aproximaci ovšem platí

$$n_1 \alpha = n_2 \beta \quad (10.54)$$

Ze vztahů (10.49, 10.50) a (10.54) máme

$$n_1 (-\gamma + \varepsilon) = n_2 (\varepsilon - \delta), \quad (10.55)$$

a

$$n_1 \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{R} \right) = n_2 \left( \frac{1}{s'} - \frac{1}{R} \right). \quad (10.56)$$

Tato rovnice spojuje vzdálenost  $s$ , se vzdáleností  $s'$ , vystupují v ní pouze indexy lomu a poloměr kulové plochy. To znamená, že všechny paprsky vycházející pod libovolným úhlem vůči ose z bodu  $P$  dopadají do jednoho bodu  $P'$  na ose (stigmatické zobrazení). Levá i pravá strana rovnice (10.56) má stejný tvar, nazývá se často *Abbeovým invariantem*.

Jak se zobrazují body, které neleží na ose? Uvažujme bod vzdálený  $y$  od osy, který se zobrazí do bodu vzdáleného  $y'$  od osy. V paraxiální aproximaci pro zobrazení bodu, který leží ve vzdálenosti  $y$  nad osou, můžeme nalézt vzdálenost  $y'$  jeho obrazu od osy jednoduše z geometrie, jak je uvedeno na obr. 10.7. Zřejmě platí

$$\theta_1 = \frac{y}{-s}, \quad (10.57)$$

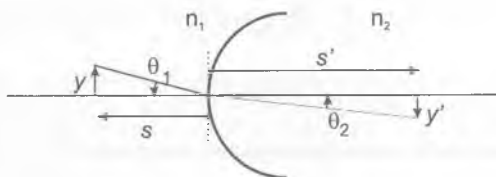
$$\theta_2 = \frac{-y'}{s'}. \quad (10.58)$$

Podle zákona lomu

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2. \quad (10.59)$$

Z rov. (10.57–59) máme vztah pro příčné zvětšení  $\beta_0$

$$\beta_0 = \frac{y'}{y} = \frac{n_1 s'}{n_2 s}. \quad (10.60)$$



Obr. 10.7 K výkladu příčného zvětšení při lomu na kulové ploše

### 10.2.3 Kardinální body optické soustavy

V geometrické optice se pro jednotlivé zobrazovací soustavy definují důležité, tzv. *kardinální body*. K nim patří ohniskové, hlavní a uzlové body. Uvedeme nyní jejich definici a ukážeme, jak je možné určit jejich polohu pro kulovou lámavou plochu.

*Hlavní body* optické soustavy jsou navzájem sdružené (vzor – obraz) body  $H, H'$ , které jsou průsečíky *předmětové a obrazové hlavní roviny* (roviny kolmé k optické ose). Hlavní roviny jsou navzájem sdružené a mají tu vlastnost, že příčné zvětšení je při zobrazení rovno jedné. Tedy rovnost

$$\beta_0 = 1 \quad (10.61)$$

je podmínkou pro hlavní roviny. V případě kulové lámavé plochy je z názoru zřejmé (zákon lomu), že budeme-li posunovat předmět (úsečku  $y$ ) podél osy, dostaneme vždy obraz, pro nějž  $y \neq y'$ . Výjimkou bude případ, kdy se zobrazuje bod ležící na optickém rozhraní, kdy ovšem splývá bod a obraz. Protože je optické rozhraní tvořeno kulovou plochou, měli bychom místo hlavní roviny „hlavní kulovou plochu“. Ale v paraxiální aproximaci je

obraz umístěn tak blízko osy, že kulovou plochu můžeme aproximovat rovinou. U kulového rozhraní tedy v paraxiální aproximaci obě hlavní roviny splývají a procházejí vrcholem lámavé plochy, hlavní body  $H=H'$  leží ve vrcholu (vrcholem se myslí průsečík optické osy s lámavou plochou).

Jak jsou definované ohniskové body? Předmětový  $F$  a obrazový  $F'$  ohniskový bod nejsou navzájem sdružené body, jsou to průsečíky odpovídajících ohniskových rovin s optickou osou. *Předmětová ohnisková rovina* je rovina (kolmá k optické ose), jejíž body se zobrazí do nekonečna. *Obrazová ohnisková rovina* je rovina, do níž se zobrazí body ležící v nekonečnu (v „minus nekonečnu“ podle znaménkové konvence). Ohniskové body  $F, F'$  jsou sdružené s body, které leží v nekonečnu na optické ose. Kde leží ohniskové body kulové lámavé plochy? Abbeův invariant můžeme přepsat

$$\frac{n_1}{s} \frac{n_2}{s'} = \frac{n_1 - n_2}{R}, \quad (10.62)$$

$$\frac{n_1 R}{n_1 - n_2} - \frac{n_2 R}{s'} = 1. \quad (10.63)$$

Polohu obrazového ohniskového bodu určíme, když si uvědomíme, že je obrazem bodu ležícího v nekonečnu, tedy z podmínky  $s \rightarrow -\infty$ :

$$s'_{F'} = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}. \quad (10.64)$$

Podobně pro polohu předmětového ohniska  $s' \rightarrow \infty$ ,

$$s_F = \frac{n_1 R}{n_1 - n_2}. \quad (10.65)$$

*Ohniskové vzdálenosti*, jak jsme uvedli již při zavádění znaménkové konvence, se definují jako orientované vzdálenosti měřené od hlavních bodů k ohniskovým bodům. Předmětová ohnisková vzdálenost  $f$  je rovna

$$f = s_F - s_H \quad (10.66)$$

a obrazová ohnisková vzdálenost  $f'$

$$f' = s'_{F'} - s'_{H'}. \quad (10.67)$$

Pro lom na kulové ploše je, jak jsme uvedli,  $s_H = s'_H = 0$ , proto

$$f = \frac{n_1 R}{n_1 - n_2}, \quad (10.68)$$

$$f' = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}. \quad (10.69)$$

Pro podíl ohniskových vzdáleností dostáváme

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n_2}{n_1}. \quad (10.70)$$

Uvidíme později, že tento vztah mezi obrazovým a předmětovým ohniskem platí obecně i pro složitější optické soustavy. *Uzlové body*  $N, N'$  jsou dva sdružené body, pro které je úhlové zvětšení rovno jedné, jak uvedeme v odstavci 10.2.6.

## 10.2.4 Zobrazovací rovnice

Abbeův invariant ve tvaru (10.63) můžeme přepsat do jednoduchého tvaru, který spojuje vzdálenosti předmětu a obrazu pomocí ohniskových vzdáleností:

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1. \quad (10.71)$$

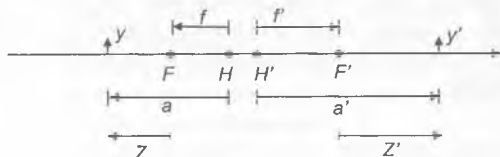
Vzdálenosti  $s, s'$  měřené od vrcholu lámavé plochy jsou v případě lomu na kulovém optickém rozhraní rovny vzdálenostem  $a, a'$  měřeným od hlavních bodů, protože hlavní body leží ve vrcholu lámavé plochy. Můžeme tedy psát

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1, \quad (10.72)$$

což je známý *Gaussův tvar zobrazovací rovnice*. Také příčné zvětšení je možné vyjádřit pomocí vzdáleností  $a, a'$

$$\beta_0 = \frac{y'}{y} = \frac{n_1}{n_2} \frac{a'}{a}. \quad (10.73)$$

Zobrazovací rovnice (10.72), (10.73) můžeme ovšem přepsat i pomocí vzdáleností měřených od ohniskových bodů. Stačí správně vyjádřit transformaci vzdáleností, která je zřejmá z obr. 10.8.



**Obr. 10.8** Vztah mezi vzdálenostmi měřenými v soustavách spojených s hlavními a ohniskovými body

Podle obr. 10.8 zřejmě platí

$$a = f + Z \quad (10.74)$$

$$a' = f' + Z'. \quad (10.75)$$

Přímým dosazením rov. (10.74), (10.75) do rov. (10.72) máme

$$Z Z' = f f' \quad (10.76)$$

a dosazením do (10.73)

$$\beta_0 = \frac{Y'}{Y} = \frac{n_1}{n_2} \frac{Z' + f'}{Z + f}, \quad (10.77)$$

a dále s uvážením (10.76)

$$\beta_0 = \frac{Y'}{Y} = -\frac{Z'}{f'} = -\frac{f}{Z}. \quad (10.78)$$

Vztahy (10.76) a (10.78) se nazývají *Newtonovy zobrazovací rovnice*.

Gaussovy a Newtonovy zobrazovací vztahy (rovnice) jsou obecným tvarem rovnic pro optické zobrazení. Protože naprostá většina zobrazovacích prvků v optice je tvořena sférickými plochami, pro něž jsme ukázali platnost uvedených vztahů, nebudeme se jejich obecnější platností zabývat.

## 10.2.5 Zrcadlové plochy

Po odrazu světla se změní směr jeho šíření, světlo se šíří stále v prostředí se stejným indexem lomu, fázová rychlost tedy mění pouze znaménko. Úvahy a vztahy, které jsme uvedli výše pro lom světla na rozhraní mezi prostředními s indexy lomu  $n_1$ ,  $n_2$ , můžeme použít i na případ odrazu světla, položíme-li formálně

$$n_1 = -n_2. \quad (10.79)$$

Pak podle rov. (10.64), (10.65), resp. (10.68) a (10.69) je

$$s'_{F'} = f' = \frac{R}{2}, \quad (10.80)$$

$$s_F = f = \frac{R}{2}. \quad (10.81)$$

Zřejmě je

$$f = f', \quad (10.82)$$

jak také vychází z (10.70) pro  $n_1 = -n_2$ . Zobrazovací vztah (10.72) pro zrcadlo lze tedy psát

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{2}{R}. \quad (10.83)$$

Pro příčné zvětšení (10.73) vychází pro (10.79)

$$\beta_0 = \frac{y'}{y} = -\frac{a'}{a}. \quad (10.84)$$

Kulová zrcadla se dají rozdělit na vypuklá (konvexní) a dutá (konkávní). V souhlasu se zde používanou znaménkovou konvencí je pro vypuklá zrcadla jejich poloměr  $R > 0$ , pro zrcadla dutá je  $R < 0$ . Pro předmět před zrcadlem je  $a < 0$ . Z (10.83) tedy pro vypuklá zrcadla plyne  $a' > 0$ , tedy, že obraz vzniká v prostoru za zrcadlem a je virtuální. Podle (10.84) je  $\beta_0 > 0$ , obraz je vzpřímený. Pro dutá zrcadla ( $R < 0$ ) pro  $|a| > \left| \frac{R}{2} \right|$  je  $a' < 0$ , a  $\beta_0 < 0$ , tedy obraz vzniká v prostoru před zrcadlem, je tedy reálný a převrácený. Pro dutá

zrcadla pro  $|a| < \left| \frac{R}{2} \right|$  je  $a' > 0$ , a  $\beta_0 > 0$ , což znamená, že obraz je virtuální

a vzpřímený. K uvedeným závěrům lze dospět také pomocí geometrické konstrukce, v případě zrcadel obzvlášť jednoduché (použití dvou speciálních paprsků vycházejících z bodu předmětu: jeden paprsek procházející (eventuálně v prodloužení za zrcadlo) středem poloměru křivosti zrcadla zachovává při odrazu svůj směr, druhý paprsek procházející ohniskem se šíří po odrazu rovnoběžně s osou).

Kulová zrcadla zajišťují ovšem ideální zobrazení pouze v paraxiální aproximaci. Pro obecný případ dochází k vadám zobrazení. Zrcadlová koule (vánoční ozdoba) dovoluje ovšem (zkresleně) zobrazit téměř celý prostor kolem ní. Skutečně, pozorujeme-li kouli o poloměru  $R$  z velké vzdálenosti, dopadají do oka paprsky (přibližně rovnoběžné), jejichž úhel odrazu se při změně záměrné vzdálenosti od středu koule k jejím krajům mění od  $0$  do  $180^\circ$ . V kouli lze vidět vše, kromě prostoru za ní. Uvedené zobrazení prostoru (které studoval podobně Helmholtz) hraje jistou roli v teorii relativity.

## 10.2.6 Zvětšení při optickém zobrazení

*Příčné zvětšení* v paraxiální aproximaci jsme uvedli výše

$$\beta_0 = \frac{Y'}{Y} = -\frac{Z'}{f'}, \text{ resp. } \beta_0 = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{f'} \frac{a'}{a}. \quad (10.85)$$

Hlavní roviny jsou definovány podmínkou  $\beta_0 = 1$ . *Úhlové zvětšení* je definováno ( $\alpha, \alpha'$  jsou úhly, které svírá paprsek s osou  $z$ ) jako

$$\gamma_0 = \frac{\tan \alpha'}{\tan \alpha} = \frac{f}{Z'}, \text{ resp. } \gamma_0 = \frac{\tan \alpha'}{\tan \alpha} = \frac{a}{a'}. \quad (10.86)$$

Uzlové body jsou určeny podmínkou  $\gamma_0 = 1$ . V případě, kdy  $n_1 = n_2$ , tedy, kdy je například před čočkou i za čočkou prostředí se stejným indexem lomu, uzlové a hlavní body splývají, jak plyne přímo z rov. (10.70), (10.85) a (10.86).

*Podélné zvětšení* je definováno

$$\alpha_0 = \frac{dZ'}{dZ}. \quad (10.87)$$

Diferencováním rovnice (10.76)  $ZZ' = f f'$  dostaneme

$$\frac{dZ'}{dZ} = -\frac{Z'}{Z}, \quad (10.88)$$

nebo

$$\frac{dZ'}{dZ} = -\frac{f'}{f} \beta_0^2. \quad (10.89)$$

Z výše uvedených vztahů pak máme

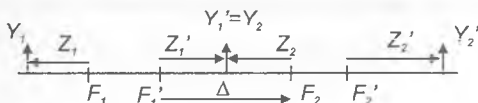
$$\alpha_0 \gamma_0 = \beta_0. \quad (10.90)$$

Pro častý případ  $f = -f'$  pak platí

$$\gamma_0 = \frac{1}{\beta_0}, \quad (10.91)$$

$$\alpha_0 = \beta_0^2. \quad (10.92)$$

### 10.2.7 Kombinace dvou zobrazení



Obr. 10.9 Kombinace dvou zobrazení

Podíváme se nyní na situaci, kdy je zobrazovací prvek tvořen kombinací dvou jednodušších prvků, jejichž zobrazení je popsáno zobrazovacími vztahy (10.76), (10.78). To odpovídá například zobrazení lomem na dvou po sobě následujících kulových plochách. Situace je znázorněna na obr. 10.9. Budeme používat Newtonovy zobrazovací vztahy, a tedy souřadné systémy spojené s ohniskovými body. První zobrazovací prvek je charakterizován ohniskovými body  $F_1, F_1'$  a ohniskovými vzdálenostmi  $f_1, f_1'$ , druhý prvek má ohniskové body  $F_2, F_2'$  a vzdálenosti  $f_2, f_2'$ . Předpokládáme, že oba prvky jsou umístěny tak, aby jejich optické osy splývaly. Vzdálenost mezi oběma prvky se obvykle vyjadřuje pomocí *optického intervalu*  $\Delta$ , tedy vzdálenosti měřené od obrazového ohniska  $F_1'$  prvního prvku k předmětovému ohnisku  $F_2$  druhého prvku. Uvažujme nyní předmět



znázorněný šipkou, jejíž koncový bod má v předmětovém prostoru prvního prvku souřadnice  $Z_1, Y_1$ . První prvek vytvoří obraz, který má v jeho obrazovém prostoru souřadnice  $Z'_1, Y'_1$ . Obrazový prostor prvního prvku je ovšem současně předmětovým prostorem prvku druhého, souřadnice předmětu pro druhý zobrazovací prvek jsou  $Z_2, Y_2$ . Souřadnice výsledného obrazu v obrazovém prostoru druhého prvku jsou  $Z'_2, Y'_2$ . Podle obrázku zřejmě platí

$$Z'_1 - Z_2 = \Delta. \quad (10.93)$$

Dále platí zobrazovací vztahy

$$Z_1 Z'_1 = f_1 f'_1, \quad (10.94)$$

$$Z_2 Z'_2 = f_2 f'_2. \quad (10.95)$$

Nyní najdeme polohu ohniskových a hlavních bodů kombinace dvou zobrazení a ukážeme, že i pro výslednou kombinaci platí opět Newtonovy zobrazovací vztahy. Z (10.93) a (10.94) dostaneme

$$Z_2 = \frac{f_1 f'_1}{Z_1} - \Delta, \quad (10.96)$$

a z (10.95)

$$Z'_2 = \frac{f_2 f'_2}{\frac{f_1 f'_1}{Z_1} - \Delta}. \quad (10.97)$$

Odtud můžeme určit polohu výsledných ohniskových bodů: souřadnici obrazového ohniskového bodu  $F'$  (souřadnice v soustavě spojené s obrazovým ohniskem  $F'_2$ ) dostaneme z (10.97) v limitě  $Z_1 \rightarrow -\infty$

$$Z'_{2F'} = -\frac{f_2 f'_2}{\Delta}. \quad (10.98)$$

Podobně pro  $Z'_2 \rightarrow \infty$  máme pro polohu předmětového ohniska

$$Z_{1F} = \frac{f_1 f'_1}{\Delta}. \quad (10.99)$$

Tyto polohy ohniska jsme mohli ovšem určit i jednodušším způsobem: paprsky přicházející rovnoběžně s osou se protnou v ohniskovém bodě prv-

ního prvku (například čočky)  $F'_1$ . Tento prvotní obraz je dále zobrazován druhou čočkou, podle Newtonova vztahu (10.76) dostaneme výsledek (10.98), uvážíme-li, že  $Z_2 = -\Delta$ . Odtud je zřejmé, proč ve vztahu (10.98) nevystupuje ohnisková vzdálenost první čočky. Podobnou úvahu můžeme provést i pro předmětové ohnisko.

Určíme nyní polohu hlavních bodů složené soustavy. Pro příčné zvětšení prvního a druhého prvku máme

$$\frac{Y'_1}{Y_1} = -\frac{Z'_1}{f'_1}, \quad (10.100)$$

$$\frac{Y'_2}{Y_2} = -\frac{Z'_2}{f'_2}. \quad (10.101)$$

Je jasné, že  $Y'_1 = Y'_2$ . Vydělením rovnic (10.100) a (10.101) a dosazením z (10.94), resp. (10.97), dostaneme pro příčné zvětšení celé soustavy

$$\frac{Y'_2}{Y_1} = \frac{Z'_2 Z'_1}{f'_2 f'_1} = \frac{f_2 f'_2 \frac{f_1 f'_1}{Z_1}}{f'_2 f'_1 \left( \frac{f_1 f'_1}{Z_1} - \Delta \right)}. \quad (10.102)$$

Polohu předmětového hlavního bodu dostaneme nyní jednoduše z (10.102) a z podmínky  $\frac{Y'_2}{Y_1} = 1$ , která hlavní body definuje:

$$Z_{1H} = \frac{f_1 f'_1 - f_1 f_2}{\Delta}. \quad (10.103)$$

Pro polohu obrazového hlavního bodu máme například z (10.97)

$$Z'_{2H'} = \frac{f'_2 f'_1 - f_2 f'_2}{\Delta}. \quad (10.104)$$

Výsledné ohniskové vzdálenosti můžeme určit z jejich definice jako vzdálenosti měřené od hlavních bodů k ohniskovým bodům, tedy

$$f = Z_{1F} - Z_{1H} \quad (10.105)$$

a

$$f' = Z'_{2F'} - Z'_{2H'}. \quad (10.106)$$

Dosazením z rov. (10.98), (10.99) a (10.103), (10.105) máme výsledek

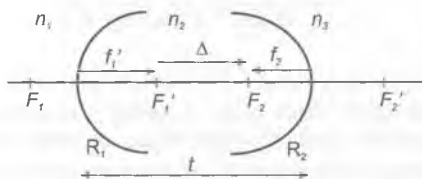
$$f = \frac{f_1 f_2}{\Delta}, \quad (10.107)$$

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta}. \quad (10.108)$$

Pro kombinaci dvou zobrazení jsme tedy dostali polohu ohniskových a hlavních bodů a velikosti ohniskových vzdáleností. Vyjádříme-li nyní souřadnice obrazu a vzoru v souřadném systému spojeném s výslednými ohniskovými body  $F, F'$ , můžeme přímo ukázat, že pro výsledné zobrazení platí obecné Newtonovy zobrazovací vztahy (10.76, 10.78).

Uvedeným postupem můžeme kombinovat libovolný počet zobrazovacích prvků.

## 10.2.8 Optická čočka



Obr. 10.10 Schéma obecné čočky, tedy dvou kulových ploch oddělujících tři prostředí s indexy lomu  $n_1, n_2, n_3$

Optická čočka je zobrazovací prvek, který je tvořen kombinací dvou sférických lámavých ploch. Nejčastěji je čočka vyrobena ze skla a je umístěna ve vzduchu. Na obř. 10.10 je znázorněna obecná čočka, tj. kombinace dvou lámavých ploch s poloměry  $R_1$  a  $R_2$ , které oddělují prostředí s indexy lomu postupně  $n_1, n_2, n_3$ . Osou zobrazovací soustavy je přímka spojující středy křivosti obou ploch. Tloušťka čočky  $t$  je kladná geometrická vzdálenost vrcholů obou ploch. Tloušťka čočky je spojena s optickým intervalem a ohniskovými vzdálenostmi obou lámavých ploch, jak je zřejmé z obrázku  $t = f_1' + \Delta - f_2$ . Užíváme zde, stejně jako všude v této kapitole, znaménkovou konvenci. Pro ohniskové vzdálenosti obou lámavých ploch platí

$$f_1 = \frac{R_1 n_1}{n_1 - n_2}, \quad (10.109)$$

$$f_1' = \frac{R_1 n_2}{n_2 - n_1}, \quad (10.110)$$

$$f_2 = \frac{R_2 n_2}{n_2 - n_3}, \quad (10.111)$$

$$f_2' = \frac{R_2 n_3}{n_3 - n_2}. \quad (10.112)$$

Výsledné ohniskové vzdálenosti a polohu hlavních a ohniskových bodů dostaneme jednoduše dosazením do vztahů, které jsme odvodili pro kombinaci dvou zobrazení (10.101) až (10.106). Například pro čočku ve vzduchu, tedy pro  $n_1 = n_3 = 1$ , dostaneme pro výslednou ohniskovou vzdálenost

$$f' = \frac{n_2 R_1 R_2}{(n_2 - 1)[(n_2 - 1)t + n_2 (R_2 - R_1)]}, \quad (10.113)$$

$$f = -f'. \quad (10.114)$$

Pokud je tloušťka čočky velmi malá, je možné ji zanedbat, a položit tedy  $t = 0$ . V tomto případě se mluví o *tenké čočce*, na rozdíl od případu *čočky tlusté*. Tenká čočka je zřejmě aproximací, která se však velmi často používá pro jednoduchost výrazů. V aproximaci tenké čočky ve vzduchu můžeme psát výraz pro obrazovou ohniskovou vzdálenost ve tvaru

$$\frac{1}{f'} = (n_2 - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (10.115)$$

kterému se často říká *rovnice výrobců čoček*, protože dovoluje pro daný index lomu skla čočky zvolit vhodné poloměry křivosti jejích ploch, aby měla požadovanou ohniskovou vzdálenost. Opět samozřejmě platí (10.114). Pro tenkou čočku, která je z materiálu o indexu lomu  $n_2$ , v prostředí s indexem lomu  $n_1 = n_3$  platí

$$\frac{1}{f'} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (10.116)$$

V praxi se „síla“ čočky umístěné v prostředí  $n_1$  určuje pomocí *optické mohutnosti*, která se definuje

$$P = \frac{n_1}{f'} \quad (10.117)$$

Jednotkou optické mohutnosti je *dioptrie* ( $1D = 1/m$ ). Pro čočku ve vzduchu je ovšem optická mohutnost rovna reciproké hodnotě obrazové ohniskové vzdálenosti. Znaménková konvence, kterou užíváme, dává znaménka optické mohutnosti v soulase s tím, jak jsou používána v praxi, například u očních optiků; spojná čočka má kladnou optickou mohutnost.

Pro výpočet čočky jsou důležité samozřejmě i polohy kardinálních bodů, které můžeme přímo vypočítat ze vztahů (10.101 až 10.104). Z praktického hlediska je vhodné vyjádřit například polohu ohniskových bodů čočky pomocí jejich vzdáleností od vrcholů lámavých ploch. Pro případ čočky ve vzduchu je vzdálenost obrazového ohniska  $F'$  od vrcholu druhé lámavé plochy rovna

$$s'_{F'} = f' \left( 1 - \frac{n_2 - 1}{n_2} \frac{t}{R_1} \right), \quad (10.118)$$

a vzdálenost předmětového ohniska  $F$  od vrcholu první lámavé plochy je

$$s_F = -f' \left( 1 + \frac{n_2 - 1}{n_2} \frac{t}{R_2} \right). \quad (10.119)$$

Pro tenkou čočku je ovšem  $s'_{F'} = f'$  a  $s_F = -f' = f$ , což odpovídá tomu, že hlavní body leží pro tenkou čočku ve vrcholech obou sférických ploch, které splývají.

## 10.3 VYBRANÉ ZOBRAZOVACÍ PŘÍSTROJE

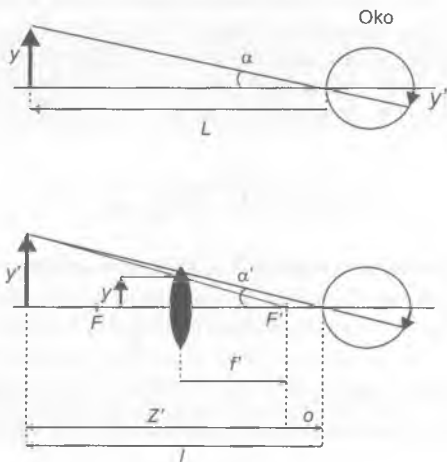
### 10.3.1 Lupa

Lupa, tedy „zvětšovací sklo“, je nejjednodušší optické zařízení, které dovoluje člověku pozorovat malé předměty nebo jejich detaily, které nemůže prostým okem rozlišit. Jedná se o spojnou soustavu, nejčastěji tvořenou jedinou vypuklou čočkou nebo jejich dvojicí či trojicí. Pro optické zob-

razovací přístroje používané k pozorování malých předmětů (lupa, mikroskop) je nejdůležitější vlastností zpravidla jejich zvětšení  $\Gamma$ , které se v tomto případě definuje jako podíl úhlu  $\alpha'$ , pod nímž vidí pozorovatel obraz předmětu vytvořený přístrojem, k úhlu  $\alpha$ , pod nímž vidí pozorovatel předmět v *konvenční zrakové vzdálenosti* 25 cm před okem,

$$\Gamma = \frac{\alpha'}{\alpha}. \quad (10.120)$$

Takto zavedené zvětšení je vhodné, protože je mírou velikosti obrazu předmětu, který vznikne na sítnici oka pozorovatele.



Obr. 10.11 Lupa; pozorování předmětu v konvenční zrakové vzdálenosti  $L$  (nahore) a lupou (dole)

Princip lupy je znázorněn na obr. 10.11. Je-li předmět o velikosti  $y$  umístěn ve vzdálenosti  $L$  před okem pozorovatele, je úhel pozorování

$$\alpha = \frac{y}{L} \quad (10.121)$$

Použije-li nyní pozorovatel lupu, umístí ji mezi předmět a oko tak, aby předmět ležel mezi lupou a jejím předmětovým ohniskovým bodem. Vzniká tak virtuální *vzprámený* obraz předmětu, což je nezbytné například pro čtení.

Uvažujme nejprve obecnou polohu lupy a předmětu, jak je znázorněno na obrázku:  $o$  je vzdálenost měřená od obrazového ohniskového bodu lupy k oku (k jeho „povrchu“),  $l$  je vzdálenost virtuálního obrazu od oka. Úhel, pod nímž vidí pozorovatel virtuální obraz velikosti  $y'$ , je

$$\alpha' = -\frac{y'}{l} \quad (10.122)$$

Zvětšení lupy je tedy

$$\Gamma = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{y' L}{l y}. \quad (10.123)$$

Příčné zvětšení můžeme ovšem vyjádřit podle Newtonova zobrazovacího vztahu (10.78)

$$\frac{y'}{y} = -\frac{Z'}{f'} = -\frac{l+o}{f'}. \quad (10.124)$$

Poslední rovnost je zřejmá z obrázku, odkud máme

$$l = Z' - o. \quad (10.125)$$

Zvětšení lupy můžeme tedy vyjádřit

$$\Gamma = -\frac{L}{f'} \left( 1 + \frac{o}{l} \right). \quad (10.126)$$

Je zřejmé, že zvětšení je závislé na vzájemné poloze předmětu, lupy a oka, což můžeme ověřit snadným experimentováním. Obvykle se uvádí zvětšení lupy pro jeden ze dvou případů. První odpovídá situaci, kdy do oka vstupují rovnoběžné paprsky, tedy virtuální předmět je v nekonečnu, oko pozorovatele je neakomodováno. V tomto případě  $l = -\infty$  a zvětšení

$$\Gamma_{\infty} = -\frac{L}{f'} = \frac{25 \text{ cm}}{f'}. \quad (10.127)$$

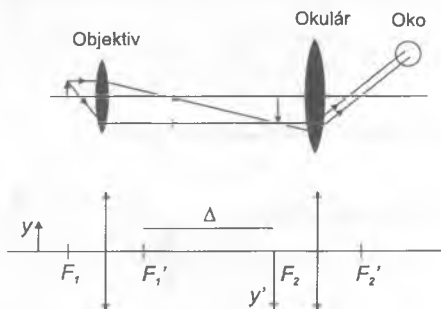
Druhým významným případem je situace, kdy lupa je bezprostředně před okem, tedy  $o = -f'$  (za předpokladu tenké čočky) a kdy umístíte předmět tak, aby virtuální obraz vznikl v konvenční zrakové vzdálenosti, tj.  $l = L$ . Nyní je zvětšení

$${}' \Gamma_L = -\frac{L}{f'} \left( 1 - \frac{f'}{L} \right) = -\frac{L}{f'} + 1 = \Gamma_{\infty} + 1. \quad (10.128)$$

Na lupách se zpravidla udává jako zvětšení číslo odpovídající  $\Gamma_{\infty}$ . Běžné lupy mívají zvětšení  $2\times$  až  $10\times$ , ovšem pro větší zvětšení je většinou nutné používat čočky s korigovanými vadami zobrazení.

### 10.3.2 Mikroskop

Pro pozorování velmi malých objektů je možné zvýšit zvětšení, když k lupě přidáme ještě jednu čočku. Vznikne tak nejjednodušší *mikroskop*, který je sestaven ze dvou spojných čoček. První čočka, objektiv, má malou ohniskovou vzdálenost, okulár je tvořen lupou. Optické uspořádání mikroskopu je znázorněno na obr. 10.12.



**Obr. 10.12** Optické schéma mikroskopu: a) průchod paprsků objektivem a okulárem, b) poloha ohniskových bodů objektivu a okuláru

Předmět je umístěn před ohniskovým bodem objektivu, který vytváří reálný (převrácený) obraz. Ten je pozorován okulárem jako lupou. Pokud je mikroskop zaostřen (tj. je vhodně nastavena vzdálenost mezi okulárem a objektivem), je prvotní obraz vytvořený objektivem v ohniskové rovině okuláru, což znamená, že do oka vstupují rovnoběžné paprsky (oko je neakomodované). Pro zvětšení lupy za těchto podmínek platí vztah (10.127). Příčné zvětšení při zobrazení objektivem je dáno obecným vztahem (10.78), ovšem pro zmíněné nastavení je  $Z'_1 = \Delta$ , kde  $\Delta$  je optický interval soustavy dvou čoček, které tvoří mikroskop. Je tedy

$$\frac{Y'}{Y} = -\frac{Z'_1}{f'_1} = -\frac{\Delta}{f'_1} \quad (10.129)$$



Celkové zvětšení, s nímž pozorovatel vidí předmět, je roven součinu obou zvětšení (10.127), (10.129)

$$\Gamma = \frac{L}{f_2'} \frac{\Delta}{f_1'} = \frac{-25 \text{ cm}}{f_2'} \frac{\Delta}{f_1'} \quad (10.130)$$

Kromě zvětšení je ovšem velmi důležitým parametrem *rozlišení*, tedy schopnost rozlišit malé detaily předmětu. I nejdokonalejší zobrazovací soustava vytváří obraz, který není kopií předmětu, ale je částečně zkreslen. Primárním důvodem jsou konečné rozměry čočky, které vedou k tomu, že ne všechny paprsky vycházející z jednotlivých bodů předmětu dopadnou do jednotlivých bodů obrazu. Z hlediska teorie zpracování obrazu, jak ji stručně uvádíme v kapitole 9., to znamená, že čočka vybírá jen část prostoroového spektra předmětu. Jednoduchý odhad rozlišení optického přístroje můžeme udělat pro případ jedné čočky, která zobrazuje transmisní amplitudovou difrakční mřížku (resp. soustavu rovnoběžných štěrbin). Podle mřížkové rovnice pro kolmý dopad vznikají jednotlivé difrakční řády podle vztahu (8.37), který zde připomínáme

$$a \sin \theta = m \lambda. \quad (10.131)$$

Informace o periodě mřížky  $a$  je obsažena v prvním řádu – proto čočka, která bude mít aperturu takovou, že propustí pouze nultý a první difrakční řád, vytvoří obraz mřížky se správnou periodou, ovšem detailní průběh transmisní funkce mřížky se nemusí zobrazit: například pro pravoúhlou mřížku se objeví v obraze sinový průběh. Mezní rozlišení čočky, tedy nejmenší vzdálenosti v předmětu, které mohou být v obraze rozlišeny, jsou dány podmínkou, že první difrakční řád směřuje na okraj čočky. Je tedy zřejmé, že čím je čočka větší a čím je předmět k ní blíže, tím je možné rozlišit menší detaily, rozlišení je větší. Pokud se předmět blíží k rovině čočky, blíží se úhel prvního difrakčního maxima  $\theta \rightarrow 90^\circ$  a tomu odpovídá podle (10.131) minimální rozlišitelná vzdálenost

$$a_{\text{MIN}} \approx \lambda. \quad (10.132)$$

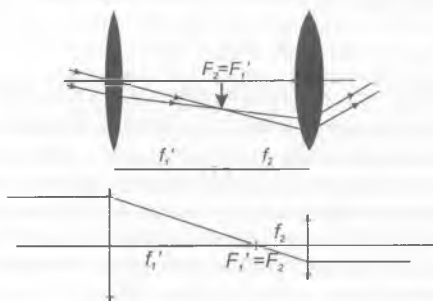
To je základní omezení rozlišení optických zobrazovacích přístrojů; není tedy možné rozlišit detaily menší než vlnová délka světla, která je použita k pozorování. Uvedené úvahy platí ovšem i pro mikroskop. Jeho rozlišení je možné zvýšit zvětšením úhlu, pod kterým mohou vstupovat paprsky do objektivu  $\theta_o$ , ale také zmenšením optické délky světla: to lze udělat tak, že se předmětový prostor objektivu naplní kapalinou, která má větší index lomu

než vzduch (imerze), pak na pravé straně vztahu (10.131) je  $\frac{\lambda}{n}$ . Rozhodující vliv má tedy součin  $n \sin \theta_0$ , který se nazývá *numerickou aperturou objektivu (NA)*. Základní omezení rozlišení délkou vlny zůstává ovšem v platnosti, což je důvodem k používání jejich malých hodnot, jako například v elektronovém mikroskopu, kde obvykle  $\lambda \approx 0,1\text{--}1\text{nm}$ . Podrobnější vyšetřování rozlišení mikroskopu ukazuje, že je závislé také na podmínkách osvětlení pozorovaného předmětu, například, jaký je stav koherence použitého světla.

V biologii se často používá *skenovací konfokální mikroskop*. Jeho optické uspořádání sestává opět ze dvou spojných soustav, ale pracuje jinak než klasický mikroskop. Bodový zdroj světla se zobrazuje objektivem do roviny vzorku, další spojná soustava zobrazuje dále obraz zdroje na detektor, který je umístěn zpravidla za clonou. Název mikroskopu je odvozen od toho, že obě spojně soustavy jsou fokusovány do jedné roviny vzorku. Obraz vzorku je získán tak, že se vzorek posouvá v rovině kolmé ke směru světla, skenuje, po obrazu zdroje (nebo ve složitějším optickém uspořádání je vzorek skenován obrazem zdroje). Signál z detektoru, který je úměrný propustnosti vzorku v místě obrazu zdroje, je zaznamenáván jako funkce polohy. Mikroskop je možné používat pro studium vzorků s větší tloušťkou a přitom rozlišovat obrazy získané v rovinách „různě hluboko“ ve vzorku. Skutečně, díky velmi malé ohniskové vzdálenosti prvního objektivu je intenzita dopadajícího světla velká pouze v jeho ohniskové rovině, paprsky vycházející z jiné roviny téměř neprojdou clonou před detektorem. Tak je možné skenovat vzorek i ve směru jeho tloušťky.

V posledních letech se začala používat další varianta skenovacího mikroskopu, skenující optický mikroskop s blízkým polem (anglické zkratky, kterými se tyto mikroskopy nazývají, jsou SNOM nebo NSOM). Světlo je na vzorek přenášeno velmi tenkým optickým vláknem (zpravidla vlákno, jehož konec je vytažen na průměr přibližně 10 nm), přitom vzdálenost mezi koncem vlákna a vzorkem je velmi malá, vzorek je osvětlován v blízkém poli (viz kapitola o difrakci). Skenuje se poloha vlákna nad vzorkem, vzdálenost konce vlákna od povrchu vzorku je udržována složitě na základě monitorování síly mezi vláknem a vzorkem. Svazek světla prošlý vzorkem je fokusován do detektoru. Prostorové rozlišení je v tomto případě dáno průměrem vlákna a není omezeno difrakcí, může být proto  $\approx 10\text{ nm}$  pro světlo z viditelné spektrální oblasti.

### 10.3.3 Teleskop (dalekohled)



Obr. 10.13 Optické schéma teleskopu: a) průchod paprsků objektivem a okulárem, b) poloha ohniskových bodů objektivu a okuláru

Teleskop je určen pro pozorování velmi vzdálených předmětů. Definici zvětšení (10.120) optického přístroje je v tomto případě nutné modifikovat, protože není možné vzdálené předměty pozorovat v konvenční zrakové vzdálenosti. Zvětšení dalekohledu se proto definuje jako podíl úhlu  $\alpha'$ , pod nímž pozorovatel vidí předmět v dalekohledu, k úhlu  $\alpha$ , pod kterým vidí předmět bez dalekohledu. Je-li předmět ve vzdálenosti  $l$  od pozorovatele, je

$$\alpha = -\frac{Y}{l} \quad (10.133)$$

Optické uspořádání teleskopu je podobné jako v případě mikroskopu – objektiv (spojná čočka nebo spojná optická soustava) vytváří prvotní obraz v ohniskové rovině okuláru. Jako okulár se používá buď spojná, nebo rozptylná čočka (nebo jejich soustava). Pokud je okulár spojná soustava – *Keplerův teleskop*, vzniká převrácený obraz pozorované scény, je-li okulár rozptylná soustava – *Galileův teleskop*, je výsledný obraz vzpřímený. Pro velmi vzdálený předmět je prvotní obraz vytvořený objektivem v jeho obrazové ohniskové rovině, tedy optický interval  $\Delta \rightarrow 0$ . Pro velmi vzdálené předměty je zvětšení dalekohledu rovno jeho úhlovému zvětšení. Úhlové zvětšení teleskopu zaostřeného na nekonečno můžeme velmi jednoduše určit z (10.91) a ze schématu na obr. 10.13. Zřejmě

$$\Gamma = -\frac{f_1'}{f_2'} \quad (10.134)$$

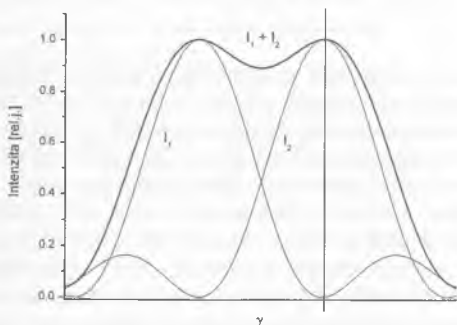
jak plyne ze dvou pravoúhlých trojúhelníků. Geometrická délka  $d_T$  teleskopu je v tomto případě rovna

$$d_T = f_1' - f_2. \quad (10.135)$$

Protože je vždy  $f_1' > 0$ , je Keplerův teleskop ( $f_2 < 0$ ) delší než Galileův teleskop ( $f_2 > 0$ ) se stejným zvětšením. Galileův teleskop vytváří vzpřímený obraz, Keplerův teleskop obraz převrácený. Je možné ho následně převrátit pomocí další vhodné čočky nebo pomocí optického hranolu.

*Rozlišení teleskopu*, definované jako minimální úhel, pod nímž lze rozlišit dva bodové předměty (velmi vzdálené hvězdy), je dalším velmi důležitým parametrem. Pozorujeme-li teleskopem velmi vzdálené dva navzájem nekoherentní bodové zdroje světla s vlnovou délkou  $\lambda$ , nebude prvotní obraz zobrazený objektivem tvořen dvěma body, ale dvěma difrakčními obrazy, které odpovídají Fraunhoferově difrakci na kruhovém otvoru, který vymezuje vstupní světelné paprsky, tedy zpravidla na kruhové vstupní apertuře objektivu. Předmětovému bodu odpovídá Airyho kroužek, jehož úhlový poloměr dostáváme z podmínky pro nulu Besselovy funkce  $\gamma = 1,22\pi$  (viz odst. 8.1.3) a z (8.21). Úhlový poloměr Airyho kroužku je roven ( $\sin\theta \approx \theta$ ,  $D = 2R$ )

$$\Delta\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D}, \quad (10.136)$$

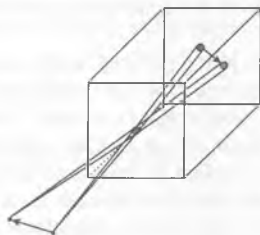


**Obr. 10.14** Rozlišení teleskopu. Zobrazují-li se dva svítící body 1 a 2, odpovídá jim v ohniskové rovině objektivu difrakční rozložení intenzit  $I_1$  a  $I_2$ . Podle Rayleighova kritéria lze ještě rozlišit tak blízké dva body, pro které jsou difrakční obrazce posunuty tak, že maximum jednoho odpovídá prvnímu minimu druhého.  $I_1 + I_2$  je výsledná intenzita světla

kde  $D$  je průměr apertury. Při zobrazení dvou zdrojů vzniknou tedy dva stejné navzájem posunuté difrakční obrazce. Jak blízko mohou být u sebe, abychom dokázali rozeznat, že se jedná skutečně o zobrazení dvou bodů, tj. kdy můžeme dva bodové zdroje rozlišit, tedy jaké je rozlišení teleskopu? Odpověď na tuto otázku není zcela jednoznačná, ale zpravidla se používá *Rayleighovo kritérium*, podle nějž můžeme ještě dva bodové zdroje rozlišit, pokud jejich difrakční obrazce jsou vůči sobě posunuty tak, že maximum jednoho difrakčního obrazce leží v minimu obrazce druhého (srov. obr. 10.14). Odpovídající úhlová vzdálenost je tedy dána vztahem (10.136). Při pozorování vzdálených objektů je tedy nutné mít teleskop nejen s dostatečným zvětšením, ale i rozlišením. Ze vztahu (10.136) je jasné, že velké rozlišení lze získat v teleskopech s velkými průměry vstupní apertury (obří teleskopy).

### 10.3.4 Fotografický přístroj

Nejjednodušším uspořádáním fotoaparátu je *camera obscura*, krabice, v níž není žádný otvor, kterým by mohlo dovnitř dopadnout světlo, kromě malé kruhové clony (viz obr. 10.15). Fotografický film je umístěn na stěně, která leží proti cloně. Paprsky vycházejí z jednotlivých bodů předmětu (scény) ve všech směrech, jen jejich malá část prochází clonou a dopadá na film. Díky malým rozměrům clony je z geometrie zřejmé, že do určitého bodu obrazu dopadají paprsky vycházející přibližně z jediného bodu předmětu. Každému bodu scény tak odpovídá kroužek v rovině filmu. Velikost tohoto kroužku je dána rozměrem clony: pro příliš velký poloměr clony se jednotlivé kroužky překrývají, obraz se jeví rozmazaný, pro velmi malou clonku se začíná projevovat difrakce a obraz je opět nejasný. Uvedený typ přístroje má velkou výhodu v tom, že neužívá žádného zobrazovacího prvku (čočka, zrcadlo), proto se nemusí ostřit – všechny body jsou ostré, není



Obr. 10.15 Camera obscura

proto omezena hloubka ostrosti, o níž budeme mluvit dále v tomto odstavci. Ovšem clonou projde málo světla a je nutné používat při fotografování dlouhé expoziční časy.

To je hlavní důvod, proč fotografický přístroj má objektiv, tvořený spojnou zobrazovací soustavou, v nejjednodušším případě spojnou čočkou. Fotoaparáty používané v současné době ovšem používají složitější kvalitní objektivy. Mezi čočkami objektivu bývá také umístěna apertura, kterou se mění množství světla dopadající na film. Používá se zpravidla *irisová clona*, která je kalibrována v clonových číslech, jež odpovídají vždy dvojnásobné změně osvitů, expoziční  $H$ , která se zavádí jako

$$H = Ot, \quad (10.137)$$

kde  $O$  je osvětlení filmu a  $t$  doba expozice. Množství světla, které projde aperturou, je úměrné druhé mocnině jejího průměru. Chceme-li nyní postupně půlit expozici při konstantní době osvitů, musíme postupně zmenšovat průměr apertury faktorem  $k$ . Dostaneme tak postupně

Faktor zmenšení expozice	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
Číslo $k$	1	1,4	2,0	2,8	4	5,6	8	11	16	22

Podobně se rychlosti závěrky ve zlomcích sekundy liší obvykle postupně faktorem 2, tj. 1/500, 1/250, 1/125, 1/60... Rozlišení ve fotoaparátu je zpravidla omezeno zrnitostí emulze. Je-li například velikost zrn filmu  $5\mu\text{m}$ , může oko rozlišit dva body, pokud je vzdálenost jejich obrazů alespoň dvojnásobek vzdálenosti zrn, tedy přibližně  $10\mu\text{m}$ . Rozlišení se ve fotografickém kontextu udává v počtu rozlišitelných čar na milimetr, tedy v tomto případě činí přibližně 100 čar/mm. Nejběžnější filmy mají rozlišení 50–100 čar/mm, pro záznam hologramů se užívají fotografické desky s rozlišením až 2000–3000 čar/mm. V nyní rychle se rozvíjejících digitálních fotoaparátech je obraz zaznamenáván maticí křemíkových detektorů. Každý z detektorů zaznamenává část obrazu, která se nazývá prvek obrazu, neboli *pixel* (z anglického *picture element*). Rozlišení je pak dáno hustotou pixelů.

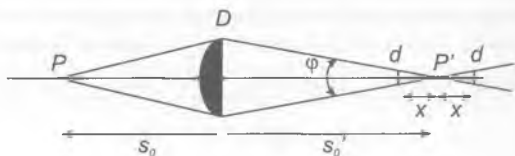
Pokud je fotografický aparát zaostřen na určitou vzdálenost  $s_0$ , vytvoří se obraz v rovině filmu ve vzdálenosti  $s_0'$ . Bližší, resp. vzdálenější předměty se zobrazí před, resp. za rovinou filmu. To ovšem znamená, že obraz bodů těchto předmětů se na film zobrazí rozostřeně, jako kroužek místo bodu. Pokud je ovšem průměr kroužku menší než rozlišení filmu, rozostření nehraje roli. Rozdíl vzdáleností mezi nejvzdálenějšími a nejbližšími předměty, pro něž je při určitém zaostření zobrazení přijatelné, se nazývá *hloubkou*

*ostrosti*. Je-li přijatelné takové rozostření, při němž je v rovině filmu průměr kroužku  $d$ , znamená to, že obraz odpovídající hranicím hloubky ostrosti může být posunut o  $\pm x$ , viz obr. 10.16. Poloze obrazu ( $s'_0 \pm x$ ) odpovídají polohy předmětu  $s_1$ , resp.  $s_2$ . Příslušné dvojice předmětových a obrazových vzdáleností jsou spojeny čočkovou rovnicí (Gaussův zobrazovací vztah):

$$s'_0 = \frac{f' s_0}{f' + s_0}, \quad (10.138)$$

$$s_1 = \frac{(s'_0 + x) f'}{f' - s'_0 - x}, \quad (10.139)$$

$$s_2 = \frac{(s'_0 - x) f'}{f' - s'_0 + x}. \quad (10.140)$$



Obr. 10.16 K výkladu hloubky ostrosti

Podle obr. 10.16 je zřejmé

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \frac{D}{s'_0}, \quad \operatorname{tg} \varphi \approx \frac{d}{x}, \quad (10.141)$$

tedy

$$x \approx \frac{d s'_0}{D}, \quad (10.142)$$

kde  $D$  je průměr vstupní apertury. Pro hloubku ostrosti pak dostaneme

$$s_2 - s_1 = \frac{2 A d s_0 (s_0 - f') f'^2}{f'^4 - A^2 d^2 s_0^2}. \quad (10.143)$$

Zavedli jsme označení  $A$  pro tzv. clonové F-číslo (světelnost)

$$A = \frac{f'}{D}. \quad (10.144)$$

## 10.4 PARAXIÁLNÍ OPTIKA MATICOVĚ

### 10.4.1 Maticový formalismus

Obvyklou úlohou geometrické optiky je řešení soustavy několika optických prvků řazených za sebou. Obzvláště v takových případech se projeví výhoda použití maticového formalismu při výpočtech. Uvedeme zde, jak je možné použít matic v případě paraxiální aproximace.

Uvažujeme šíření světelného paprsku soustavou. Budeme předpokládat obvyklou geometrii, totiž postup světla v kladném směru osy  $z$ , která je osou optické soustavy, příčná souřadnice je  $y$ . V každé rovině kolmé k ose  $z$  lze paprsek charakterizovat pomocí souřadnice  $y$  průsečíku paprsku s touto rovinou a úhlem  $\alpha$ , který svírá směr paprsku s osou  $z$ . Budeme přitom používat znaménkovou konvenci, jak jsme ji uvedli výše. Jako první příklad napíšeme matici pro popis *volného šíření paprsku homogenním prostředím*, jak je znázorněno na obr. 10.17. V rovině  $z=z_0$  je paprsek popsán parametry  $y_0, \alpha_0$ , v rovině  $z_1=z_0+L$  parametry  $y_1, \alpha_1$ . Podle obrázku zřejmě platí

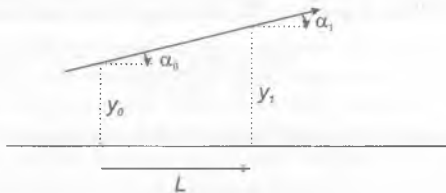
$$y_1 = y_0 - L \operatorname{tg} \alpha_0 \approx y_0 - L \alpha_0, \quad (10.145)$$

$$\alpha_1 = \alpha_0, \quad (10.146)$$

kde přiblížení v pravé části (10.145) odpovídá paraxiální aproximaci. Znaménko minus v (10.1454) souvisí se znaménkovou konvencí, v níž je úhel  $\alpha$  měřený od paprsku k ose  $z$  na obr. 10.17 záporný. Tyto dvě rovnice můžeme přepsat jako soustavu popisující transformaci parametrů svazku při volném šíření

$$y_1 = 1y_0 - L\alpha_0 \quad (10.147)$$

$$\alpha_1 = 0y_0 + 1\alpha_0$$



Obr. 10.17 Šíření paprsku v homogenním prostředí



Zavedeme-li *přenosovou matici*  $M$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10.148)$$

můžeme vztah parametrů paprsku při šíření popsat

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}. \quad (10.149)$$

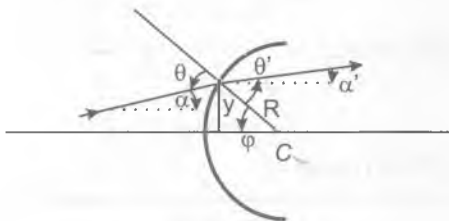
Matice přenosu (nazývaná také *ABCD-matice*)

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (10.150)$$

charakterizuje transformaci parametrů paprsku.

Nalezneme nyní její prvky pro některé další význačné případy. Důležitý je *lom paprsku na kulovém optickém rozhraní*, které odděluje prostředí s indexem lomu  $n$  a prostředí s indexem lomu  $n'$ , jak je znázorněno na obr. 10.18. Úhel dopadu (vůči normále) je  $\theta$ ,  $\theta'$  je úhel lomu. Zřejmě platí

$$y' = y. \quad (10.151)$$



**Obr. 10.18** Ilustrace k odvození přenosové matice pro lom na kulové ploše

Podle obr. 10.18 a podle znaménkové konvence platí pro úhly

$$-\alpha' + \varphi = \theta', \quad (10.152)$$

$$\theta + \alpha = \varphi. \quad (10.153)$$

Uvážíme-li geometrický vztah

$$\varphi = \frac{y}{R}, \quad (10.154)$$

kde  $R$  je poloměr křivosti rozhraní, a zákon lomu v paraxiální aproximaci

$$n\theta = n'\theta', \quad (10.155)$$

dostaneme z (10.151) – (10.155)

$$\alpha' = y \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{n}{n'} \right) + \frac{n}{n'} \alpha. \quad (10.156)$$

Matice  $M$  má tedy tvar

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{n}{n'} \right) & \frac{n}{n'} \end{pmatrix}. \quad (10.157)$$

Matici pro lom na rovinném rozhraní dostaneme jednoduše limitou  $R \rightarrow \infty$ , kdy  $C=0$ , tedy

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n'} \end{pmatrix}. \quad (10.158)$$

Důležitý je ovšem i odraz na kulové ploše, jehož geometrie je uvedena na obr. 10.19. Podle zákona odrazu je

$$\theta = -\theta', \quad (10.159)$$

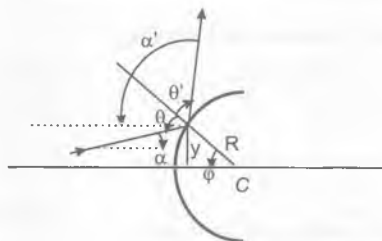
pro úhly platí podle obrázku

$$\theta = -\alpha + \varphi, \quad (10.160)$$

$$\alpha' = -\theta' + \varphi. \quad (10.161)$$

Z rov. (10.154), (10.161) plyne

$$\alpha' = \frac{2}{R} y - \alpha. \quad (10.162)$$



**Obr. 10.19** Ilustrace k odvození přenosové matice pro odraz na kulové ploše

Pro druhý parametr paprsku platí opět (10.151). Matice má tedy tvar

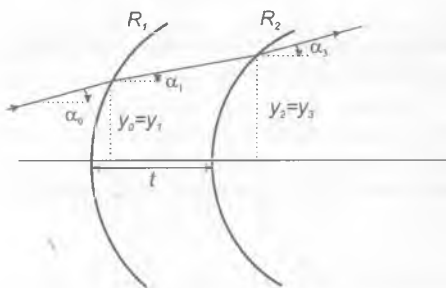
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & -1 \end{pmatrix}. \quad (10.163)$$

Odraz na rovinné ploše dostaneme opět limitou  $R \rightarrow \infty$ , kdy  $C=0$ , tedy

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10.164)$$

Šíření paprsků posloupností optických prvků můžeme popsat postupným násobením odpovídajících přenosových matic, a získat tak výslednou přenosovou matici.

### 10.4.2 Tlustá optická čočka



Obr. 10.20 Ilustrace k odvození přenosové matice pro tlustou čočku

Jako příklad uvedeme optickou (tlustou) čočku tloušťky  $t$  z materiálu s indexem lomu  $n_L$ , která je tvořena dvěma kulovými optickými rozhraními s poloměry křivosti  $R_1$  a  $R_2$ , okolní prostředí má index lomu  $n$ . Jak je znázorněno na obr. 10.20, paprsek popsany parametry  $y_0, \alpha_0$  dopadá zleva na první rozhraní a po lomu /matice  $M_1$  daná vztahem (10.157)/ má parametry  $y_1, \alpha_1$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} \quad (10.165)$$

Následuje šíření paprsku popsané maticí  $M_2$ /rov. (10.148)/

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad (10.166)$$

a konečně lom na výstupní ploše /opět podle (10.157)/

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = M_3 \begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}. \quad (10.167)$$

Kombinací vztahů (10.165 až 10.167) dostáváme výslednou přenosovou matici  $M_L$  čočky

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = M_3 M_2 M_1 \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = M_L \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}, \quad (10.168)$$

kde

$$M_L = M_3 M_2 M_1. \quad (10.169)$$

Je zřejmé, že záleží na pořadí násobení matic. Vyčíslením součinu dostaneme pro prvky matice  $M_L$  tlusté čočky

$$A = 1 + \left( \frac{n}{n_L} - 1 \right) \frac{t}{R_1}, \quad (10.170)$$

$$B = -\frac{n}{n_L} t, \quad (10.171)$$

$$C = \left( \frac{n_L}{n} - 1 \right) \frac{n}{n_L R_1 R_2} \left[ \frac{n_L}{n} (R_2 - R_1) + \left( \frac{n_L}{n} - 1 \right) t \right], \quad (10.172)$$

$$D = 1 + \frac{n}{n_L} \left( \frac{n_L}{n} - 1 \right) \frac{t}{R_2}. \quad (10.173)$$

Jak ukážeme dále, je ohnisková vzdálenost optického elementu dána prvkem  $C$  jeho ABCD matice – viz (10.192),

$$f' = \frac{1}{C}. \quad (10.174)$$

Skutečně, pro případ čočky ve vzduchu,  $n = 1$ , odpovídá (10.174) s (10.172) výrazu (10.113) pro ohniskovou vzdálenost tlusté čočky. Pro případ *tenké čočky*, kdy  $t = 0$  dostáváme podle (10.170 až 10.173) pro přenosovou matici

$$M_{\tau c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f'} & 1 \end{pmatrix}, \quad (10.175)$$

$$\text{kde } \frac{1}{f'} = \left( \frac{n_L}{n} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (10.176)$$

odpovídá rovnici (10.116).

### 10.4.3 Obecná optická soustava, kardinální body

Obecné optické soustavy lze tedy popsat pomocí součinu matic pro lom, odraz a šíření světelných paprsků. Jaké jsou determinanty těchto matic? Podle (10.148), (10.157) a (10.163) je zřejmé, že determinant je roven 1 v případě šíření,  $-1$  pro odraz, a  $\frac{n}{n'}$  pro lom. Determinant součinu matic je ovšem roven součinu determinantů jednotlivých matic. Determinant výsledné matice přenosu musí tedy být roven poměru indexu lomu prostředí, v němž paprsek do soustavy vstupuje, a indexu lomu výstupního prostředí. Této vlastnosti lze například použít při kontrole výpočtů.

Uvažujme nyní obecnou optickou soustavu, kterou postupuje paprsek, jehož parametry ve vstupní rovině označíme indexem  $i$  a parametry ve výstupní rovině indexem  $k$ . Pomocí přenosové matice jsou parametry spojeny

$$\begin{pmatrix} y_k \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ \alpha_i \end{pmatrix}. \quad (10.177)$$

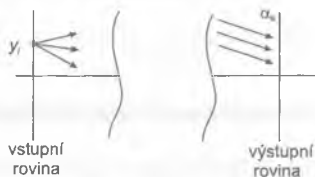
Budeme nyní uvažovat, jaké situace nastávají, když některé z prvků matice jsou nulové. Pokud prvek  $D = 0$ , je

$$\alpha_k = C y_i, \quad (10.178)$$

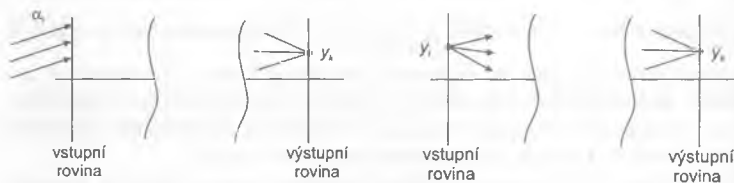
což znamená, že úhel paprsků ve výstupní rovině nezávisí na jejich úhlu ve vstupní rovině, tedy všechny paprsky vycházející v libovolném směru z určitého bodu vstupní roviny jsou ve výstupní rovině rovnoběžné (obr. 10.21). Speciálně pro bod na ose soustavy se paprsky šíří rovnoběžně s touto osou. To tedy znamená, že podmínka  $D = 0$  odpovídá tomu, že vstupní rovina je předmětovou ohniskovou rovinou. Podobně, je-li  $A = 0$ , je

$$y_k = B \alpha_i, \quad (10.179)$$

což znamená, že všechny paprsky, které jsou ve vstupní rovině rovnoběžné, se protnou v jednom bodě výstupní roviny (obr. 10.22). Výstupní rovina je tedy obrazovou ohniskovou rovinou. Podmínka  $B = 0$  odpovídá situaci, kdy vstupní a výstupní roviny jsou navzájem konjugované, jsou tedy předmětovou a obrazovou rovinou.



Obr. 10.21 Optická soustava, pro kterou je v přenosové matici  $D = 0$



Obr. 10.22 Optická soustava, pro kterou je v přenosové matici  $A = 0$

Obr. 10.23 Optická soustava, pro kterou je v přenosové matici  $B = 0$

Skutečně, v tomto případě platí

$$y_k = A y_i, \quad (10.180)$$

což znamená, že všechny paprsky vycházející z určitého bodu vstupní roviny se protnou v jednom bodě výstupní roviny (obr. 10.23). Příčné zvětšení zobrazení vychází

$$\beta = \frac{y_k}{y_i} = A. \quad (10.181)$$

Konečně pro případ  $C = 0$  platí

$$\alpha_k = D \alpha_i, \quad (10.182)$$

tedy vstupní rovnoběžné paprsky vycházejí opět jako rovnoběžné, jedná se o teleskopickou soustavu (obr. 10.24).

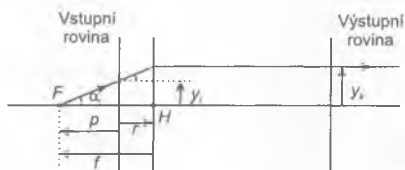
Vzhledem k tomu, že optická soustava je jednoznačně popsána maticí  $M$ , je možné pomocí jejích prvků charakterizovat polohy kardinálních bodů soustavy. Stačí k tomu vyjít z definice jednotlivých bodů a uvažovat vhodné paprsky. Například pro předmětové ohnisko soustavy budeme uvažovat situaci podle obr. 10.25, kdy paprsek vychází z ohniskového bodu a vychází ze soustavy rovnoběžně s její osou. Zřejmě platí

$$y_k = A y_i + B \alpha_i \quad (10.183)$$

$$0 = C y_i + D \alpha_i. \quad (10.184)$$



Obr. 10.24 Optická soustava, pro kterou je v přenosové matici  $C = 0$



Obr. 10.25 Ilustrace k určení parametrů kardinálních bodů, předmětové ohnisko

Dále je z geometrie zřejmé

$$\alpha_i = \frac{y_i}{p}, \quad (10.185)$$

$$\alpha_o = \frac{y_o}{f}. \quad (10.186)$$

Z (10.183 až 10.186) dostaneme přímo vzdálenost předmětového ohniskového bodu od vstupní roviny

$$p = -\frac{D}{C}, \quad (10.187)$$

pro ohniskovou vzdálenost

$$f = -\frac{AD-BC}{C} = -\frac{\det(M)}{C} = -\frac{n_i}{n_k} \frac{1}{C}. \quad (10.188)$$

V poslední rovnosti jsme použili vlastnosti determinantu matice  $M$  vysvětlené v úvodu tohoto odstavce. Vzdálenost od vstupní roviny k předmětové hlavní rovině je

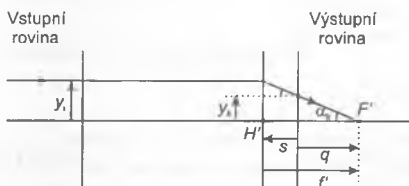
$$r = -(f-p) = \frac{1}{C} \left( \frac{n_i}{n_k} - D \right). \quad (10.189)$$

Zcela analogicky můžeme dostat parametry související s obrazovým ohniskem, kdy využijeme paprsek dopadající do soustavy rovnoběžně s její osou, který dopadne do obrazového ohniska (viz obr. 10.26). Uvedeme zde pro úplnost pouze výsledné vztahy:

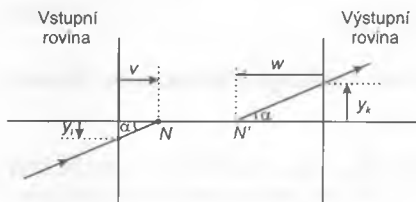
$$q = \frac{A}{C}, \quad (10.190)$$

$$s = \frac{A-1}{C}, \quad (10.191)$$

$$f' = \frac{1}{C}. \quad (10.192)$$



Obr. 10.26 Ilustrace k určení parametrů kardinálních bodů, obrazové ohnisko



Obr. 10.27 Ilustrace k určení parametrů kardinálních bodů, uzlové body



Pro parametry uzlových bodů (obr. 10.27) použijeme paprsek dopadající do předmětového uzlového bodu a vycházející z obrazového uzlového bodu. Podle definice uzlových bodů je ovšem  $\alpha_i = \alpha_k$ , proto

$$\alpha_i = C y_i + D \alpha_i \quad (10.193)$$

a podle obr. 10.27

$$\alpha = \frac{y_i}{v} \quad (10.194)$$

Z posledních dvou vztahů a velikosti determinantu matice již dostaneme

$$v = -\frac{D-1}{C}, \quad (10.195)$$

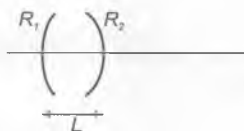
$$w = \frac{A - n_i/n_k}{C}. \quad (10.196)$$

Můžeme se přesvědčit, že pro obecnou optickou soustavu v paraxiální aproximaci je poměr ohniskových vzdáleností /vztahy (10.188 a 10.192)/

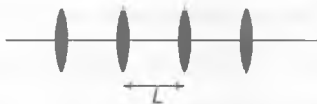
$$\frac{f'}{f} = -\frac{n_k}{n_i} \quad (10.197)$$

a že uzlové a hlavní body splývají, když  $n_i = n_k$  ( $r = v$ ,  $s = w$ ).

#### 10.4.4 Laserový rezonátor



Obr. 10.28 Laserový rezonátor (nahore) a ekvivalentní posloupnost čoček (dole)



Maticový formalismus můžeme využít při studiu vlastností zajímavého a užitečného příkladu – laserového rezonátoru. V laserovém rezonátoru obíhá světlo mezi dvěma zrcadly poloměru  $R_1$ ,  $R_2$ , která jsou umístěna ve vzdálenosti  $L$  (délka rezonátoru). Toto šíření světla je možné znázornit v ekvivalentním schématu, kde jsou zrcadla nahrazena posloupností (tenkých) čoček, které mají ohniskové vzdálenosti odpovídající původním zrcadlům, viz (10.80). Jeden oběh světla v rezonátoru tak můžeme popsat ve smyslu maticové geometrické optiky jako 1. šíření na vzdálenosti  $L$ , 2. fokusaci čočkou 1, 3. šíření na vzdálenosti  $L$ , 4. fokusaci čočkou 2. Přenosovou matici, která odpovídá jednomu oběhu světla v rezonátoru, můžeme tedy psát jako součin matic uvedených vztahy (10.148) a (10.175)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10.198)$$

jejíž prvky jsou

$$A = 1 - \frac{L}{f_1}, \quad (10.199)$$

$$B = -2L + \frac{L^2}{f_1}, \quad (10.200)$$

$$C = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{L}{f_2 f_1}, \quad (10.201)$$

$$D = 1 - \frac{2L}{f_2} - \frac{L}{f_1} + \frac{L^2}{f_1 f_2}. \quad (10.202)$$

Parametry paprsku po  $(s+1)$ -tém oběhu jsou spojeny s parametry po  $s$ -tém oběhu

$$y_{s+1} = A y_s + B \alpha_s, \quad (10.203)$$

$$\alpha_{s+1} = C y_s + D \alpha_s. \quad (10.204)$$

Z (10.203) můžeme vyjádřit

$$\alpha_s = \frac{1}{B} (y_{s+1} - A y_s), \quad (10.205)$$

neboli zvýšením počtu oběhů o 1,

$$\alpha_{s+1} = \frac{1}{B}(y_{s+2} - Ay_{s+1}). \quad (10.206)$$

Nyní můžeme porovnat rovnice (10.204) a (10.206), odkud plyne

$$(BC - AD)y_s + (A + D)y_{s+1} - y_{s+2} = 0. \quad (10.207)$$

Závorka v prvním členu je rovna (rezonátor je ve vzduchu, vlastnosti determinantu přenosové matice jsme probrali výše)

$$(BC - AD) = -\det M = -1. \quad (10.208)$$

Rovnici (10.207) můžeme proto přepsat

$$y_{s+2} - 2by_{s+1} + y_s = 0, \quad (10.209)$$

kde jsme zavedli koeficient

$$b = \frac{A + D}{2}. \quad (10.210)$$

Rovnice (10.209) je diferenční rovnice, jejíž řešení můžeme hledat ve tvaru

$$y_s = y_0 \exp[isq]. \quad (10.211)$$

Dosazením (10.211) do (10.209) dostáváme

$$\exp[iq] = b \pm i\sqrt{1 - b^2}, \text{ pro } b^2 \leq 1, \quad (10.212)$$

respektive

$$\exp[iq] = b \pm \sqrt{b^2 - 1}, \text{ pro } b^2 > 1. \quad (10.213)$$

V prvním případě je vhodné zavést nový koeficient  $\theta$  vztahem

$$b = \cos \theta. \quad (10.214)$$

Pak (10.212) lze psát jako

$$\exp[iq] = \cos \theta \pm i \sin \theta = \exp[\pm i\theta]. \quad (10.215)$$

Řešení diferenční rovnice (10.209) je tedy pro případ  $b^2 \leq 1$

$$y_s = C_1 \exp[is\theta] + C_2 \exp[-is\theta] = y_{\max} \sin(s\theta + \varphi). \quad (10.216)$$

V poslední úpravě jsme zavedli fázi  $\varphi$ , kterou je možné určit z počáteční podmínky

$$y_0 = y_{\max} \sin \varphi. \quad (10.217)$$

Pro  $b^2 > 1$  je řešení

$$y_s = C_3 \exp(b + \sqrt{b^2 - 1}) + C_4 \exp(b - \sqrt{b^2 - 1}). \quad (10.218)$$

Z tvarů řešení pro paprskový parametr  $y$  je patrné, že charakter řešení se mění podle velikosti parametru  $b$ , tedy podle vlastností rezonátoru. V případě  $b^2 > 1$  se paprsek při průchodu posloupností čoček (při obězích) stále vzdaluje od osy. Při konečných rozměrech zrcadel reálného laserového rezonátoru tedy dochází k tomu, že světlo po několika obězích není již odraženo zpět a rezonátor má velké ztráty. Takové rezonátory se nazývají *nestabilními*. V laserech se ovšem většinou používají *rezonátory stabilní*, kdy paprsky procházejí v konečné vzdálenosti od osy při libovolném počtu oběhů. Podmínka stability laserového rezonátoru je tedy

$$b^2 \leq 1, \quad (10.219)$$

což můžeme podle (10.210) psát

$$\left| \frac{A+D}{2} \right| \leq 1, \quad (10.220)$$

a dosazením z (10.199) a (10.202) a úpravou získáme

$$0 \leq \left( 1 - \frac{L}{2f_1'} \right) \left( 1 - \frac{L}{2f_2'} \right) \leq 1. \quad (10.221)$$

Pokud uvážíme, že  $f_j' = \frac{R_j}{2}$  (jak je v laserové optice obvyklé, bereme zde poloměr s kladným znaménkem, pokud je zrcadlo vyduuté směrem dovnitř rezonátoru), můžeme poslední nerovnost přepsat

$$0 \leq \left( 1 - \frac{L}{R_1} \right) \left( 1 - \frac{L}{R_2} \right) \leq 1. \quad (10.222)$$

Tento vztah se používá při návrhu laserových rezonátorů. Pro dané poloměry křivosti laserových zrcadel je třeba nastavit vhodně jejich vzdálenost, aby rezonátor byl stabilní. Nerovnost (10.222) můžeme znázornit též graficky. Graf se nazývá diagramem stability laserového rezonátoru, viz obr. 10.29.

V laserové technice se často používá takzvaný symetrický konfokální rezonátor, který je tvořen dvěma zrcadly stejných poloměrů křivosti  $R$ , která jsou umístěna ve vzdálenosti  $L=R$  (obr. 10.30) tak, že jejich ohniska splývají. Pro tento rezonátor z (10.199) a (10.202) dostáváme

$$A=D=-1, \quad b=-1, \quad (10.223)$$

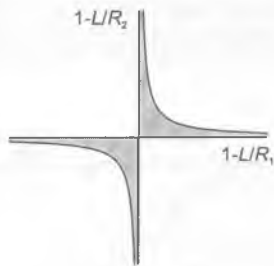
tedy

$$\theta = \arccos(-1) = \pi \quad (10.224)$$

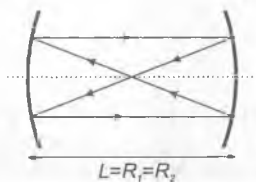
a řešení pro  $s$ -tý oběh

$$y_s = y_{\max} \sin(s\pi + \varphi), \quad (10.225)$$

kteří odpovídá tomu, že výchylka paprsku je vždy stejná pro sudý (lichý) oběh, jak je zřejmé z obr. 10.30.



Obr. 10.29 Diagram stability laserového rezonátoru (vyšrafované oblasti odpovídají oblastí stability)



Obr. 10.30 Konfokální laserový rezonátor

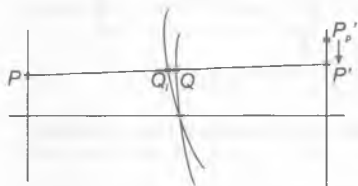
## 10.5 VADY ZOBRAZENÍ (ABERACE)

Až dosud jsme se zabývali geometrickou optikou v paraxiální aproximaci, kdy jsme předpokládali, že všechny paprsky se šíří v blízkém okolí optické osy soustavy tak, že s ní svírají malé úhly. Tato podmínka vede například k tomu, že sférické plochy dovolují realizovat dokonalé zobrazení. Víme ovšem také, že konečný rozměr apertury optických přístrojů vede k tomu, že zobrazení je ovlivněno difrakcí světla. Ve skutečnosti je zobra-

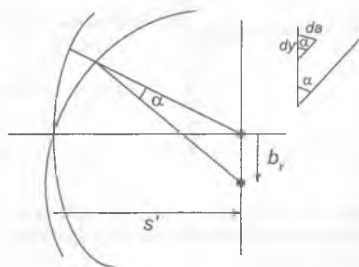
zení porušeno daleko výrazněji tím, že nejsou dobře splněny podmínky paraxiální aproximace. Mluví se o vadách (aberacích) zobrazení. Při návrhu optických prvků je snahou vady zobrazení potlačit (nebo minimalizovat).

V současné době se návrh čoček nebo složitějších optických soustav, jako objektivů, provádí počítačovým sledováním průchodu paprsků. Z jednotlivých bodů předmětu jsou vysílány paprsky různými směry a pomocí Snellova zákona se počítá jejich průchod čočkou (optickou soustavou); sledují se jejich průsečíky s určitou rovinou v obrazovém prostoru. Soustava se optimalizuje a výpočet se opakuje (postup pokus a omyl). Nyní, kdy se rozvíjí digitální záznam obrazu, se v souvislosti s aberacemi objevuje zcela nový trend. Používají se levné optické prvky (objektivy), jejich vady zobrazení se proměří a pak jsou zaznamenané obrazy počítačově korigovány.

Tradiční postup založený na složitých algebraických výpočtech, který se používal do rozvoje počítačového přístupu (do zhruba 70. let 20. století), může přinést ovšem jisté fyzikální porozumění vadám zobrazení. Je totiž možné vydělit několik typů vad, které se projevují při zobrazení světlem jedné vlnové délky (monochromatické vady). Proto si tohoto tradičního přístupu všimneme.



Obr. 10.31 Paprsková aberace



Obr. 10.32 Souvislost vlnové a paprskové aberace

Uvažujme čočku (optickou soustavu), která zobrazí v paraxiální aproximaci bod  $P$  do bodu  $P'$ , viz obr. 10.31. Reálně však konkrétní paprsek po průchodu soustavou může protnout rovinu, jež je kolmá k optické ose a prochází bodem  $P$ , v bodě  $P'$ . Vektor  $(b_x, b_y)$  daný úsečkou  $P_P'P'$  vyjadřuje vadu zobrazení, nazývá se *paprskovou aberací*. Vadu zobrazení lze charakterizovat také tzv. *vlnovou aberací*. Uvažujme rovinu výstupní apertury čočky (optické soustavy). V ní leží vlnoplocha spojená s reálnými pa-

prsky, která se ovšem obecně liší od sférické vlnoplochy, která odpovídá paraxiální aproximaci (viz obr. 10.31). Konkrétní paprsek protíná reálnou plochu v bodě  $Q$ , ideální plochu v bodě  $Q_i$ . Velikost optické dráhy  $a(Q)$  odpovídající úsečce  $Q_iQ$  je vlnová aberace. Vlnová a paprsková aberace spolu souvisí. Geometrie pro případ obrazu v rovině  $yz$  je na obr. 10.32. Úhel mezi tečnami k vlnoplochám v bodech  $Q$ ,  $Q_i$  je  $\alpha$ . Paprsková aberace je pak spojena s aberací zřejmě

$$b_y = \alpha s', \quad (10.226)$$

kde  $s'$  je vzdálenost paraxiálního obrazu od roviny čočky. Z obr. 10.32 je také vidět, že (do lineárních členů) přírůstek vlnové aberace a souřadnice  $y$  jsou spojeny

$$da = n_2 \alpha dy. \quad (10.227)$$

V posledním vztahu vystupuje index lomu obrazového prostoru. Z (10.226) a (10.227) můžeme vyjádřit paprskovou aberaci

$$b_y = \frac{s'}{n_2} \frac{da}{dy} = A \frac{da}{dy}. \quad (10.228)$$

Podobně pro paprskovou aberaci ve směru  $x$

$$b_x = A \frac{da}{dx}. \quad (10.229)$$

Když jsme odvozovali Abbeův invariant, používali jsme první členy rozvoju goniometrických funkcí. Mocinné rozvoje sinové a kosinové funkce jsou

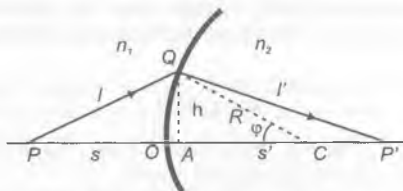
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \quad (10.230)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (10.231)$$

V paraxiální aproximaci jsme se omezili vždy na první člen příslušného rozvoje. Započítání členů vyšších řádů vede k odchýlkám od dokonalého zobrazení, jejichž význam roste s rostoucím úhlem paprsků vůči optické ose. Tyto odchylky se nazývají *vady zobrazení*, *aberace*. Započítá-li se v teorii i druhý člen rozvoje (tj. člen  $\propto x^3$  v rozvoji sinu), nazývá se *aberační teorie třetího řádu*. Mluví se o *Seidelových aberacích* podle matematika

Ludwiga von Seidela, který je studoval. Pro monochromatické světlo lze rozlišit pět aberací tohoto řádu: *sférickou vadu, komu, astigmatismus, zklenutí obrazu a zkreslení obrazu*, které se ovšem mohou v reálném případě projevovat současně. Navíc se projevují vady zobrazení spojené s různými vlnovými délkami ve světle, které vznikají díky závislosti parametrů zobrazovacích elementů na vlnové délce, tedy *vady chromatické*.

### 10.5.1 Monochromatické aberace



Obr. 10.33 K výpočtu sférické aberace

Vady zobrazení objasníme na příkladu zobrazení kulovou plochou. Na obr. 10.33 připomínáme geometrii při zobrazení lomem na kulovém rozhraní. Rozhraní je tvořeno kulovou plochou se středem  $C$ , indexy lomu prostředí jsou  $n_1$  a  $n_2$ . Uvažujme světelný paprsek vycházející z bodu  $P$  na ose  $z$ , který po lomu protíná osu v bodě  $P'$ , který je tedy obrazem bodu  $P$ . Pokud by šlo o dokonalé zobrazení, jak ho popisuje paraxiální geometrická optika, všechny paprsky vycházející z bodu  $P$ , by se protínaly v bodě  $P'$ , tedy sférická vlna vycházející z bodu  $P$  by se kulovou plochou transformovala na kulovou vlnu sbíhající se do bodu  $P'$ . Optické dráhy paprsků  $PQP'$  a  $POP'$  by tedy byly stejné. Při započítání vyšších členů (a ve skutečnosti) je délka optické dráhy závislá na poloze bodu  $Q$  na ploše. Můžeme tedy definovat aberaci  $a$  v bodě  $Q$  jako

$$a(Q) = (PQP' - POP')_{od} \quad (10.232)$$

kde index  $od$  znamená optickou dráhu. V tomto odstavci nebudeme výjimečně používat znaménkovou konvenci. Explicitně můžeme napsat

$$a(Q) = n_1 l + n_2 l' - (n_1 s + n_2 s') \quad (10.233)$$

Použijeme-li kosinovou větu na trojúhelníky na obr. 10.33, můžeme vzdálenosti po paprsku vyjádřit



$$l^2 = R^2 + (s+R)^2 - 2R(s+R)\cos\varphi, \quad (10.234)$$

$$l'^2 = R^2 + (s'-R)^2 + 2R(s-R)\cos\varphi. \quad (10.235)$$

Rozvineme nyní kosinus  $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!}$ , a vyjádříme přibližně  $\varphi \cong \frac{h}{R}$ .

Pak můžeme (10.234), (10.235) přepsat

$$l = s \left\{ 1 + \left[ \frac{h^2(R+s)}{R s^2} - \frac{h^4(R+s)}{12 R^3 s^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} = s \sqrt{1+x}, \quad (10.236)$$

$$l' = s' \left\{ 1 + \left[ \frac{h^2(R-s')}{R s'^2} - \frac{h^4(R-s')}{12 R^3 s'^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} = s' \sqrt{1+y}. \quad (10.237)$$

Nyní rozvineme druhé odmocniny jako pro  $x$ :

$$\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}. \quad (10.238)$$

Pokud podržíme členy s  $h$  v nejvýše čtvrté mocnině, máme

$$l = s \left\{ 1 + \frac{h^2(R+s)}{2 R s^2} - \frac{h^4(R+s)}{24 R^3 s^2} - \frac{h^4(R+s)^2}{8 R^2 s^4} \right\}, \quad (10.239)$$

$$l' = s' \left\{ 1 + \frac{h^2(R-s')}{2 R s'^2} - \frac{h^4(R-s')}{24 R^3 s'^2} - \frac{h^4(R-s')^2}{8 R^2 s'^4} \right\}. \quad (10.240)$$

Dosazením do (10.233) a po úpravě máme

$$a(Q) = -\frac{h^4}{8} \left[ \frac{n_1}{s} \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{R} \right)^2 + \frac{n_2}{s'} \left( \frac{1}{s'} - \frac{1}{R} \right)^2 \right]. \quad (10.241)$$

Při úpravě jsme položili

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} - \frac{n_2 - n_1}{R} = 0, \quad (10.242)$$

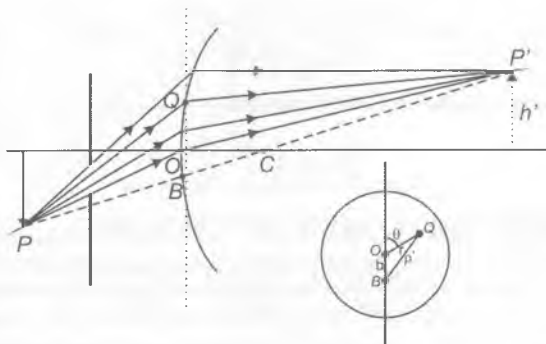
podle (10.56), tj. podle Abbeovy rovnice pro paraxiální zobrazení. V rovnici (10.241) tak zůstanou jen členy  $\propto h^4$ . Získali jsme tedy vyjádření pro aberaci při zobrazení bodu ležícího na ose optické soustavy,

$$a = ch^4, \quad (10.243)$$

kteřá se nazývá *sférickou aberací* (*kulová vada*).

Podívejme se nyní, jaké vznikají aberace pro zobrazení bodů mimo osu. Uvažujme situaci podle obr. 10.34. Před kulovým rozhraním je umístěna clona, která vymezuje znázorněné paprsky. Ty vycházejí z bodu  $P$  ležícího mimo osu v rovině  $yz$ . Kdyby clona paprsky nevymezovala, byla by osou zobrazení bodu  $P$  přímka  $PCP'$ . Analogicky jako výše může být aberace bodu  $Q$  vyjádřena

$$a'(Q) = (PQP' - PBP')_{od}. \quad (10.244)$$



Obr. 10.34 Mimoosové aberace

Bod  $Q$  neleží v rovině obrázku, jak je znázorněno na vloženém obrázku. Výsledek výpočtu aberací třetího řádu nebude neovlivněn (ovlivní se až vyšší řád aberací), budeme-li přibližně předpokládat, že body  $B$ ,  $O$  a  $Q$  leží v rovině kolmé k  $OC$ . Použijeme-li rov. (10.243), kam dosadíme  $h = BQ = \rho'$ , je aberace rovna

$$a'(Q) = c\rho'^4. \quad (10.245)$$

Podle obrázku je dále aberace bodu  $O$  rovna

$$a'(O) = cb^4. \quad (10.246)$$

Pokud uvažujeme přímku  $OC$  za optickou osu, vztáhneme (mimoosovou) aberaci bodu  $Q$  vůči této ose, což můžeme vyjádřit jako rozdíl axiální aberace bodů  $Q$  (10.245) a  $O$  (10.246):

$$a(Q) = a'(Q) - a'(O) = c(\rho'^4 - b^4). \quad (10.247)$$

Podle kosinové věty platí

$$\rho'^2 = r^2 + b^2 + 2rb \cos \theta. \quad (10.248)$$

Dosazením do (10.247) můžeme vyjádřit aberaci  $a(Q)$  pouze pomocí  $r$ ,  $b$ ,  $\theta$ , nebo, jak je obvyklé, pomocí vzdálenosti  $h'$  – viz obr. 10.34. Podle podobnosti trojúhelníků na obrázku je zřejmé

$$b = \text{konst } h'. \quad (10.249)$$

Dosazením (10.249) a (10.248) do (10.247) máme

$$a(Q) = {}_0C_{40} r^4 + {}_2C_{22} h'^2 r^2 \cos^2 \theta + {}_2C_{20} h'^2 r^2 + \\ + {}_1C_{31} h' r^3 \cos \theta + {}_3C_{11} h'^3 r \cos \theta \quad (10.250)$$

Koeficienty  ${}_k C_{lm}$  zahrnují všechny konstantní faktory, jejich indexy označují mocniny  $h'$ ,  $r$ ,  $\cos \theta$ . Jednotlivé členy vyjadřují pět aberací, které se po řadě nazývají:

1. *sférická (kulová) vada*, 2. *astigmatismus*, 3. *zklenutí pole*, 4. *koma*, 5. *zkreslení obrazu*.

Vztah (10.250) ukazuje, nkolik se odlišuje reálná vlnoplocha od ideální sférické vlnoplochy (po započítání členů rozvoje goniometrických funkcí do třetího řádu).

Jednotlivé aberace je možné názorně vyjádřit pomocí paprskových aberací. Souřadnice  $x$ ,  $y$  v „rovině“ sférické plochy (vyšetřovali jsme případ bodu předmětu v rovině  $yz$ ) můžeme vyjádřit

$$x = r \sin \theta, \\ y = r \cos \theta. \quad (10.251)$$

Podle vztahů (10.251), (10.228) a (10.229) dostáváme pro první člen (10.250) paprskovou *sférickou aberaci*

$$b_x = 4 A {}_0C_{40} r^3 \sin \theta, \quad (10.252)$$

$$b_y = 4 A {}_0C_{40} r^3 \cos \theta. \quad (10.253)$$

Paprsky, které procházejí lámavou plochou v určité kruhové zóně (poloměru  $r$ ) tedy protínají rovinu paraxiálního obrazu v kružnici, jejíž poloměr je

úměrný  $r^3$ . Tato aberace nezávisí na vzdálenosti obrazu (předmětu) od optické osy, projevuje se tedy i pro zobrazení bodů na ose soustavy. Směr posunutí paprsků závisí na znaménku koeficientů. Například pro spojnou a rozptylnou čočku dochází k posunu opačnými směry. Lze tedy jejich kombinací sférickou aberaci potlačit (dublet). Pro jednu spojnou čočku lze vliv sférické aberace zmenšit vhodnou volbou jejího tvaru, například pro paprsky přicházející z nekonečna je z tohoto hlediska nejvhodnější ploskovypuklá čočka umístěná vypuklou plochou směrem k přicházejícímu světlu. Ukazuje se totiž, že pro zmenšení vlivu sférické aberace čočky je vhodné rozložit lom rovnoměrně mezi obě její plochy (je zde paralela s podmínkou minimální deviace optickém hranolu).

Člen, který charakterizuje *komu* /viz 4. člen (10.250)/, opět silně závisí na poloměru zóny, kterou prochází paprsky, ale obsahuje také vzdálenost obrazu od optické osy a týká se tedy jen mimosových bodů. Paprskové aberace jsou rovny /po dosazení z (10.251)/

$$b_x = 2 A_1 C_{31} h' r^2 \sin \theta \cos \theta, \quad (10.254)$$

$$b_y = A_1 C_{31} h' r^2 (1 + 2 \cos^2 \theta), \quad (10.255)$$

čili

$$b_x = A_1 C_{31} h' r^2 \sin 2\theta, \quad (10.256)$$

$$b_y = A_1 C_{31} h' r^2 (2 + \cos^2 2\theta). \quad (10.257)$$

Pro pevný bod obrazu ( $h' = \text{const}$ ) a pro určitou kruhovou zónu (poloměru  $r$ ) se při změně úhlu  $\theta$  pohybuje průsečík paprsku po kružnici, jejíž poloměr je  $\varepsilon = |A_1 C_{31} h' r^2|$  a jejíž střed je posunut vůči paraxiálnímu obrazu o  $2\varepsilon$  (viz obr. 10.35). Různé zóny vytvářejí různé kružnice, které se překrývají, a vzniká tak obraz podobný kometě, velikost obrazu roste se vzdáleností od osy. Všechny kružnice se dotýkají přímek, které svírají úhel  $30^\circ$  s kolmicí k optické ose (srov. obr. 10.35,  $\arcsin 0,5 = 30^\circ$ ). Komu lze podobně jako sférickou vadu potlačit vhodnou volbou tvaru čočky. Čočky (optické soustavy), v nichž je potlačena sférická aberace a koma se nazývají *aplanatické*.

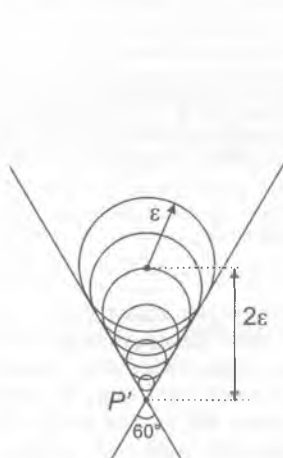
Další aberací je *zkreslení obrazu* /5. člen (10.250)/. Paprsková aberace je

$$b_x = 0 \quad (10.257)$$

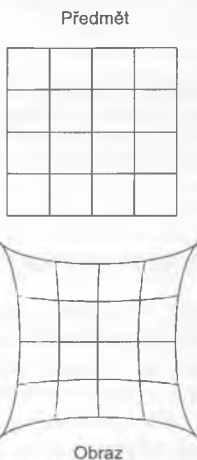
$$b_y = A_3 C_{11} h'^3 \quad (10.258)$$

Průsečík paprsků nezávisí na  $\theta$  ani na  $r$ , obraz je tedy ostrý (stigmatický). Je ale vidět, že vzdálenost obrazu od osy je úměrná třetí mocnině vzdálenosti paraxiálního obrazu (uvažovali jsme zde obrazový bod v rovině  $yz$ ). Obraz je tedy zkreslen. Tato aberace se zpravidla předvádí na zobrazení čtvercové mřížky, která podle znaménka koeficientu má tvar podušky (*poduškovité zkreslení*, viz obr. 10.36) nebo sudu (*soudkovité zkreslení*).

Druhý a třetí člen (10.250), které odpovídají *astigmatismu* a *zklenutí pole*, závisí na druhých mocninách  $h'$  a  $r$ , a proto spolu souvisí.



Obr. 10.35 Koma



Obr. 10.36 Poduškovité zkreslení obrazu

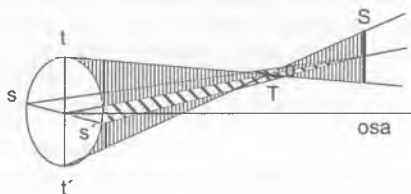
Paprsková aberace je rovna

$$b_x = 2A_2 C_{20} h'^2 r \sin \theta, \quad (10.259)$$

$$b_y = 2A_2 (C_{20} + C_{22}) h'^2 r \cos \theta. \quad (10.260)$$

To znamená, že pro daný bod obrazu a zónu opisuje průsečík paprsku s rovinou paraxiálního obrazu elipsu. Pro různé zóny je osvětlení rovnoměrné, protože plocha elipsy je úměrná  $r^2$ , stejně jako plocha kruhu obsahujícího všechny zóny až do poloměru  $r$ . Uvažujme-li paprsky, které vycházejí

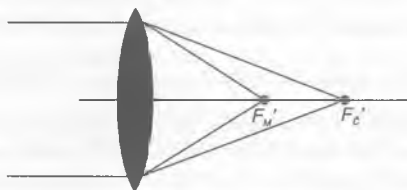
z bodu ležícího mimo osu (například v rovině  $yz$ ) a šíří se v rovině  $yz$  (vějíř paprsků) a v rovině  $xz$ , viz obr. 10.37, mají oba vějíře paprsků různé ohnisko (astigmatismus). Někde mezi oběma ohnisky se nachází rovina, v níž je elipsa nejvíce podobná kruhu. Pro různé polohy bodu  $P$  se nacházejí ohniska pro oba vějíře paprsků na parabolických plochách, což je zklenutí pole.



**Obr. 10.37 Astigmatismus.** Paprsky procházející čočkou v rovině  $ss'$  zobrazují mimosový bod do úsečky  $S$ , paprsky procházející čočkou v rovině  $tt'$  obrazují mimosový bod do úsečky  $T$ , v prostoru mezi nimi je oblast „nejmenšího rozmazání“ znázorněná na obrázku elipsou. Rovina  $tt'$  obsahuje mimoosový bodový předmět a optickou osu, rovina  $ss'$  je na ni kolmá

## 10.5.2 Barevné vady zobrazení

*Chromatické, tj. barevné, vady zobrazení* jsou způsobeny tím, že parametry optických zobrazovacích elementů závisí na vlnové délce světla. Typickým případem je závislost ohniskové vzdálenosti čočky díky disperzi indexu lomu materiálu, z něhož je vyrobena. Dochází tak k tomu, že poloha ohniskových bodů čočky se liší pro různé vlnové délky světla (viz obr. 10.38, kde je znázorněna odlišná poloha ohniskových bodů pro modré a červené světlo), při zobrazení se pak body obrazu různých barev zobrazí do bodů, které mají různé podélné (*podélná chromatická vada*) a příčné souřadnice (*příčná chromatická vada*).



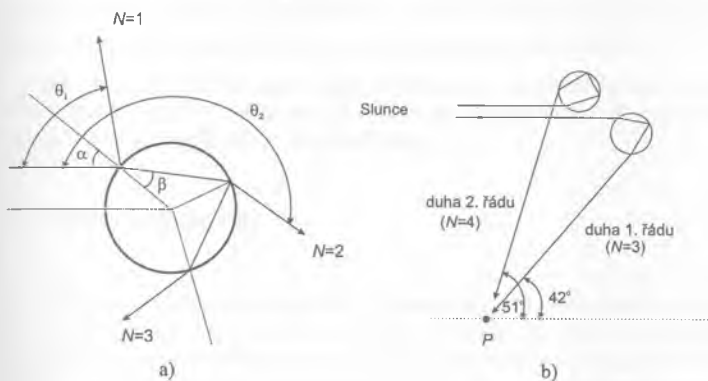
**Obr. 10.38 Chromatická aberace**

Chromatickou vadu je možné minimalizovat v okolí jisté vlnové délky například kombinací dvou čoček – spojné a rozptylné – umístěných těsně za sebou (*achromatický dublet*), přičemž každá z čoček je vyrobena z materiálu odlišné disperze. Chromatická vada je ovšem vyloučena u optických přístrojů, v nichž se ke zobrazení používá zrcadel, jako například u zrcadlových teleskopů.

## Poznámky

<sup>1</sup> Lom světla vede k řadě zajímavých jevů, které můžeme pozorovat v přírodě. Například vznik *duhy* je možné vysvětlit lomem světla v kulových kapkách vody, jak je znázorněno na obr. 10.39. Na kulovou kapku s indexem lomu  $n$  dopadá paprsek pod úhlem dopadu  $\alpha$ , částečně se odráží a láme pod úhlem lomu  $\beta$ . Při každém dalším dopadu na rozhraní voda – vzduch se opět odráží a láme. Vznikají tak paprsky, které se šíří od povrchu kapky pod úhly  $\theta_N$  vůči směru dopadajícího paprsku. Zde  $N$  čísluje paprsky tak, že  $N=1$  odpovídá prvnímu odraženému paprsku,  $N=2$  lomenému paprsku po jednom odrazu uvnitř kapky atd. Jak je vidět z geometrie znázorněné na obr. 10.39a, jsou úhly pro jednotlivé paprsky rovny  $\theta_N = 2\alpha + (N-1)(180^\circ - 2\beta)$ . Pro různé úhly  $\alpha$  (spojené se záměrnou výškou dopadajícího paprsku na povrch kapky) paprsky tak dostávají různé úhly  $\theta_N$ . Pro každé  $N$  ale existuje (minimální) úhel  $\theta_{Nd}$ , pod kterým je tato závislost nejméně výrazná, v tomto směru se šíří od kapky nejvíce paprsků, tedy maximální intenzita světla. Tento úhel odpovídá podmínce  $\frac{d\theta_N}{d\alpha} = 0$ . Uvážíme-li dále zákon lomu pro rozhraní vzduch – voda,

$$\sin \alpha = n \sin \beta, \text{ tj. } \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1}{n} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}, \text{ dostáváme } \cos \beta = (N-1) \frac{1}{n} \cos \alpha \text{ a } \cos^2 \alpha = \frac{n^2 - 1}{(N-1)^2 - 1}.$$



Obr. 10.39 Vznik duhy: a) Lom paprsku v kulové kapce, b) Vznik duhy 1. a 2. řádu

Pro index lomu vody  $n = 1,3324$  dostáváme  $\theta_3 = 318^\circ$ ,  $\theta_4 = 411^\circ$ , atd. Tyto úhly odpovídají úhlu pozorování (viz obr. 10.39b) primární duhy vůči směru šíření slunečních paprsků ( $360^\circ - \theta_{Nd}$ ), tj.  $42^\circ$  a sekundární duhy  $-51^\circ$ . Znamé rozložení barev v duze vzniká díky závislosti indexu lomu vody na vlnové délce. Pro přesnější rozložení intenzity světla při pozorování duhy je nutné započítat difrakci světla.



# 11 SPEKTRÁLNÍ PŘÍSTROJE

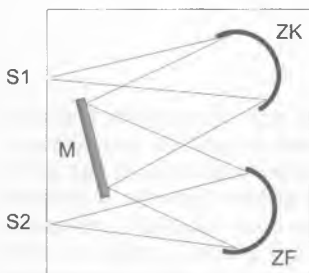
Studium interakce světla s látkami přináší stále řadu nových poznatků o látkách (i o světle). V širším smyslu se nazývá optickou spektroskopií. V užším smyslu ovšem znamená optická spektroskopie studium optických přechodů v látkách. Má zásadní význam pro získání informací o struktuře atomů, molekul, pevných látek i biologických systémů. Informace o energetických polohách stavů látek se získává přesným měřením vlnové délky (frekvence) odpovídajících spektrálních přechodů. Může se například měřit, pro které vlnové délky je světlo v látce absorbováno (absorpční spektroskopie) nebo jaké světlo vzniká při spontánní emisi (luminiscenční spektroskopie). Technologický pokrok, jak v oblasti optických prvků (například dokonalejší optické mřížky), detektorů (CCD), tak zejména v oblasti zdrojů světla (lasery), vedl k rozvoji metod optické spektroskopie. Tyto metody dovolují dnes studovat optické přechody s velkou přesností ( $\Delta \nu / \nu \approx 10^{-15}$ ), ale umožňují například i měření s vysokým časovým rozlišením ( $10^{-15}$  s).

Důležitou roli hrají ve spektroskopii přístroje, které dovolují měřit závislost intenzity světla na vlnové délce. Nazývají se *spektrální přístroje*. Patří k nim zejména *spektrometry* a *interferometry*.

## 11.1 SPEKTROMETRY

Spektrometrem se rozumí přístroj, do něhož dopadá světlo vstupní štěrbinou a který vytváří ve výstupní rovině obraz vstupní štěrbinu, jehož poloha je závislá na vlnové délce světla. Tato závislost polohy obrazu na vlnové délce vzniká díky disperznímu prvku, který je hlavní součástí spektrografu.

Může to být optický hranol nebo v současné době spíše optická ohybová mřížka. Uspořádání mřížkového spektrometru je schematicky znázorněno na obr. 11.1. Pokud se do výstupní roviny umístí plošný detektor, který zaznamenává rozložení intenzity světla v závislosti na poloze, tedy na vlnové délce, tj. spektrum světla, nazývá se přístroj *spektrografem*. O *monochromátoru* se mluví, když se do výstupní roviny umístí štěrbinina, která propouští světlo určitého úzkého intervalu vlnových délek.



Obr. 11.1 Možné uspořádání monochromátoru (tzv. uspořádání Czerny-Turner) s rovinnou mřížkou. Světlo vstupuje do monochromátoru vstupní štěrbinou S1, je kolimováno zrcadlem ZK, dopadá na mřížku M a je fokusováno zrcadlem ZF do výstupní roviny

Každý spektrometr je charakterizován svými parametry, k nimž patří zejména *světelnost*, *spektrální propustnost* a *spektrální rozlišení* (rozlišovací schopnost). Mřížkové spektrometry mohou pracovat v celém spektrálním rozsahu od vakuové ultrafialové až po dalekou infračervenou oblast. Optické prvky spektrometru, zejména mřížky, bývají optimalizovány pro určitou spektrální oblast, pro kterou se bude přístroj používat. *Spektrální rozlišení* je definováno

$$R_s = \left| \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \right|, \quad (11.1)$$

kde  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$  je nejmenší rozdíl mezi vlnovými délkami, které odpovídají maximu dvou blízkých spektrálních čar, jež je možné daným přístrojem ještě rozlišit. Čím je spektrální rozlišení spektrometru omezeno? Disperzní prvek (například mřížka) odklání různě světlo různých vlnových délek, vlnovým délkám  $\lambda$  a  $\lambda + \Delta\lambda$  proto odpovídají úhly  $\theta$  a  $\theta + \Delta\theta$ , pod kterými rovnoběžné svazky vycházejí. Jejich úhlová odchylka je proto

$$\Delta\theta = \frac{d\theta}{d\lambda} \Delta\lambda. \quad (11.2)$$

Veličina  $d\theta/d\lambda$  se nazývá *úhlovou disperzí*. Ve výstupní rovině spektrometru vznikají po odrazu na zrcadle s ohniskovou vzdáleností  $f_2'$  dva obrazy vstupní štěrbin, jejichž lineární vzdálenost je  $\Delta x_2$ ,

$$\Delta x_2 = f_2' \Delta \theta. \quad (11.3)$$

Aby bylo možné tyto dva obrazy rozlišit, musí být ovšem tato vzdálenost větší nebo rovna součtu šířek obrazů vstupní štěrbin. Velikost obrazu vstupní štěrbin je dána příčným zvětšením (podíl ohniskových vzdáleností zrcadel  $f_2'/f_1$ ). Zdá se tedy, že zmenšováním šířky vstupní štěrbin a zvětšováním ohniskové vzdálenosti  $f_2'$  je možné libovolně zvyšovat rozlišení. Ovšem to je ve skutečnosti, podobně jako u zobrazovacích přístrojů, omezeno difrakcí světla. Je-li průchod rovnoběžného svazku spektrálním přístrojem omezen (ve směru spektrálního rozkladu) aperturou rozměru  $d$ , vzniká v ohniskové rovině zrcadla difrakční obrazec, který odpovídá Fraunhoferově aproximaci. Apertura není tvořena vstupní štěrbinou, ale je dána velikostí mřížky (nebo optického hranolu) a má zpravidla obdélníkový tvar. V kapitole 10 jsme vyložili Rayleighovo kritérium pro prostorové rozlišení teleskopu s kruhovou aperturou, viz rov. (10.136). Rozlišitelnost dvou spektrálních čar závisí na jejich (reálném) tvaru i na poměru jejich intenzit. Pro případ, kdy jsou zobrazované profily spektrálních čar dány difrakcí, se opět používá Rayleighovo kritérium, podle něhož je možné dvě stejně intenzivní čáry ještě rozlišit, když se maximum jedné kryje s prvním difrakčním minimem čáry druhé. V tomto případě můžeme rozlišit dva svazky, které jsou úhlově vzdáleny alespoň o

$$\theta_{\min} \approx \frac{\lambda}{d}. \quad (11.4)$$

Tato úhlová vzdálenost odpovídá laterální vzdálenosti v ohniskové rovině zrcadla

$$\Delta \hat{x}_2 \approx f_2' \frac{\lambda}{d}. \quad (11.5)$$

Spektrální rozlišení, které odpovídá uvedenému kritériu, dostaneme tedy z podmínky rovnosti vzdáleností ve vztazích (11.3) a (11.5), tedy

$$\Delta x_2 = \Delta \hat{x}_2, \quad (11.6)$$

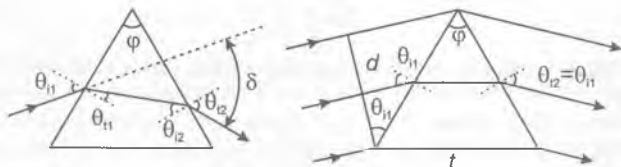
odkud

$$R_s = \left| \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \right| \approx d \left| \frac{d\theta}{d\lambda} \right|. \quad (11.7)$$

Tento vztah je platný pro mřížkové i hranolové spektrální přístroje, rozlišení je určeno rozměrem omezující apertury a úhlovou disperzí použitého disperzního prvku. Spektrální rozlišení je omezeno dále šířkou apertury, jak jsme uvedli výše, protože šířka obrazu apertury ve výstupní ohniskové rovině je jí přímo úměrná a zřejmě není možné od sebe rozlišit dva obrazy, které se překrývají. Malá šířka vstupní štěrbinou má ještě jeden důsledek: začne se projevovat difrakce vstupujícího světla na apertuře tvořené touto štěrbinou. To sice nemá vliv na spektrální rozlišení, ale výsledkem je snížení celkového světelného toku zachyceného vstupním zrcadlem (část světelného toku míjí zrcadlo). Často se za přijatelnou považuje taková minimální šířka štěrbinou, kdy na vstupní zrcadlo dopadá celé hlavní maximum difrakčního obrazce. Uvedené kritérium pro minimální šířku vstupní štěrbinou dovoluje odhadnout, k jakému snížení spektrálního rozlišení přístroje konečná šířka štěrbinou vede. Lze ukázat, že pro zmíněnou minimální šířku štěrbinou dochází ke snížení rozlišení pouze přibližně faktorem 3 – místo  $d$  by na pravé straně (11.7) vystupovalo  $d/3$ .

### 11.1.1 Optický disperzní hranol

Optický disperzní hranol je zpravidla vyroben ze skla nebo taveného křemene. Dvě vyleštěné plochy svírají úhel  $\varphi$  (viz obr. 11.2). Paprsek dopadající na první plochu pod úhlem



Obr. 11.2 Optický hranol

dopadu  $\theta_{11}$  vychází ze druhé plochy pod úhlem  $\theta_{12}$ . Důležitým parametrem je celková odchylka (deviace) paprsku  $\delta$ . Ve spektroskopických aplikacích se zpravidla používá hranol v geometrii, kdy je průchod svazku hranolem symetrický  $\theta_{11} = \theta_{12}$  (prochází rovnoběžně s podstavou). Těto situaci odpovídá

minimální hodnota deviace. Skutečně, kdyby minimální deviace nastávala pro úhel  $\theta_{i1} \neq \theta_{i2}$ , znamenalo by to, že při obráceném chodu paprsků by docházelo k minimální deviaci pro jiný úhel dopadu  $\theta_{i2}$ , nastávala by tedy pro dvě různé hodnoty úhlu dopadu, což neodpovídá skutečnosti. K tomuto závěru lze ovšem dojít i přímým výpočtem. V případě symetrického průchodu platí pro úhly  $\delta = 2\theta_{i1} - \varphi$ ,  $\theta_{i1} = \varphi/2$ , čili zákon lomu na vstupní ploše lze psát

$$\sin\left(\frac{\delta + \varphi}{2}\right) = n \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right). \quad (11.8)$$

Uvážíme-li, že  $\delta, n$  jsou funkcí vlnové délky, dostáváme derivováním (11.8)

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = 2 \frac{dn}{d\lambda} \frac{\sin(\varphi/2)}{\cos[(\delta + \varphi)]}. \quad (11.9)$$

Je zřejmé, že úhlová disperze je dána součinem indexové disperze a konstantního geometrického faktoru. Pro častý případ, kdy je osvětlen celý hranol, z geometrie plyne (viz obr. 11.2), že tento faktor je roven  $t/d$ , kde  $d$  je šířka svazku a  $t$  základna hranolu. Dosazením do (11.7) tak můžeme dostat vztah pro spektrální rozlišení hranolu

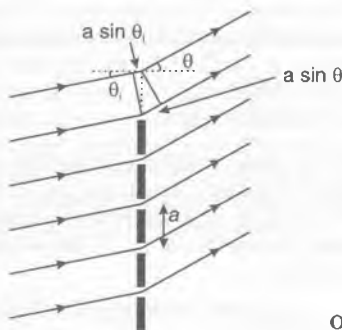
$$R_s = t \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|. \quad (11.10)$$

Důležitá je zde disperze indexu lomu (závislost indexu lomu na vlnové délce). Například pro sklo nebo tavený křemen je v oblasti propustnosti typická hodnota  $|dn/d\lambda| \approx 10^{-4}$ . Šířka spektrálního intervalu, ve kterém je možné hranol použít, je zpravidla omezena pouze rozsahem jeho spektrální propustnosti, tedy například pro sklo 350–3500 nm (optické sklo BK7) nebo pro tavený křemen 150–4500 nm.

### 11.1.2 Optická ohybová mřížka

*Optická ohybová mřížka* je optický prvek, který modelujeme pravidelnou řadou rovnoběžných štěrbin. Fraunhoferovu difrakci na takové apertuře jsme vyšetřovali v 8. kapitole (viz vztah (8.34)). Ve spektrálních přístrojích se využívá závislosti rozložení intenzity v difrakčním obrazci na vlnové

délce. Vstupní zrcadlo zajišťuje, že na mřížku dopadá rovnoběžný svazek světla, a dochází tedy skutečně k Fraunhoferově difrakci. Mřížkovou rovnicí (8.37), která byla získána pro kolmý dopad světla na mřížku, můžeme zobecnit pro libovolný úhel dopadu. Skutečně, pokud dopadá světelná vlna pod úhlem  $\theta_i$  vůči normále k rovině mřížky a k difrakci dochází ve směru daném úhlem  $\theta$  vůči normále, jak je znázorněno na obr. 11.3, je dráhový rozdíl mezi dvěma svazky pocházejícími ze dvou sousedních vrypů vzdálených  $a$  (mřížková konstanta) roven  $a(\sin\theta_i - \sin\theta)$ . Pokud by byly směry dopadajícího i difragovaného svazku světla na jedné straně normály k ploše



Obr. 11.3 Difrakce na mřížce

mřížky, bylo by mezi siny znaménko +. Je proto vhodné v této souvislosti zavést znaménkovou konvenci: pokud jsou úhly  $\theta_i$  a  $\theta$  na různých stranách normály k ploše mřížky, berou se oba úhly kladně. Pokud jsou na jedné straně normály, považuje se úhel  $\theta$  za záporný. Mřížkovou rovnicí je pak možné v obecném případě mřížek na průchod i na odraz psát

$$a(\sin\theta_i - \sin\theta_m) = m\lambda, \quad (11.11)$$

kde  $m$  je celé číslo, které určuje *difrakční řád*. Z této mřížkové rovnice můžeme bezprostředně vyjádřit úhlovou disperzi mřížky

$$\frac{d\theta_m}{d\lambda} = -\frac{m}{a \cos\theta_m}. \quad (11.12)$$

Dosazením do (11.7) získáme rozlišení mřížkového spektrálního přístroje. Jaký je rozměr  $d$  omezující apertury v tomto případě? Zřejmě je dán šířkou

svazku opouštějícího mřížku pod úhlem  $\theta_m$ . Geometrická šířka mřížky  $l$  (ve směru kolmém k vrypům) je ovšem

$$l = \frac{d}{\cos \theta_m}. \quad (11.13)$$

Pro rozlišení dostáváme podle rov. (11.7), (11.12), (11.13)

$$R_S = d \frac{|m|}{a \cos \theta_m} = \frac{l}{a} |m| = N |m|. \quad (11.14)$$

Zde  $N$  je celkový počet štěrbin na mřížce (přesněji řečeno počet osvětlených štěrbin). Spektrální rozlišení je tedy dáno součinem počtu štěrbin mřížky a difrakčního řádu, v němž se světlo pozoruje. Rozlišení mřížky může být vysoké. Mřížky se zpravidla charakterizují počtem štěrbin (vrypů, „čar“) na milimetr. Například pro mřížku s 1200 čarami/mm, která má velikost  $l = 5$  cm, dostáváme v prvním řádu rozlišení  $R_S = 60\,000$ .

Dalším důležitým parametrem optické ohybové mřížky při jejím použití ve spektrálních přístrojích je *volný spektrální interval*  $F_S$ . Definuje se jako interval vlnových délek, který se v určitém řádu nepřekrývá s jinými vlnovými délkami v jiném řádu, tedy v němž je prostorová poloha ve výstupní rovině jednoznačnou funkcí vlnové délky. Představme si, že v určitém difrakčním řádu  $m$  pozorujeme spektrum, které začíná od nejmenší vlnové délky  $\lambda_1$ . Pokud budeme postupně „roztahovat“ spektrum dopadajícího světla směrem k dlouhým vlnovým délkám až po vlnovou délku  $\lambda_2$ , můžeme spektrum dobře zaznamenávat, pokud nebude horní vlnová délka tak velká, že se její poloha v difrakčním obrazci začne překrývat s polohou vlnové délky  $\lambda_1$  v řádu  $m + 1$ . Překryvu ovšem odpovídá stejný difrakční úhel v mřížkové rovnici (11.11). Proto musí být pravé strany mřížkové rovnice stejné, musí tedy platit

$$m \lambda_2 = (m + 1) \lambda_1. \quad (11.15)$$

Volný interval vlnových délek pro řád  $m$  je roven

$$F_{Sm} = \lambda_2 - \lambda_1. \quad (11.16)$$

Z (11.15), (11.16) plyne

$$F_{Sm} = \frac{\lambda_1}{m}. \quad (11.17)$$

Vyšší řády tedy vedou k vyššímu rozlišení, ale volný interval je menší (rozlišení je přímo úměrné a volný interval nepřímo úměrný  $m$ ). Optická mřížka může být tedy použita pro měření spektrálních čar se střední vlnovou délkou  $\lambda$ , pokud jejich šířka  $\Delta\lambda$  splňuje nerovnost

$$\frac{\lambda}{mN} \leq \Delta\lambda \leq \frac{\lambda}{m} . \quad (11.18)$$

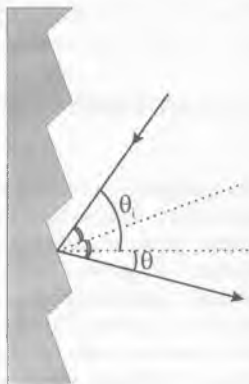
Jak vypadají skutečné optické ohybové mřížky, které se dnes používají ve spektrálních přístrojích? Vyrábějí se buď *holograficky*, nebo *rytím* do skleněné podložky či do kovového filmu napařeného na skleněnou podložku. Ryje se speciálním diamantovým hrotem na speciálních rycích strojích, které dovolují výrobu mřížek s hustotou několika tisíc vrypů na 1 mm, jimiž lze vyřít mřížky rozměrů až několik decimetrů. Tyto ryté mřížky, které jsou velmi drahé, je možné použít jako formu pro výrobu replik. Mřížky mohou být vyrobeny pro použití na průchod, například tak, že vrypy jsou matné a rozptylují světlo, nebo častěji pro použití na odraz, kdy jsou vrypy hladké a jejich stěna působí jako odrazná ploška, která odpovídá šterbině, jak jsme ji dosud uvažovali. Vhodnou volbou úhlu odrazné plochy vrypu je možné zvýšit světelný signál v určitém difrakčním řádu. Skutečně, velká část světelného toku dopadá do nultého, spektrálně nerozlišeného řádu. Pokud jsou vrypy nastaveny tak, že se dopadající světlo zrcadlově odráží ve směru difrakce vlnové délky, pro kterou chceme mřížku optimalizovat (v určitém, zpravidla prvním řádu), mluvíme o „*blejzované mřížce*“ (*mřížka s pilovým profilem*). Příklad profilu vrypů takové mřížky je na obr. 11.4.

Mřížky se také vyrábějí holograficky. Nejprve se hologram exponuje – na fotocitlivou vrstvu dopadají symetricky dvě rovinné vlny stejné vlnové délky, které interferují a vytvářejí interferenční pole s periodou  $\Lambda$  určenou jejich vlnovou délkou a úhlem, pod kterým se protínají /interferenci dvou rovinných vln jsme probírali v 5. kapitole, viz vztah (5.20)/. Po vyvolání je transmise vrstvy periodicky modulovaná, a pokud probíhá vše v lineárním režimu, je modulace transmise přímo úměrná intenzitě světla v interferenčním obrazci. Tyto mřížky jsou levnější a velmi přesné, proto lze dosáhnout vysoké hustoty vrypů. Nicméně není snadné zajistit „blejzování“. Na druhou stranu je možné vyrábět mřížky složitějšího reliéfu, takže mohou současně fungovat například jako mřížka i čočka.

„Blejzované“ mřížky se ve spektrometrech často umísťují tak, aby světlo dopadalo kolmo na roviny vrypů a difragovalo ve směru odrazu, tedy ve směru dopadu. Mřížka působí jako spektrálně citlivé zrcadlo. Mluví se o *Littrowově uspořádání*. V mřížkové rovnici (11.11) je pak vzhledem k zavedené znaménkové konvenci (pro zvolenou vlnovou délku)  $\theta_i = -\theta_m$ .



Z mřížkové rovnice pro kolmý dopad světla (8.37) plyne, že lze pozorovat v nízkých difrakčních řádech dobře spektrum, tj. difrakční úhly budou rozumně velké, když je  $a \approx \lambda$ . Počet vrypů na jednotku délky je roven  $a^{-1}$ , ve viditelné oblasti by tedy měl být řádově alespoň 100 vrypů na mm



Obr. 11.4 Optická mřížka s pilovým profilem (tzv. „blejzovaná“ mřížka)

(pro dopad světla blízky kolmému). Běžný kompaktní disk (CD) má spirálovou dráhu, na níž jsou umístěny prohlubně, pomocí nichž je zaznamenána informace. (Spirála „se hraje“ od středu ke kraji CD, začíná na průměru přibližně 50 mm a končí nejdále na průměru 160 mm, nepočítaje 4 mm zaváděcí oblasti a 1 mm zakončovací oblasti). Vzdálenost sousedních drah spirály je  $1,6 \mu\text{m}$  (šířka prohlubně je  $0,5 \mu\text{m}$ , délka  $0,9\text{--}3,3 \mu\text{m}$ ). Na disku je možné dobře pozorovat difrakci světla, mřížková konstanta  $1,6 \mu\text{m}$  odpovídá 625 „vrypům“ na 1 mm.

Zajímavé je si všimnout situace, kdy světlo dopadá na mřížku pod velkým úhlem vůči normále, tedy když  $\theta_i \rightarrow 90^\circ$ , a kdy je mřížková konstanta podstatně větší než vlnová délka světla  $a \gg \lambda$ . Z poslední nerovnosti a mřížkové rovnice (11.11) plyne, že  $\theta_i$  se blíží  $\theta_m$ , tj. jejich rozdíl je malý. Pak můžeme levou stranu rov. (11.11) upravit

$$a(\sin \theta_m - \sin \theta_i) = 2a \sin\left(\frac{\theta_m - \theta_i}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_m + \theta_i}{2}\right) \approx a(\theta_m - \theta_i) \cos \theta_i \quad (11.19)$$

Vzhledem k velikosti úhlu  $\theta_i$  je jeho kosinus velmi malý, a proto i pro velké hodnoty mřížkové konstanty může být  $a \cos \theta_i \approx \lambda$  a lze pozorovat dobře ohyb. Mřížková rovnice (11.11) přejde na tvar

$$\theta_m - \theta_i \approx \frac{m\lambda}{a \cos \theta_i}. \quad (11.20)$$

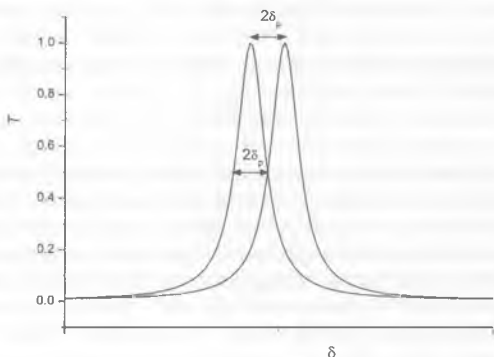
## 11.2 FABRY-PEROTŮV INTERFEROMETR

Pro spektrální měření s vysokým spektrálním rozlišením se užívají interferometry. Zde se zmíníme jen o jednom důležitém případě, který je významný nejen ve spektroskopii ale i v laserové fyzice. Fabry-Perotův interferometr je tvořen dvojicí rovinných planparalelních zrcadel. Toto uspořádání odpovídá případu mnohasvazkové interference, kterou jsme vyšetřovali v 5. kapitole. Dvojici zrcadel lze vyrobit tak, že se plochy planparalelní skleněné desky pokryjí vysoce odraznou vrstvou, pak se hovoří o *etalonu*. V případě *interferometru* jsou obě zrcadla nezávislá, oddělená vzduchovou mezerou. Jejich vzdálenost je proměnná. Zrcadla jsou tvořena skleněnými deskami, jejichž odrazné plochy jsou dobře rovinné a pokryté zpravidla vysoce odrazným dielektrickým filmem nebo tenkou (např. desítky nm) vrstvou hliníku nebo stříbra tak, že se hodnota odrazivosti  $R$  blíží k jedné. Druhá strana desky zrcadla svírá s odraznou plochou určitý úhel, aby se potlačily násobné odrazy světla.

Uvažujme případ, kdy na interferometr, jehož odrazné plochy jsou ve vzdálenosti  $h$ , dopadá světlo vlnové délky  $\lambda$ , které je divergentní – například světlo pocházející z plošného zdroje nebo rozbíhavého laserového svazku. Dochází k mnohasvazkové interferenci, přičemž maxima propustnosti nastávají ve směrech, které jsou dány podmínkou (5.55). Ve výrazu pro fázový rozdíl  $\delta$  (5.31) je index lomu vzduchu mezi zrcadly  $n_i \approx 1$ . Pokud se za interferometr umístí spojná čočka, vzniká v její ohniskové rovině interferenční obrazec tvořený soustřednými kruhy, který lze pozorovat na stínítku nebo zaznamenat vhodným plošným detektorem. Rozložení intenzity světla je dáno Airyho funkcí (5.48) ( $\delta$  se mění díky změně úhlu, vlnová délka je pevná). Pokud bude světlo obsahovat dvě vlnové délky  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$ , vzniknou dvě soustavy interferenčních kruhů. Pokud se obě vlnové délky k sobě budou blížit, slíjí se kruhy dohromady. Opět vzniká otázka, kdy je

možné ještě dvě blízké vlnové délky odlišit, čili jaké je spektrální rozlišení interferometru. Rozlišení závisí na relativní intenzitě a tvaru studovaných spektrálních čar, ale pro případ dvou stejně intenzivních čar se používá pro Fabry-Perotův interferometr kritérium, že dvě maxima v interferenčním obrazci lze ještě rozlišit, pokud jejich maxima jsou vzdálena o plnou šířku pásu Airyho funkce v polovině maxima  $\Delta\delta_{\min}$  – viz obr. 11.5. Tuto plošírku  $\delta_p$  určíme ze vztahu (5.48), uvážíme-li, že pro ni musí být  $I_t = I_0/2$ . Dostáváme

$$\left(\sin \frac{\delta_p}{2}\right)^2 = \frac{1}{F}. \quad (11.21)$$



Obr. 11.5 K rozlišení Fabry-Perotova interferometru

Protože hodnoty  $\delta_p$  jsou malé (v interferometru jsou maxima úzká díky vysoké odrazivosti zrcadel), můžeme  $\Delta\delta_{\min}$  vyjádřit explicitně

$$\Delta\delta_{\min} = 2\delta_p \approx \frac{4}{\sqrt{F}}. \quad (11.22)$$

Souvislost mezi fázovým posuvem  $\delta$  a vlnovou délkou je dána vztahem (5.31), který zde pro případ  $n_t \approx 1$  přepíšeme

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} h \cos \theta_t. \quad (11.23)$$

Změna vlnové délky o  $\Delta\lambda$  vede podle (11.23) ke změně

$$|\Delta\delta| = 4\pi h \cos\theta_1 \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}. \quad (11.24)$$

Nejmenší rozlišitelný interval vlnových délek  $\Delta\lambda_{\min}$  je tedy podle (11.22) a (11.24) roven

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda^2}{\pi h \sqrt{F} \cos\theta_1} = \frac{2\lambda}{m\pi\sqrt{F}}. \quad (11.25)$$

Poslední rovnost platí, protože úhel maxima difrakce je dán vztahem (5.55). *Spektrální rozlišení Fabry-Perotova interferometru* je podle (11.1) rovno

$$R_S = \frac{\pi}{2} m \sqrt{F}. \quad (11.26)$$

Řád interference dostaneme z (5.55) a (11.23). Pro kolmý dopad je

$$m = \frac{2h}{\lambda}. \quad (11.27)$$

Rozlišení interferometru může být o několik řádů vyšší než pro mřížku. Například pro odrazivost zrcadel  $R = 0,9$ ,  $h = 5$  cm, a světlo vlnové délky 500 nm dostáváme:  $m = 4 \times 10^5$ ,  $F = 360$  a  $R_S = 12 \times 10^6$ . V reálných přístrojích je ovšem rozlišení omezeno dalšími faktory, zejména přesností planparalelnosti a kvalitou odrazných ploch, atd. Podobně jako u mřížky, je i u Fabry-Perotova interferometru omezen volný spektrální interval. Pokud budeme studovat spektrum světla v řádu  $m$  začínající u vlnové délky  $\lambda_1$ , můžeme ho dobře měřit, pokud jeho nejvyšší vlnová délka  $\lambda_2$  nebude větší než taková vlnová délka, jejíž interferenční kruh se bude překrývat v řádu  $m$  s kruhem vlnové délky  $\lambda_1$  v řádu  $m + 1$ . Tedy dostáváme opět /srov. (11.15, 11.17)/

$$m\lambda_2 = (m+1)\lambda_1 \quad (11.28)$$

a

$$F_S = \frac{\lambda_1}{m}. \quad (11.29)$$

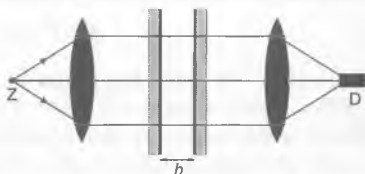
Pomocí (11.27) pro (téměř) kolmý dopad světla máme

$$F_S = \frac{\lambda^2}{2h}. \quad (11.30)$$

Fabry-Perotův interferometr může být tedy použit pro měření spektrálních čar se střední vlnovou délkou  $\lambda$ , pokud jejich šířka  $\Delta\lambda$  splňuje nerovnost

$$\frac{\pi}{2} m \sqrt{F} \leq \Delta\lambda \leq \frac{\lambda^2}{2h} . \quad (11.31)$$

Jiným uspořádáním Fabry-Perotova interferometru je *skenovací* interferometr, v němž se spojitě mění vzdálenost mezi zrcadly. Jedno ze zrcadel může být například připevněno na piezoelektrické podložce. Jeho obvyklé uspořádání je znázorněno na obr. 11.6. Světlo je fokusováno tak, že na intrefe-rometr dopadá kolmo rovinná vlna, která prochází a je čočkou soustředěna na detektor. Měření probíhá tak, že se mění vzdálenost zrcadel  $h$  a zaznamenává se signál z detektoru jako funkce  $h$ . To ovšem znamená, že změnou  $h$  se nastavuje podmínka maxima propustnosti intrefe-rometru, tj. maximem Airyho funkce se „projíždí“, skenuje jistý interval vlnových délek. Změny vzdálenosti zrcadel mohou probíhat periodicky například s frekvencí stovek hertzů. Pak je možné přivést signál z detektoru na verti-kální osu osciloskopu, osu vodorovnou rozmítat synchronně se změnou  $h$ , a pozorovat spektrum „v reálném čase“. Kromě zrcadel s rovinnými plo- chami se stále častěji užívá interferometr se zrcadly kulovými, která jsou umístěna tak, že jejich ohniska splývají – jedná se o *konfokální Fabry-Perotův interferometr*. Jeho výhodou je, že kulové plochy lze vyrobit s větší kvalitou, není nutné nastavovat rovnoběžnost odrazných ploch a v případě skenovacího interferometru není kritické nastavení směru dopadajícího světla.



Obr. 11.6 Skenovací interferometr

# 12 ZÁKLADY FOTOMETRIE A RADIOMETRIE

Fotometrie se zabývá měřením světla, tj. viditelného elektromagnetického záření. Jejím smyslem je kvantifikovat světelné veličiny tak, jak je vnímá lidské oko, proto je v jejích jednotkách citlivost oka zohledněna. Zabývá se proto pouze elektromagnetickým zářením z viditelné části spektra (neměří, co oko nevidí). Naproti tomu *radiometrie* je obecnější, není spektrálně omezena. Omezíme se na stručný přehled některých radiometrických, respektive fotometrických, veličin a jednotek.

Uvedeme nejprve některé radiometrické pojmy. Výkon, který vychází ze zdroje světla, se nazývá *zářivý tok*  $\Phi$ , jeho jednotkou je watt [W]. Například z izotropního bodového zdroje vychází zářivý tok rovnoměrně všemi směry do plného prostorového úhlu. Pro kvantifikaci vyzařovaného toku bodového zdroje v určitém směru se udává zářivý tok do jednotkového prostorového úhlu v daném směru. Odpovídající veličina se nazývá *zářivost*  $I$  [W/sr], watt na steradián/ a lze ji definovat implicitně vztahem

$$d\Phi = I d\Omega, \quad (12.1)$$

kde  $d\Phi$  je zářivý tok bodového zdroje do prostorového úhlu  $d\Omega$ . Pokud je zdroj plošný, záleží vyzařovaný výkon v určitém směru také na tom, jaký úhel  $\theta$  svírá tento směr s normálou k ploše zdroje. Pokud do daného prostorového úhlu  $d\Omega$  dopadá určitý výkon  $d\Phi$ , zdá se zdroj světla být intenzivnější, čím je menší plocha, pod kterou je v daném směru zdroj vidět, tedy čím je menší ( $dA \cos \theta$ ), kde  $dA$  je plocha zdroje. Zavádí se proto veličina *radiance* neboli *zář*  $L$  [ $\text{Wm}^{-2}\text{sr}^{-1}$ ], kterou můžeme definovat vztahem

$$d\Phi = L dA \cos \theta d\Omega. \quad (12.2)$$

Dopadá-li na plochu  $dA$  zářivý tok  $d\Phi$ , zavádí se pro kvantifikaci ozáření veličina *intenzita ozáření*  $E$  [ $\text{Wm}^{-2}$ ]

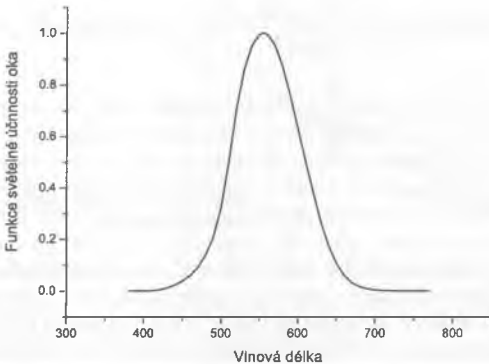
$$d\Phi = E dA. \quad (12.3)$$

Pro vyjádření spektrálních závislostí uvedených veličin je možné zavést odpovídající spektrální hustoty, např. *spektrální hustota zářivého toku*  $\Phi_\lambda$  odpovídá zářivému toku vztaženému na jednotkový frekvenční interval okolo vlnové délky  $\lambda$ . Zářivý tok do frekvenčního intervalu  $d\lambda$  je pak roven

$$d\Phi = \Phi_\lambda d\lambda. \quad (12.4)$$

Jak již bylo řečeno, fotometrické veličiny závisí na tom, jak vnímá záření lidské oko. Aby se fotometrie odlišila od radiometrie, kvantifikuje se pomocí světelných jednotek. *Světelný tok*  $\Phi_V$ , jehož jednotkou je lumen [lm], odpovídá zářivému toku a lze ho určit přepočtem zářivého toku na citlivost (standardního) oka pro denní vidění. Tato citlivost je vyjádřena *funkcí spektrální citlivosti oka*  $V(\lambda)$ , která je tabelována (např. i v normách ČSN, DIN atd.) a je překreslena na obr. 12.1. Oko je nejcitlivější pro vlnovou délku 555 nm, funkce  $V(\lambda)$  je pro tuto vlnovou délku normována. Jednotka lumen je definována tak, že na této vlnové délce odpovídá  $1 \text{ W} \rightarrow 673 \text{ lm}$ . To tedy znamená, že světelný tok je spojen se spektrální hustotou zářivého toku vztahem

$$\Phi_V = K_m \int V(\lambda) \Phi_\lambda d\lambda. \quad (12.5)$$



Obr. 12.1 Funkce světelné citlivosti oka

Konstanta  $K_m$  odpovídá maximální světelné účinnosti denního vidění, její hodnota je  $K_m = 673 \text{ lm W}^{-1}$ . Podobně jako u radiometrických veličin, můžeme další fotometrické veličiny zavést na základě světelného toku. Tak pro bodový zdroj odpovídá zářivosti (viz rov. 12.1) *svítivost*  $I_V$ , její jednotkou je  $\text{lm sr}^{-1}$ . Tato jednotka se nazývá *kandela* a je základní jednotkou soustavy jednotek SI. Radianci (viz rov. 12.2) odpovídá *jas*  $L_V$  [ $\text{cd m}^{-2}$ ], intenzitě ozáření (viz rov. 12.3) *osvětlení*  $E_V$ . Jednotkou osvětlení je  $\text{lm m}^{-2}$ , která se nazývá lux, zkratka lx.

Vrátíme se nyní k radiometrickým jednotkám a vyšetříme některé konkrétní situace. Uvažujme nejprve plochu velikosti  $dA$ , která je osvětlena izotropním bodovým zdrojem umístěným ve vzdálenosti  $r$ . Úhel mezi normálou plochy a směrem mezi bodovým zdrojem a plochou je  $\theta$  (viz obr. 12.2). Na plochu dopadá záření odpovídající prostorovému úhlu

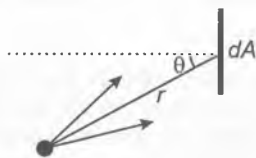
$$d\Omega = \frac{dA \cos \theta}{r^2} \quad (12.6)$$

Podle rov. (12.1) je

$$d\Phi = I \frac{dA \cos \theta}{r^2} \quad (12.7)$$

Intenzitu ozáření můžeme určit ze vztahu (12.3) a (12.7),

$$E = \frac{I}{r^2} \cos \theta. \quad (12.8)$$



Obr. 12.2 Osvětlení obecné plošky bodovým zdrojem

Nyní budeme uvažovat plošný zdroj velikosti  $dA_{zd}$ . Nejjednodušším případem je tzv. Lambertův zdroj, jehož zář nezavisí na úhlu. Zářivý tok takového zdroje do určitého prostorového úhlu je dán výrazem (12.2). Jako element prostorového úhlu je v daném případě vhodné zvolit kuželovou vrstvu svírající určitý úhel  $\theta$  s normálou k ploše. Velikost elementu prostorového úhlu, jenž je sevřen kužely s úhly  $\theta$  a  $\theta + d\theta$ , můžeme určit tak, že nejprve určíme velikost plochy, kterou tyto dva kužely vytnou na kouli o poloměru  $r$



(obr. 12.3). Poloměr plochy je  $r \sin \theta$ , její šířka je  $r d\theta$ , tedy velikost plochy je

$$dA = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta \quad (12.9)$$

a velikost odpovídajícího prostorového úhlu

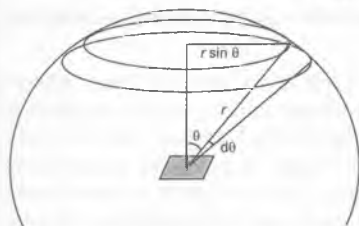
$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta. \quad (12.10)$$

Zářivý tok směřující do tohoto prostorového úhlu je dán vztahem (12.2)

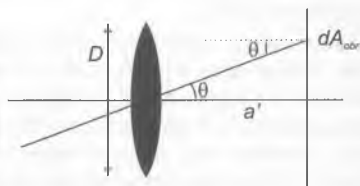
$$d\Phi = L dA_{zd} \cos \theta 2\pi \sin \theta d\theta. \quad (12.11)$$

Celkový zářivý tok vyzářený do poloprostoru nad zdrojem získáme integrací (12.11) v mezích  $0 \dots 90^\circ$ , s výsledkem

$$\Phi_{polop} = \pi L dA_{zd}. \quad (12.12)$$



Obr. 12.3 Plošný zdroj



Obr. 12.4 Osvětlení obrazu vytvořeného čočkou

Při zobrazování je velmi důležité osvětlení obrazu, který vzniká. Budeme zde uvažovat zobrazení čočkou, jak je znázorněno na obr. 12.4. Osvětlení můžeme získat pomocí výše uvedených vztahů. Soustředíme se zde na dva důležité případy. Nejprve se budeme věnovat situaci, kdy je bodový zdroj zářivosti  $I$  zobrazen čočkou. Budeme předpokládat, že zdroj ve vzdálenosti  $a$  i jeho obraz na stínítku vzdáleném  $a'$  od čočky leží na ose a že čočka má malou aperturu průměru  $D$  ( $D \ll a, a'$ ). Pak můžeme položit  $\cos \theta \approx 1$  a  $r \approx a$  ve vztahu (12.7), který dává zářivý tok elementem plochy čočky  $dA$ . Celkový tok je pak (integruje se přes plochu čočky)

$$\Phi = I \frac{\pi D^2}{4} \frac{1}{a^2}. \quad (12.13)$$

Následkem difrakce světla bude obrazem bodu difrakční obrazec, jehož rozložení intenzity pro případ kruhové čočky je dáno vztahem (8.24). Úhlový průměr světlého středu, Airyho disku, je dán výrazem (10.136). Jeho plocha je v uvažovaném případě rovna

$$dA_{obr} = \pi \left( 1,22 \frac{a'}{D} \lambda \right)^2. \quad (12.14)$$

Intenzitu ozáření Airyho disku určíme z rov. (12.3), (12.13) a (12.14)

$$E = \frac{\Phi}{d A_{obr}} = I \frac{D^4}{1,22^2 \lambda^2 a^2 a'^2}. \quad (12.15)$$

Je zřejmé, že intenzita ozáření závisí (silně) na čtvrté mocnině průměru apertury. Tato závislost je dána tím, že celkový tok zachycený čočkou je úměrný její ploše ( $\propto D^2$ ) a přitom se plocha obrazu bodového předmětu zmenšuje ( $\propto D^{-2}$ ).

Jiná situace nastává pro plošný zdroj, při jehož zobrazení není velikost jeho obrazu dána difrakcí. Leží-li části obrazu mimo optickou osu čočky, dochází k poklesu ozáření směrem k okraji. Předpokládejme (viz obr. 12.4), že na stínítku ve vzdálenosti  $a'$  za čočkou vzniká obraz, element jeho plochy  $dA_{obr}$  je mimo osu, spojnice středu čočky a polohy tohoto elementu svírá úhel  $\theta$ . Z hlediska elementu obrazu je osvětlená čočka plošným zdrojem světla s takovou radiancí  $L$ , že zářivý tok do prostorového úhlu  $d\Omega$  určeného plochou  $dA_{obr}$  je dán vztahem (12.2). Prostorový úhel je ovšem

$$d\Omega = \left( \frac{a'}{\cos\theta} \right)^{-2} dA_{obr} \cos\theta. \quad (12.16)$$

Zářivý tok, který prochází elementem plochy čočky  $dA$  a dopadá na element  $dA_{obr}$  plochy obrazu, je podle (12.2) a (12.16)

$$d\Phi = L dA dA_{obr} \frac{\cos^4\theta}{a'^2}. \quad (12.17)$$

Celkový tok na plošku  $dA_{obr}$  je možné dostat integrací přes celou plochu čočky. Budeme-li opět předpokládat, že čočka je malá, můžeme při integraci předpokládat  $\theta \approx \text{konst.}$ , to znamená, že tok na element plochy obrazu je ( $D$  je průměr čočky)

$$\Delta\Phi = L \frac{\pi D^2}{4} dA_{obr.} \frac{\cos^4 \theta}{a'^2}. \quad (12.18)$$

Intenzita ozáření v daném místě obrazu je podle (12.3)

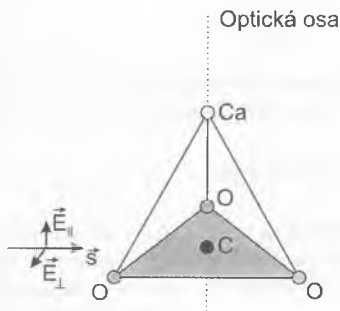
$$E = L \frac{\pi D^2}{4} \frac{\cos^4 \theta}{a'^2}. \quad (12.19)$$

Se získanými výsledky si můžeme připomenout teleskopy. Jak jsme již uvedli, rostoucí apertura vede ke zvýšení rozlišení teleskopu (srov. odst. 10.3.3) přitom roste i ozáření v obrazu, který vytvoří objektiv teleskopu, podle vztahu (12.15). Při pozorování hvězd je důležité, aby bylo možné odlišit hvězdu od pozadí oblohy. Vzhledem k tomu, že hvězda je zdroj bodový a obloha plošný, plyne z našich výsledků (12.15 a 12.19), že poměr ozáření od hvězdy ku ozáření od oblohy roste se čtvercem průměru apertury. To je další důvod k tomu, aby se používaly teleskopy s velkým průměrem.

# 13 ŠÍŘENÍ SVĚTLA V ANIZOTROPNÍCH LÁTKÁCH

Symetrie některých materiálů je taková, že nejsou izotropní a jejich vlastnosti závisí na směru. Například index lomu světla může záviset na směru šíření světelné vlny a na její polarizaci. Může se tak stát, že se při lomu světla v takovém materiálu lámou pod různými úhly různě polarizované svazky. Tento jev, někdy ovšem obecněji závislost indexu lomu na směru a polarizaci, se nazývá *dvojlomem*. Příkladem známé dvojlomné látky je vápenec ( $\text{CaCO}_3$ ). Atomy jsou uspořádány (jak je uvedeno na obr. 13.1) tak, že atom uhlíku a atomy kyslíku leží v jedné rovině, atom vápníku je ve vrcholu „pyramidy“. Vápenec patří do trigonální krystalické soustavy ke třídě  $D_{3d}$  (tj.  $\bar{3}m$ ). Má jednu trojčetnou osu symetrie, tři jí procházející (vertikální) roviny symetrie, tři horizontální dvojčetné osy kolmé k trojčetné ose a střed inverze.

Představme si dvě lineárně polarizované světelné vlny jako na obr. 13.1, které postupují zleva. Jedna z nich je polarizovaná lineárně kolmo



Obr. 13.1 Dvojlom ve vápenci

k trojčetné ose ( $\vec{E}_\perp$ ), druhá je polarizována s osou rovnoběžně ( $\vec{E}_\parallel$ ). Geometrie uspořádání atomů, tedy elektronových vazeb, naznačuje, že odezva elektronů na elektrické pole různé polarizace bude různá. Index lomu přitom s touto odezvou přímo souvisí, silnější interakce znamená vyšší index lomu. Podle obrázku lze očekávat silnější odezvu pro polarizaci  $\vec{E}_\perp$  („elektrony kmitají v rovině“). Skutečně, index lomu je pro tuto polarizaci větší, například pro 590 nm je  $n_\perp = 1,658$  a  $n_\parallel = 1,486$ , tedy různé polarizace světla se šíří s různými fázovými rychlostmi ( $c_\perp < c_\parallel$ ). Postupuje-li světelná vlna ve směru trojčetné osy, je ze symetrie zřejmé, že index lomu nebude na směru polarizační roviny záviset. Přímkou, která odpovídá takovému směru šíření světla, v němž nezávisí index lomu na polarizaci světla, se nazývá *optická osa*. Jak bude zřejmé z dalšího výkladu, lze látky rozdělit do tří skupin: 1. *látky opticky jednoosé*, kde je jeden takový význačný směr, 2. *látky dvouosé*, kde jsou tyto směry dva, a konečně 3. *látky opticky izotropní*, v nichž index lomu nezávisí na polarizaci v libovolném směru. V dalším budeme předpokládat, že látka je *magneticky izotropní*, tedy že její magnetické vlastnosti na směru nezávisí. Dále budeme uvažovat *prostředí homogenní a nevodivé* ( $\sigma = 0$ ), v němž nedochází k absorpci světla.

### 13.1 VLASTNOSTI TENZORU PERMITIVITY

Permitivita je obecně tenzorem 3. řádu, který má devět komponent:

$$\vec{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (13.1)$$

Uvažujeme zde případ, kdy všechny složky tenzoru permitivity jsou reálné. Vztah (1.9) mezi vektorem elektrické intenzity  $\vec{E}$  a vektorem elektrické indukce  $\vec{D}$  je možné ve složkách psát

$$D_i = \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} E_j. \quad (13.2)$$

Hustota energie elektromagnetického pole spojená s polem elektrickým je

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \sum_k E_k D_k = \frac{1}{2} \sum_k \sum_i \varepsilon_{ki} E_k E_i. \quad (13.3)$$

Z platnosti Poyntingovy věty

$$\nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (13.4)$$

v anizotropních prostředích plyne *symetrie* tenzoru  $\vec{\varepsilon}$ . Skutečně s materiálovými vztahy (13.2), resp.  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ , dostaneme pomocí Maxwellových rovnic (1.1, 1.2) přímým výpočtem<sup>1</sup>

$$\nabla \cdot \vec{S} = \nabla \cdot [\vec{E} \times \vec{H}] = -\mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{\varepsilon} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (13.5)$$

Uvážíme-li hustotu energie spojenou s magnetickým polem

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \quad (13.6)$$

a časovou derivaci celkové hustoty energie

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w_m}{\partial t} + \frac{\partial w_e}{\partial t}, \quad (13.7)$$

kde  $w_e$  je dáno vztahem (13.3), dostáváme z rov. (13.4) rovnost

$$\sum_k \sum_i \left[ \varepsilon_{ki} E_i \frac{\partial E_k}{\partial t} - \varepsilon_{ik} E_i \frac{\partial E_k}{\partial t} \right] = 0. \quad (13.8)$$

Odtud plyne

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}. \quad (13.9)$$

To tedy znamená, že *tenzor permitivity je symetrický*, počet nezávislých složek tenzoru se proto zmenší na 6.

Symetrie tenzoru dovoluje převést výraz pro elektrickou energii (13.3) do tvaru, který obsahuje pouze druhé mocniny jednotlivých složek pole, a ne součiny různých složek. Uvažujme v prostoru plochu druhého řádu ve tvaru

$$\varepsilon_{11}x^2 + \varepsilon_{22}y^2 + \varepsilon_{33}z^2 + 2\varepsilon_{12}xy + 2\varepsilon_{13}xz + 2\varepsilon_{23}yz = \text{konst.} \quad (13.10)$$

Je zřejmé, že se jedná o pozitivně definitní kvadratickou formu. Nahradíme-li totiž souřadnice odpovídajícími složkami pole  $E_i$ , je podle (13.3) konstanta rovna  $2w_e \geq 0$ . Plocha popsaná rovnicí (13.10) je tedy elipsoidem. Elipsoid může být transformací souřadnic převeden do hlavních os. Lze tedy najít takovou souřadnou soustavu spojenou s anizotropním prostředím, ve které bude tenzor permitivity diagonální. Tyto souřadné osy se nazývají *hlavními souřadnými osami*. V nich má pak tenzor permitivity diagonální tvar

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (13.11)$$

Komponenty tenzoru permitivity v hlavních osách se označují často jedním indexem,  $\varepsilon_{ii} = \varepsilon_i$ . V hlavních osách pak materiálové vztahy přecházejí do jednoduchého tvaru

$$D_i = \varepsilon_i E_i \quad (13.12)$$

(přes indexy se nesčítá) a vztah (13.3) lze psát

$$w_e = \frac{1}{2} \left( \frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z} \right). \quad (13.13)$$

Podle symetrie látky mohou nastat případy: 1. všechny komponenty jsou různé,  $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$ , pro látky dvojosé, 2. dvě komponenty jsou si rovny, například  $\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$ , pro látky jednoosé, a 3. všechny komponenty jsou si rovny,  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$ , pro látky opticky izotropní. K *dvojovým* látkám patří například krystaly krystalických soustav *ortorombické*, *monoklinické* a *triklinické*, kde nejsou žádné dva ekvivalentní směry. Pokud naopak jsou tři vzájemně kolmé směry krystalograficky ekvivalentní, jako v *kubické* (krychlové) krystalické soustavě nebo v látkách neuspořádaných (kapaliny, plyny, amorfni látky), jde o látky *izotropní*. Konečně pokud jsou dva nebo více směrů v rovině ekvivalentní a pokud nejde o látku izotropní, jedná se o látku jednoosou. Jedna z hlavních os je přitom kolmá ke zmíněné rovině a rovnoběžná s  $n$ -čtetnou osou symetrie. K *jednoosým* krystalům patří látky

z krystalických soustav *trigonální* (trojčetná osa), *tetragonální* (čtyřčetná osa) a *hexagonální* (šestičetná osa).

## 13.2 SVĚTELNÉ VLNY V ANIZOTROPNÍM PROSTŘEDÍ

Jaký je charakter světelných vln v anizotropních krystalech? Ukážeme nyní, že uvnitř anizotropních materiálů, jejichž vlastnosti lze popsat reálným tenzorem permitivity (13.11), se může světlo šířit jen jako *lineárně polarizovaná vlna se dvěma možnými navzájem kolnými směry polarizace*, přičemž směr šíření energie a směr přírůstku fáze vlny (kolmice k vlnoploše) mají obecně různé směry.

### 13.2.1 Řádná a mimořádná vlna, Fresnelova rovnice

Pro jednoduchost se budeme zabývat rovinnými harmonickými vlnami, tedy

$$\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B} \propto \exp[-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]. \quad (13.14)$$

Vlnový vektor  $\vec{k}$  určuje směr přírůstku fáze vlny, jeho směr je dán jednotkovým vektorem  $\vec{s} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ . Fázová rychlost je dána obvyklým vztahem (zde je rychlost uvažována jako vektor)

$$\vec{c} = \frac{c_0}{n} \vec{s}. \quad (13.15)$$

Pro vlnový vektor platí jako obvykle

$$\vec{k} = k \vec{s} = \frac{\omega n}{c_0} \vec{s}. \quad (13.16)$$

Směr toku energie  $\vec{t}$  je dán směrem Poyntingova vektoru,

$$\vec{t} = \frac{\vec{S}}{|\vec{S}|}, \quad (13.17)$$

tento jednotkový vektor se nazývá *paprskovým vektorem*.



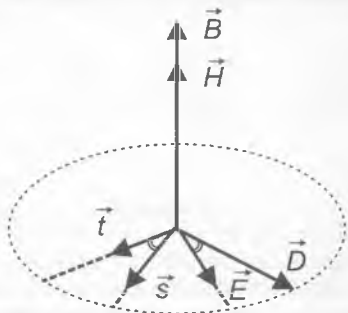
Zopakujeme nyní úvahy z odst. 1.3.1 pro anizotropní prostředí. Pro závislosti polí ve tvaru (13.14) lze vyjádřit časové a prostorové derivace takto

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega, \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow ik_x, \quad \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow ik_y, \quad \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow ik_z. \quad (13.18)$$

Rotační Maxwellovy rovnice pak přejdou (pro magneticky izotropní  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ , nevodivé látky) na

$$\frac{n}{c_0} \vec{s} \times \vec{E} = \mu \vec{H} \quad (13.19)$$

$$\frac{n}{c_0} \vec{s} \times \vec{H} = -\vec{D}. \quad (13.20)$$



Obr. 13.2 Orientace vektorů  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$

Z materiálového vztahu je  $\vec{H} \parallel \vec{B}$ , z (13.19) a (13.20)  $\vec{H} \perp \vec{s}, \vec{E}$ ;  $\vec{D} \perp \vec{s}, \vec{H}$ . Z definice paprskového vektoru  $\vec{t}$  plyne  $\vec{t} \perp \vec{E}, \vec{H}$ . Orientace vektorů je znázorněna na obr. 13.2. Je zřejmé, že vektory  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{t}, \vec{s}$  leží v rovině kolmé ke kolineárním vektorům  $\vec{H}, \vec{B}$ . Tyto vzájemné orientace vektorů jsou zcela nezávislé na skutečných symetrických vlastnostech látky. Velikost úhlu  $\alpha$  mezi vektory  $\vec{t}, \vec{s}$  je dána vlastnostmi permitivity prostředí.

S jakou rychlostí se šíří energie přenášená světelnou vlnou? Energie se šíří ve směru paprskového vektoru  $\vec{t}$  tzv. *paprskovou rychlostí*  $v$ , hustota výkonového toku je dána Poyntingovým vektorem  $\vec{S}$ . Máme-li hustotu energie  $w$ , platí zřejmě

$$\vec{S} = w\vec{v}. \quad (13.21)$$

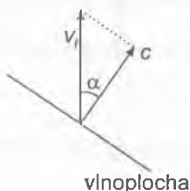
Hustotu energie elektromagnetického pole, která se rovná součtu energie elektrického (13.3) a magnetického (13.6) pole, můžeme přímým dosazením (13.19), resp. (13.20) do (13.3), resp. (13.6) přepsat

$$w = \frac{1}{c} \vec{s} \cdot \vec{S} = \frac{1}{c} |\vec{S}| \vec{s} \cdot \vec{t}. \quad (13.22)$$

Pro velikost fázové rychlosti tedy máme z (13.22)

$$c = \frac{|\vec{S}|}{w} \vec{s} \cdot \vec{t} = \vec{v}_f \cdot \vec{s} = v_f \cos \alpha. \quad (13.23)$$

Úhel  $\alpha$  je úhel mezi paprskovým vektorem a směrem vlnového vektoru. Vztah mezi velikostí fázové a paprskové rychlosti je ilustrován na obr. 13.3.



Obr 13.3 Vzájemná orientace vektorů paprskové  $\vec{v}_f$  a fázové  $\vec{c}$  rychlosti

Nyní pomocí rov. (13.19) a (13.20) odvodíme *Fresnelovu rovnici*, která dovoluje určit velikost indexu lomu v závislosti na směru šíření. Spojením těchto dvou vztahů lze eliminovat vektor magnetické intenzity

$$\vec{D} = -\frac{n^2}{\mu c_0^2} \vec{s} \times (\vec{s} \times \vec{E}). \quad (13.24)$$

Vektory elektrické indukce a elektrické intenzity jsou ovšem spojeny také materiálovým vztahem, pro hlavní osy tedy vztahem (13.12). S jeho pomocí je možné vyloučit z (13.24) komponenty elektrického pole. Rovnice pak bude spojovat komponenty tenzoru permitivity, index lomu a vektor popisující směr šíření. Lze ji použít k určení velikosti indexu lomu pro daný směr šíření. Pomocí (13.12) a s využitím vektorové identity  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$  můžeme (13.24) přepsat pro jednotlivé složky

$$\varepsilon_k E_k = \frac{n^2}{\mu c_0^2} \left[ E_k - s_k (\vec{E} \cdot \vec{s}) \right] \text{ pro } k = 1, 2, 3. \quad (13.25)$$

Tři uvedené rovnice lze psát jako soustavu tří homogenních lineárních rovnic pro složky elektrického pole

$$a_{k1} E_1 + a_{k2} E_2 + a_{k3} E_3 = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (13.26)$$

Zde

$$a_{kk} = \varepsilon_k - \frac{n^2}{\mu c_0^2} + s_k^2 \frac{n^2}{\mu c_0^2}, \quad (13.27)$$

$$a_{ki} = \frac{n^2}{\mu c_0^2} s_k s_i, \quad \text{pro } k \neq i. \quad (13.28)$$

Tato soustava má nenulové řešení, pokud její determinant je roven nule. Prímým výpočtem

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (13.29)$$

dostáváme *Fresnelovu rovnici*:

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_{1r} - n^2)(\varepsilon_{2r} - n^2)(\varepsilon_{3r} - n^2) + (\varepsilon_{1r} - n^2)(\varepsilon_{2r} - n^2)n^2 s_3^2 + (\varepsilon_{2r} - n^2)(\varepsilon_{3r} - n^2)n^2 s_1^2 \\ & + (\varepsilon_{1r} - n^2)(\varepsilon_{3r} - n^2)n^2 s_2^2 = 0 \end{aligned} \quad (13.30)$$

Tato rovnice spojuje index lomu  $n$ , s nímž se šíří rovinná vlna, jejíž vlnový vektor má směr  $\vec{s}$ . Rovnice je kvadratická pro  $n^2$ , což znamená obecně dvě řešení pro každý směr pro  $n^2$ ,  $\pm$  pro  $n$  po odmocnění odpovídá dvěma opačným smyslům šíření ve směrech  $\pm \vec{s}$ .

V dalším se budeme zabývat pouze případem jednoosých látek (optická osa ve směru osy 3)

$$\varepsilon_{1r} = \varepsilon_{2r} \neq \varepsilon_{3r}. \quad (13.31)$$

V tomto případě přejde levá strana rov. (13.30) na

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_{1r} - n^2) \left[ (\varepsilon_{1r} - n^2)(\varepsilon_{3r} - n^2) + (\varepsilon_{1r} - n^2)n^2 s_3^2 + (\varepsilon_{3r} - n^2)n^2 s_1^2 + \right. \\ & \left. + (\varepsilon_{3r} - n^2)n^2 s_2^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (13.32)$$

tedy součin dvou činitelů  $(\varepsilon_{1r} - n^2)[\bullet]$ , jejichž nulovost vede ke dvěma rovnicím pro  $n^2$ :

1. První rovnice je očividná a zřejmě nezávislá na komponentách vektoru  $\vec{s}$ :

$$(n^2)_1 = \varepsilon_{1r} = n_o^2. \quad (13.33)$$

Toto řešení tedy vede k indexu lomu nezávislému na směru šíření. Tento index lomu se nazývá *ordinárním*, neboli *řádým indexem lomu*, označuje se indexem  $o$ .

2. Druhá rovnice obsahuje složky vektoru  $\vec{s}$ , vede tedy k řešení závislému na směru šíření. Pro zjednodušení explicitního výrazu pro  $n^2$  je vhodné využít skutečnosti, že jednoosý krystal je symetrický vůči rotacím kolem optické osy  $z$ . Bez újmy na obecnosti můžeme proto zvolit směr šíření v rovině 2,3, tj. daný vektorem  $\vec{s} = (0, s_2, s_3)$ . Zavedením úhlu  $\vartheta$  mezi vektorem  $\vec{s}$  a optickou osou (3) lze psát  $s_2 = \sin \vartheta$ ,  $s_3 = \cos \vartheta$ . Po dosazení do (13.32) a přirovnáním  $[\bullet] = 0$ , lze pak vyjádřit explicitně

$$(n^2)_2 = \frac{\varepsilon_{1r} \varepsilon_{3r}}{\varepsilon_{1r} \sin^2 \vartheta + \varepsilon_{3r} \cos^2 \vartheta} = [n_e(\vartheta)]^2. \quad (13.34)$$

Zavedli jsme zde  $n_e(\vartheta)$ , což je *extraordinární, mimořádný*, index lomu, závislý na směru šíření.

Pokud je směr šíření ve směru osy  $z$ , je  $\vartheta = 0^\circ$  a  $n_e^2(0) = \varepsilon_{1r} = n_o^2$ . V případě směru kolmého k optické ose,  $\vartheta = 90^\circ$ , je  $n_e^2(90) = \varepsilon_{3r} = n_e^2$ . Veličiny  $n_o, n_e$  se nazývají *hlavními indexy lomu* (řádý a mimořádný). Jsou konstantou pro daný materiál, pokud pomíneme jejich závislost na vlnové délce (disperze) a na teplotě. Podle vzájemné velikosti hlavních indexů lomu se často látky rozdělují na *pozitivní* ( $n_e > n_o$ ) a na *negativní* ( $n_e < n_o$ ). Hodnoty hlavních indexů lomu jsou uvedeny pro některé jednoosé krystaly v tabulce 13.1. Rovnice (13.34) je rovnicí elipsy v rovině 2, 3, jejíž poloosy jsou rovny  $n_o, n_e$ . Délka úsečky vedené ze středu elipsy do jejího bodu pod úhlem  $\vartheta$  vůči ose  $z$  je rovna velikosti indexu lomu  $n_e(\vartheta)$ , který odpovídá mimořádné vlně šířící se v tomto směru. Grafickým znázorněním závislosti velikosti indexu lomu řádné vlny na směru šíření je kružnice. Protože se zde zabýváme jednoosými krystaly s osou symetrie  $z$ , můžeme třídimenzionální,

prostorovou závislost indexu lomu získat rotací elipsy, resp. kružnice, kolem osy  $z$ . Dostaneme tak dvě plochy: elipsoid pro index lomu  $n_e(\vartheta)$  a kouli pro index lomu  $n_o$ . Tyto plochy se nazývají *normálové plochy*.

Podívejme se nyní, zda je řádný, resp. mimořádný, index lomu spojen s vlnou určité polarizace. Vraťme se k výše uvedeným vztahům (13.25) pro komponenty pole  $E$ . Je zřejmé, že jejich explicitním vyjádřením lze získat jejich poměr  $E_1 : E_2 : E_3$ , který je reálný. Znamená to, že mezi jednotlivými komponentami není fázový posun (až na celočíselné násobky  $\pi$ ). Vlny v anizotropním prostředí jsou tedy *lineárně polarizované*.

**Tabulka 13.1** Vlastnosti a indexy lomu (pro  $\lambda = 589,3$  nm) vybraných jednoosých krystalů

Látka	Složení	Symetrie	Typ	$n_o$	$n_e$
křemen	SiO <sub>2</sub>	trigonální	pozitivní	1,544	1,553
vápenec	CaCO <sub>3</sub>	trigonální	negativní	1,658	1,486
safir	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	trigonální	negativní	1,768	1,760
led	H <sub>2</sub> O	trigonální	pozitivní	1,309	1,313
KDP	KH <sub>2</sub> PO <sub>4</sub>	tetragonální	negativní	1,507	1,467

Vyšetříme nyní směr polarizace řádné vlny. Uvažujme opět vektor  $\vec{s}$  se zcela obecným směrem. Dosazením řešení  $n = n_o$  pro řádný index lomu do rov. (13.25) dostáváme

$$s_k = (\vec{E} \cdot \vec{s}) = 0, k = 1, 2. \quad (13.35)$$

Odtud plyne i)  $\vec{s} = (0, 0, 1)$  nebo ii)  $\vec{E} \cdot \vec{s} = 0$ . i) znamená, že směr šíření je ve směru optické osy. Z ii) je zřejmé, že  $\vec{E} \perp \vec{s}$  pro obecný směr šíření a z (13.25) pro komponentu 3 plyne  $E_3 = 0$ . To znamená, že vektor  $\vec{E}$  je kolmý k rovině dané optickou osou a směrem  $\vec{s}$ . Tato rovina se nazývá *rovinou hlavního řezu*. Vlna, šířící se s řádným indexem lomu, *řádná vlna*, je tedy *polarizována lineárně ve směru kolmém k rovině hlavního řezu*. Pro řádnou vlnu tedy platí  $\vec{E} \parallel \vec{D}$ , jak je zřejmé z (13.25). Pro případ mimořádného indexu lomu,  $n = n_e(\vartheta)$ , dostáváme z rovnice (13.25) explicitní vyjádření pro komponenty pole

$$E_k = -\frac{n^2 / \mu c_0^2}{\varepsilon_k - n^2 / \mu c_0^2} s_k (\vec{E} \cdot \vec{s}), k = 1, 2. \quad (13.36)$$

Jmenovatel je nenulový, protože pro mimořádný svazek je  $\varepsilon_{1r} = \varepsilon_{2r} \neq n^2$ . Z poslední rovnosti je zřejmé, že  $\frac{E_1}{E_2} = \frac{s_1}{s_2}$ . To ovšem znamená, že vektor  $\vec{E}$  leží v rovině hlavního řezu, jejíž natočení optickou osou je těmito komponentami určen. Pro mimořádnou vlnu již ovšem není vektor  $\vec{E}$  kolmý k vektoru  $\vec{s}$ , vektory  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  nejsou kolineární. Oba však leží (v případě jednoosých látek) v rovině hlavního řezu. Vlastnosti vektoru  $\vec{D}$  plynou z materiálového vztahu mezi  $\vec{D}$  a  $\vec{E}$ .

### 13.2.2 Optická indikatrix

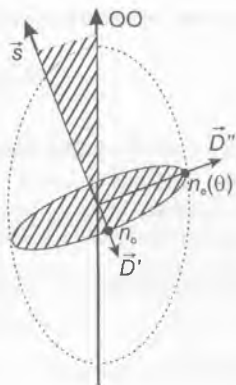
Indexy lomu a polarizační směry lze určit grafickou metodou, která je ekvivalentní řešení Fresnelovy rovnice. K tomu je třeba zavést *optickou indikatrix*. Je to elipsoid daný v prostorových souřadnicích rovnicí

$$\frac{X^2}{\varepsilon_{1r}} + \frac{Y^2}{\varepsilon_{2r}} + \frac{Z^2}{\varepsilon_{3r}} = 1. \quad (13.37)$$

Tuto rovnici získáme z výrazu pro hustotu energie (13.13) zavedením souřadnic

$$X = \frac{D_x}{\sqrt{2\varepsilon_0 w_e}}, \quad Y = \frac{D_y}{\sqrt{2\varepsilon_0 w_e}}, \quad Z = \frac{D_z}{\sqrt{2\varepsilon_0 w_e}}. \quad (13.38)$$

Indexy lomu a polarizační směry pro daný směr šíření vlny  $\vec{s}$  lze nalézt takto (viz obr. 13.4): Sestrojíme rovinu kolmou k vektoru  $\vec{s}$ . Řez elipsoidu touto rovinou je obecně elipsa. Směry jejích poloos odpovídají polarizačním směrům vektoru  $\vec{D}$ , jejich velikosti určují příslušné indexy lomu. V případě, kdy řez je kruhový, je polarizační směr libovolný a index lomu nezávisí na polarizačním směru. Tato situace odpovídá šíření ve směru optické osy. V obecném případě, jak je známo z geometrie, lze nalézt dva kruhové řezy elipsoidu rovinou. Pro rotační elipsoid je takový řez jeden. Jedná se pak o látku dvouosé, resp. jednoosé. Z obr.13.4 je pro jednoosou látku jasné, že při změně směru vektoru  $\vec{s}$  zůstává velikost jedné z poloos eliptického řezu (poloosa kolmá k rovině hlavního řezu) konstantní. Tato poloosa odpovídá tedy řádné vlně.



Obr. 13.4 Optická indikatrix; určení polarizačních směrů vektoru  $\vec{D}$  a indexů lomu pro řádnou a mířnou vlnu

### 13.2.3 Souvislost mezi geometrickou konstrukcí (indikatrix) a řešením Fresnelovy rovnice

Tento odstavec je věnován pouze tomu, že zde ukážeme, že uvedená geometrická konstrukce skutečně odpovídá řešení Fresnelovy rovnice. Rovnice roviny kolmé k vektoru  $\vec{s}$  je

$$\vec{s} \cdot \vec{r} = 0, \text{ tedy } s_x X + s_y Y + s_z Z = 0, \quad (13.39)$$

kde vystupují souřadnice polohového vektoru  $\vec{r} = (X, Y, Z)$ . Souřadnice polohového vektoru, který odpovídá řezu elipsoidu rovinou, musí splňovat také rovnici (13.37). Poloosy elipsy odpovídají extrémním hodnotám velikosti polohového vektoru, tedy  $r^2$ . Vzhledem k podmínkám, které jsou dány výše uvedenými rovnicemi, je vhodné extrémy hledat metodou Lagrangeových multiplikátorů, hledat tedy extrémy funkce

$$F(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2\lambda_1 (s_x X + s_y Y + s_z Z) + \lambda_2 \left( \frac{X^2}{\epsilon_{1r}} + \frac{Y^2}{\epsilon_{2r}} + \frac{Z^2}{\epsilon_{3r}} - 1 \right). \quad (13.40)$$

Pro extrémy musí platit

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \frac{\partial F}{\partial Y} = \frac{\partial F}{\partial Z} = 0. \quad (13.41)$$

Přímým výpočtem získáme z (13.41) tři rovnice

$$2X + 2\lambda_1 s_x + 2\lambda_2 \frac{X}{\epsilon_{1r}} = 0, \quad (13.42)$$

$$2Y + 2\lambda_1 s_y + 2\lambda_2 \frac{Y}{\epsilon_{2r}} = 0, \quad (13.43)$$

$$2Z + 2\lambda_1 s_z + 2\lambda_2 \frac{Z}{\epsilon_{3r}} = 0. \quad (13.44)$$

Vynásobením první rovnice  $X$ , druhé  $Y$  a třetí  $Z$  a jejich sečtením dostaneme

$$r^2 + \lambda_2 = 0. \quad (13.45)$$

Zopakováním tohoto postupu s  $s_x, s_y, s_z$  získáme rovnici

$$\lambda_1 + \lambda_2 \left( \frac{s_x X}{\epsilon_{1r}} + \frac{s_y Y}{\epsilon_{2r}} + \frac{s_z Z}{\epsilon_{3r}} \right) = 0. \quad (13.46)$$

Vyloučením  $\lambda_1, \lambda_2$  lze tři rovnice (13.42 až 13.44) psát ve tvaru

$$X \left( 1 - \frac{r^2}{\epsilon_{1r}} \right) + s_x r^2 \left( \frac{s_x X}{\epsilon_{1r}} + \frac{s_y Y}{\epsilon_{2r}} + \frac{s_z Z}{\epsilon_{3r}} \right) = 0, \quad (13.47)$$

$$Y \left( 1 - \frac{r^2}{\epsilon_{2r}} \right) + s_y r^2 \left( \frac{s_x X}{\epsilon_{1r}} + \frac{s_y Y}{\epsilon_{2r}} + \frac{s_z Z}{\epsilon_{3r}} \right) = 0, \quad (13.48)$$

$$Z \left( 1 - \frac{r^2}{\epsilon_{3r}} \right) + s_z r^2 \left( \frac{s_x X}{\epsilon_{1r}} + \frac{s_y Y}{\epsilon_{2r}} + \frac{s_z Z}{\epsilon_{3r}} \right) = 0. \quad (13.49)$$

Nahradíme-li  $X, Y, Z$  komponentami vektoru elektrické indukce  $D_x, D_y, D_z$ , přejdou rovnice například pro komponentu  $x$  na tvar

$$D_x = r^2 \epsilon_0 \left[ E_x - s_x (\vec{E} \cdot \vec{s}) \right]. \quad (13.50)$$

To již odpovídá Fresnelově rovnici ve tvaru (13.24), protože, jak ve zbytku odstavce ukážeme, platí

$$r^2 \epsilon_0 = \frac{n^2}{\mu c_0^2}. \quad (13.51)$$



Skutečně, rovnice (13.25) ve vektorové formě má tvar

$$\vec{D} = \frac{n^2}{\mu c_0^2} [\vec{E} - \vec{s}(\vec{s} \cdot \vec{E})]. \quad (13.52)$$

Vektory  $\vec{D}$  a  $\vec{E}$  nejsou obecně rovnoběžné. Vektor  $\vec{E}$  lze rozložit na dva vektory, kolmý k  $\vec{D}$  a rovnoběžný s  $\vec{D}$ . Výraz v hranatých závorkách na pravé straně má zřejmě význam: vektor pole minus vektor pole, který je rovnoběžný se směrem  $\vec{s}$ . V hranaté závorce je tedy vektor pole, který je kolmý k  $\vec{s}$ , tedy rovnoběžný s  $\vec{D}$ . Ten lze ale psát (průmět pole do směru  $\vec{D}$ , tj.  $\vec{E} \cdot \frac{\vec{D}}{D}$ , krát jednotkový vektor ve směru  $\vec{D}$ )

$$[\bullet] = \left( \vec{E} \cdot \frac{\vec{D}}{D} \right) \frac{\vec{D}}{D}. \quad (13.53)$$

Dosazením do rov. (13.52) dostaneme

$$\frac{n^2}{c_0^2} = \frac{\mu D^2}{\vec{E} \cdot \vec{D}}. \quad (13.54)$$

Vzhledem k zavedení souřadnic  $X, Y, Z$  je ale

$$r^2 = \frac{D^2}{2w_s \epsilon_0} = \frac{D^2}{\vec{E} \cdot \vec{D} \epsilon_0}. \quad (13.55)$$

Rov. (13.51) tedy skutečně platí.

### 13.2.4 Šíření světla v anizotropním prostředí: shrnutí

Zjistili jsme tedy, že v anizotropní látce se světlo šíří tak, že v každém směru mohou postupovat dvě vlny s různými fázovými rychlostmi (indexy lomu), které jsou lineárně polarizované v navzájem kolmých rovinách. V jednoosých látkách je řádná vlna, jejíž index lomu nezávisí na směru šíření, polarizovaná kolmo na rovinu hlavního řezu, mimořádná vlna je polarizovaná v rovině hlavního řezu. Znamená to, že když dopadá na látku světlo s libovolnou polarizací (například kruhově polarizovaná vlna) uvnitř anizotropního prostředí se může šířit jen jako lineárně polarizované vlny.

V tabulce 13.1 jsme již uvedli hodnoty hlavních indexů lomu pro některé jednoosé látky. Tabulka 13.2 shrnuje hodnoty hlavních indexů lomu pro některé dvojosé krystaly a tabulka 13.3 pro izotropní krystaly.

**Tabulka 13.2** Vlastnosti a indexy lomu (pro  $\lambda = 589,3$  nm) vybraných dvojosých krystalů

Látka	Soustava	$n_x$	$n_y$	$n_z$
sádrovec	monoklinická	1,520	1,523	1,530
slída	monoklinická	1,522	1,582	1,588
topaz	monoklinická	1,619	1,620	1,627

**Tabulka 13.3** Vlastnosti a indexy lomu (pro  $\lambda = 589,3$  nm) vybraných izotropních krystalů (kubické krystaly jsou izotropní, pokud jde o jejich lineární optické vlastnosti, nelineární optické vlastnosti mohou být anizotropní)

Látka	Symetrie	$n$
diamant	kubická	2,417
NaCl	kubická	1,544
GaAs	kubická	3,40

### 13.3 LOM SVĚTLA PŘI DOPADU NA ANIZOTROPNÍ PROSTŘEDÍ

Zabývejme se nyní dopadem světla z izotropního prostředí na povrch jednoosého anizotropního prostředí. Budeme uvažovat dielektrická (nevodivá) prostředí. Můžeme postupovat podobně jako při vyšetřování lomu světla na rozhraní dvou izotropních dielektrik. Rozdíl bude v tom, že lomená vlna se může šířit jako řádná nebo jako mimořádná – tedy z jednoho dopadajícího svazku vznikají dva svazky lomené, mluví se o *dvojlomu*. Uvažujme rovinné rozhraní v rovině  $z=0$ . Z poloprostoru  $z>0$  dopadá na rozhraní rovinná vlna vlnovým vektorem  $\vec{k}_i$  (směr  $\vec{s}_i$ ). Lomená vlna postupuje ve směru  $\vec{s}_t$  s vlnovým vektorem  $\vec{k}_t$ . Ze spojitosti intenzity elektrického pole na rozhraní plyne rovnost fází dopadající a lomené vlny, tedy

$$(\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{r} = 0 \text{ pro } z=0. \quad (13.56)$$

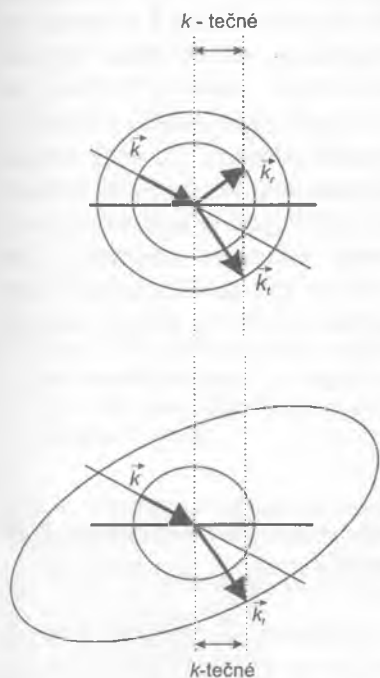
Polohový vektor  $\vec{r}$  leží v rovině rozhraní, rovnice (13.56) znamená, že změna vlnového vektoru při lomu je kolmá na rovinu rozhraní. Jinými slovy, tečné složky vlnového vektoru se při lomu zachovávají, vlnový vektor lomené vlny leží v rovině dopadu. To je stejné jako v případě dvou izotropních dielektrik. Stejně tak platí zákon odrazu

$$\theta_i = \theta_r, \quad (13.57)$$

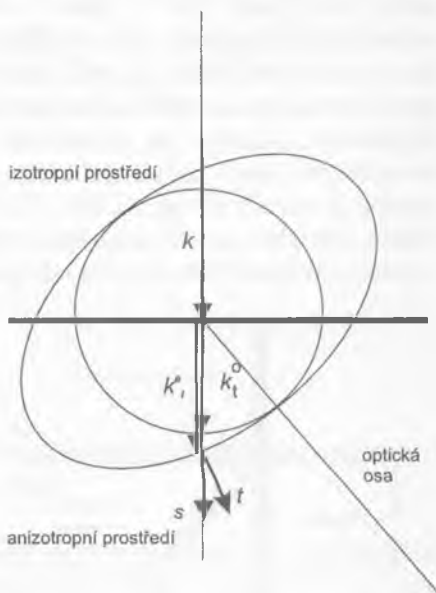
a zákon lomu

$$n_i \sin \theta_i = n_r \sin \theta_r. \quad (13.58)$$

Zde  $\theta_i, \theta_r$  jsou úhly dopadu a lomu, a  $n_i, n_r$  odpovídající indexy lomu. Rozdílem oproti izotropním látkám je, že vznikají obecně dvě lomené vlny pod úhly, které jsou dány (13.58) s odpovídajícími indexy lomu. Pro řádnou vlnu je index lomu  $n_r = n_o$  nezávislý na směru šíření, zatímco pro mimořádnou vlnu se index lomu mění se směrem šíření, pro jednoosé materiály je



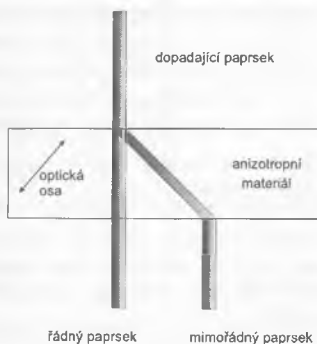
**Obr. 13.5** Geometrická konstrukce lomu světla při dopadu na rozhraní mezi izotropním a anizotropním prostředím; a) určení směru vlnového vektoru pro řádnou vlnu (index lomu řádné vlny, tedy velikost  $k$  nezávisí na směru [kružnice]); b) určení směru vlnového vektoru pro mimořádnou vlnu (index lomu řádné vlny, tedy velikost  $k$  závisí na směru [elipsa])



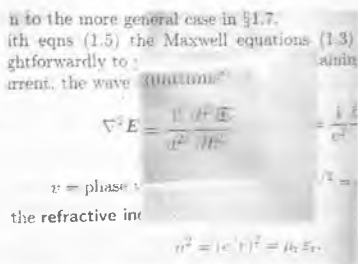
**Obr. 13.6** Lom světla při kolmém dopadu na rozhraní mezi izotropním a anizotropním prostředím

$n_i = n_e(\vartheta)$  dáno (13.34), kde  $\vartheta$  je úhel mezi vlnovým vektorem lomené vlny a optickou osou prostředí. Pro danou orientaci optické osy ovšem úhly  $\vartheta$  a  $\theta_i$  nejsou nezávislé. Můžeme tak vyjádřit  $\vartheta = \vartheta(\theta_i)$ , pak  $n_i = n_e(\theta_i)$  pomocí (13.34) a řešením (13.58) nalézt úhel  $\theta_i$ . Jinou názornou možností je použití geometrické konstrukce, podobně jako v kapitole 3. Pro speciální případ, kdy optická osa jednoosého anizotropního materiálu leží v rovině obrázku, je geometrická konstrukce uvedena na obr. 13.5.

Uvažujme teď typický případ pro pozorování dvojlomu, kdy na rozhraní vzduch – anizotropní látka dopadá kolmo úzký svazek světla a přitom optická osa leží v rovině obrázku. Podle úvah, jak jsme je uvedli výše, plyne, že vlnové vektory prošlé řádné i mimořádné vlny jsou kolmé k rozhraní, viz obr. 13.6. Jak je to se směrem paprsků? Paprskový vektor řádné vlny má stejný směr jako vlnový vektor. Jak jsme ovšem uvedli již dříve, pro mimořádnou vlnu směr vlnového vektoru  $\vec{s}$  a směr paprskového vektoru  $\vec{t}$ , který určuje směr šíření energie, nejsou obecně kolineární. To vede k tomu, že při lomu paprsku světla do anizotropního materiálu vznikají i při kolmém dopadu dva paprsky, jak je uvedeno na obr. 13.7 (pokud optická osa není rovnoběžná nebo kolmá vzhledem k rovině vstupního rozhraní). Tato situace je rovněž patrná na obr. 13.8, kdy je na text položen krystal KDP (délka krystalu 4 cm, optická osa krystalu svírá úhel  $33^\circ$  se vstupní plochou krystalu, dvojlom vede ke zdvojení písma).

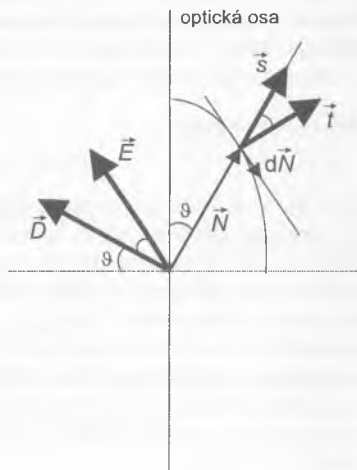


Obr. 13.7 Vznik dvou paprsků (dvojlomu) při kolmém dopadu paprsku na anizotropní materiál



Obr. 13.8 Pozorování dvojlomu

Směr mimořádného paprsku  $\vec{i}$  je možné určit snadno graficky pomocí normálové plochy, kterou jsme zavedli v odst. 13.2.1: mimořádný paprsek má totiž směr normály k jejímu povrchu. Orientaci vektorů znázorňuje v obecném případě obr. 13.9. Znamená to tedy, že vektor  $\vec{E}$  je tečný k povrchu normálové plochy vzhledem k tomu, že směr paprsku  $\vec{i}$  je kolmý k vektoru elektrické intenzity  $\vec{E}$ .



Obr. 13.9 Grafické určení směru paprskového vektoru  $\vec{i}$  mimořádné vlny má směr normály k povrchu normálové plochy

### 13.3.1 Určení směru mimořádného paprsku pomocí normálové plochy – teoretické zdůvodnění

Nyní ukážeme, že skutečně je vektor elektrické intenzity mimořádného svazku tečný k povrchu normálové plochy zavedené v odstavci 13.2.1. Uvažujeme jednoosý krystal. Velikost úsečky vedené ze středu normálové plochy na jeho povrch ve směru vektoru  $\vec{s}$  je rovna velikosti indexu lomu mimořádné vlny  $n_e(\vartheta)$ . Můžeme zavést s touto úsečkou spojený vektor  $\vec{N}$  vztahem

$$\vec{N} = n_e(\vartheta) \vec{s}. \quad (13.59)$$

Změní-li se úhel  $\vartheta$  o  $d\vartheta$ , dojde ke změně vektoru  $\vec{N}$  o  $d\vec{N}$ . Směr tohoto vektoru určuje směr tečny k povrchu normálové plochy. Máme tedy ukázat, že  $\vec{E} \uparrow \uparrow d\vec{N}$ , což znamená také

$$\vec{E} \times d\vec{N} = 0. \quad (13.60)$$

Uvažujeme-li situaci podle obr. 13.9, je  $\vec{E} = (0, E_y, E_z)$  a  $d\vec{N} = (0, dN_y, dN_z)$ . Vektorový součin (13.60) má komponenty  $y, z$  rovny nule,  $x$ -ová komponenta je rovna

$$E_y dN_z - E_z dN_y = 0. \quad (13.61)$$

Z obr. 13.9 je zřejmé,

$$D_y = -D \cos \vartheta, \quad (13.62)$$

$$D_z = D \sin \vartheta \quad (13.63)$$

Podle (13.12) platí

$$D_y = \varepsilon_0 n_o^2 E_y, \quad (13.64)$$

$$D_z = \varepsilon_0 n_e^2 E_z. \quad (13.65)$$

Dosazením (13.64, 13.65) a (13.62, 13.63) do (13.61) dostaneme

$$dN_z n_e^2 \cos \vartheta + dN_y n_o^2 \sin \vartheta = 0. \quad (13.66)$$

Zřejmě

$$N_y = n_e(\vartheta) \sin \vartheta, \quad (13.67)$$

$$N_z = n_e(\vartheta) \cos \vartheta, \quad (13.68)$$

a tedy

$$dN_y = dN \sin \vartheta + N \cos \vartheta d\vartheta, \quad (13.69)$$

$$dN_z = dN \cos \vartheta - N \sin \vartheta d\vartheta. \quad (13.70)$$

Nyní můžeme využít (12.34) k určení  $dN$

$$dN = \left( \frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} \right) N^3 \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta. \quad (13.71)$$

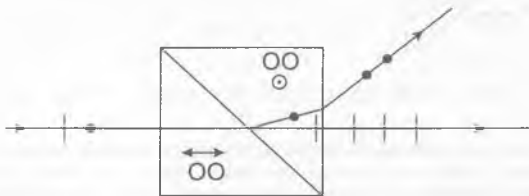
Dosadíme-li nyní (13.69, 13.70) a (13.71) do levé strany (13.66), dostaneme skutečně nulu. Platí tedy (13.66) a tedy (13.60).

## 13.4 POUŽITÍ DVOJLOMNÝCH LÁTEK

Popsané chování optických vln v anizotropních látkách se využívá v řadě optických elementů. Vyrábějí se tak, že se z dvojlomných krystalů vyřízne a vyleští vhodný prvek; někdy se prvky vhodným způsobem skládají. Použití anizotropních materiálů souvisí nejčastěji s polarizačními vlastnostmi světla. Vyrábějí se z nich prvky, které mění polarizační stav světla: polarizátory, polovlnové a čtvrtvlnové destičky, kompenzátory. K jejich výrobě se obvykle užívají jednoosé krystaly, jako například křemen nebo vápenec.

### 13.4.1 Polarizátory

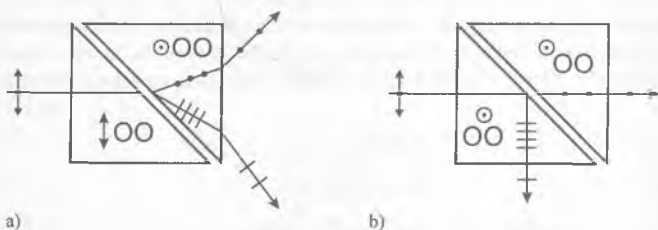
*Polarizátorem* se zpravidla rozumí optický prvek, který dovoluje převést nepolarizované nebo obecně polarizované světlo na světlo lineárně polarizované. Dvojlomné polarizátory jsou založeny na skutečnosti, že se řádný a mimořádný svazek mohou šířit v anizotropním materiálu různými směry. Například již uspořádání uvedené na obr. 13.7 vede k prostorovému oddělení řádného a mimořádného svazku, které jsou ovšem lineárně polarizované v navzájem kolmých rovinách. Princip používaných dvojlomných polarizátorů vysvětlíme na příkladu Rochonova polarizačního hranolu, který je znázorněn na obr. 13.10. Je složen ze dvou částí, které jsou na sebe přiloženy



**Obr. 13.10** Rochonův polarizační hranol; OO označuje orientaci optické osy v jednotlivých částech hranolu, na čarách znázorňujících paprsky označují symboly směr lineární polarizace vln: čárky v rovině obrázku, tečky kolmo k rovině obrázku

(spojeny optickým tmelem nebo se vzduchovou mezerou, podle toho mají různý název). Optická osa (OO) má v obou částech různou orientaci, jak je naznačeno na obr. 13.10. Po kolmém dopadu na vstupní plochu se světlo šíří ve směru optické osy jako řádný svazek s libovolnou polarizací. Světlo do-

padá pak na rozhraní. Dochází zde k dvojlomu, ve druhé části hranolu se šíří řádná a mimořádná vlna. Řádný svazek prochází bez odchýlení, protože nedochází ke změně indexu lomu („nevidí optické rozhraní“). Paprsek s polarizační rovinou kolmou k rovině obrázku se šíří jako mimořádný s indexem lomu  $n_e$ . Znamená to, že se láme pod úhlem  $\beta$ , který je dán zákonem lomu ve tvaru  $n_o \sin \alpha = n_e \sin \beta$ . Oba svazky pak vycházejí výstupní plochou z hranolu, řádný vychází bez odchylky, mimořádný se láme opět podle zákona lomu do vzduchu. Z geometrických rozměrů konkrétního hranolu je možné vypočítat odchylku mezi řádným a mimořádným paprskem. Oba svazky jsou prostorově odděleny, to znamená, že světlo je i po výstupu z hranolu polarizováno lineárně v navzájem kolmých rovinách. Dopadá-li tedy na hranol nepolarizované světlo, vychází dva svazky lineárně polarizovaného světla. V jiných polarizátorech je některý ze svazků pohlcen, takže vystupuje pouze svazek jeden. Příklady dalších dvou používaných polarizátorů jsou uvedeny na obr. 13.11. Princip Glan-Thompsonova polarizátoru je poněkud odlišný. Jeho dvě části jsou odděleny vzduchovou mezerou a úhel dopadu vln na rozhraní anizotropní materiál-vzduch je nastaven tak, aby pro mimořádný paprsek byla splněna podmínka totálního odrazu, takže prochází (bez odchylky) pouze paprsek řádný.



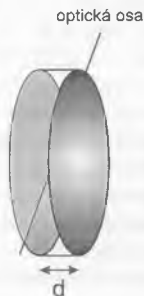
Obr. 13.11 Další typy polarizačních hranolů: a) Wollastonův, b) Glan-Thompsonův; OO označuje orientaci optické osy v jednotlivých částech hranolu, na čarách znázorňujících paprsky označují symboly směr lineární polarizace vln: čárky v rovině obrázku, tečky kolmo k rovině obrázku

### 13.4.2 Kompenzátory

Uvažujme destičku s vyleštěnými vstupními a výstupními plochami, která je vyříznuta tak, že optická osa materiálu je rovnoběžná se vstupní plochou, jak je znázorněno na obr. 13.12. Dopadá-li světlo na plochu



destičky kolmo, šíří se ve směru kolmém na optickou osu. Jak jsme uváděli výše, v případě šíření ve směru kolmém k optické ose mohou v krystalu postupovat řádná a mimořádná vlna, jejichž roviny polarizace jsou vzájemně kolmé. Každá se šíří s jinou fázovou rychlostí, tedy indexem lomu.



Obr. 13.12 Destička z anizotropního materiálu je vyříznuta tak, že optická osa je rovnoběžná se vstupní plochou destičky

Má-li jejich geometrická dráha v dvojlomném krystalu délku  $d$  (tloušťka destičky), získá při průchodu řádná vlna fázový náběh

$$\varphi_o = k_o d = \frac{\omega}{c_o} n_o d, \quad (13.72)$$

a mimořádná vlna

$$\varphi_e = k_e d = \frac{\omega}{c_e} n_e d. \quad (13.73)$$

Velikost fázového rozdílu mezi řádnou a mimořádnou vlnou je tedy

$$\Delta\varphi = |\varphi_e - \varphi_o| = \frac{\omega}{c_o} |n_e - n_o| d = \frac{2\pi}{\lambda_o} |n_e - n_o| d. \quad (13.74)$$

Zde užíváme obvyklého značení,  $\lambda_o$  je vlnová délka světla ve vakuu. Pokud bychom měnili tloušťku destičky při pevné vlnové délce, měnili bychom fázový rozdíl mezi oběma vlnami. Často používané jsou dva případy:

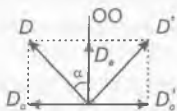
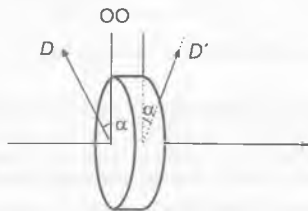
1.  $\Delta\varphi = \pi$ , což je fázový posuv odpovídající  $\frac{\lambda_o}{2}$ , pak se prvek nazývá *polovlnová destička*.
2.  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ , tedy ve vlnových délkách  $\frac{\lambda_o}{4}$ , a mluví se

o *čtvrtvlnové destičce*. Jako vždy hraje roli velikost fázového rozdílu až na násobky  $2\pi$ . Ve výše uvedených případech se jedná o destičky nultého řádu (někteří autoři hovoří o prvním řádu). Z výrobních důvodů se často používají destičky, jejichž tloušťka je taková, že uvedené fázové rozdíly jsou rovny

$$\Delta\varphi = \pi + 2\pi m, \Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m = 1, 2, 3, \dots \quad (13.75)$$

Původně se destičky vyráběly štípáním ze slídy, dnes jsou zpravidla křemenné.<sup>3</sup> Je zřejmé, že příslušný fázový rozdíl je zajištěn pouze pro jednu nebo několik vlnových délek z viditelného spektra. Někdy se užívají také „širokopásmové“ destičky, kde je fázový rozdíl přibližně konstantní v širokém spektrálním intervalu díky volbě kombinace materiálů s vhodnou disperzí indexů lomu.

K čemu se uvedené destičky užívají? Uvažujme nejprve polovlnovou destičku, na kterou dopadá lineárně polarizované světlo tak, že směr vektoru  $\vec{D}$  a optická osa svírají úhel  $\alpha$ , srovnej obr. 13.13. Velikosti amplitud řádné a mimořádné vlny v anizotropním materiálu odpovídají průmětům vektoru  $\vec{D}$  do odpovídajícího směru a závisí zřejmě na úhlu  $\alpha$ . Na výstupu z destičky se objevuje řádná a mimořádná vlna s relativním fázovým rozdílem  $\pi$ , viz obr. 13.13. Obě vlny se ve vzduchu složí, což znamená, že výsledný vektor elektrické intenzity je pootočen o úhel  $2\alpha$ . *Polovlnová destička se používá ke stočení roviny lineárně polarizovaného světla o definovaný úhel.*



**Obr. 13.13** Polovlnová destička: stočení roviny lineární polarizace o úhel  $2\alpha$ . Dole:  $D$  odpovídá dopadající vlně,  $D'$  prošlé vlně. Fázový rozdíl  $\pi$  vzniklý mezi paprsky při průchodu destičkou odpovídá změně znaménka  $D_0$ .

Čtvrtvlnová destička vede k vzájemnému posunu fáze o  $\frac{\pi}{2}$  mezi řádnou

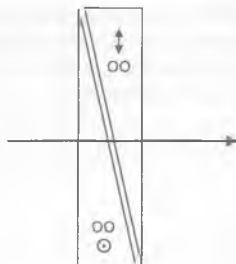
a mimořádnou vlnou. To znamená, že po dopadu lineárně polarizovaného světla se na výstupu skládají obě kolmé složky fázově posunuté a výsledná polarizace vystupujícího světla je eliptická. Pokud se natočí čtvrtvlnová destička tak, že úhel  $\alpha = 45^\circ$ , jsou amplitudy obou vln stejné a výstupní světlo je kruhově polarizované. Obvyklým použitím *čtvrtvlnové destičky* je změna polarizačního stavu světla z *polarizace lineární na kruhovou*, nebo obráceně.

Obě destičky jsou speciálním případem obecnějšího prvku, který dovo-luje nastavit libovolné fázové zpoždění mezi řádnou a mimořádnou vlnou. Nazývá se *kompenzátorem*. Příklad kompenzátoru je uveden na obr. 13.14. Babinetův kompenzátor je tvořen dvěma klíny s navzájem kolmou orientací optických os, jak je uvedeno na obrázku. Vrcholový úhel klínů je zpravidla velmi malý, takže lze zanedbat odchylku paprsků při jejich lomu na rozhraní mezi klíny. V anizotropních prostředích se šíří tedy řádná a mimořádná vlna tloušťkami klínů  $t_1$  a  $t_2$ . Je-li paprsek 1 v prvním klínu řádný a paprsek 2 mimořádný, je tomu ve druhém klínu naopak. Fázový náběh paprsku 1 při průchodu oběma klíny je

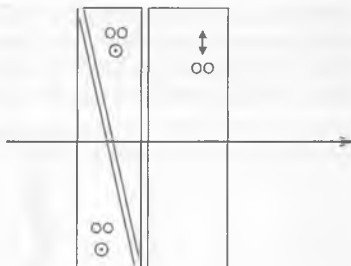
$$\varphi_1 = k_0 (n_o t_1 + n_e t_2), \quad (13.76)$$

náběh paprsku 2 je

$$\varphi_2 = k_0 (n_e t_1 + n_o t_2). \quad (13.77)$$



Obr. 13.14 Schéma Babinetova kompenzátoru (OO označuje orientaci optické osy)



Obr. 13.15 Schéma Soleilova kompenzátoru (OO označuje orientaci optické osy)

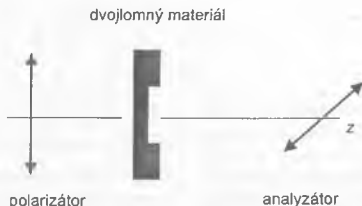
Fázový rozdíl mezi oběma svazky je tedy

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = k_0 (n_e - n_o)(t_2 - t_1). \quad (13.78)$$

Fázový rozdíl je možné spojitě měnit posouváním kompenzátoru ve svazku, je-li svazek úzký (laserový svazek). Soleilův kompenzátor, který je znázorněn na obr. 13.15 dovoluje nastavit daný fázový rozdíl i pro široké svazky, vzájemným posuvem dvou klínů je možné měnit tloušťku jedné z částí kompenzátoru.

### 13.4.3 Interference polarizovaných svazků

Jak jsme ukázali v kapitole o interferenci, svazky s ortogonální polarizací neinterferují. Řádný a mimořádný paprsek šířící se v anizotropním materiálu nemohou tedy navzájem interferovat. To lze skutečně pozorovat experimentálně, svazek světla prochází průhledným anizotropním krystalem, aniž by to mělo vliv na jeho intenzitu. Intenzita se nemění ani při změně relativních fází mezi oběma paprsky. Avšak jak jsme viděli, fázový rozdíl mezi řádným a mimořádným paprskem má vliv na výsledný stav polarizace světla vystupujícího z krystalu. Změnu stavu polarizace můžeme převést na změnu intenzity světla svazku, když ho následně necháme procházet polarizátorem. Změny fázového rozdílu mezi řádným a mimořádným svazkem získané při průchodu světla anizotropním prostředím tak mohou být převedeny na modulaci intenzity svazku po jeho průchodu polarizátorem. V tomto smyslu se hovoří o *interferenci polarizovaných svazků*. Experimentální uspořádání vhodné k pozorování této interference je na obr. 13.16. Mezi dvěma polarizátory (druhý se zpravidla nazývá analyzátor) je umístěna krystalická destička s proměnnou tloušťkou. Fázový rozdíl mezi řádnou a mimořádnou vlnou v destičce je po průchodu dvojlomným materiálem podle (13.74) funkcí tloušťky destičky (tj. příčných souřadnic  $x, y$ ) a vlnové délky.



Obr. 13.16 Schéma experimentu k pozorování tzv. interference polarizovaného světla

Fázový rozdíl mezi řádným a mimořádným svazkem závisí samozřejmě na vlnové délce. Krásné zbarvení krystalických destiček je možné pozorovat, díváme-li se na interferenci polarizovaných svazků v bílém světle. Nastavíme-li v uspořádání na obr. 13.16 oba polarizátory tak, že jsou zkřížené, neprochází žádné světlo a stínítko je tmavé. Když mezi ně zasuneme kousek anizotropního materiálu (například slídy) s proměnnou tloušťkou, objeví se na stínítku jasné barvy. Když pootočíme druhý polarizátor o 90°, barvy se změni na doplňkové, například tam, kde byla modrá, bude červená. Z dvojlomných destiček různé tloušťky je možné sestavit obrázek, který se pak může „promítat“ s proměnnými barvami.

#### 13.4.4 Fotoelastické chování

V úvodu této kapitoly o anizotropních materiálech jsme uvedli krystaly, jejichž anizotropie souvisí s jejich symetrií. Ovšem i izotropní materiály mohou získat anizotropní vlastnosti, když se jejich izotropie „pokazí“ vnějším působením. Příkladem může být stlačení izotropního materiálu (skla) v určitém směru. Vnitřní napětí a deformace v různých průhledných materiálech nebo součástkách můžeme studovat tak, že je vkládáme mezi zkřížené polarizátory.

#### 13.4.5 Kerrův jev

Dalším vlivem, který může vyvolat optickou anizotropii materiálu, je vnější elektrické pole. Mluví se o *Kerrově jevu*. Přiložené elektrické pole vyvolává změnu mikroskopických elektrických dipólů (indukuje elektrické dipóly v molekulách – elektronový Kerrův jev; otáčí molekuly – rotační Kerrův jev). Optická osa vyvolaného dvojlomu je rovnoběžná se směrem elektrického pole, pro konstantní elektrické pole se látka chová jako dvojlomný krystal. Rozdíl indexu lomu pro řádnou a mimořádnou optickou vlnu je

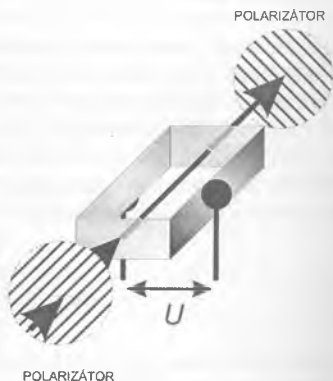
$$\Delta n = K \lambda \left( \frac{U}{d} \right)^2, \quad (13.79)$$

kde  $\lambda$  je vlnová délka světla,  $U$  je napětí přiložené na elektrody,  $d$  jejich vzdálenost,  $K$  je Kerrova konstanta. Její hodnota pro některé materiály je v tabulce 13.4.

**Tabulka 13.4.** Hodnoty Kerrových konstant  $K$  pro vybrané látky

Látka	Kerrová konstanta $K$ [ $\text{cm V}^{-2}$ ]
Nitrobenzén	$2,4 \times 10^{-10}$
Voda	$4,4 \times 10^{-12}$
Sklo	$10^{-23} - 10^{-14}$

Jedno z uspořádání pro experimentální studium tohoto jevu je na obr. 13.17. Elektrické napětí se přivádí na elektrody, mezi nimiž je studované prostředí (například roztok nitrobenzenu v kyvetě). Pro vhodně zvolenou hodnotu napětí ( $U = U_{\lambda/2}$ ) na elektrodách může pak kyveta působit jako polovlnová destička. Vhodně natočené polarizátory (srov. obr. 13.13 a tam uvedený výklad o stočení polarizační roviny, pro  $\alpha = 45^\circ$  dojde o stočení o  $2\alpha = 90^\circ$ ) umožní převést modulaci polarizace světla na modulaci intenzity světla, hovoří se o *Kerrově závěrce* (prošla intenzita nulová pro  $U = 0$ , maximální pro  $U = U_{\lambda/2}$ ). Uvedené uspořádání je příkladem *elektrooptické součástky*, kdy se světlo moduluje pomocí elektrického pole. Kerrův jev je velmi rychlý /jednotky ps ( $10^{-12}$  s) pro roztoky, desetiny ps pro skla/, Kerrové závěrky mohou proto pracovat s velkými rychlostmi, které jsou omezeny elektronikou pro nezbytná vysoká napětí (kV) na nanosekundovou ( $10^{-9}$  s) časovou oblast.



**Obr. 13.17** Kerrová závěrka; na stěny kyvety s roztokem vhodné látky je přiváděno elektrické napětí  $U$

## Poznámky

<sup>1</sup> Zde  $w$  je hustota energie elektromagnetického pole,  $S$  Poytingův vektor. Ve výpočtu se využije rovnost  $\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H})$ .

<sup>2</sup> Často se užívají jiné tvary Fresnelovy rovnice, které je možné získat úpravami (13.30):

$$\frac{s_x^2}{n^2 - \epsilon_{1r}} + \frac{s_y^2}{n^2 - \epsilon_{2r}} + \frac{s_z^2}{n^2 - \epsilon_{3r}} = \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{s_x^2}{v^2 - v_x^2} + \frac{s_y^2}{v^2 - v_y^2} + \frac{s_z^2}{v^2 - v_z^2} = \frac{1}{n^2}$$

V poslední rovnici vystupují fázové rychlosti světla, které se šíří v obecném směru,

$$v = c_0/n, \text{ a světla, které se šíří ve směru } k\text{-té hlavní osy indikatrix } v_k = \frac{c_0}{n_k} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_{kr}}}$$

<sup>3</sup> Například tloušťka čtvrtvlnové křemenné destičky pro vlnovou délku 633 nm a pro  $m = 0$  vychází přibližně 0,017 mm, což je příliš málo pro leštění materiálu. Mohou se ale použít dvě slepené destičky s navzájem kolmo orientovanými optickými osami a tloušťka jedné z nich se zmenšuje, až je dosaženo celkového fázového rozdílu odpovídajícího čtvrtvlnové destičce. Destičky vyšších řádů mají ovšem větší tloušťku.

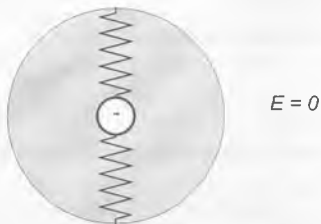
# 14 INTERAKCE SVĚTLA S LÁTKOU

Při dopadu na látku je světlo částečně odraženo, šíří se v látce a po částečném odrazu na zadním rozhraní mezi látkou a okolím prochází dál. Když se světlo šíří látkou, postupuje obecně se změněnou rychlostí, může docházet k jeho rozptylu a může být zeslabováno absorpcí. Fenomenologicky lze odraz a lom světla, jeho rychlost šíření a absorpci popsat pomocí komplexního indexu lomu, který jsme zavedli v kapitole 1. V této kapitole budeme v rámci mikroskopického modelu vyšetřovat chování komplexního indexu lomu. Mikroskopické teorie interakce světla s látkou lze rozdělit na klasické, semiklasické (světlo popsáno klasicky, látka kvantově) a zcela kvantové. Omezíme se na nejjednodušší klasický přístup, který má ovšem i dnes svůj význam. Jeho výsledky do značné míry popisují chování látek správně, navíc pak usnadňuje chápání složitějších teorií. Vztahy získané pomocí klasické fyziky ale obsahují empirické parametry. V tomto modelu jsou atomy, resp. molekuly látky považovány za klasické dipólové oscilátory. Tuto představu navrhl H. A. Lorentz (1878). Předpokládá se, že v látce je několik typů oscilátorů, které se liší svou rezonanční frekvencí. Ve viditelné, blízké infračervené a ultrafialové spektrální oblasti přispívají k interakci světla s látkou nejvíce kmity elektronů vázaných v atomech. Dalším typem oscilátorů jsou kmitající polární molekuly, které svými rezonančními frekvencemi spadají zejména do infračervené spektrální oblasti. Pokud molekuly vytvářejí krystalickou látku, mohou se jejich kmity v mřížce šířit jako vlny. Lorentzovým oscilátorem, který modeluje elektron vázaný ke kladnému jádru atomu, se budeme zabývat v odstavci 14.1. V kovech a polovodičích existují volné elektrony, které nejsou vázány na kladná jádra. Optické vlastnosti těchto látek lze modelovat (viz odstavec 14.2) kmity volných elektronů ve vnějším elektrickém poli, jak navrhl P. Drude (1900).

Nejprve budeme uvažovat interakci světla s atomem. Lorentzův model je založen na představě, že kladný náboj (jádro) atomu a jeho záporný náboj

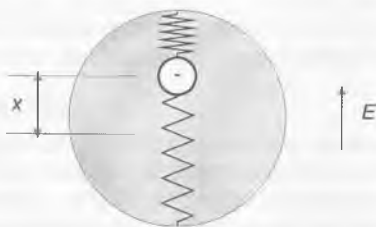


(elektronový obal) jsou pružně vázány. Můžeme si to představit tak, že elektron je pružinou připevněn k jádru jako na obr. 14.1. Pokud na atom nepůsobí vnější elektrické pole, je jeho dipólový moment nulový. Vnější elektrické pole vynucuje kmity oscilátoru na frekvenci světla. Pokud se tato frekvence rovná vlastní frekvenci oscilátoru, dochází k rezonanci. Výchylka oscilací narůstá a dochází k výraznému přenosu energie ze světelné vlny na oscilátor. Intenzita světla se tak zmenšuje, dochází k absorpci světla, jak ukážeme v odstavci 14.3. Z kvantové teorie vyplývá, že dochází k absorpci fotonu, která vyvolá přechod atomu do excitovaného stavu. Atom v tomto stavu zůstává určitou dobu, než přejde zpět do základního stavu. Těmito reálnými přechody se budeme zabývat v 15. kapitole. Pokud se frekvence světla liší od rezonanční frekvence, je absorpce zanedbatelná. Oscilátory kmitají na frekvenci světla, ale s určitým fázovým posunem. Každý z nich vyzařuje vlnu s určitou fází a tyto vlny se skládají. Světlo se šíří ve směru, v němž dochází ke konstruktivní interferenci. Fázový posun určuje rychlost šíření světla v látce, jak ukážeme v odstavci 14.4.



**Obr. 14.1** Lorentzův model atomu.

Je znázorněn jeden elektron se záporným nábojem a jádro s kladným nábojem (šedivé). Elektron je pružně vázán k jádru, těžiště kladného a záporného náboje v atomu pro nulové vnější elektrické pole splývají (nahore). Silové působení vnějšího elektrického pole vede k výchylce elektronu a kladného jádra, vzniká dipólový moment (dole)



## 14.1 KLASICKÝ MODEL PRO VÝPOČET INDEXU LOMU DIELEKTRIK

Index lomu dielektrik můžeme získat na základě Lorentzova modelu. Vektor elektrické indukce lze psát

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}, \quad \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (14.1)$$

V této kapitole budeme uvažovat izotropní látky, jejichž polarizace je lineární funkcí elektrického pole, tedy

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}. \quad (14.2)$$

Všechny veličiny již byly zavedeny dříve. Připomeneme známý vztah mezi relativní permitivitou a susceptibilitou (obecně komplexní veličiny, viz kapitola 1)

$$\tilde{\varepsilon}_r = 1 + \tilde{\chi}. \quad (14.3)$$

Komplexní index lomu je

$$\tilde{n}^2 = \tilde{\varepsilon}_r. \quad (14.4)$$

### 14.1.1 Lorentzův model pro výpočet indexu lomu dielektrik

Předpokládejme v souladu s Lorentzovým modelem, že látka obsahuje malé pružné elektrické dipóly (atomy, molekuly). Pokud bude v jednotce objemu  $N$  stejných dipólových momentů  $\vec{p}$ , lze polarizaci vyjádřit jednoduše

$$\vec{P} = N \vec{p}. \quad (14.5)$$

Dipólový moment Lorentzova oscilátoru je určen velikostí náboje  $q$  a jeho výchylkou z rovnovážné polohy  $x$

$$p = qx. \quad (14.6)$$

Budeme uvažovat atomární dipól, který je tvořen jádrem a elektronem. Protože hmotnost jádra je podstatně větší než hmotnost elektronu, můžeme vzít v úvahu jen pohyb elektronu. Pohybová rovnice pro elektron hmotnosti  $m$  s nábojem  $q$ , který je připevněn pružinou tuhosti  $\kappa$  má tvar

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + \kappa x = qE. \quad (14.7)$$

V rovnici vystupuje konstanta tlumení  $\gamma$ , na pravé straně je vnější síla daná coulombickým působením elektrického pole  $E$ . Vlastní frekvence kmitů oscilátoru je

$$\Omega^2 = \frac{\kappa}{m}. \quad (14.8)$$

Harmonicky proměnné elektrické pole v místě dipólu je

$$\tilde{E}(t) = E_0 \exp(-i\omega t). \quad (14.9)$$

Budeme hledat řešení (14.7) ve tvaru

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 \exp(-i\omega t). \quad (14.10)$$

Můžeme zde použít obvyklé komplexní vyjádření bez komplexně konjugované části, protože rovnice (14.7) je lineární. Dosazením výrazu (14.10) do rovnice (14.7) dostáváme pro amplitudu výchylky

$$\tilde{x}_0 = \frac{q E_0}{m} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}. \quad (14.11)$$

Dosazením (14.11) do vztahů (14.6) a (14.5) máme pro polarizaci látky

$$\tilde{P}(t) = \frac{N q^2 E_0}{m} \frac{\exp(-i\omega t)}{\Omega^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}. \quad (14.12)$$

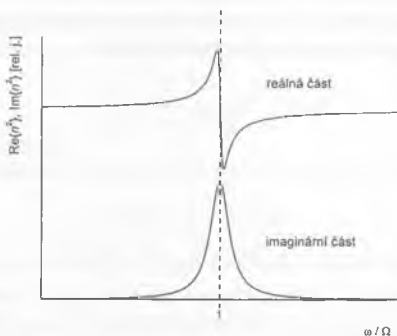
Pokud má konstanta  $\gamma$  malou hodnotu ( $\gamma \ll \omega, \Omega$ ), tj. pokud se oscilace netlumí výrazně za periodu kmitu vlastní frekvence, resp. pole), má imaginární člen ve jmenovateli zanedbatelný vliv na fázi. Ze vztahu (14.12) je pak zřejmé, že pro frekvence pole menší než vlastní frekvence,  $\omega < \Omega$ , osciluje polarizace ve fázi s elektrickým polem. V opačném případě,  $\omega > \Omega$ , je polarizace a pole v protifázi. V případě rezonance,  $\omega = \Omega$ , je ovšem fáze polarizace dána imaginárním členem ve jmenovateli ( $\propto \frac{1}{-i} = i$ ), tedy fáze

polarizace a pole jsou vůči sobě pootočený o  $90^\circ$ .

Ze vztahů (14.12), (14.2) a (14.3) a (14.4) získáme

$$\tilde{\epsilon}_r = 1 + \tilde{\chi} = \tilde{n}^2 = 1 + \frac{N q^2}{\epsilon_0 m} \frac{\Omega^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}. \quad (14.13)$$

Výraz jsme upravili tak, aby jmenovatel byl reálný. Reálnou a imaginární část indexu lomu můžeme vyjádřit explicitně<sup>1</sup> stejným postupem jako u vztahů (1.101) a (1.102) v kapitole 1. Typický průběh závislosti reálné a imaginární části čtverce indexu lomu na frekvenci je podle rov. (14.13) znázorněn na obr. 14.2. Z provedených úvah je zřejmé, že reálná i imaginární část indexu lomu spolu souvisí. Pomocí výpočtu v rámci analýzy komplexních proměnných a s uvážením principu příčinnosti lze formulovat explicitní vyjádření reálné části indexu lomu pomocí imaginární části indexu lomu a naopak. Tyto vztahy ve formě integrálů se nazývají Kramers-Kronigovy vztahy. V kapitole 1 jsme uvedli, že imaginární část indexu lomu souvisí s tlumením světla. Z mikroskopického hlediska to objasníme v odstavci 14.2.



Obr. 14.2 Závislost reálné a imaginární části čtverce indexu lomu dielektrika (modelovaného dipólovým oscilátorem) na frekvenci světla v blízkosti rezonance

V optice se často zajímáme o index lomu látek v oblasti, kde je absorpce velmi malá, je tedy zanedbatelné tlumení ( $\gamma \approx 0$ ) a index lomu je reálný. Přepíšeme-li za těchto podmínek rov. (14.13) ve vlnových délkách, dostáváme *Sellmeierův vzorec*

$$n^2 = 1 + A \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_r^2}, \quad (14.14)$$

kde  $A$  je konstanta a  $\lambda_r$  vlnová délka odpovídající rezonanci.

V důležitém případě, kdy je  $\omega \ll \Omega$ , je pak možné jmenovatel vztahu (14.13) psát<sup>2</sup>

$$\frac{1}{\Omega^2 - \omega^2} = \frac{1}{\Omega^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}} = \frac{1}{\Omega^2} \left( 1 + \frac{\omega^2}{\Omega^2} + \frac{\omega^4}{\Omega^4} + \dots \right). \quad (14.15)$$

Ze vztahů (14.13), (14.15) tedy pro čtverec indexu lomu v uvedeném případě dostáváme mocninnou řadu ve frekvencích, respektive ve vlnových délkách

$$n^2 = A' + B' \frac{1}{\lambda^2} + C' \frac{1}{\lambda^4} + \dots \quad (14.16)$$

Uvedenému tvaru vyjádření indexu lomu, se říká *Cauchyho vzorec*.<sup>3</sup> Látky mají ve skutečnosti více rezonančních frekvencí, které je možné modelovat jako Lorentzovy oscilátory různých typů. Kromě oscilací elektronů, je například nutné vzít v úvahu kmity iontů v látce, jejichž frekvence spadají typicky do infračervené oblasti. Příspěvek každého oscilátoru je možné popsat rovnicí typu (14.13) s různými vlastními frekvencemi, eventuálně dalšími parametry. Váha příspěvků jednotlivých oscilací se ve skutečnosti odlišuje od uváděného modelu. Správně je možné popsat jednotlivé příspěvky pomocí kvantové mechaniky nebo zavedením empirické konstanty  $f$  pro každou rezonanci. Vztah (14.13) tak může být zobecněn

$$\tilde{n}^2 \approx 1 + \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} \sum_j f_j \frac{\Omega_j^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_j}{(\Omega_j^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma_j^2}. \quad (14.17)$$

Vyjadřuje skutečnost, že se sčítají susceptibility odpovídající jednotlivým oscilátorům.

## 14.1.2 Lokální pole

V pevných látkách, ve kterých je velká hustota atomů, je při výpočtu indexu lomu nutné vzít v úvahu skutečnost, že na každý oscilátor působí kromě vnějšího pole  $E$  ještě pole ostatních dipólů v látce  $E_{dip}$ . To znamená, že na oscilátor působí *lokální pole*  $E_{lok}$ ,  $E_{lok} = E + E_{dip}$ , které se od vnějšího pole může lišit. Ve výpočtu indexu lomu, který jsme prováděli v předchozím odstavci, bychom správně měli používat toto lokální pole. Výpočet lokálního pole je obecně složitý. Dá se provést dobře pro látky, v nichž jsou oscilátory umístěny v kubické krystalické mříži, a pro látky neuspořádané (amorfní). Z teorie dielektrik je známo, že v tomto typu látek je možné lokální pole vyjádřit pomocí polarizace dielektrika

$$\vec{E}_{lok} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}. \quad (14.18)$$

Rov. (14.4) vyjadřuje polarizaci látky pomocí dipólových momentů jednotlivých oscilátorů. Jsou-li dipóly pružné a je-li jejich dipólový moment pro nulové pole roven nule, můžeme dipólový moment vyjádřit pomocí polarizovatelnosti  $\beta$

$$\vec{p} = \beta \vec{E}_{lok}. \quad (14.19)$$

Polarizovatelnost charakterizuje odezvu jednotlivého atomu (Lorentzova oscilátoru) na elektrické pole. Explicitní výraz pro polarizovatelnost plyne přímo z rov. (14.19) a (14.6).

Pomocí polarizovatelnosti můžeme vyjádřit relativní permitivitu a komplexní index lomu. Z rov. (14.5), (14.18) a (14.19) dostáváme

$$\vec{P} = \frac{N\beta}{1 - \frac{N\beta}{3\epsilon_0}} \vec{E}. \quad (14.20)$$

Odtud a z rov. (14.2) a (14.3) plyne Clausius-Mossottiho rovnice

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{N\beta}{3\epsilon_0}. \quad (14.21)$$

Pro komplexní index lomu je podle (14.4)

$$\frac{\tilde{n}^2 - 1}{\tilde{n}^2 + 2} = \frac{N\beta}{3\epsilon_0}, \quad (14.22)$$

což je Lorentz-Lorenzova rovnice.<sup>4</sup> Tyto rovnice spojují relativní permitivitu, resp. index lomu látky s polarizovatelností jednotlivých atomů (molekul), které ji tvoří. Při jejich formulaci se započítala skutečnost, že elektrické pole působící na atom uvnitř látky je odlišné od pole dopadajícího díky dodatečnému poli, které souvisí s polarizací látky. Pro opticky řidká prostředí ( $n-1 \ll 1$ ) lze jmenovatel na levé straně (14.22) nahradit přibližně 3, a máme tedy

$$\tilde{n}^2 \approx 1 + \frac{N\beta}{\epsilon_0}. \quad (14.23)$$

## 14.2 KLASICKÝ MODEL PRO VÝPOČET INDEXU LOMU KOVŮ

Dobrou elektrickou a tepelnou vodivost kovů lze vysvětlit v rámci klasického modelu volných elektronů, jak ho poprvé zformuloval P. Drude. Tento model dobře vysvětluje i vysokou optickou odrazivost kovů. Model odezvy volných elektronů na světlo je možné popsat podobně jako odezvu vázaných elektronů v předchozím odstavci. V kovu jsou ovšem elektrony „volné“, tedy vazebná konstanta  $k=0$ . To znamená, že pohybová rovnice má v tomto případě tvar

$$m \ddot{x} + m \gamma \dot{x} = q E. \quad (14.24)$$

Opět budeme uvažovat elektrické pole a výchylku ve tvaru (14.9) a (14.10). Provedením derivací a dosazením do (14.24) máme

$$\dot{\tilde{x}} = \frac{q E}{m} \frac{1}{\gamma - i \omega}. \quad (14.25)$$

První časová derivace polarizace /viz (14.5), (14.6)/ je

$$\dot{\tilde{P}} = q N \dot{\tilde{x}} \quad (14.26)$$

Vzhledem k (14.25 a 14.9) je

$$\tilde{P} = \frac{\dot{\tilde{P}}}{-i \omega} = \frac{q \dot{\tilde{x}} N}{-i \omega} = \frac{i N q q}{\omega m} \frac{1}{\gamma - i \omega} \tilde{E}. \quad (14.27)$$

Porovnáme-li nyní tento výraz pro polarizaci se vztahem (14.2), můžeme vyjádřit susceptibilitu  $\chi$ , resp. relativní permitivitu

$$\tilde{\epsilon}_r = 1 + \tilde{\chi} = 1 + \frac{i q^2 N}{\epsilon_0 m \omega} \frac{1}{\gamma - i \omega}. \quad (14.28)$$

Označíme-li kombinaci konstant v (14.28)

$$\omega_p^2 = \frac{q^2 N}{\epsilon_0 m} \quad (14.29)$$

můžeme (14.28) psát<sup>5</sup>

$$\tilde{\epsilon}_r = 1 + \frac{i \omega_p^2}{\omega} \frac{1}{\gamma - i \omega}. \quad (14.30)$$

Veličina  $\omega_p$  se nazývá *plazmová frekvence*, která je frekvencí vlastních kmitů plazmatu tvořeného kladnými a zápornými náboji. Vlastní frekvence jednotlivých elektronů je ovšem rovna nule, protože jsou volné. U většiny kovů má plazmová frekvence hodnotu odpovídající ultrafialové oblasti. Můžeme ji určit podle vztahu (14.29), pokud známe koncentraci volných elektronů v kovu. V běžných kovech je tato koncentrace vysoká, v řádu  $10^{28}$ – $10^{29}$   $\text{m}^{-3}$  (je rovna koncentraci atomů v kovu vynásobenou počtem valenčních elektronů). Jako příklad uvádíme v tabulce 14.1 použití vztahu (14.29) pro výpočet plazmové frekvence  $\omega_p$  a odpovídající vlnové délky pro některé známé kovy.

**Tabulka 14.1** Plazmové frekvence a vlnové délky vybraných kovů

Kov	$N$ [ $10^{28}$ $\text{m}^{-3}$ ]	$\omega_p$ [ $10^{16}$ Hz]	$\lambda_p$ [nm]
Cu	8,47	1,63	115
Ag	5,86	1,36	138
Au	5,90	1,37	138
Al	18,1	2,40	79
Zn	1,32	2,00	93

V případě, kdy je konstanta tlumení malá vůči frekvenci světla ( $\omega \gg \gamma$ ), platí pro čtverec indexu lomu

$$\tilde{n}^2 = \tilde{\varepsilon}_r \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (14.31)$$

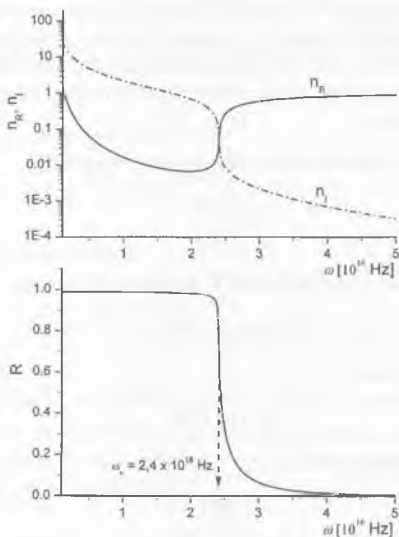
Je zřejmé, že pro frekvence  $\omega > \omega_p$  je pravá strana (14.31) kladná a index lomu je reálný. Naproti tomu pro  $\omega < \omega_p$  je index lomu ryze imaginární. To znamená, že pro světlo s frekvencemi vyššími než plazmová frekvence je kov průhledný<sup>6</sup> a světlo s frekvencí menší než plazmová frekvence je kovem silně odráženo. Skutečně, podle Fresnelových vzorců je odrazivost pro kolmý dopad rovna

$$R = \frac{|\tilde{n} - 1|^2}{|\tilde{n} + 1|^2} = \frac{(n_R - 1)^2 + n_I^2}{(n_R + 1)^2 + n_I^2} \quad (14.32)$$

a pro oblast  $\omega < \omega_p$ , kdy je index lomu ryze imaginární, vychází  $R = 1$ . To znamená, že ve viditelné oblasti většina kovů velmi dobře odráží světlo (lesknou se). Pro vysoké frekvence je index lomu reálný, pro  $\omega \rightarrow \infty$  se jeho



hodnota blíží jedné a podle (14.32) odrazivost klesá k nule. Na obr. 14.3 uvádíme spektrální průběh reálné a imaginární části indexu lomu vypočítané pro parametry odpovídající volným elektronům v hliníku podle rov. (14.30) a vztahů uvedených v pozn. 1 a spektrální průběh odrazivosti vyčíslený podle rov. (14.32). Z obrázku je zřejmé, že pro frekvence menší než plazmová frekvence je odrazivost přibližně rovna 1. Pro vysokou odrazivost ve viditelné spektrální oblasti se používá hliník (nebo stříbro) jako materiál pro výrobu optických zrcadel. Spektrální průběh odrazivosti na obr. 14.3 přibližně odpovídá experimentálně měřené závislosti, která se liší tím, že má menší hodnotu ( $R > 0,8$ ), její výrazný pokles nastává u poněkud menších frekvencí ( $\omega = 2,26 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$ ). Jak je zřejmé z tabulky 14.1, vlnová délka odpovídající plazmové frekvenci kovů leží v ultrafialové oblasti, a nemůže proto vysvětlit různé zbarvení některých kovů (například zlata, mědi). Drudeho model je totiž pouze přibližný, protože komplexní index lomu kovů je kromě volných elektronů ovlivněn také elektrony vázanými. Těm



**Obr. 14.3** a) Spektrální závislost indexů lomu  $n_R$  a  $n_I$  vypočítaná pro volné elektrony v hliníku ( $\omega_p = 2,40 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$ ,  $\gamma = 1,25 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$ ). b) Spektrální závislost odrazivosti vypočítaná z  $n_R$  a  $n_I$  podle rov. (14.32)

odpovídají jiné energetické stavy. Při dopadu světla může docházet k přechodu těchto elektronů do energeticky výše položených pásů volných elektronů. Při těchto přechodech dochází k absorpci světla v tenké vrstvě u povrchu kovu, a tím se odrazivost zmenšuje. U zlata tento přechod může nastat pro vlnové délky kratší než 560 nm, u stříbra kratší než 310 nm, což souhlasí se zbarvením těchto kovů. Fenomenologicky lze odezvu vázaných elektronů započítat tak, že se k pravé straně rov. (14.31) přičte odpovídající relativní permitivita.

### 14.3 VYSVĚTLENÍ ABSORPCE Z MIKROSKOPICKÉHO HLEDISKA

V kapitole 1 i v předchozích odstavcích jsme hovořili o tom, že existence imaginární části indexu lomu vede ke zmenšování amplitudy světla, zpravidla k jeho útlumu absorpcí v materiálu. Nyní se pokusíme vysvětlit absorpci světla z mikroskopického hlediska. Nejprve budeme vyšetřovat, jaký výkon je přenesen ze světelné vlny do jednoho tlumeného oscilátoru, který je jí rozkmitáván. Dále uvážíme, jak je světlo při svém šíření souborem takových oscilátorů zeslabováno.

Podle definice je výkon  $L$  roven časové derivaci práce

$$L = \frac{dA}{dt}. \quad (14.33)$$

Elementární práce  $dA$  vykonaná silou  $F$  na dráze  $dr$  je rovna

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (14.34)$$

V našem případě je tedy

$$dA = q E dx. \quad (14.35)$$

Odpovídající výkon je proto

$$L = q E \dot{x}. \quad (14.36)$$

Pole  $E$  a výchylka  $x$  jsou pro dielektrické látky dány vztahy (14.9) a (14.10). Ve výrazu pro výkon je jejich součin, je proto nutné při dosazení vzít jejich reálné hodnoty, tedy

$$E = \frac{1}{2} \tilde{E}_0 \exp(-i\omega t) + c.c., \quad (14.37)$$

respektive

$$x = \frac{1}{2} \tilde{x}_0 \exp(-i\omega t) + c.c. \quad (14.38)$$

(c.c. značí jako obvykle komplexně konjugovaný). Dosazením (14.37) a (14.38) do (14.36) máme

$$L = \frac{i}{4} q \omega [\tilde{x}_0 \tilde{E}_0^* + \tilde{x}_0 \tilde{E}_0 \exp(-2i\omega t)] + c.c., \quad (14.39)$$

tedy okamžitý výkon má harmonickou složku na frekvenci  $2\omega$ . Střední výkon (časová střední hodnota výkonu přes periodu) je roven

$$\langle L \rangle = -\frac{i}{4} q \omega \tilde{E}_0^* \tilde{x}_0 + c.c. \quad (14.40)$$

Dosadíme-li za amplitudu výchylky ze vztahu (14.16), máme

$$\begin{aligned} \langle L \rangle = & -\frac{i}{4} q \omega \tilde{E}_0^* \frac{q \tilde{E}_0}{m} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} + \\ & + \frac{i}{4} q \omega \tilde{E}_0 \frac{q \tilde{E}_0^*}{m} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}. \end{aligned} \quad (14.41)$$

Úpravou (14.41) dostáváme

$$\langle L \rangle = \frac{q^2 \omega^2 |E_0|^2}{2m} \frac{\gamma}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}. \quad (14.42)$$

Střední výkon je vždy nezáporný,  $\langle L \rangle \geq 0$ , tlumený oscilátor tedy absorbuje světlo. Protože je intenzita světla přímo úměrná čtverci amplitudy elektrického pole, je střední výkon pohlcený oscilátorem přímo úměrný intenzitě světla, viz (1.72). V rezonanci, když

$$\omega = \Omega, \quad (14.43)$$

je z (14.42) zřejmé, že je střední absorbovaný výkon nepřímo úměrný konstantě popisující tlumení oscilátoru,

$$\langle L \rangle \propto \frac{I}{\gamma}. \quad (14.44)$$

Světlo při šíření látkou může tedy předávat výkon oscilátorům, což vede k zeslabování jeho intenzity, tedy k absorpci světla. Jaký je tvar absorpčního zákona? Předpokládejme pro jednoduchost, že v látce jsou identické oscilátory s koncentrací  $N$ . Uvažujme světelný svazek, který má průřez  $A$ . Během šíření po dráze  $dz$  osvítil  $dn$  oscilátorů

$$dn = AN dz. \quad (14.45)$$

Každý z oscilátorů „spotřebuje“ výkon  $\langle L \rangle$ , tedy pro uvedený svazek na dráze  $dz$  je oscilátorům předán střední výkon  $dn\langle L \rangle$ . To znamená, že změna intenzity světla ve svazku na dráze  $dz$  je

$$dI = -\langle L \rangle N dz, \quad (14.46)$$

protože intenzita světla odpovídá střednímu výkonovému toku vztaženému na jednotku plochy. Dosazením ze vztahů (14.42) a (1.72) dostaneme ( $n_R$  je reálná část indexu lomu látky)

$$dI = -I \frac{q^2 \omega^2}{m n_R} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_0}} \frac{\gamma}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} N dz. \quad (14.47)$$

Tento vztah má tvar

$$dI = -a I dz, \quad (14.48)$$

kde jsme zavedli *absorpční koeficient*  $a$ :

$$a = \frac{q^2}{m n_R} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_0}} \frac{\gamma \omega^2}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} N. \quad (14.49)$$

Protože na pravé straně tohoto výrazu jsou jen nezáporné veličiny, je zřejmé vždy absorpční koeficient nezáporný, což znamená, že světlo při průchodu látkou není zesilováno, odevzdává svůj výkon oscilátorům v látce.<sup>7</sup> Integrací vztahu (14.48) můžeme získat rovnici, která popisuje intenzitu světla po průchodu vrstvou látky tloušťky  $z$ . Dopadá-li na látku světlo intenzity  $I_0$ , jeho intenzita po průchodu vrstvou látky tloušťky  $z$  bude

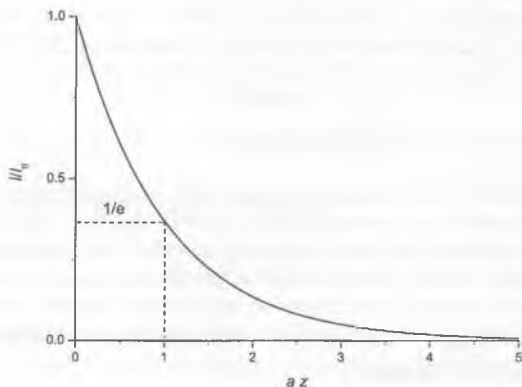
$$I(z) = I_0 \exp(-az). \quad (14.50)$$

To znamená, že světlo je při šíření tlumeno exponenciálně, rovnice (14.50) se nazývá *absorpční (Lambert-Beerův, resp. Bouguerův) zákon*. Průběh intenzity světla v látce je znázorněn na obr. 14.4. Absorpční koeficient  $a$  je nezávislý na intenzitě (to je pravda pouze pro slabé světelné intenzity, jak uvidíme v kapitole 15), závisí na frekvenci světla (vlnové délce) a na materiálu. Frekvenční závislost ve vztahu (14.49) lze aproximovat velmi dobře *lorentzovským tvarem*. Skutečně, pro frekvence pole blízké rezonanci, tedy pro

$$|\omega - \Omega| \ll \omega \quad (14.51)$$

lze (14.49) psát<sup>8</sup>

$$a = \frac{q^2 N}{m n_R \gamma} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_0}} \frac{1}{4 \frac{(\Omega - \omega)^2}{\gamma^2} + 1} \quad (14.52)$$



Obr. 14.4 Ilustrace absorpčního zákona; intenzita při šíření v látce exponenciálně klesá

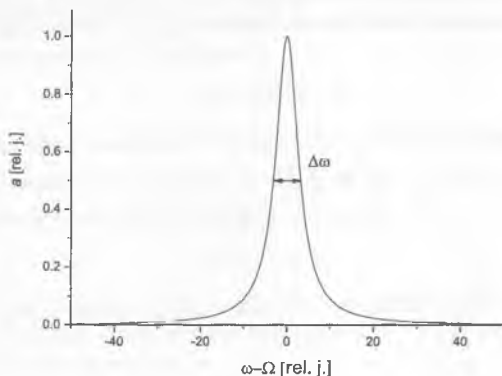
Frekvenční závislost (spektrum) absorpčního koeficientu (obr. 14.5) je tedy možné popsat Lorentzovou funkcí s maximem

$$a_{MAX} = \frac{q^2 N}{m n_R \gamma} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_0}} \quad (14.53)$$

Plná šířka křivky v polovině maxima je

$$\Delta\omega_{FWHM} = \gamma. \quad (14.54)$$

Anglická zkratka FWHM (full width at half maximum) se dnes běžně používá v optické literatuře místo často matoucího pološířka, half-width.



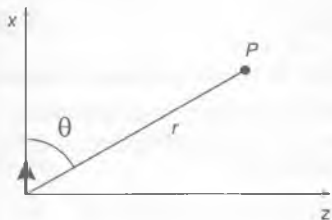
Obr. 14.5 Absorpční spektrum (Lorentzova funkce)

Uvedené výsledky byly získány pro elementární oscilátory s určitou vlastní frekvencí. Odezvě látek na vnější pole odpovídá zpravidla více druhů elementárních oscilátorů, tedy více vlastních frekvencí, což znamená více absorpčních pásů. Hodnoty absorpčního koeficientu se tak mohou podle různých podmínek řádově lišit, například ve spektrální oblasti propustnosti taveného křemene je  $a \approx 10^{-6} \text{ cm}^{-1}$ , ve spektrální oblasti absorpce polovodičů je  $a \approx 10^{+6} \text{ cm}^{-1}$  (GaAs).

#### 14.4 VYSVĚTLENÍ EXISTENCE INDEXU LOMU Z MIKROSKOPICKÉHO HLEDISKA

Jak jsme se již zmiňovali a jak je všeobecně známé, šíří se světlo v prostředí s jinou fázovou rychlostí než ve vakuu. Zde se pokusíme existenci indexu lomu objasnit na základě mikroskopického modelu látky tvo-

řené navzájem neinteragujícími dipóly (řídká látka s malou hustotou dipólů). Když na látku dopadá světelná vlna, její elektrické pole, jak jsme viděli, dipólky v látce rozkmitává. Kmitající dipól ovšem vyzařuje elektromagnetické záření, tedy světlo. Ukážeme nyní, že změnu fázové rychlosti světla v látce lze chápat jako výsledek interference vln vyzařovaných jednotlivými elementárními dipóly a dopadající vlny.



Obr. 14.6 Geometrie užitá při popisu elektrického pole kmitajícího dipólu

Uvažujme nejprve elementární dipól umístěný v počátku souřadného systému, který je orientován ve směru osy  $x$ , viz obr. 14.6. Amplituda jeho pole v bodě  $P$ , který je ve velké vzdálenosti  $r$  ( $r \gg \lambda$ ) od počátku, je dána

$$\tilde{E}_P = E_{dip} \exp \left[ -i \left( \omega t - \frac{\omega}{c_0} r \right) \right], \quad (14.55)$$

kde  $E_{dip}$  je reálná amplituda pole záření dipólu<sup>9</sup>

$$E_{dip} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x_0 q \omega^2 \sin \theta}{r}. \quad (14.56)$$

Zde  $x_0$  je amplituda výchylky dipólu s nábojem  $q$ , který kmitá s kruhovou frekvencí  $\omega$ , úhel  $\theta$  je úhel mezi osou  $x$  a směrem  $r$ . Předpokládejme nyní, že světlo (rovinná vlna) prochází ve směru osy  $z$  látkou, v níž jsou dipólky s koncentrací  $N$ . Protože oscilace dipólků jsou vyvolány dopadající vlnou, je v izotropních látkách směr kmitů elektrického pole a dipólků rovnoběžný, v daném případě se jedná o směr osy  $x$ . Ve velmi tenké vrstvě kolmé k ose  $z$  (ve srovnání s vlnovou délkou světla, tedy tloušťky  $\Delta z \ll \lambda$ ) jsou kmitající dipóly ve fázi. Předpokládejme pro jednoduchost, že vrstva je umístěna v místě  $z=0$ , jak je znázorněno na obr. 14.7. Jaké výsledné pole vzniká jejich interferencí v bodě  $Q$ , který leží ve velké vzdálenosti na ose  $z$ ? Pole jednotlivých dipólů se musí skládat s příslušnými fázemi. Dipólky,

kteří leží v rovině  $(x, y, 0)$  v úzkém mezikruží o poloměru  $\rho$ , viz obr. 14.8a, přispívají ovšem se stejnou fází. Počet dipólků, které leží v uvažované vrstvě v mezikruží daném kružnicemi o poloměrech  $\rho$  a  $\rho+d\rho$ , je roven

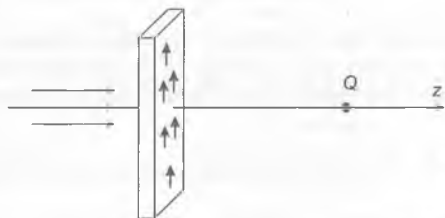
$$dN = N \Delta z 2\pi \rho d\rho. \quad (14.57)$$

Jejich příspěvek k poli v bodě  $Q$  je

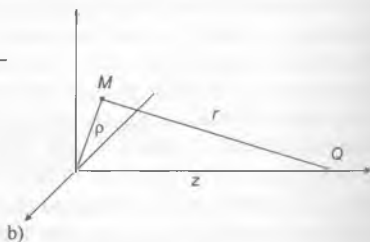
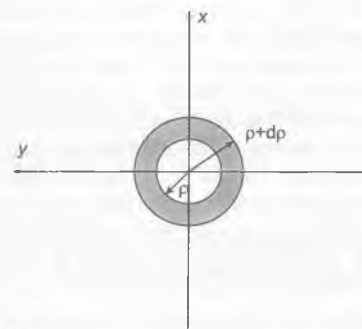
$$d\vec{E}_Q = \vec{E}_p dN. \quad (14.58)$$

Pole, které vzniká součtem všech dipólků ve vrstvě, dostaneme integrací přes celou plochu,

$$\vec{E}_Q = \int_0^{\infty} \vec{E}_p N \Delta z 2\pi \rho d\rho \quad (14.59)$$



Obr. 14.7 Kmitající dipóly rozložené v tenké vrstvě látky



a)

b)

Obr. 14.8 Výpočet příspěvku pole kmitajících dipólů; a) mezikruží se stejnou vzdáleností od bodu pozorování; b) geometrie uvažovaná ve výpočtu



tedy

$$\tilde{E}_Q = N \Delta z 2 \pi \int_0^{\infty} \tilde{E}_p \rho d\rho. \quad (14.60)$$

Aproximujeme-li vzdálenost  $r$  mezi dipólem v bodě  $M$  a bodem  $Q$  (srov. obr. 14.18b),

$$r = z \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{z^2}} \approx z \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{z^2} \right), \quad (14.61)$$

a zanedbáme-li při výpočtu interference (jak je ve vyšetřování interference částé) úbytek amplitudy pole  $E_{dip}$  se vzdáleností, máme

$$\int_0^{\infty} \tilde{E}_p \rho d\rho = E_{dip} \exp(-i\omega t) \exp\left(i \frac{\omega}{c_0} z\right) \int_0^{\infty} \exp\left(i \frac{\omega}{2c_0} \frac{\rho^2}{z}\right) \rho d\rho. \quad (14.62)$$

Integrál v (14.62) má tvar

$$\int_0^{\infty} \exp(-i\alpha \rho^2) \rho d\rho, \quad (14.63)$$

kde

$$\alpha = -\frac{\omega}{2c_0 z}. \quad (14.64)$$

Je možné ho vypočítat jako

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\infty} \exp[-(\beta + i\alpha) \rho^2] \rho d\rho \right\} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{\beta + i\alpha} \right\} = \frac{1}{2i\alpha}. \quad (14.65)$$

Tedy

$$\int_0^{\infty} \tilde{E}_p \rho d\rho = E_{dip} \exp(-i\omega t) \exp\left(i \frac{\omega}{c_0} z\right) \left( -\frac{c_0 z}{i\omega} \right). \quad (14.66)$$

Podle (14.60) je

$$\tilde{E}_Q = \frac{i N 2 \pi \Delta z c_0 E_{dip} z}{\omega} \exp\left[-i\left(\omega t - \frac{\omega}{c_0} z\right)\right]. \quad (14.67)$$

Aproximujeme-li  $\sin\theta \approx 1$  a  $r \approx z$  ve vztahu (14.56), máme pro amplitudu pole jednoho dipólu

$$E_{dp} = \frac{\mu_0 q x_0 \omega^2}{4\pi z}. \quad (14.68)$$

Amplitudu výchylky oscilujícího dipólu jsme vyjádřili explicitně již dříve, rov. (14.16). Pro případ, že můžeme zanedbat tlumení (tj. ve spektrální oblasti propustnosti látky,  $\gamma=0$ ), je tedy

$$x_0 = \frac{qE_0}{m} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2}. \quad (14.69)$$

Celkově tak dostáváme

$$\tilde{E}_Q = i E_0 \exp\left[-i\left(\omega t - \frac{\omega}{c_0} z\right)\right] \frac{\mu_0 N c_0 \Delta z q^2 \omega}{2m} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2}. \quad (14.70)$$

Uvažujme nyní z makroskopického hlediska, jak je rovinná vlna ovlivněna při průchodu prostředím s (reálným) indexem lomu  $n$ . Rovinnou vlnu popíšeme jako obvykle

$$\tilde{E}(z, t) = \tilde{E}_0 \exp[-i(\omega t - k z)]. \quad (14.71)$$

Připomeňme vyjádření velikosti vlnového vektoru v prostředí s indexem lomu  $n$

$$k = k_0 n = \frac{\omega}{c_0} n, \quad (14.72)$$

keré lze přepsat

$$k = k_0 + (n-1)k_0. \quad (14.73)$$

Vlna při šíření prostředím délky  $\Delta z$  získá dodatečný fázový náběh („způsobený látkou“)

$$\Delta\varphi = (n-1)k_0 \Delta z. \quad (14.74)$$

Prochází-li pole vrstvou látky, jak jsme ji uvažovali výše, mezi  $(0, \Delta z)$ , je na vstupu do ní

$$\tilde{E}_{vstup} = \tilde{E}_0 \exp[-i(\omega t)] \quad (14.75)$$

a pole na výstupu

$$\tilde{E}_{\text{výstup}} = \tilde{E}_0 \exp[-i(\omega t - k \Delta z)], \quad (14.76)$$

tedy

$$\tilde{E}_{\text{výstup}} = \tilde{E}_0 \exp[-i(\omega t - k_0 \Delta z) + i \Delta \varphi]. \quad (14.77)$$

Pokud je tloušťka látky malá, je  $\Delta \varphi \ll 1$ , a můžeme použít přiblížení

$$\exp(i \Delta \varphi) \approx 1 + i \Delta \varphi. \quad (14.78)$$

Pole na výstupu z látky pak je

$$\tilde{E}_{\text{výstup}} = \tilde{E}_0 \exp[-i(\omega t - k_0 \Delta z)] + i \Delta \varphi \tilde{E}_0 \exp[-i(\omega t - k_0 \Delta z)]. \quad (14.79)$$

Tento výraz má tvar

$$\tilde{E}_{\text{výstup}} = \tilde{E}_{\text{původ}} + \tilde{E}_{\text{dodat}}, \quad (14.80)$$

kde pole původní odpovídá poli, které prošlo vzdálenost  $\Delta z$  ve vakuu, a pole dodatečné, způsobené látkou, je dáno

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\text{dodat}} &= i \Delta \varphi \tilde{E}_0 \exp[-i(\omega t - k_0 \Delta z)] = \\ &= i \tilde{E}_0 \frac{\omega}{c_0} \Delta z (n-1) \exp[-i(\omega t - k_0 \Delta z)]. \end{aligned} \quad (14.81)$$

Toto dodatečné pole je podle předchozích (mikroskopických) úvah dáno výrazem (14.70), tedy

$$\tilde{E}_{\text{dodat}} = \tilde{E}_Q. \quad (14.82)$$

Porovnáním obou výrazů dostáváme, uvážíme-li  $c_0^{-2} = (\mu_0 \epsilon_0)$

$$n-1 = \frac{N q^2}{2 m \epsilon_0} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2}. \quad (14.83)$$

To je ovšem pro řidká prostředí  $n \approx 1$ , tj.  $n^2 - 1 \approx 2(n-1)$  shodné s výsledkem (14.13) pro  $\gamma = 0$ .

Změnu fázové rychlosti světla v látce oproti vakuu, tj. existenci indexu lomu, můžeme tedy chápat jako důsledek interference dopadající vlny a vln

vyzařovaných jednotlivými dipóly, které jsou v látce dopadající vlnou rozkmitávány.

## 14.5 ROZPTYL SVĚTLA

Při šíření světla v látce může docházet také k jeho rozptylu. *Rozptylem světla* se zpravidla rozumí jev, při němž světlo mění svůj směr šíření látkou, ve které se index lomu mění na vzdálenostech menších než vlnová délka světla.<sup>10</sup> Celkový počet fotonů se nemění, ale protože některé z nich změni směr, rozptyl světla vede k zeslabování světelných svazků podobně jako při absorpci. Intenzita světla klesá při rozptylu exponenciálně podle zákona, který má stejný tvar jako (14.50), v němž je nutné nahradit absorpční koeficient *rozptylovým průřezem*  $\sigma_r$ :  $a = N_r \sigma_r$ . Zde  $N_r$  je objemová hustota center, na nichž dochází k rozptylu.<sup>11</sup> Pokud jsou rozměry rozptylových center (částic) podstatně menší než vlnová délka světla, mluví se o *Rayleighově rozptylu*. V tomto případě je rozptylový průřez silně závislý na vlnové délce podle zákona

$$\sigma_r = \text{konst} \frac{1}{\lambda^4}. \quad (14.84)$$

To znamená, že světlo kratších vlnových délek je rozptylováno účinněji než světlo dlouhovlnné.<sup>12</sup> Tato závislost na vlnové délce odpovídá výkonové závislosti vyzařování kmitajícího elektrického dipólu, kterým je možné malou rozptylující částici modelovat.

### Poznámky

<sup>1</sup> Pokud

$$\bar{\epsilon}_r = \bar{n}^2 = \epsilon_R + i\epsilon_I, \text{ vychází } n_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \epsilon_R + (\epsilon_R^2 + \epsilon_I^2)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad n_I = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\epsilon_R + (\epsilon_R^2 + \epsilon_I^2)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

<sup>2</sup> Zde jsme užili rozvoj  $\frac{1}{1+x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

<sup>3</sup> Tento tvar řady je historický, byl navržen v roce 1836. V praxi se dnes používají analogické rozvoje, zejména podobný tvar zavedený firmou Shott:  $n^2 = A_0 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda^{-2} + A_3 \lambda^{-4} + \dots$

$+ A_4 \lambda^{-6} + A_4 \lambda^{-8} + \dots$ . Hodnoty koeficientů je možné nalézt v tabulkách, například pro velmi běžné optické sklo BK7 mají hodnoty:  $A_0 = 2,2718929$ ,  $A_1 = -1,0108077 \times 10^{-2}$ ,  $A_2 = 1,0592509 \times 10^{-2}$ ,  $A_3 = 2,0816965 \times 10^{-4}$ ,  $A_4 = -7,6472538 \times 10^{-6}$ ,  $A_5 = 4,924099 \times 10^{-7}$  ( $\lambda$  je v  $\mu\text{m}$ ).

<sup>4</sup> Clausius-Mossottiho rovnice byla formulována původně pro statické elektrické pole (O. F. Mossotti v roce 1850, R. Clausius v roce 1879). Rovnici pro komplexní index lomu získali poprvé nezávisle v téměř stejné době vědci podobného jména: H. A. Lorentz (1880) a L. Lorenz (1881).

<sup>5</sup> Drudeho model dovoluje také výpočet vodivosti kovů. Vychází  $\sigma = \frac{Nq^2}{m\gamma}$ , jak můžeme ověřit také srovnáním (1.93) a (14.30) pro malé frekvence  $\omega \ll \gamma$ .

<sup>6</sup> Pro vysoké frekvence volné náboje „nestihnou“ sledovat kmity pole a projeví se jen odezva vázaných nábojů v atomech. Rovnice (14.31) má po započítání celkové odezvy látky tvar  $\vec{n}^2 = \vec{\epsilon}_r \approx \epsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ . V oblasti propustnosti pro  $\omega > \omega_p$  je index lomu ideálního vodiče reálný. Protože pro velikost vlnového vektoru platí  $k^2 c_0^2 = \omega^2 n^2$ , dostáváme disperzní vztah pro kovy  $\omega = \sqrt{\frac{k^2 c_0^2 + \omega_p^2}{\epsilon_\infty}}$ . Pro šíření světla v plazmatu platí rov. (14.31)

a  $\epsilon_\infty = 1$ . Tato závislost je znázorněna na obr. 4.2. Pro případ  $\omega = \omega_p$  vychází ovšem  $\vec{n}^2 = \vec{\epsilon}_r = 0$ . Co to znamená? Z materiálového vztahu (14.1) pro  $\epsilon_r = 0$  plyne

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = 0.$$

To znamená, že rovnice

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0,$$

která je splněna pro příčné vlny, je díky nulovosti permitivity splněna i pro podélná pole, je tedy možné, aby

$$\vec{E} \parallel \vec{k}.$$

Pro podélné pole platí v tomto případě ovšem ( $\vec{D} = 0$ ), tedy

$$\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}.$$

Z Maxwellovy rovnice (1.1) pak dostáváme

$$\vec{H} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega \mu_0},$$

což vzhledem k  $\vec{E} \parallel \vec{k}$  znamená, že

$$\vec{H} = 0$$

a

$$\vec{B} = 0.$$

Podélné vlny tedy nemají charakter elektromagnetických vln, ale spíše kmitů polarizace.

<sup>7</sup> Podle rov. (1.92) a (1.96) je absorpční koeficient spojen s imaginární částí indexu lomu

$$a = 2k_i = \frac{2\omega}{c} n_i.$$

Dále uvidíme, že pokud vezmeme v úvahu kvantovou povahu látek,

může se objevit na pravé straně místo koncentrace atomů rozdíl koncentrací atomů v různých energetických kvantových stavech, a proto může nabývat  $N$  i záporné hodnoty. Pak je ovšem světlo při průchodu látkou zesilováno jako například v laseru, hovoří se o optickém zisku.

<sup>8</sup> Položíme  $\Omega^2 - \omega^2 = (\Omega - \omega)(\Omega + \omega) \approx 2\omega(\Omega - \omega)$ .

<sup>9</sup> Volíme nulovou počáteční fázi. Pole oscilujícího dipólu je popsáno podrobně například v učebnici [1].

<sup>10</sup> Tohle není jediná definice rozptylu. Někdy se za rozptyl považuje jakákoliv změna směru šíření světla, pokud je vyvolána trojdimenzionálními objekty. Zdá se tedy, že je obtížné vymezit, co je rozptyl a co difrakce. Kromě toho se ovšem také hovoří o rozptylu světla při jeho interakci s látkou, pokud světlo mění směr šíření nebo svou frekvenci a přitom nedochází k optickým přechodům mezi reálnými energetickými stavy v látce.

<sup>11</sup> Pokles intenzity světla vyvolaný současně absorpcí i rozptylem je možné charakterizovat v exponenciálním zákonu jediným koeficientem  $\varepsilon$ . Nazývá se extinkční koeficient, hovoří se o extinkci světla.

<sup>12</sup> V této souvislosti připomeňme červené zbarvení zapadajícího Slunce nad horizontem (modré složky světla jsou oslabeny rozptylem) nebo modrou barvu oblohy (rozptylují se zejména modré složky světla). Modrá barva oblohy souvisí s Rayleighovým rozptylem světla na fluktuacích indexu lomu atmosféry způsobených fluktuacemi koncentrace molekul vzduchu. U větších částic je závislost rozptylového průřezu na vlnové délce obvykle potlačena, proto je například modravý pouze kouř s malými částicemi.

## 15.1 INTERAKCE SVĚTLA S LÁTKOU V PŘÍPADĚ REÁLNÝCH PŘECHODŮ MEZI ENERGETICKÝMI STAVY

Interakci světla s látkou v případě, kdy dochází k reálným přechodům mezi energetickými stavy v látce, tedy jedná-li se o rezonanční interakci, správně popisuje kvantová teorie. Interakci světla s látkou v takovém případě vyšetřoval poprvé A. Einstein v roce 1905 a jeho teorie se stala kromě jiného i základem pro popis principu činnosti laseru. Uvažujme dvě<sup>1</sup> ostré energetické hladiny atomu nebo molekuly s energiemi  $E_1, E_2$ . Můžeme pro jednoduchost předpokládat, že hladina 1 je základním stavem atomu a platí  $E_1 < E_2$ . Pokud se atom nachází ve stavu 2, je v excitovaném stavu a musí při přechodu do energeticky výhodnějšího základního stavu uvolnit energii ( $E_2 - E_1$ ). Tato energie může být vyzářena ve formě světla (fotonu), pak se mluví o *spontánní emisi světla*. Frekvence vyzářeného světla je rovna

$$\nu_{21} = \frac{E_2 - E_1}{h}, \quad (15.1)$$

Jinou možností je, že energie bude uvolněna například ve formě tepelné energie převedené na okolí atomu. Přechod tedy není provázen emisí světla, hovoří se o *nezářivém přechodu*. Pokud je atom, který je na hladině 2, ozářen světlem s frekvencí  $\nu = \nu_{21}$ , může světlo s jistou pravděpodobností stimulovat přechod atomu do základního stavu, přičemž je energie opět vyzářena ve formě světla; dochází ke *stimulované emisi*. Vlastnosti světla vyzářeného spontánní a stimulovanou emisí se podstatně liší. V případě spontánní emise může být světlo vysláno v libovolném směru, vlny jsou vyzářeny různými atomy s náhodnou fází. Při stimulované emisi jsou fáze a směr emitovaných vln stejné jako fáze a směr vlny dopadající. Pokud na atom v základním stavu 1 dopadá světlo s frekvencí  $\nu = \nu_{21}$ , může být atom s určitou pravděpodobností excitován do stavu 2; dochází k *absorpci*. Budeme nyní uvažovat látku, která je složena z atomů, jejichž celková kon-

centrace je  $N_{celk}$ , koncentrace atomů, které jsou ve stavu  $j$  je  $N_j$ . V kvantové optice se tato veličina nazývá populace či obsazení jednotlivých hladin. Pravděpodobnost, že dojde ke spontánní emisi, je úměrná populaci horní energetické hladiny  $N_2$ , proto pro rychlost úbytku obsazení horní hladiny můžeme psát

$$\frac{dN_2}{dt} = -A N_2. \quad (15.2)$$

Kladná konstanta  $A$  je *Einsteinův koeficient spontánní emise*. Pokud by atomy přecházely do základního stavu jen spontánní emisí, ubývala by populace stavu 2 exponenciálně s časovou konstantou

$$\tau_r = \frac{1}{A}, \quad (15.3)$$

kteřá se nazývá *zářivou dobou života* stavu 2. Řešením rovnice (15.2) je exponenciální doznívání obsazení stavu

$$N_2(t) = N_2(0) \exp[-At] = N_2(0) \exp\left[-\frac{t}{\tau_r}\right]. \quad (15.4)$$

Pokud přecházejí atomy do základního stavu i nezářivě, můžeme pro úbytek populace horní hladiny psát rovnici

$$\frac{dN_2}{dt} = -A N_2 - A_{nr} N_2, \quad (15.5)$$

jejíž řešením je opět exponenciální doznívání

$$N_2(t) = N_2(0) \exp[-(A + A_{nr})t] = N_2(0) \exp\left[-\frac{t}{\tau_2}\right], \quad (15.6)$$

kde  $\tau_2$  se nazývá *dobou života* hladiny 2, která je spojena s její *nezářivou dobou života*

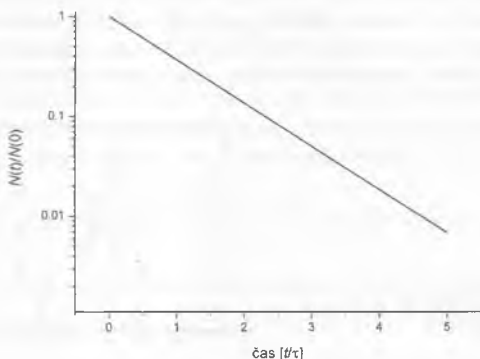
$$\tau_{nr} = \frac{1}{A_{nr}} \quad (15.7)$$

a s její zářivou dobou výrazem

$$\frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{\tau_r} + \frac{1}{\tau_{nr}}, \quad (15.8)$$



jak plyne ze vztahu (15.6). Časová závislost populace horní hladiny  $N_2$  odpovídající rov. (15.6) je znázorněna na obr. 15.1.



Obr. 15.1 Pokles populace hladiny  $N_2$  v čase podle rov. (15.6); v semilogaritmickém měřítku (osa  $y$  je logaritmická) je závislost lineární s velikostí směrnice rovné  $1/\tau_2$

Pro stimulovanou emisi je pravděpodobnost přechodu úměrná jak populaci horní hladiny, tak intenzitě dopadajícího světla. Pro rychlost úbytku hladiny 2 stimulovanou emisí tedy lze psát

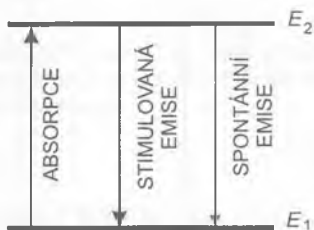
$$\frac{dN_2}{dt} = -B_{21} \rho(\nu) N_2, \quad (15.9)$$

kde  $\rho(\nu)$  je spektrální hustota energie elektromagnetického záření a  $B_{21}$  se nazývá *Einsteinův koeficient stimulované emise*. Podobně pro absorpci platí

$$\frac{dN_1}{dt} = -B_{12} \rho(\nu) N_1. \quad (15.10)$$

Zde se  $B_{12}$  nazývá *Einsteinův koeficient absorpce*. Hodnoty koeficientů absorpce a emise závisí na vlastnostech konkrétního přechodu. Pro nedegenerované hladiny platí  $B_{21} = B_{12}$ , jak ukázal již Einstein. Důležitou vlastností stimulované emise je, že generované světlo je koherentní se světlem, které ji vyvolává. Je to způsobeno tím, že fáze vyzařování jednotlivých atomů je řízena procházejícím signálem, atomy nevyzařují s náhodnými fázemi, ale synchronně. Zmíněné přechody mezi hladinami atomu jsou znázorněny na obr. 15.2.

Prochází-li prostředím, které je tvořeno uvažovanými atomy, vlna ve směru osy  $z$ , mění se její fotonový tok díky absorpci a stimulované emisi. Přechod nahoru znamená ztrátu fotonu, přechod dolů získá jednoho fotonu. Spontánní emise je v laseru zpravidla podstatně slabší a proto ji zanedbáme. V reálných látkách není světlo přísně monochromatické, ale má určitou spektrální šířku, energetické hladiny, mezi nimiž dochází k přechodu,



Obr. 15.2 Přechody mezi hladinami atomu

také nejsou ostré, přechod má tedy také jistou spektrální šířku. Pro jednoduchost zde budeme předpokládat, že spektrum světelné vlny je obdélníkové s frekvenční šířkou  $\Delta\nu$ , která, jak tomu zpravidla u laserů bývá, je podstatně menší než spektrální šířka přechodu. Předpokládejme, že čelo rovinné vlny urazí vzdálenost  $dz$ . K její intenzitě (výkonovému toku jednotkovou plochou  $A$ ) přispějí přechody atomů v elementu objemu  $dV = Adz$ . Přírůstek intenzity světla je tedy roven rozdílu počtu přechodů dolů a přechodů nahoru za jednotku času v objemu  $dV$  vynásobenému energií fotonu. V rovinné vlně je spektrální hustota energie  $\rho$  a intenzita  $I$  světelného signálu (malé) spektrální šířky  $\Delta\nu$  spojena jednoduchým vztahem /srov. (1.74)/

$$I = c \rho(\nu) \Delta\nu. \quad (15.11)$$

Můžeme proto psát

$$dI = B_{21} (N_2 - N_1) \frac{I}{c \Delta\nu} h\nu dz. \quad (15.12)$$

Pro prostorově nezávislé populace je možné rovnici integrovat

$$I(z) = I(0) \exp \left[ B_{21} (N_2 - N_1) \frac{h\nu}{c \Delta\nu} z \right]. \quad (15.13)$$

Pokud je látka ve stavu termodynamické rovnováhy, je poměr populací hladin 1 a 2 dán Boltzmannovým zákonem

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left[-\frac{h\nu}{k_B T}\right], \quad (15.14)$$

kde  $k_B$  je Boltzmannova konstanta a  $T$  teplota. Soustředíme-li se na přechody z viditelné spektrální oblasti a na „rozumně“ nízké teploty, je populace hladiny 2 zanedbatelná.<sup>2</sup> Pak ovšem dostáváme z (15.13)

$$I(z) = I(0) \exp\left[-B_{21} N_1 \frac{h\nu}{c \Delta\nu} z\right] = I(0) \exp[-a_0 z]. \quad (15.15)$$

Intenzita světla je tedy při šíření exponenciálně tlumena, dostáváme obvyklý absorpční zákon /srov. rov. (1.95) a obr. 14.4/,  $a_0$  je absorpční koeficient definovaný poslední rovností v (15.15).

Pokud látkou prochází světlo velké intenzity, může docházet k nárůstu populace hladiny  $N_2$ , na úkor populace  $N_1$  díky stimulovaným přechodům a populaci hladiny 2 již ve výrazu pro absorpční koeficient nelze zanedbat. Protože populace závisí na intenzitě světla, je také absorpční koeficient závislý na intenzitě. Tuto závislost můžeme vyjádřit explicitně. Předpokládejme, že světlo (s frekvencí odpovídající frekvenci přechodu) prochází látkou tvořenou dvouhladinovými atomy. Populace jednotlivých hladin jsou  $N_1$  a  $N_2$ , celková koncentrace atomů je

$$N_{\text{celk}} = N_1 + N_2. \quad (15.16)$$

Pomocí vztahů (15.2, 15.9, 15.10) můžeme pro časovou změnu populace hladiny 1, tj. přírůstek spontánními přechody /rov. (15.2)/ a stimulovanou emisí /rov. (15.9)/, úbytek absorpcí /rov. (15.10)/, psát

$$\frac{dN_1}{dt} = B_{21} \rho(\nu) (N_2 - N_1) + \frac{N_2}{\tau_2}. \quad (15.17)$$

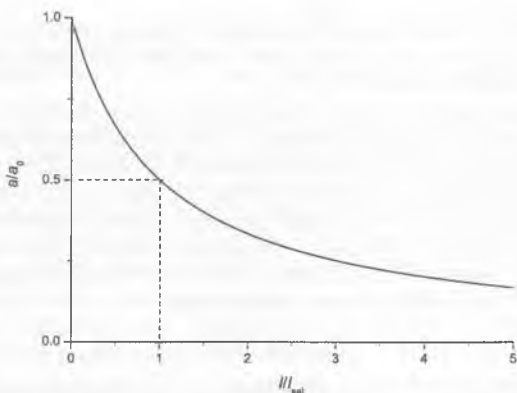
Má-li světlo v čase konstantní intenzitu, můžeme z (15.17) určit stacionární hodnotu rozdílu populací  $(N_2 - N_1)$ , který ovlivňuje velikost absorpčního koeficientu. Ve stacionárním případě je časová derivace na levé straně (15.17) rovna nule. Použijeme-li (15.16), můžeme psát explicitně

$$N_2 - N_1 = \frac{-N_{\text{celk}}}{1 + 2 B_{21} \tau_2 \rho}. \quad (15.18)$$

Pro nulovou intenzitu světla je  $\rho=0$  a, jak jsme již uvedli, (téměř) všechny atomy jsou ve stavu 1. Odpovídající absorpční koeficient je  $a_0$ . Podle (15.13), (15.18) a (15.11) máme

$$a(I) = \frac{a_0}{1 + \frac{I}{I_{sat}}} \quad (15.19)$$

kde jsme zavedli saturační intenzitu světla  $I_{sat}$ , která odpovídá zmenšení absorpčního koeficientu na polovinu. Závislost absorpčního koeficientu na intenzitě světla je znázorněna na obr. 15.3.



Obr. 15.3 Závislost absorpčního koeficientu na intenzitě světla

S rostoucí intenzitou světla absorpční koeficient klesá, mluví se o *saturaci absorpce*. Pro malé hodnoty intenzity světla ( $I \ll I_{sat}$ ) můžeme (15.19) rozvinout. První člen pak dává

$$a(I) = a_0 - \frac{a_0}{I_{sat}} I. \quad (15.20)$$

Absorpční koeficient je tedy v tomto případě lineární funkcí intenzity, stejně jako v případě nerezonančních nelinearit třetího řádu, o kterých budeme hovořit v 16. kapitole. Koeficient  $a_2$  definovaný ve vztahu (16.40) je roven

$$a_2 = -\frac{a_0}{I_{\text{sat}}} \quad (15.21)$$

Nelineární chování absorpce v případě rezonanční interakce světla s látkou lze tedy považovat za nelinearitu třetího řádu.

## 15.2 LASER

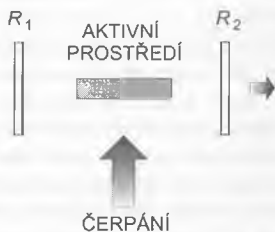
Světlo nemusí být ale vždy při průchodu látkou zeslabováno. Jak je vidět z rov. (15.13), pokud jsou populace obou hladin stejné,  $N_2 = N_1$ , prochází světlo zřejmě beze změny intenzity,  $I(z) = I(0)$ . Pokud je dokonce  $N_2 > N_1$ , intenzita světla exponenciálně narůstá, *světlo je zesilováno*. K popisu takové situace se zavádí *koefficient zesílení*  $g$

$$g = B_{21} (N_2 - N_1) \frac{h\nu}{c \Delta\nu} \quad (15.22)$$

a pro závislost intenzity pak lze přepsat (15.13)

$$I(z) = I(0) \exp[gz]. \quad (15.23)$$

Pokud je populace vyšší hladiny větší než populace hladiny nižší, mluví se o *inverzi obsazení* hladin. K dosažení inverze je nutné vyvést látku ze stavu termodynamické rovnováhy dodáváním energie, *čerpáním*. Látku je možné čerpat opticky (svítí se na ní jiným laserem nebo výbojkou), elektricky (například přechody nahoru mohou být vyvolány srážkami atomů s elektrony elektrického výboje v plynu nebo průchodem elektrického proudu v polovodiči), chemicky (dochází k chemické reakci, při níž je uvolňována energie) apod.



Obr. 15.4 Schéma laseru

Světlo tedy může být při průchodu látkou zesilováno díky stimulované emisi. To je základní mechanismus činnosti laseru. LASER, což znamená *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation* neboli „zesílení světla stimulovanou emisí záření“, je dnes ovšem chápán jako zdroj, generátor světla. K dosažení generace světla se používá *zpětná vazba*, která je zajištěna *optickým rezonátorem*. V nejjednodušším případě je optický rezonátor tvořen dvojicí planoparalelních rovinných zrcadel. Typický laser (viz obr. 15.4) sestává z *aktivního prostředí*, tj. z látky, v níž je dosahována inverze pomocí čerpání, a z optického rezonátoru. Po zapnutí laseru začne působit zdroj čerpání, například výbojka osvětluje aktivní prostředí, ve kterém vznikne inverze. Jakmile je populována vyšší hladina, vyzařuje aktivní prostředí fotony spontánní emisí. Spontánně emitované fotony při šíření prostředím mohou vyvolávat stimulované přechody, dochází k („lavinovému“) zesilování světla. Světlo, které se šíří mimo zrcadla rezonátoru, odchází, naproti tomu světlo, šířící se ve směru osy optického rezonátoru se od zrcadel odráží a může mezi zrcadly obíhat. Při svých obězích je v aktivním prostředí zesilováno. Jedno ze zrcadel bývá polopropustné, pak část světla tímto zrcadlem vychází ven z rezonátoru. To způsobuje tlumení světla, ztráty. Aby laser generoval světlo, musí zesílení světla za jeden oběh převýšit ztráty. Pokud bude mít aktivní prostředí délku  $l$  a pokud bude odrazivost zrcadel rezonátoru rovna  $R_1$  a  $R_2$ , je intenzita světla  $I$  spojená s intenzitou světla po jednom oběhu v rezonátoru  $I'$

$$I' = I R_1 R_2 \exp[2 g l]. \quad (15.24)$$

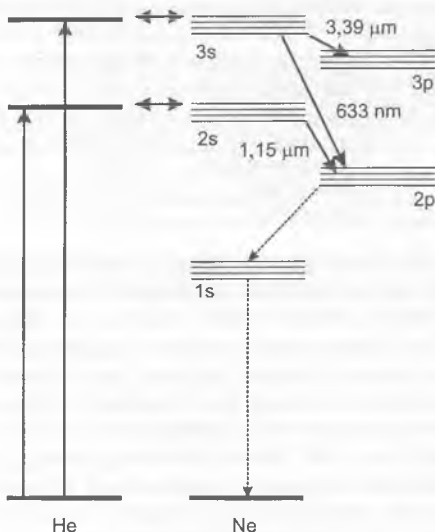
Nemá-li být světlo zeslabováno, musí ovšem být  $I' \geq I$ , tedy

$$R_1 R_2 \exp[2 g l] \geq 1. \quad (15.25)$$

Pokud nastane rovnost, mluví se o *prahové podmínce laseru*. Dostatečně velký koeficient zesílení je zajištěn dostatečně velkou hodnotou rozdílu populací hladin  $(N_2 - N_1)$ . Laser může generovat spojité světlo, mluví se o *kontinuálních* laserech, nebo světelné pulzy, pak se jedná o *pulzní* laser. První laser byl sestaven v roce 1960 v USA (T. H. Maiman, jednalo se o rubínový laser). Lasery se často dělí na plynové, kapalinové nebo pevnolátkové podle typu aktivního prostředí.

K neznámějším laserům patří bezesporu helium-neonový laser, což je plynový laser, kde je aktivní prostředí tvořeno směsí He a Ne. Ke stimulované emisi dochází mezi atomárními hladinami Ne. Čerpání je zajištěno elektrickým výbojem v plynové směsi.<sup>3</sup> Prolétávající elektrony excitují

atomy. Při srážce excitovaných atomů He, kterých je ve směsi více, s atomy Ne dochází k přenosu excitační energie na atom Ne. Schéma energetických hladin v He-Ne laseru je na obr. 15.5. He-Ne laser může generovat světlo na různých vlnových délkách, známá je červená čára na vlnové délce 632,8 nm, která se běžně využívá v laserových zaměřovačích nebo ke čtení čárových kódů zboží v supermarketech. Aktivním prostředím laseru mohou být ionty vhodných prvků v dielektrických krystalech, například ionty chrómu  $\text{Cr}^{3+}$  v  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , což je rubín (aktivní prostředí prvního laseru), nebo ionty titanu  $\text{Ti}^{3+}$  v  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , což je aktivní prostředí dnes moderního titan-safírového laseru.



**Obr. 15.5** Schéma energetických hladin He-Ne laseru. Čárkovaně jsou znázorněny nezářivé přechody. Nejznámější vlnová délka 632,8 nm je spojena s přechodem  $3s_2 \rightarrow 2p_4$ . Na obrázku jsou znázorněny jen tři nejdůležitější laserové přechody

Světlo laseru se odlišuje od vlastností světla jiných zdrojů. Díky vlastnostem rezonátoru vychází světlo ve formě laserového svazku, který se dá dobře fokusovat. Například při fokusaci laserového svazku na Zemi vhodným teleskopem je možné vytvořit na Měsíci velikosti stopy  $\approx 10^1$  m. Vyzařované světlo některých plynových laserů se velice dobře blíží ideální har-

Tabulka 15.1 Vybrané důležité lasery<sup>4</sup> a jejich vlnová délka

Laser podle aktivního prostředí	Typ laseru	Vlnová délka [nm]
ArF	excimerový laser	193
KrF	excimerový laser	248
XeCl	excimerový laser	308
HeCd	plynový laser (páry Cd)	325, 442
N <sub>2</sub>	plynový laser	337
Barvivoé lasery	barvivoý laser	330–740
GaN	polovodičový laser	415
Cu	páry Cu	510
HeNe	plynový laser	544, 594, 612, 633, 1152, 3391
Ti:Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> (titan-safirový laser)	pevnolátkový laser	675–1100
GaAs/GaAlAs	polovodičový laser	750–910
GaNP	polovodičový laser	670
InGaAs	polovodičový laser	980
Ar-iontoý	plyn (ionty Ar)	351, 488, 515
Nd:YAG	pevnolátkový laser	1064
CO <sub>2</sub>	plynový laser	9600–10600
CO	plynový laser	5100–6500

monické vlně, má vysoký stupeň koherence. Délka koherence pro plynové lasery může být stovky kilometrů. Spektrálně je generovaná čára velmi úzká, ve speciálních stabilizovaných laserech je její relativní šířka  $\Delta\nu/\nu \approx 10^{-13}$ . Lasery mohou pracovat ovšem i v pulzním režimu, kdy z nich vycházejí krátké světelné záblesky. Nejkratší laserové pulzy ve viditelné oblasti, které se podařilo generovat, trvají méně než 3 fs ( $3 \times 10^{-15}$  s), což se blíží jednomu kmitu světelné vlny. Spektrum generovaného světla je ovšem velmi široké, pulzy jsou „bílé“ (pro nejkratší pulzy  $\Delta\nu \approx 2\nu$ , kde  $\nu$  je střední frekvence, jak plyne z Fourierovy transformace). Ultrakrátké pulzy jsou i při poměrně nízké energii spojeny s vysokou intenzitou světla, což je zřejmé, uvážíme-li, že výkon v pulzu dostaneme jako podíl energie v pulzu k jeho časové délce. Bylo dosaženo pulzních světelných výkonů větších než  $10^{18}$  W.

Laserový rezonátor je tvořený zpravidla kulovými nebo rovinnými zrcadly. Světlo obíhá mezi zrcadly a jeho část vychází výstupním zrcadlem. Jednou ze základních vlastností laserového rezonátoru je jeho *stabilita*, kterou lze dobře vysvětlit a analyzovat v rámci geometrické optiky, jak jsme to udělali v kapitole 10 /viz obr. 10.28 a 10.29 a nerovnost (10.222)/. Světlo z laseru vystupuje ve formě příčně omezeného svazku, jehož vlastnosti závisí na parametrech rezonátoru.



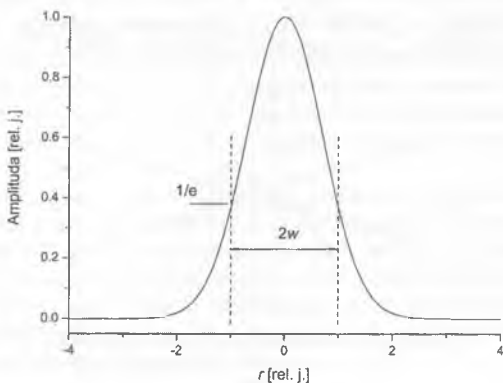
Vzhledem k příčnému omezení lze očekávat, že difrakce světla povede k tomu, že svazek bude divergentní. Velmi často odpovídá svazek světla z laseru *gaussovskému svazku*.<sup>5</sup> Gaussovský svazek, který se šíří ve směru osy  $z$ , lze popsat amplitudou elektrického pole

$$\vec{E}(r, t) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp\left[-\frac{r^2}{w(z)}\right] \exp[-i(\omega t - kz)] \exp[-i\varphi(z)] \exp\left[\frac{ikr^2}{2R(z)}\right]. \quad (15.26)$$

Jednotliví činitelé na pravé straně jsou po řadě: amplituda pole v místě  $z = 0$  vynásobena konstantou a členem, který vyjadřuje zmenšování amplitudy pole díky divergenci svazku, exponenciála s reálným argumentem vyjadřuje gaussovský pokles velikosti amplitudy pole ve svazku s rostoucí vzdáleností  $r$  od osy svazku, další fázové členy představují náběh fáze při šíření odpovídající rovinné vlně, dodatečný náběh fáze na ose (rozdíl oproti rovinné vlně) a zakřivení vlnoplochy odpovídající kulové vlně /o poloměru  $R(z)$ /. Ve vztahu (15.26) je zaveden *konfokální parametr*

$$b = \frac{1}{2} k w_0^2. \quad (15.27)$$

Zde  $k$  je velikost vlnového vektoru.  $w(z)$  je *gaussovská šířka* svazku, která, jak je patrné z exponenciálního faktoru modulujícího velikost amplitudy, má



**Obr. 15.6** Gaussovské rozložení amplitudy elektrického pole a intenzity světla v gaussovském svazku

význam vzdálenosti od osy svazku, pro níž poklesne amplituda pole na  $1/e$  hodnoty na ose svazku (viz obr. 15.6). V rovině  $z=0$  je šířka svazku  $w(0)=w_0$ . Šířka svazku roste se  $z$  podle vztahu

$$w^2(z) = w_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{b^2}\right). \quad (15.28)$$

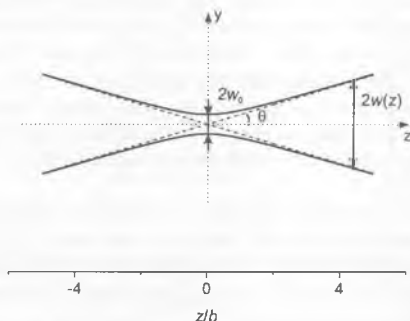
Zřejmě je nejmenší pro  $z = 0$ . Zde se mluví o místě nejužšího svazku nebo o „pasu“ svazku. Fáze vlny na ose  $z$  je složena z fázového členu rovinné vlny a dodatečného příspěvku

$$\varphi = \arctg\left(\frac{z}{b}\right). \quad (15.29)$$

Poloměr vlnoploch je také funkcí  $z$

$$R(z) = \frac{b^2 + z^2}{z}. \quad (15.30)$$

Gaussovský svazek se tedy rozbíhá z místa svého pasu, může se šířit oběma směry ( $k$  i  $b$  mohou být kladné i záporné). V nejužším místě ( $z = 0$ ) je vlnoplocha rovinná (skutečně  $R(z) \rightarrow \infty$  pro  $z \rightarrow 0$ ), ale rozložení amplitudy pole je stále gaussovské. Nejde tedy o rovinnou vlnu, kterou se často zabýváme. Tvar gaussovského svazku lze chápat jako výsledek difrakce gaussovského rozložení pole v rovině  $z = 0$ . Nebudeme se zde zabývat podrobnostmi. Důležitá je rozbíhavost, tj. divergence svazku, kterou lze charakterizovat úhlem („poloviční úhel“ podle obr. 15.7)



**Obr. 15.7** Šíření gaussovského svazku; řez svazku v rovině  $yz$  je znázorněn křivkami  $y = \pm w(z)$

$$\theta \approx \text{tg}(\theta) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \frac{w(z)}{z} \right] = \frac{w_0}{b}. \quad (15.31)$$

Podle (15.27) je tedy

$$\theta w_0 = \frac{2}{k} = \frac{\lambda}{\pi}. \quad (15.32)$$

Je zřejmé, že svazky, které jsou užší ve svém pasu, mají větší divergenci a naopak. To je obecný závěr pro difrakci světla, zajímavé je srovnání (15.32) se vztahem (8.11).

Vztah (15.32) můžeme také použít k odhadu, jak lze laserový svazek fokusovat (tenkou) spojnou čočkou s velkou ohniskovou vzdáleností  $f'$ , na kterou dopadá gaussovský svazek s malou divergencí. Pas fokusovaného svazku lze očekávat v tomto případě přibližně ve vzdálenosti  $f'$  za čočkou. Je-li fokusovaný svazek charakterizován poloměrem  $w_{0f}$  a úhlem  $\theta_f$ , je podle (15.32)

$$w_{0f} = \frac{\lambda}{\pi \theta_f} \approx \frac{2 f' \lambda}{\pi D} = \frac{2 \lambda}{\pi} A. \quad (15.33)$$

Za úhel  $\theta_f$  jsme dosadili

$$\theta_f \approx \frac{D}{2 f'}, \quad (15.34)$$

což plyne z geometrie, předpokládáme-li, že šířka vstupního svazku na čočce je dána jejím poloměrem (svazek zaplní čočku, aby byl co nejvíc fokusován). V poslední rovnosti jsme použili definici clonového čísla  $A$  podle vztahu (10.144). Vztah (15.33) pro fokusaci laserového svazku se v praxi často užívá. Gaussovský svazek je nejjednodušším příkladem laserového svazku.

Rezonátor laseru určuje i spektrální vlastnosti generovaného světla. V rezonátoru laseru mohou oscilovat jen takové stavy elektromagnetického záření, které vyhovují okrajovým podmínkám. Jeden z nejjednodušších rezonátorů je tvořen rovinnými zrcadly, tedy Fabry-Perotovým interferometrem, o němž jsme mluvili v souvislosti s interferencí světla. Pro vysoké hodnoty odrazivosti zrcadel je Airyho funkce úzká, musí být splněna rezonanční podmínka pro vlnovou délku světla

$$n \frac{\lambda_n}{2} = L, \quad (15.35)$$

kde  $n$  je celé číslo,  $L$  je délka rezonátoru. To znamená, že uvnitř rezonátoru může být pouze světlo určitých vlnových délek,  $\lambda_n$ , které jsou určeny podmínkou, že délka rezonátoru je rovna celistvému násobku polovln. Číslo  $n$  čísluje přípustné stavy světla, stojatých vln, které se nazývají podélné módy rezonátoru. Frekvenční vzdálenost spektrálních čar dvou po sobě následujících módů je rovna

$$\Delta\nu = \nu_{n+1} - \nu_n = \frac{c}{2L}, \quad (15.36)$$

jak snadno zjistíme přímým užitím (15.35) a vztahu mezi frekvencí a vlnovou délkou. Například pro rezonátor délky 1 m dostáváme  $\Delta\nu = 150$  MHz. Spektrální šířka přechodu aktivního prostředí většiny laserů je podstatně větší než mezimódová vzdálenost a v laseru může oscilovat velké množství módů, například tisíce. Je ovšem možné také zajistit, aby osciloval pouze jediný mód. Rezonance mají jistou konečnou šířku  $\delta\nu$ , kterou lze určit ze vztahu (11.22) a která souvisí s tím, že díky konečné propustnosti zrcadel vychází světlo částečně ven z rezonátoru; oscilace jsou tlumené. Doba tlumení stojatého vlnění („střední doba života fotonu v rezonátoru“) je

$$t_c \approx \frac{1}{\delta\nu}. \quad (15.37)$$

V laseru, který svítí kontinuálně, je ovšem tlumení oscilací kompenzováno zesílením světla v aktivním prostředí laseru. Například v rezonátoru délky 1 m, jehož zrcadla mají propustnost jednotek procent, vychází  $t_c \approx 10^2$  ns. Je zřejmé, že spektrum světla generovaného laserem je dáno vlastnostmi rezonátoru. V laserech, ve kterých osciluje pouze jeden mód, jenž je spektrálně velmi úzký, se dosahuje vysoké koherence. Naproti tomu, v laserech s mnoha módy, jejichž fáze a amplitudy nejsou uspořádané, je také světlo „neuspořádané“. Pokud se ovšem zajistí, aby byly amplitudy jednotlivých módů v čase konstantní a byly konstantní i mezimódové fázové rozdíly (takový režim se nazývá režim vázání módů, mode-locking), je výstup z laseru opět velmi uspořádan, dochází ke generaci ultrakrátkých optických pulzů. V současné době lze tímto způsobem generovat ve viditelné oblasti pulzy délky několika femtosekund ( $10^{-15}$  s), přitom<sup>6</sup> je svázáno  $10^7$  módů.

<sup>1</sup> Uvážení pouze dvou energetických hladin (dvojhladinový model) látky je nejjednodušší aproximací pro popis laseru. Vliv ostatních hladin je zanedbatelný, pokud přechody s nimi spojené nejsou v rezonanci s frekvencí světla.

<sup>2</sup> Například pro vlnovou délku  $\lambda = 500$  nm a pokojovou teplotu  $T = 300$  K vychází  $\frac{h\nu}{k_B T} \approx 95$ , takže v tomto případě je  $N_2 \approx 10^{-12} \approx 0$  jistě velmi dobrá aproximace.

<sup>3</sup> Aktivní prostředí He-Ne laseru tvoří plynná směs obou plynů (zpravidla He : Ne = 5 : 1) s nízkým tlakem (typický tlak 400 Pa) v trubici, která má dvě elektrody, mezi nimiž dochází k elektrickému výboji. Srážky elektronů s atomy vedou k jejich excitaci do vyšších energetických stavů. Dochází k účinnému přenosu excitační energie z atomů He na atomy Ne, protože excitovaný stav atomu He je blízko jedné z vyšších hladin atomu Ne, z níž dochází k laserovému přechodu. Laser pracuje většinou kontinuálně, s výkonem zpravidla desetin až stovek miliwattů. Spektrální šířka generovaného světla bývá řádově GHz.

<sup>4</sup> Tabulka zahrnuje lasery, které se dnes používají. Ve druhém sloupci tabulky je uveden typ laseru podle tradiční klasifikace laserů. Podle ní se *pevnolátkovým laserem* myslí laser, jehož aktivním prostředím je dielektrický krystal dotovaný příměsovými ionty, aktivním prostředím *iontového laseru* je ionizovaný plyn. *Excimerové lasery*, používané v ultrafialové spektrální oblasti, jejichž název pochází od anglického *excited dimer*, tedy excitovaný dimer, obsahují plyn, jehož atomy vytvářejí molekuly pouze v excitovaném stavu. *Barvivové lasery* pracují s roztoky organických barviv, mohou generovat ve velmi širokém spektrálním intervalu, uvedený rozsah odpovídá nejčastěji používané oblasti. V literatuře je popsána řada optických přechodů, které byly úspěšně využity v laserech, jejich počet je řádově deset tisíc.

<sup>5</sup> V některých případech může být prostorové rozložení intenzity světla v laserovém svazku složitější. Často se (u rezonátorů s pravoúhlým tvarem zrcadel) vyskytují tzv. Gauss-Hermiteovy svazky, jejichž rozložení amplitudy je popsáno Gaussovou funkcí vynášenou Hermiteovými polynomy.

<sup>6</sup> Pro časovou a spektrální šířku pulzu platí přibližný vztah  $\delta\nu\delta t \approx 1$ , jak plyne z Fourierovy transformace /srov. též rov. (6.1)/. Při generaci ultrakrátkých pulzů v laseru je celková spektrální šířka světla rovna  $\delta\nu = N\Delta\nu$ , kde  $N$  je počet svázaných modů a  $\Delta\nu$  mezimodová spektrální vzdálenost daná rov. (15.36). Časová šířka generovaného pulzu je tedy rovna  $\delta t = \frac{1}{N\Delta\nu} = \frac{T_R}{N}$ , kde  $T_R = \frac{2L}{c}$  je doba oběhu světla v laserovém rezonátoru. Pro běžný rezonátor  $L = 1$  m,  $T_R = 6,7$  ns.

# 16 NELINEÁRNÍ OPTIKA

Zatím jsme stále uvažovali lineární optické jevy, tedy lineární optiku, kdy všechny veličiny charakterizující látku jsou nezávislé na intenzitě světla. Pak je velikost polarizace látek přímo úměrná první mocnině amplitudy elektrické intenzity, Maxwellovy rovnice jsou lineární a platí princip superpozice. Ve skutečnosti je lineární odezva látek aproximací, která platí pouze pro malé světelné intenzity. Pro silná světelná pole je susceptibilita (resp. relativní permitivita) závislá na velikosti elektrické intenzity světla. Pak se hovoří o *nelineární optice*. Zřejmě již neplatí princip superpozice. To například znamená, že se křižující světelné svazky mohou ovlivňovat. Oblast nelineární optiky se rychle rozvíjí se stále širšími aplikacemi laserů, které mohou být zdroji opravdu intenzivních optických svazků. Zahrnuje celou řadu jevů, které dnes nacházejí přímé využití. Zde se zaměříme pouze na některé základní úvahy.

Polarizace látky může obecně záviset složitě na elektrické intenzitě

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}). \quad (16.1)$$

Uvažujeme-li nejprve situaci, kdy jsou v prostředí vektory polarizace a elektrického pole lineárně polarizované ve stejném směru, užití skalarů a můžeme psát

$$P(E) = P^L + P^{NL}, \quad (16.2)$$

kde lineární část polarizace je definována jako obvykle

$$P^L = \epsilon_0 \chi^L E. \quad (16.3)$$

Zde  $\chi^L = \chi$  je susceptibilita, jak jsme ji používali dříve. Závislost polarizace na elektrickém poli může být obecně složitá. Pro případ, kdy frekvence

světla není v rezonanci s energiemi přechodů v látce (spektrální oblast průhlednosti), nedochází k reálným excitacím do vyšších energetických stavů a látka má okamžitou odezvu. Pak je možné rozvinout obecnou závislost nelineární části polarizace do mocninné řady

$$P^{NL} = \varepsilon_0 \chi^{(2)} E^2 + \varepsilon_0 \chi^{(3)} E^3 + \dots = P^{(2)} + P^{(3)} + \dots \quad (16.4)$$

Zde se první člen nazývá nelineární polarizací druhého řádu ( $\chi^{(2)}$  je susceptibilita 2. řádu), další člen je třetího řádu atd.

## 16.1 NELINEÁRNÍ OPTICKÉ JEVY DRUHÉHO ŘÁDU

Pro případ anizotropních materiálů je nezbytné uvažovat vektorové vyjádření, takže například *i*-tou komponentu vektoru polarizace druhého řádu je možné vyjádřit

$$P_i^{(2)} = \varepsilon_0 \sum_{j,k=1,2,3} \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k. \quad (16.5)$$

Susceptibilita druhého řádu je teď vyjádřena tenzorem 3. řádu, který má obecně 27 komponent. Podle symetrie materiálu mohou být ovšem některé složky nulové a některé mohou mít stejnou velikost. Každá složka vektoru polarizace má devět různých příspěvků. Například *x*-ová složka vektoru polarizace může vzniknout díky elektrické intenzitě polarizované ve směru osy *x* ( $\chi_{xxx}$ ) nebo intenzit polarizovaných ve směru osy *y* a ve směru osy *z* ( $\chi_{xyz}$ ). Komponenty elektrické intenzity přitom mohou být spojeny s dvěma různými světelnými svazky.

Polarizace druhého řádu je rovna nule v látkách, které mají střed symetrie, jak plyne přímo ze vztahu (16.5). V látce se středem symetrie musí být všechny její vlastnosti neměnné při inverzi souřadných os ( $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow -y$ ,  $z \rightarrow -z$ ), tedy i tenzor druhého řádu musí mít stejnou velikost. Vektory ovšem při inverzi mění svá znaménka. Musí proto platit /srov. rov. (16.5)/

$$-P_i^{(2)} = \varepsilon_0 \sum_{j,k=1,2,3} \chi_{ijk}^{(2)} (-E_j)(-E_k) = \varepsilon_0 \sum_{j,k=1,2,3} \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k. \quad (16.6)$$

Pravé strany vztahů (16.5) a (16.6) jsou si rovny, rovnost levých stran znamená, že pro každou komponentu polarizace platí

$$P_i^{(2)} = -P_i^{(2)}, \quad (16.7)$$

což je možné jen pro

$$P_i^{(2)} = 0. \quad (16.8)$$

Všechny komponenty susceptibility druhého řádu musí tedy být nulové. Znamená to, že nelineární jevy spojené s tímto členem, tj. *nelineární jevy druhého řádu*, nenastávají v látkách se středem symetrie.

Jedním z nelineárně optických jevů spojených se susceptibilitou 2. řádu je *zdvojování frekvence světla (generace druhé harmonické)*. Dopadá-li na látku, která nemá střed symetrie, což je zpravidla vhodný krystal, světelná vlna frekvence  $\omega$ , vzniká světlo na frekvenci  $2\omega$ . Vstupní vlna vyvolá v materiálu polarizaci oscilující na dvojnásobné frekvenci, která je zdrojem vlny s frekvencí  $2\omega$ . Můžeme to ukázat jednoduše pomocí (16.4). Polarizace v daném bodě je vyvolána světelnou vlnou, jejíž časovou závislost můžeme popsat například

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t) = \frac{1}{2} E_0 [\exp(-i\omega t) + \exp(i\omega t)]. \quad (16.9)$$

Polarizace druhého řádu (zanedbáme anizotropii a předpokládáme například, že vlny jsou shodně lineárně polarizovány) je rovna

$$P^{(2)} = \varepsilon_0 \chi^{(2)} E^2 = \varepsilon_0 \chi^{(2)} \frac{1}{4} E_0^2 [\exp(-i\omega t) + \exp(i\omega t)]^2, \quad (16.10)$$

tedy

$$P^{(2)} = \varepsilon_0 \chi^{(2)} \frac{1}{4} E_0^2 [\exp(-i2\omega t) + \exp(i2\omega t) + 2], \quad (16.11)$$

$$P^{(2)} = \varepsilon_0 \chi^{(2)} \frac{1}{2} E_0^2 \cos(2\omega t) + \varepsilon_0 \chi^{(2)} \frac{1}{2} E_0^2. \quad (16.12)$$

To tedy znamená, že vzniká v materiálu polarizace druhého řádu, která má dvě části: složku oscilující na frekvenci  $2\omega$  (vyzařuje pole na této frekvenci), která vede ke vzniku *druhé harmonické*, a stejnosměrnou složku, která odpovídá statické polarizaci v látce. Její vznik se nazývá *optickým usměrněním*. Světelná vlna na optické frekvenci vyvolá statické elektrické pole. Aby se na výstupu z látky objevila skutečně silná vlna druhé harmonické, je nutné, aby dipóly odpovídající polarizaci na frekvenci  $2\omega$  v jed-

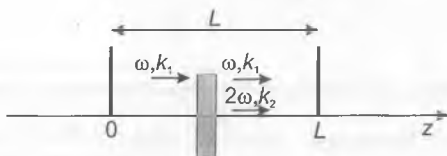


notlivých místech látky oscilovaly s vhodnou fází tak, aby svými příspěvky přispívaly konstruktivně k vystupující vlně. Předpokládejme, že se světlo šíří ve směru osy  $z$  nelineárním krystalem délky  $L$ . Dopadající vlna má frekvenci  $\omega$  a velikost vlnového vektoru  $k_1$ , vlna druhé harmonické má velikost vlnového vektoru  $k_2$ . V daném místě  $z$  je dopadající vlna

$$E(z,t) = \frac{1}{2} E_0 \{ \exp[-i(\omega t - k_1 z)] + \exp[i(\omega t - k_1 z)] \}. \quad (16.13)$$

Příspěvek k vlně druhé harmonické vyvolaný polarizací v daném místě  $z$  je

$$\Delta E^{(2)} \propto P^{(2)} \propto E_0^2 \exp[-i2(\omega t - k_1 z)] + c.c. \quad (16.14)$$



Obr. 16.1 K odvození podmínky sfázování

Vlna druhé harmonické daná tímto příspěvkem bude mít na výstupu z krystalu fázi danou šířením v krystalu (od místa  $z$  do místa  $L$ , viz obr. 16.1) s vlnovým vektorem  $k_2$ , tedy

$$\Delta E^{(2)}(L) \propto E_0^2 \exp[-i2(\omega t - k_1 z)] \exp[i k_2 (L - z)] + c.c. \quad (16.15)$$

Celkovou amplitudu vlny druhé harmonické v místě  $L$  dostaneme sečtením všech příspěvků, tedy integrací

$$E^{(2)}(L) \propto E_0^2 \exp(-i2\omega t) \exp(i k_2 L) \int_0^L \exp[i(2k_1 - k_2)z] dz + c.c. \quad (16.16)$$

Vidíme, že důležitou roli v prostorové závislosti integrandu hraje veličina

$$\Delta k = 2k_1 - k_2. \quad (16.17)$$

Ovšem integrál můžeme vypočítat

$$\int_0^L \exp(i \Delta k z) dz = \frac{1}{i \Delta k} (\exp(i \Delta k L) - 1) = 2 \exp(i \frac{\Delta k L}{2}) \frac{\sin\left(\frac{\Delta k L}{2}\right)}{\Delta k}. \quad (16.18)$$

Amplituda vlny druhé harmonické (neuvažujeme-li fázové členy) je tedy úměrná

$$E^{(2)}(L) \propto E_0^2 L \frac{\sin\left(\frac{\Delta k L}{2}\right)}{\frac{\Delta k L}{2}}. \quad (16.19)$$

Pro intenzitu vlny druhé harmonické dostáváme

$$I^{(2)} = B I^2 L^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta k L}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta k L}{2}\right)^2}. \quad (16.20)$$

Zde  $B$  je konstanta,  $I$  je intenzita světla dopadající vlny. Je zřejmé, že intenzita vlny druhé harmonické závisí na funkci  $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$  s argumentem  $x = \Delta k L / 2$ . Průběh této funkce je znázorněn<sup>1</sup> na obr. 8.2b. Funkce nabývá jednotkového maxima pro nulový argument. Proto je intenzita druhé harmonické vystupující z krystalu maximální pro

$$\Delta k = 0. \quad (16.21)$$

Uvedená podmínka se nazývá *podmínkou sfázování*. Znamená, že platí

$$k_2 = 2k_1. \quad (16.22)$$

Připomeneme-li si závislost velikosti vlnového vektoru na indexu lomu (1.42), lze podmínku sfázování psát

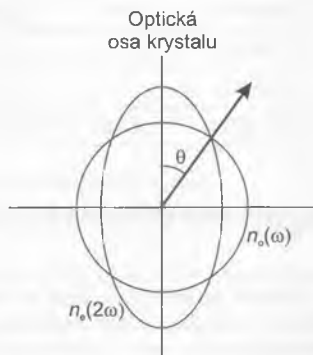
$$\frac{2\omega}{c_0} n^{(2\omega)} = 2 \frac{\omega}{c_0} n^{(\omega)}, \quad (16.23)$$

což zřejmě znamená

$$n^{(2\omega)} = n^{(\omega)}. \quad (16.24)$$

V izotropním materiálu s normální disperzí není možné podmínku sfázování splnit, ale je to možné například v anizotropních krystalech, když se vhodně zvolí polarizace interagujících vln. Například tak, že se dopadající vlna šíří jako vlna řádná a vlna druhé harmonické jako vlna mimořádná (srov.

13. kapitolu). Podmínku danou rov. (16.24) je možné splnit vhodným natočením krystalu. Správný úhel natočení můžeme nalézt pomocí rov. (13.34), známe-li spektrální závislost řádného a mimořádného indexu lomu materiálu. Grafická metoda nalezení úhlu sfázování je znázorněna na obr. 16.2.



Obr. 16.2 Grafické nalezení směru sfázování pro generaci druhé harmonické v jednoosém nelineárním krystalu pomocí polárního grafu indexů lomu řádné a mimořádné vlny

Pokud je tedy splněna podmínka sfázování, je intenzita druhé harmonické úměrná druhé mocnině intenzity dopadající vlny a délky krystalu. Účinnost generování vlny druhé harmonické (definovaný jako poměr intenzit vln) je tedy přímo úměrná intenzitě dopadající vlny. Proto se tento jev projevuje výrazně v intenzivních laserových světelných svazcích. Je ovšem třeba připomenout, že jsme výše uvedené odvození prováděli za nevysloveného předpokladu, že se intenzita vlny na frekvenci  $\omega$  nemění při průchodu prostředím, což znamená, že ke vzniku druhé harmonické dochází s malou účinností. Jinak je výsledek složitější (intenzita druhé harmonické neroste neomezeně s kvadrátem délky  $L$ ). Experimentálně lze dosáhnout účinností generace druhé harmonické v oblasti desítek procent. Generace druhé harmonické frekvence se užívá pro změnu vlnové délky světla generovaného lasery. Některé z často používaných nelineárních krystalů s řádovými hodnotami nelineárních susceptibilit uvádíme v tabulce 16.1.

Podobným procesem jako generace druhé harmonické je *generace součtové a rozdílové frekvence*, který odpovídá situaci, kdy se díky polarizaci druhého řádu směšují dvě vlny různých frekvencí. Uvedené nelineární jevy se používají kromě jiného k ladění vlnové délky laserů.

**Tabulka 16.1** Často používané nelineární krystaly pro generaci druhé harmonické frekvence laserového záření. Jedná se o jednoosé krystaly (negativní,  $n_o > n_e$ ), hodnoty susceptibilit jsou uvedeny pro vlnovou délku  $1,06 \mu\text{m}$  (vlnová délka neodýmového laseru).

Krystal	Název	Přibližná hodnota $ \chi_{ijk}^{(2)} $ [ $\text{Vm}^{-1}$ ]
$\text{KH}_2\text{PO}_4$	KDP	$ \chi_{xyy}  \approx 8 \times 10^{-13}$
$\text{LiIO}_3$		$ \chi_{xxz}  \approx 1 \times 10^{-11} \approx  \chi_{zzz} $
$\text{LiNbO}_3$		$ \chi_{xxz}  \approx 1 \times 10^{-11} \approx 1,7  \chi_{yyy} $
$\beta\text{-BaB}_2\text{O}_4$	BBO	$ \chi_{xxz}  \approx 4 \times 10^{-12} \approx 0,07  \chi_{yyy} $

## 16.2 NELINEÁRNÍ OPTICKÉ JEVY TŘETÍHO ŘÁDU

Optické nelinearity 3. řádu se vyskytují ve všech látkách (i v látkách se středem symetrie) a jsou proto nejnižší nelinearitou v izotropních látkách. Tato nelinearita vede k důležitým jevům jako generace třetí harmonické frekvence, ale zejména k závislosti indexu lomu a absorpčního koeficientu na intenzitě světla. Podobně jako v případě generace druhé harmonické vyjádříme nelineární polarizaci třetího řádu v určitém prostorovém bodě, která vzniká při dopadu lineárně polarizované vlny, dosazením (16.9) do rov. (16.4)

$$P^{(3)} = \varepsilon_0 \chi^{(3)} E^3 = \frac{\varepsilon_0 \chi^{(3)} E_0^3}{8} [\exp(-i3\omega t) + \exp(i3\omega t)] + 3 \frac{\varepsilon_0 \chi^{(3)} E_0^3}{8} [\exp(-i\omega t) + \exp(i\omega t)] \quad (16.25)$$

$$P^{(3)} = \varepsilon_0 \chi^{(3)} E^3 = \frac{\varepsilon_0 \chi^{(3)} E_0^3}{4} \cos(3\omega t) + \frac{3\varepsilon_0 \chi^{(3)} E_0^3}{4} \cos(\omega t). \quad (16.26)$$

První člen polarizace, který osciluje na frekvenci  $3\omega$ , odpovídá generaci třetí harmonické, druhý člen  $P_\omega^{(3)}$  na frekvenci  $\omega$  vede ke vzniku intenzitní závislosti komplexního indexu lomu. Můžeme ho psát ve tvaru

$$P_\omega^{(3)} = \frac{3\varepsilon_0 \chi^{(3)} E_0^3}{4} \cos(\omega t) = \frac{3\varepsilon_0 \chi^{(3)} I E}{2n_L \varepsilon_0 c_0}, \quad (16.27)$$

zde jsme využili vztahu (1.72) mezi intenzitou světla a amplitudou elektrického pole ( $n_L$  je lineární index lomu)

$$I = \frac{1}{2} n_L \varepsilon_0 c_0 E_0^2. \quad (16.28)$$

Celková polarizace látky, která osciluje na frekvenci  $\omega$ , je

$$P^{(\omega)} = P^L + P_\omega^{(3)}, \quad (16.29)$$

tedy

$$P^{(\omega)} = \varepsilon_0 \left( \chi_L + \frac{3 \chi^{(3)} I}{2 n_L \varepsilon_0 c_0} \right) E = \varepsilon_0 (\chi_L + \chi_{NL}^{(\omega)}) E. \quad (16.30)$$

To znamená /podle (1.9)/, že relativní permitivita je nyní rovna

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_L + \chi_{NL}^{(\omega)}. \quad (16.31)$$

Zde relativní permitivita i nelineární susceptibilita mohou být obecně komplexní

$$\tilde{\varepsilon}_r = \varepsilon_{rR} + i \varepsilon_{rI}, \quad (16.32)$$

$$\tilde{\chi}_{NL}^{(\omega)} = \chi_{NLR}^{(\omega)} + i \chi_{NLI}^{(\omega)}. \quad (16.33)$$

Index lomu je roven /podle (1.16)/ (máme zde na mysli reálnou část indexu lomu)

$$n \approx \sqrt{\varepsilon_{rR}} \quad (16.34)$$

tedy podle (16.31)

$$n \approx \sqrt{1 + \chi_{LR}^{(\omega)} + \chi_{NLR}^{(\omega)}}. \quad (16.35)$$

Vzhledem k malé velikosti  $\chi_{NL}^{(\omega)}$  můžeme odmocninu aproximovat

$$n \approx \sqrt{1 + \chi_{LR}^{(\omega)}} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\chi_{NLR}^{(\omega)}}{1 + \chi_{LR}^{(\omega)}} \right), \quad (16.36)$$

Zde je možné nahradit lineární susceptibilitu lineárním („normálním“) indexem lomu ( $n_L = \sqrt{1 + \chi_{LR}^{(\omega)}}$ ) a rov. (16.36) lze psát ve tvaru

$$n = n_L + \frac{1}{2} \frac{\chi_{NLR}^{(\omega)}}{n_L} = n_L + \frac{1}{2} n_2 I. \quad (16.37)$$

Poslední rovnost definuje *koeficient nelineárního indexu lomu*, který je podle (16.30) roven

$$n_2 = \frac{3\chi_R^{(3)}}{2c_0\epsilon_0 n_L^2}. \quad (16.38)$$

Nelineární polarizace třetího řádu tedy vede k tomu, že *index lomu látky je závislý na intenzitě světla*. Tato závislost je (přibližně) lineární, podle známka koeficientu  $n_2$  index lomu s intenzitou světla roste nebo klesá. Analogická závislost platí i pro absorpční koeficient. Podle (1.104) je

$$a = \frac{\omega \epsilon_{rl}}{c_0 \epsilon_0 n_L}, \quad (16.39)$$

tedy podle (16.32) je

$$a = a_L + a_2 I, \quad (16.40)$$

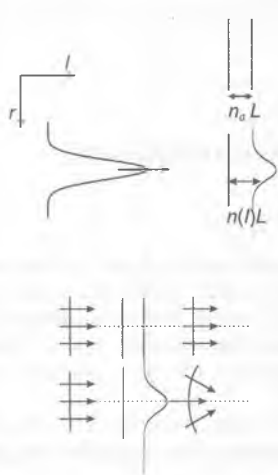
kde nelineární absorpční koeficient je

$$a_2 = \frac{3\omega\chi_I^{(3)}}{2c_0^2 \epsilon_0 n_L^2}. \quad (16.41)$$

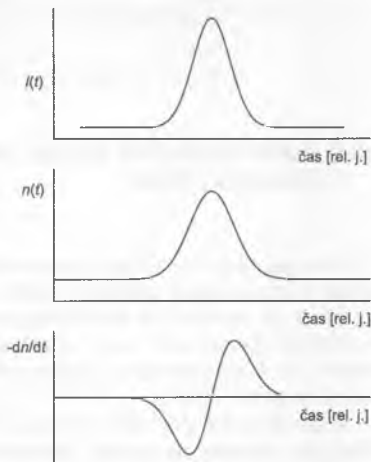
Intenzitní závislost indexu lomu vede k řadě zajímavých jevů. Například laserový svazek má zpravidla *gaussovské rozložení intenzity světla ve směru kolmém na směr šíření (gaussovský svazek)*. Proto po průchodu laserového svazku látkou, jejíž index lomu je dán vztahem (16.37), „cítí“ vlna na ose svazku (velká intenzita) jinou optickou dráhu (geometrická délka krát index lomu) než na okraji svazku (malá intenzita). Například pro látku s  $n_2 > 0$  je optická dráha na ose svazku větší, a určitá vrstva látky tak působí jako spojná čočka, jak je schematicky znázorněno na obr. 16.3. Protože „si ji vytváří světlo samo“, nazývá se tento jev *samofokusací (autofokusací)*. Laserový svazek může být ale modulován i v čase (laserové pulzy). Je-li odezva indexu lomu rychlá (relaxační doby indexu lomu závisí na jeho konkrétní mikroskopické podstatě), sleduje index lomu v čase intenzitní profil laserového pulzu. Fázový náběh vlny (resp. optická dráha) v nelineárním prostředí jiný pro čelo a úběžnou hranu pulzu (malá intenzita) a v maximu pulzu (velká intenzita). To znamená, že se fáze vlny (pulzu) mění v čase. Tento jev se nazývá *automodulace fáze*. Okamžitá frekvence světelné vlny je rovna časové derivaci celkového fázového faktoru vlny, tj.

$$\omega(t) = \frac{\partial}{\partial t} (\omega_0 t - k_0 n(t) z) = \omega_0 - k_0 z \frac{dn}{dt}. \quad (16.42)$$

Časový průběh indexu lomu je dán podle (16.37) časovým průběhem intenzity laserového pulzu. Frekvence je v tomto případě modulovaná. Na obr.16.4 je znázorněn vznik automodulace fáze a závislosti okamžité frekvence světelného pulzu na čase. Pro ultrakrátké pulzy (femtosekundová časová oblast) vede tento mechanismus k výraznému rozšíření jejich spektra, hovoří se o generaci *superkontinua*. Modulace fáze hraje důležitou roli při šíření světelných pulzů. Například ve většině disperzních prostředí se pulzy rozšiřují, protože různé frekvenční komponenty „cítí“ různý index lomu světla. Jevy spojené s automodulací fáze jsou důležité v optických vláknech. Nelineární koeficienty materiálu vláken (často SiO<sub>2</sub>) mají sice malou hodnotu, ale velmi malý průřez vláken vede k vysokým světelným



**Obr. 16.3** Autofokusace světelného svazku. Je znázorněno optické prostředí délky  $L$ . Prochází-li jím světelná vlna s příčně modulovanou intenzitou (např. gaussovské rozdělení), dochází k modulaci indexu lomu podle rov. (16.37) a světlo prochází různými optickými tloušťkami prostředí  $n(l) L$  v různých vzdálenostech od osy. V dolní části obrázku je znázorněno, jaký vliv může mít tento jev na vlnoplochu rovinné vlny



**Obr. 16.4** Vznik automodulace fáze:  $I(t)$  časový průběh světelného pulzu (nahore),  $n(t)$  odpovídající průběh indexu lomu (uprostřed),  $-dn/dt$  záporně vzata časová derivace indexu lomu, úměrná okamžité změně frekvence podle rov. (16.42)

intenzitám svazků fokusovaných do vlákna a navíc se v řadě případů světlo ve vláknech šíří na velké vzdálenosti. V optických vláknech mohou tyto jevy působit rušivě pro jejich aplikace, například ve sdělovací technice, lze jich však někdy i využít. Za určitých podmínek může být vliv nelineárního indexu lomu kompenzován disperzí a světelný pulz se může šířit beze změny svého tvaru jako *soliton*. K šíření pulzů v optických vláknech se vrátíme v 17. kapitole. Hodnota koeficientu nelineárního indexu lomu pro tavený křemen je  $n_2 = 3 \times 10^{-20} \text{ m}^2 \text{ W}^{-1}$  (pro vlnovou délku 1,5  $\mu\text{m}$ ), jeho řádové hodnoty pro některé látky jsou uvedeny v tabulce 16.2.

Tabulka 16.2 Řádové hodnoty koeficientu  $n_2$  pro některé látky

Látka	$n_2 [\text{m}^2 \text{ W}^{-1}]$
Tavený křemen	$10^{-20}$
Křemík	$10^{-14}$
CS <sub>2</sub>	$10^{-18}$

### 16.3 MIKROSKOPICKÝ MODEL OPTICKÝCH NELINEARIT DRUHÉHO ŘÁDU

Mikroskopické vysvětlení vzniku nelineárních optických jevů, v nichž se jedná o nerezonanční interakci světla s atomy látky (frekvence světla je vzdálena od přechodové frekvence atomu), je možné formulovat klasicky, rozšířením Lorentzovy teorie vysvětlené pro případ lineární optiky v kapitole 14. V rezonančním případě, kdy dochází k reálným excitacím, je nutný kvantový přístup.

Mikroskopická představa podstaty indexu lomu (tedy lineární odezvy látky) je založena na pružně vázaném elektronu v látce (kapitola 14), na který působí síla

$$F = -kx, \quad (16.43)$$

kde je  $k$  tuhost a  $x$  výchylka elektronu z rovnovážné polohy. Tato síla odpovídá parabolickému potenciálu. Složitější reálný průběh potenciálu  $V(x)$  je možné parabolickým potenciálem aproximovat, jeho eventuální odchylky se projeví výrazněji až pro velké výchylky elektronu z rovnovážné polohy, viz obr. 16.5. Síla, která působí na elektron v obecném případě, může být nelineární funkcí výchylky

$$F = -kx - k_2 x^2 + k_3 x^3 + \dots \quad (16.44)$$



Omezíme-li se na první nelineární člen, získáme pohybovou rovnici pro elektron hmotnosti  $m$  s nábojem  $q$  doplněním jednoho členu do rov. (14.7)

$$m \ddot{x} + m \gamma \dot{x} + k x + k_2 x^2 = q E, \quad (16.45)$$

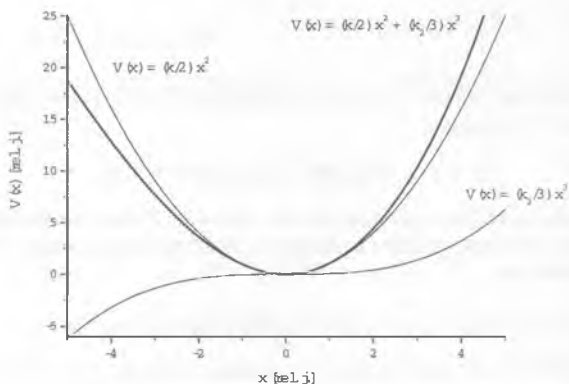
tedy

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \Omega^2 x + \delta x^2 = \frac{q}{m} E, \quad (16.46)$$

kde  $\Omega$  je dáno vztahem (14.8) a

$$\delta = \frac{k_2}{m}. \quad (16.47)$$

Uvažujeme, že na elektron působí elektrické pole vyjádřené vztahem (16.9).



**Obr. 16.5** Mikroskopický model optických nelinearit. Elektron se pohybuje v potenciálu, který odpovídá síle uvedené v rov. (16.44), tj.  $F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$ . Znáznorněn je průběh  $V(x)$  odpovídající prvnímu a druhému členu v rov. (16.44) a silně jejich součet

Pohybová rovnice je nelineární, k jejímu řešení je možné použít poruchovou metodu. Postupuje se přitom tak, že se nejprve najde řešení v lineární aproximaci (nelinearity se zanedbají) a pak se nelineární člen považuje za malou opravu. Ve smyslu poruchové metody můžeme řešení rovnice (16.46) psát

$$x = x_L + x_{NL}. \quad (16.48)$$

Lineární část  $x_L$  je řešením rovnice (16.46) pro  $\delta=0$ , jedná se tedy o rovnici (14.7). Podle kapitoly 14 je /srov. (14.10)/

$$x_L = \frac{1}{2} \left[ \tilde{x}_0 \exp(-i\omega t) + c.c. \right], \quad (16.49)$$

kde  $\tilde{x}_0$  je dáno vztahem (14.11). Nelineární část je malá vůči části nelineární,

$$|x_{NL}| \ll |x_L|. \quad (16.50)$$

Dosazením rov. (16.48) do rovnice (16.45) dostáváme

$$(\ddot{x}_L + \gamma \dot{x}_L + \Omega^2 x_L) + \ddot{x}_{NL} + \gamma \dot{x}_{NL} + \Omega^2 x_{NL} + 2\delta x_L x_{NL} + \delta x_L^2 + \delta x_{NL}^2 = \frac{q}{m} E. \quad (16.51)$$

Členy v kulaté závorce na levé straně jsou rovny pravé straně podle rov. (14.7). Proto platí

$$\ddot{x}_{NL} + \gamma \dot{x}_{NL} + x_{NL} (\Omega^2 + 2\delta x_L) + \delta (x_L^2 + x_{NL}^2) = 0. \quad (16.52)$$

Tuto rovnici můžeme zjednodušit aproximacemi. Pokud předpokládáme, že výchylka elektronu je stále tak malá, že nelineární silový člen je vždy menší než lineární, je

$$|\delta x^2| \ll |\Omega^2 x|. \quad (16.53)$$

Podle (16.50) a (16.53) je možné zanedbat v rovnici (16.52) druhé členy v obou závorkách. Získáme tak linearizovanou rovnici pro  $x_{NL}$

$$\ddot{x}_{NL} + \gamma \dot{x}_{NL} + x_{NL} \Omega^2 = -\delta x_L^2. \quad (16.54)$$

Pravá strana rovnice je úměrná druhé mocnině  $x_L$ , která je rovna (reálnou amplitudu vyjádříme jako jednu polovinu amplitudy komplexní plus komplexně sdružené)

$$x_L^2 = \left\{ \frac{1}{2} [x_0 \exp(-i\omega t) + x_0^* \exp(i\omega t)] \right\}^2 = \frac{1}{4} x_0^2 \exp(-2i\omega t) + \frac{1}{4} x_0^{*2} \exp(2i\omega t) + \frac{1}{2} |x_0|^2. \quad (16.55)$$

Vzhledem k linearitě rovnice (16.54) budeme hledat řešení ve tvaru

$$x_{NL} = \frac{1}{2} [\tilde{x}_{NL} + c.c.], \quad (16.56)$$

kde

$$\tilde{x}_{NL} = \tilde{x}_{20} \exp(-i2\omega t) + x_{00}, \quad (16.57)$$

tedy řešení, které má stejně jako „vynucující síla“ část oscilující s frekvencí  $2\omega$ , ale i část stacionární ( $x_{00}$  je reálná veličina). Po dosazení rov. (16.56) a (16.57) do rov. (16.54) dostaneme

$$\frac{1}{2} [-4\omega^2 x_{20} \exp(-i2\omega t) - i2\gamma\omega x_{20} \exp(-i2\omega t) + \Omega^2 x_{20} \exp(-i2\omega t) + \Omega^2 x_{00} + c.c.] = -\delta x_{NL}^2. \quad (16.58)$$

Porovnáme-li nyní členy u stejných časových exponenciál (a konstantní členy), máme

$$\tilde{x}_{20} = \frac{-\delta}{2(\Omega^2 - 4\omega^2 - i2\omega\gamma)} \tilde{x}_0^2 \quad (16.59)$$

a

$$x_{00} = -\frac{\delta}{\Omega^2} |x_0|^2. \quad (16.60)$$

Dosazením z (14.11) do (16.59) můžeme získat explicitní frekvenční závislost

$$\tilde{x}_{20} = \frac{-\delta q^2 E_0^2}{2m^2} \frac{1}{(\Omega^2 - 4\omega^2 - i2\omega\gamma)} \frac{1}{(\Omega^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)^2}. \quad (16.61)$$

Nyní můžeme pomocí (14.5) a (14.6) vyjádřit makroskopickou polarizaci. Je zřejmé, že díky nelinearitě se v látce objevuje polarizace, jež osciluje na frekvenci, která je dvojnásobkem frekvence dopadajícího světla, a stacionární polarizace. Jak jsme popsali již výše, makroskopická polarizace je zdrojem světla na dvojnásobné frekvenci: dochází ke generaci *druhé harmonické frekvence*. Konstantní polarizace vyvolává statické elektrické pole, mluví se o *optickém usměrnění*. Polarizaci oscilující na frekvenci  $2\omega$  můžeme vyjádřit

$$P^{(2\omega)} = \frac{1}{2} N q [\tilde{x}_{20} \exp(-i2\omega t) + c.c.]. \quad (16.62)$$

Výsledkem uvedeného modelu je tedy explicitní vyjádření velikosti a zejména spektrální závislosti nelineární polarizace, respektive příslušné susceptibility. Výpočet pomocí kvantové teorie dává shodnou frekvenční závislost.

#### Poznámky

Na obr. 8.2 ovšem odpovídá průběh funkce  $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$  prostorové závislosti intenzity světla při Fraunhoferově difrakci na šterbině. Rovnice (16.19) a (16.20) jsou však podobné rovnicím (8.7) a (8.8). Podoba má fyzikální příčinu, v obou případech jde o sčítání řady fázově posunutých vln.

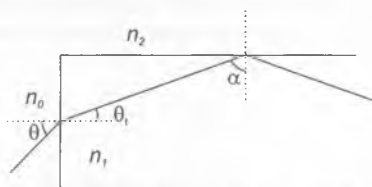
# 17 ZÁKLADY VLÁKNOVÉ OPTIKY

Optická vlákna slouží k vedení světelných signálů. Vedení světla je ve vláknech zajištěno tím, že dochází k totálnímu odrazu na rozhraní mezi materiálem vlákna a okolím. Používají se převážně v telekomunikacích zejména ke spojení mezi telefonními ústřednami. Další důležitou aplikační oblastí optických vláken je zobrazování v medicíně.

Výhodou optických komunikací je možnost použití signálu s velkou frekvenční šířkou, která dovoluje dobrou modulaci signálu. Pro zakódování přenášeného signálu do nosné vlny je nutné určitě frekvenční pásmo  $\Delta\nu$ . Například amplitudově modulované rozhlasové vysílání (AM) pracuje s pásmem přibližně 9 kHz na dlouhých (například nosná frekvence  $\nu \sim 200$  kHz) nebo středních ( $\nu \sim 1$  MHz) vlnách. Pro frekvenčně modulované rozhlasové vysílání (FM) jsou typické hodnoty  $\Delta\nu \sim 150$  kHz a  $\nu \sim 100$  MHz, pro barevné televizní vysílání  $\Delta\nu \sim 3$  MHz a  $\nu \sim 700$  MHz. Uvedené hodnoty se týkají analogové formy přenosu signálu. Digitální zpracování signálu vyžaduje jeho vzorkování s rychlostí aspoň dvakrát vyšší, než je nejvyšší frekvenční složka signálu (tzv. Nyquistovo vzorkovací kritérium). Pro digitální přenos jednoho telefonního hovoru je potřeba pásmo  $64 \text{ kbit s}^{-1}$  (vzorkování 8000krát za sekundu s přesností 8 bit – hodnota technického standardu). Optické frekvence řádově  $10^{15}$  Hz dovolují širší přenášená frekvenční pásma (dostatečná pro tisíce současných telefonních hovorů) než frekvence mikrovlnné ( $10^{10}$  Hz). Například jednomodové optické vlákno může přenášet modulační pásmo  $\Delta\nu \sim 2$  GHz, zatímco pro běžný vysokofrekvenční koaxiální kabel udává norma  $\Delta\nu \sim 140$  MHz (dovoluje přenos 1920 současných telefonních hovorů).

Uvedeme zde jen některé základní úvahy o vláknové optice. Vedení světelných vln, jak jsme již uvedli, je zajištěno jejich totálním odrazem uvnitř vlákna. Index lomu vlákna musí mít vyšší hodnotu než index lomu okolního prostředí. V podstatě je možné rozlišovat vlákna se skokovou

změnou indexu lomu (jádro s indexem lomu  $n_1$  uvnitř pláště s indexem lomu  $n_2 < n_1$ ) a vlákna gradietní, kde se index lomu mění spojitě (často přibližně kvadraticky se vzdáleností od osy vlákna). Podle jiného hlediska se vlákna dělí na jednomodová a mnohomodová, jak popíšeme dále.



Obr. 17.1 Dopad světelného paprsku do optického vlákna

Na obr. 17.1 je znázorněno optické vlákno se skokovou změnou indexu lomu. Na čelní plochu vlákna (ze vzduchu s indexem lomu  $n_0$ ) dopadá paprsek. Geometrie je charakterizovaná úhlem dopadu na čelní plochu  $\theta$ , úhlem lomu  $\theta_1$  do materiálu jádra vlákna a úhlem dopadu paprsku na rozhraní jádro-plášť  $\alpha$ . Tento úhel, který klesá se zvětšujícím se úhlem dopadu  $\theta$ , musí být ovšem větší než kritický úhel pro totální odraz  $\alpha_c$  daný vztahem

$$\sin \alpha_c = \frac{n_2}{n_1}, \quad (17.1)$$

aby bylo světlo skutečně uvnitř vlákna vedené. To ovšem znamená, že světlo bude vedené pouze pro úhly dopadu menší než jistá maximální hodnota  $\theta_{\max}$  (akceptační úhel). Tuto hodnotu můžeme určit ze zákona lomu. Podle obr. 17.1 je zřejmé

$$\theta_1 + \alpha = \frac{\pi}{2} \quad (17.2)$$

a platí zákon lomu

$$n_0 \sin \theta = n_1 \sin \theta_1. \quad (17.3)$$

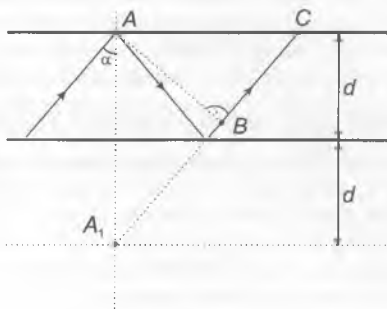
Dosadíme-li do (17.3) z (17.2), dostaneme po umocnění a využitím (17.1)

$$n_0^2 \sin^2 \theta_{\max} = n_1^2 - n_2^2. \quad (17.4)$$

Optické vlákno lze charakterizovat numerickou aperturou<sup>1</sup>

$$NA = n_0 \sin \theta_{\max} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}. \quad (17.5)$$

V optickém vlákně se mohou šířit bez velkých ztrát jen určité světelné vlny, které se nazývají módy. Elektrické pole spojené s těmito módy lze získat výpočtem, řešíme-li vlnovou rovnici s prostorově závislým indexem lomu, který odpovídá geometrii vlákna. Představu o existenci módů v optickém vlákně můžeme získat na základě jednoduchého modelu planárního vlnovodu, který je tvořen vrstvou materiálu s indexem lomu  $n_1$  (viz obr. 17.2).



Obr. 17.2 Planární vlnovod – k výkladu vedených módů

Paprsek se šíří vlnovodem, jak je znázorněno na obr. 17.2; úhel dopadu paprsku na rozhraní je  $\alpha$ . Odrazí se v bodě  $A$  na horním rozhraní, pak na dolním rozhraní a postupuje do bodu  $C$ . S paprskem je ovšem spojená světelná vlna, která se šíří ve vlnovodu. Na obr. 17.2 je znázorněna vlnoplocha, na které leží body  $A$  a  $B$ . Geometrická délka dráhy paprsku mezi body  $A$  a  $B$  je rovna vzdálenosti  $A_1B$ , jak je zřejmé ze symetrie, viz obr. 17.2. Z pravoúhlého trojúhelníku  $AA_1B$  je zřejmé, že

$$A_1B = 2d \cos \alpha. \quad (17.6)$$

Vlny získávají náběh fáze šířením, ale také dodatečnou změnu fáze  $\Delta\varphi$  spojenou s totálním odrazem na horním a dolním rozhraní. Podmínkou pro „dobré“ šíření vlny je, aby se po odrazech vlny setkávaly ve fázi, tj. aby celkový náběh fáze byl roven celistvému násobku  $2\pi$ .

Podle rov. (17.6) tedy

$$2n_1 k_0 d \cos \alpha + \Delta\varphi = 2m\pi, \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (17.7)$$

Zde  $k_0$  je velikost vlnového vektoru ve vakuu,  $m$  je celé číslo a  $M$  je také celé číslo, které představuje maximální číslo módu, jenž může ve vlákně

existovat. Existence konečného počtu módů souvisí s existencí kritického úhlu  $\alpha_c$ . Budeme-li pro jednoduchý odhad předpokládat, že  $\Delta\varphi \approx 0$ , máme pro  $M$  podmínku

$$2n_1 k_0 d \cos \alpha_c \approx 2M\pi. \quad (17.8)$$

Použijeme-li (17.1) a výrazu pro numerickou aperturu (17.5) můžeme vztah upravit

$$M \approx \left\{ \frac{2d}{\lambda_0} NA \right\}_{\text{CELÁ ČÁST}}. \quad (17.9)$$

Celkový počet módů, které mohou v planárním vlnovodu existovat, je  $M + 1$ ; roste s poměrem  $\frac{d}{\lambda}$ . Pro jednomódový vlnovod, ve kterém se šíří jen nultý mód, musí být

$$\frac{2d}{\lambda_0} NA < 1. \quad (17.10)$$

Pro optické vlákno s válcovou symetrií a se skokovou změnou indexu lomu vychází podmínka pro to, aby bylo jednomódové, podobně<sup>2</sup>, pouze na pravé straně (17.10) je jednička nahrazena  $\frac{2,4}{\pi}$ .

Pro aplikace je důležitým parametrem optického vlákna *útlum*, který vyjadřuje výkonové ztráty při šíření světla. Tyto ztráty mohou být způsobeny nehomogenitami materiálu vlákna a geometrickými poruchami, rozptylem světla (zejména Rayleighův rozptyl na nehomogenitách menších než vlnová délka světla) a absorpcí světla v materiálu jádra, který může obsahovat příměsi. Například tavený křemen ( $\text{SiO}_2$ ), který se pro výrobu jádra vláken často používá, absorbuje světlo v ultrafialové spektrální (elektronové a molekulární přechody) a v infračervené spektrální oblasti (vibrační přechody). Celkově (absorpce + rozptyl) je útlum křemenných vláken minimální okolo  $1,5 \mu\text{m}$ . Útlum vlákna se vyjadřuje zpravidla v decibelech

$$\text{ÚTLUM} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_1}{P_2} \right), \quad (17.11)$$

kde  $P_1$  ( $P_2$ ) je světelný výkon na vstupu do vlákna (výstupu z něj). Útlum se obvykle vztahuje na délku vlákna 1 km. Pokud je tedy světlo po průchodu



kilometrovým úsekem vlákna zeslabeno desetkrát, má vlákno útlum 10 dB/km. Běžná křemenná optická vlákna mají typické hodnoty útlumu 0,17–0,25 dB/km pro vlnovou délku 1,55  $\mu\text{m}$ , 0,35–0,6 dB/km pro 1,3  $\mu\text{m}$ , a 3–10 dB/km pro vlnové délky 0,85–9,0  $\mu\text{m}$ . V telekomunikačních aplikacích jsou vláknové trasy vybaveny vždy po určité vzdálenosti (řádově sto kilometrech délky pro pracovní vlnovou délku 1,5  $\mu\text{m}$ ) zesilovači, které jsou realizovány buď přímo jako optický zesilovač, nebo elektroopticky (elektrická demodulace, elektronické zesílení a pak opět modulace). Přímé optické zesílení je možné realizovat například úsekem vlákna, ve kterém je jádro vlákna dopované erbiem a opticky čerpané. Tento úsek vlákna pak má optický zisk na vlnové délce 1,55  $\mu\text{m}$  a pracuje jako laserový zesilovač.

Dalším důležitým parametrem je *disperze*. Informace se ve vláknech přenáší pomocí digitálních signálů, které jsou realizovány jako posloupnost pulzů (světlo odpovídá jedničce). Rychlost přenosu signálu závisí na opakovací frekvenci pulzů, která je omezena délkou pulzů (čím kratší pulzy, tím rychlejší přenos). Ale pulzy se také rozšiřují během šíření díky disperzi. Vliv disperze roste s délkou vlákna. Na disperzi se podílejí tři jevy. *Materiálová disperze* je způsobena závislostí indexu lomu materiálu vlákna na vlnové délce. Šíření světla disperzním prostředím jsme se zabývali v kapitole 4. Pulz se šíří grupovou rychlostí. Pokud si představíme spektrálně široký pulz jako složený z pulzů na různých frekvencích, postupuje každý s jinou grupovou rychlostí a výsledkem je rozplývání pulzu. Toto rozplývání závisí tedy na závislosti grupové rychlosti na vlnové délce, je dáno velikostí kvadratického členu rozvoje (4.18). Vyjádřeno pomocí vlnových délek a indexu

lomu je rozplývání úměrné velikosti  $\frac{d^2 n}{d \lambda^2}$ . Pro tavený křemen vychází tato

veličina nulová pro vlnovou délku přibližně 1,3  $\mu\text{m}$ . To je důvod, proč se někdy používají vlákna přenášející světlo na této vlnové délce. Další příčinou rozplývání pulzů při šíření může být skutečnost, že se světlo šíří ve více módech vlákna. Různým módům odpovídá jiná optická dráha (i pro téměř monochromatické světlo), proto i různá celková doba průchodu světelného pulzu vláknem. Výsledkem je tedy rozplývání pulzu, hovoří se o *intermodové* disperzi. Tento jev nenastává samozřejmě v jednomódových vláknech, což je hlavní příčinou jejich používání. Dalším jevem je tzv. *módová* neboli *intramódová* disperze, která souvisí s tím, že se parametry módů liší pro různé vlnové délky /srov. rov. (17.7)/. Tato disperze se projevuje ovšem i v jednomódových vláknech. Pro přenos signálů s velkým frekvenčním pásmem na velké vzdálenosti se dnes používají jednomódová vlákna na vlnové délce 1,3  $\mu\text{m}$ , která mají minimální materiálovou disperzi

a relativně nízký útlum. Zajímavou možností, jak potlačit rozplývání pulzů díky materiálové disperzi grupových rychlostí, je využití optické nelinearity 3. řádu (viz kapitola 16). Pokud totiž index lomu závisí na intenzitě světla (vztah 16.37), může dojít k tomu, že „si pulz upravuje“ disperzi grupových rychlostí tak, že je kompenzován její původní průběh. Pulz se pak šíří beze změny svého tvaru, hovoří se o *solitonu*. K tomu je nutné, aby nelineární index lomu  $n_2 > 0$  a aby  $\frac{d^2 n}{d \lambda^2} < 0$ . Tyto podmínky jsou splněny pro kře-

menná vlákna pro vlnové délky větší než 1,3  $\mu\text{m}$ . V reálných aplikacích se však zatím tento solitonový způsob šíření optických signálů k přenosu informace nepoužívá, zejména proto, že intenzita světla při jeho šíření vláknem klesá díky útlumu (například na jednu tisícinu vstupní hodnoty). Pak ovšem index lomu není intenzitou dostatečně modulován.

S rozvojem optických komunikací souvisí i rozvoj *integrované optiky*. Je zaměřena na konstrukci soustavy optických prvků na jedné malé (ideálně miniaturní) podložce.

#### Poznámky

<sup>1</sup> Pro vlákno tvořené skleněným ( $n = 1,5$ ) válcem ve vzduchu ( $n_0 = 1,0$ ) vychází  $NA = 1,11$ . Pro křemenné vlákno se skokovou změnou indexu lomu ( $n_1 = 1,53$  a  $n_2 = 1,51$ ) vychází  $NA = 0,247$  a pro  $n_0 = 1,0$  vychází akceptační úhel  $14^\circ$ .

<sup>2</sup> Tato konstanta souvisí s prvním nulovým bodem Besselovy funkce  $J_1(x)$ , s níž jsme se setkali při vyšetřování difrakce na kruhové apertuře. Svazek světla uvnitř vlákna má velmi malý průměr, obvykle několika vlnových délek a ve volném prostoru by měl velkou rozbihavost. Výraz pro počet módů ve válcovém vlákně se ovšem od rov. (17.9) odlišuje výrazněji.

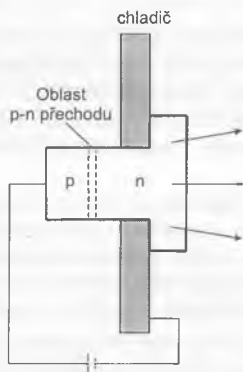
## 18.1 SVĚTELNÉ ZDROJE

Světelné zdroje mohou být přirozené (Slunce) nebo umělé (žárovka). Podle vlastností světla, které vyzařují, se zdroje dále dělí. Například podle spektrálních vlastností světla jsou zdroje monochromatické, čárové a spojité, podle časového průběhu se rozlišují zdroje kontinuální a pulzní, podle koherenčních vlastností zdroje koherentní a nekoherentní. Zmíníme zde jen některé důležité zdroje světla.

Denní světlo je složeno ze světla vycházejícího ze Slunce a ze světla pocházejícího z oblohy. Jak je běžně známé, spektrální složení obou příspěvků je různé. Spektrum slunečního světla před vstupem do atmosféry Země přibližně odpovídá spektru záření černého tělesa<sup>1</sup> o teplotě okolo 6000 K. Na zemský povrch dopadá světlo ovlivněné absorpcí v atmosféře. Hustota výkonového toku slunečního záření před vstupem do atmosféry je  $1350 \text{ Wm}^{-2}$ . Žárovky jsou tradičním zdrojem světla (T. A. Edison), ve kterých je wolframové vlákno stočeno různým způsobem do spirály, která je uchycena ve vyčerpané skleněné nebo křemenné baňce opatřené určitým druhem objímky. Žárovky jsou zdrojem světla se spojitým spektrem<sup>2</sup> zahrnujícím viditelnou i infračervenou spektrální oblast. K zamezení odpařování vlákna během svícení se plní žárovky inertním plynem (např. argon nebo dusík, zpravidla se plní na tlak o dvacet procent nižší než tlak atmosferický) nebo v poslední době parami halogenů (např. jod, brom) v tzv. *halogenových žárovkách*. V halogenových žárovkách probíhá cyklus, který „vrací“ odpařený wolfram: například páry wolframu reagují s jodem, jodid wolframu je zahřáním na povrchu vlákna disociován, a atomy wolframu se tak vrací na vlákno.

Ve *výbojkách* dochází k elektrickému výboji v plynu uzavřeném ve výbojové trubici. Mezi dvěma elektrodami prochází elektrický proud, který ionizuje, resp. excituje atomy plynu. Při relaxaci atomy vyzařují světlo, které má čárové spektrum odpovídající energetickým hladinám atomů (při

nízkém tlaku plynu). Je známá například výbojka s parami rtuti, jejíž spektrální čáry mají vlnové délky 404,7 nm, 435,8 nm, 546,1 nm, 577,0 nm a 579,1 nm. Známé *zářivky* mají trubici naplněnou na nízký tlak parami rtuti, kterými prochází malý proud elektrického výboje. Stěny trubice jsou pokryty „fosforescenční“ vrstvou, tedy látkou, která absorbuje ultrafialové záření a vyzařuje následně světlo ve viditelné spektrální oblasti. Jiný (historický) typ výbojek je například *uhlíková oblouková lampa*, v níž mezi dvěma uhlíkovými elektrodami umístěnými ve vzduchu protéká elektrický proud několika stovek ampér. Vzniká velmi intenzivní světlo se spojitým spektrem.



**Obr. 18.1** Polovodičová svítící dioda (LED) tvořená p-n přechodem mezi objemovými polovodiči

V polovodičových svítících diodách (LED, *light emitting diode*) vzniká světlo díky zářivé mezipásové rekombinaci elektronů a děr v polovodičích s přímým přechodem zakázaného pásu (viz obr. 18.1). Diody jsou tvořeny p-n přechodem, na který je přiloženo napětí v propustném směru (kladný pól na oblast typu p). Přechodem prochází elektrický proud a do oblasti přechodu jsou přiváděny nosiče náboje obou druhů, tedy elektrony z vodivostního pásu polovodiče typu n a díry z valenčního pásu polovodiče typu p, které zde zářivě rekombinují. Energie vyzařovaných fotonů je blízká hodnotě energie zakázaného pásu, spektrum vyzařovaného světla je proto tvořeno poměrně úzkou čarou. K nejznámějším polovodičovým diodám patří GaAs, které svítí v oblasti blízké infračervené oblasti (okolo 900 nm), ve viditelné oblasti SiC (přibližně 580 nm), nebo modro-fialově svítící GaN (400 nm).

Zvláštním zdrojem světla je laser, kterým jsme se zabývali v kapitole 15.

## 18.2 DETEKTORY

Existuje celá řada detektorů, tedy zařízení, která dovolují zaznamenat optické záření. Technologický pokrok umožňuje soustavné zdokonalování detekce světla, zejména zvyšování citlivosti detektorů v různých spektrálních oblastech, zkracování jejich časové odezvy nebo zmenšování rozměrů detektorů dovolující jejich integraci do matic. Nové detektory mají velký význam v aplikacích i v základním výzkumu. Například CCD detektory umožňující detekci jednotlivých fotonů otevřely cestu k experimentálnímu studiu nových optických kvantových jevů. Uvedeme zde jen stručný přehled detektorů podle toho, jaký fotocitlivý mechanismus využívají. Lze je rozdělit na *detektory tepelné* a *kvantové*. V tepelných detektorech se zaznamenává změna teploty vyvolaná absorpcí dopadajícího záření. Kvantové detektory jsou založeny na sledování kvantových přechodů, které jsou zářením vyvolány. Zvláštním druhem detektoru, který jistě zasluhuje pozornost, je ovšem *lidské oko*.

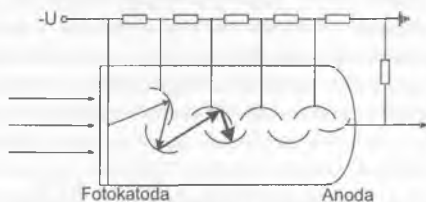
### 18.2.1 Tepelné detektory

Základem tepelných detektorů je zpravidla část, v níž dochází k absorpci dopadajícího světla. Může to být například dutina nebo povrch detektoru pokrytý černí. Světelná energie se mění na energii tepelnou. Měření světelného výkonu, resp. energie v případě světelných pulzů, se převádí na měření teploty.

K nejznámějším tepelným detektorům patří termočlánek, termistor a pyroelektrický detektor. *Termočlánek* obsahuje přechod mezi dvěma kovy nebo polovodiči, měří se teplotně závislá elektromotorická síla tohoto přechodu. *Termistor* je polovodičový prvek, jehož impedance závisí na teplotě. Analogické zařízení s kovem se nazývá bolometr. *Pyroelektrický detektor* obsahuje materiál, který má permanentní nenulovou polarizaci (bez vnějšího elektrického pole). Změny této polarizace s teplotou je možné elektricky zaznamenávat.

## 18.2.2 Kvantové detektory

Kvantové detektory se dělí na fotoemisní, fotovoltaické, fotovodivostní, fotografické a fotoionizační.



Obr. 18.2 Schéma fotonásobiče

K *fotoemisním detektorům* patří vakuové diody a fotonásobiče. *Vakuovou diodu* tvoří dvě elektrody, které jsou umístěné v evakuovaném skleněném obalu. Fotokatoda, na kterou dopadá světelný signál, je pokryta materiálem (obvykle obsahuje alkalické kovy), z nějž jsou snadno uvolňovány elektrony po dopadu světla (vnější fotoefekt). Mezi anodou a katodou je udržováno kladné napětí. Uvolněné elektrony tak dopadají na anodu a mezi elektrodami protéká proud, který je možné měřit přímo ampérmetrem nebo voltmetrem jako napětí na odporu zařazeném sériově do obvodu. *Fotonásobič* je v podstatě fotodiody, v níž je mezi katodou a anodou zařazeno několik dalších elektrod (*dynod*, kterých je obvykle 8–12). Schematicky je konstrukce fotonásobiče znázorněna na obr. 18.2. Mezi dynodami je udržováno napětí stovek voltů (napětí roste směrem k anodě), celkové napětí přiložené na fotonásobič bývá obvykle okolo 1 kV. Elektrony uvolněné díky fotoefektu z katody dopadají na první dynodu, z jejíhož povrchu vylétá větší počet sekundárních elektronů (sekundární emise), ty dopadají na další dynodu, dojde opět k sekundární emisi a po průletu mezi všemi dynodami elektrony dopadnou na anodu. Celkově dochází tedy ke značnému zvětšení počtu elektronů při jejich průletu mezi dynodami, celkové zesílení signálu může být například  $10^{10}$ . V poslední době se vyrábějí také tzv. *kanálkové fotonásobiče*, kde elektrony prolétají mikroskopickými kanálky a k sekundární emisi dochází při odrazech elektronů od stěn kanálků. Tyto fotonásobiče mají vysokou citlivost a rychlou odezvu díky tomu, že elektrony v nich mají podstatně kratší dobu průletu. Spektrální citlivost fotodiody a fotonásobiče je dána materiálem fotokatody a optickou propustností vstupního okénka. Často se používají fotokatody ze

směsi Ag-O-Cs, které mají komerční označení S20 a které jsou citlivé zejména ve viditelné spektrální oblasti. Existuje ovšem celá řada katod, které jsou citlivé od ultrafialové po blízkou infračervenou spektrální oblast. Fotonásobiče jsou užívány zejména pro detekci velmi slabých světelných signálů. Mohou například pracovat v režimu, kdy na fotokatodu dopadají jednotlivé fotony a kdy je detekován proudový „pulz“ vždy po dopadu fotonu (režim *čítání jednotlivých fotonů*).

Fotovoltaické a fotovodivostní detektory jsou vyrobeny z polovodičů. Známé energetické schéma polovodičů obsahuje valenční pás a vodivostní pás, mezi nimiž je oblast bez elektronových stavů (pás zakázaných energií). Elektrony ve valenčním pásu se nemohou pohybovat, pro nízké teploty je vodivostní pás prázdný, a proto je odpor polovodiče velký. Světlo s energií fotonů<sup>3</sup>, která je větší nebo rovna energii zakázaného pásu polovodiče, může excitovat elektrony z valenčního pásu do pásu vodivostního, a tak se snižuje odpor polovodiče.

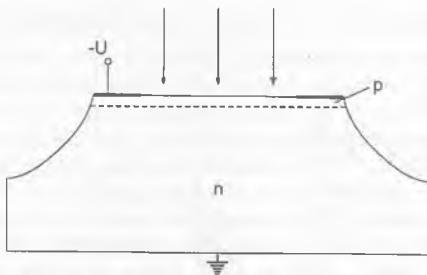
Tak pracují *fotovodivostní detektory*. Hodnota energie zakázaného pásu, která určuje oblast spektrální citlivosti detektoru, závisí na materiálu, jak je uvedeno pro některé polovodiče používané pro fotodetekci v tabulce 18.1. Energetické schéma polovodičů je možné modifikovat, když jsou do nich zavedeny příměsi, které vedou ke vzniku energetických hladin v zakázaném pásu energií (akceptorové nebo donorové hladiny). Tím lze snižovat hodnotu energie fotonů, které mohou vyvolat kvantový přechod (infračervené detektory). Velmi známým materiálem fotovodivostních detektorů je CdS či CdSe, citlivé ve viditelné oblasti, nebo PbS či PbSe používané v blízké infračervené oblasti. Fotovodivé detektory se zapojují zpravidla sériově do obvodu se zdrojem a odporem, na kterém se měří spád napětí.

**Tabulka 18.1** Hodnota energie zakázaného pásu ve vybraných polovodičích při teplotě 300 K

Polovodič	$E_g$ [eV]
Si	1,14
Ge	0,67
InSb	0,18
InAs	0,35
InP	1,42
GaAs	1,43
PbS	0,34
CdS	2,42
CdSe	1,74
CdTe	1,45

*Fotovoltaické detektory* jsou tvořeny polovodičovým p-n přechodem (kontakt dvou polovodičů: typu p – převládají kladné nosiče náboje, díry, které vznikají záchytem elektronů z valenčního pásu na akceptorových hladinách příměsí, a typu n – převládají záporné nosiče náboje, elektrony, dodané do vodivostního pásu z donorových hladin příměsí. V místě přechodu dojde k přesunu pohyblivých elektronů (z oblasti n) a děr (z oblasti p) na opačné strany a na přechodu vzniká potenciálový spád. V místě přechodu nezůstávají žádné vodivostní elektrony a díry, vzniká *ochuzená vrstva*, protože pokud nejsou prostorově odděleny, nosiče náboje rekombinují. Osvětlení p-n přechodu světlem s dostatečnou energií fotonů vede k excitaci elektronů z valenčního pásu do pásu vodivostního, v oblasti přechodu vznikají elektron děrové páry. Díky velkému potenciálovému spádu jsou rychle elektrony a díry prostorově odvedeny na opačné strany, nerekombinují, a vzniká tak elektrický proud (*fotovoltaický jev*). Tohoto jevu se užívá k detekci světla ale také ve fotovoltaických člancích, které jsou známé jako sluneční články nebo baterie. Jsou vyráběny především z krystalického, amorfního nebo mikrokystalického křemíku, nebo CdS. Pro detekční účely se často používají p-n přechody binárních polovodičů tvořených prvky III. a V. sloupce Mendělejevovy tabulky prvků (GaAs, InSb aj.). Pokud se na p-n přechod zapojí napětí v závěrném směru, tedy kladný pól na oblast n, záporný pól na oblast p, mluví se o *fotodiodě* (viz obr. 18.3), která pracuje ve fotovodivostním režimu (v závěrném směru neteče přechodem proud, po osvětlení se odpor diody zmenšuje).

Přiložené závěrné napětí zvětšuje ochuzenou vrstvu, což je důležité, protože pouze absorpce světla v této prostorové oblasti vede ke vzniku elektrického proudu. V jiných oblastech, kde není velký potenciálový spád, dojde



Obr. 18.3 Fotodioda – příklad fotovoltaického detektoru světla



totiž zpravidla k rekombinaci fotoexcitovaného elektronu s dírou dříve, než jsou elektrickým polem prostorově odděleny. Zvětšení tloušťky ochuzené vrstvy přiložením závěrného napětí vede ke zvýšení citlivosti fotodiody (větší oblast pro fotogeneraci nosičů náboje) a ke zkrácení její odezvové doby (snížení kapacity této vrstvy obklopené z obou stran náboji). Mezi p a n polovodiče se někdy vkládá vrstva nedopovaného (intrinsického) polovodiče s velkým elektrickým odporem, což vede ke zvětšení ochuzené vrstvy. Pak se mluví o „*pin diodě*“ (polovodič typu p – intrinsický polovodič – polovodič typu n). V diodách s vysokým závěrným napětím mohou být elektrony silným polem urychlovány natolik, že jejich energie postačuje ke generaci dalšího elektron děrového páru. Tento proces, nárazová ionizace, se může opakovat a vede ke zvětšování počtu fotogenerovaných elektronů, ke vzniku laviny. Takové diody se nazývají *lavinové diody*.

V *maticovém detektoru* jsou fotony dopadající na element obrazu, tj. na část plochy detektoru, která se nazývá *pixel* podle anglického *picture element*, převáděny na náboj, který je v daném místě nejprve uchován a pak veden k výstupnímu zesilovači. Je tak možné zaznamenat (plošný) obraz. Element detektoru může být tvořen polovodičovou fotodiodou nebo častěji kondenzátorem typu MOS (kov – oxid – polovodič, *metal – oxide – semiconductor*). Jednotlivé elementy jsou vyrobeny zpravidla na křemíkovém čipu. Osvětlení vede ke vzniku náboje, který zůstává v místě elementu zachycen v potenciálové jámě tvořené vhodně přiloženým napětím. Náboj z jednotlivých elementů není odváděn každý zvlášť, ale k jeho „čtení“ se užívá skenování. Čtení je zprostředkováno pohybem shluku nosičů náboje podél povrchu od konkrétního elementu k výstupu, kde je převeden na napětí. Postupným čtením se rekonstruuje osvětlení plochy detektoru v závislosti na jeho x-y souřadnicích. Takové detektory se označují jako CCD („nábojově vázané detektory“, *charge-coupled devices*).

Tradičním detektorem pro záznam obrazu je *fotografický film* (nebo ve speciálních případech deska). Na ohebné průhledné plastové podložce (nejčastěji acetát celulózy nebo polyethylen tereftalát) je nanesena fotografická emulze. Z druhé strany podložky je zpravidla barvivo, které absorbuje dopadající světlo po průchodu emulzí a podložkou, a zabraňuje tak zpětným odrazům. Fotografická emulze je tvořena suspenzí krystalků halogenidů stříbra, nejčastěji AgBr, AgBr:I nebo AgCl v želatině. Velikost krystalků je proměnná podle použití od několika setin mikrometrů až po několik mikrometrů. Emulze obsahuje obvykle 30–40 váhových procent stříbra, na čtvereční centimetr povrchu emulze připadá  $10^6$ – $10^8$  krystalků. Krystalky jsou vypěstovány tak, aby se vyloučil vznik poruch v jejich objemu. Po osvětlení

emulze (obrazem scény při fotografování) dochází ke vzniku takzvaného latentního obrazu. Přesný mechanismus vzniku latentního obrazu není ani po několika desítkách let trvajícím výzkumu zcela objasněn. Všechny modely jeho tvorby zahrnují dva procesy: excitaci elektronu dopadajícím světlem, po níž následuje transport elektronu v zrně, a dále iontový proces, který spočívá v pohybu iontu  $\text{Ag}^+$ , čímž dochází ke vzniku poruchy na povrchu. Když povrchová porucha obsahuje 3–6 atomů Ag, vzniká centrum latentního obrazu, které působí jako katalyzátor při chemické redukci krystalku ve vývojce. Vývojka pravděpodobně přivádí elektrony k centru latentního obrazu, kde tyto elektrony reagují s ionty stříbra na rozhraní mezi Ag a AgBr. Krystalky, které obsahují latentní obraz, jsou během obvyklé doby vyvolávání zcela redukovány na kovové stříbro, zatímco krystalky bez latentního obrazu zůstanou nezměněné. Obraz je tedy po vyvolání tvořen zrně stříbra. Vyvolaný obraz se ustálí v ustalovači, tj. v lázni, ve které jsou odstraněny nezměněné halogenidové krystalky. Vznikne tak negativ, tj. obrácený obraz (nejtmavší tam, kde bylo osvětlení největší). Typický krystalek v emulzi může obsahovat  $10^9$  atomů; na tvorbu latentního obrazu v něm je zapotřebí, aby došlo k absorpci pouze přibližně 10 fotonů. Pak dostáváme pro „zisk“, tj. počet atomů Ag získaných absorpcí jednoho fotonu, hodnotu  $10^8$ . To vysvětluje vysokou citlivost fotografických emulzí.

Dlouhovlnná hranice spektrální citlivosti krystalků halogenidů stříbra je přibližně 500 nm. Rozšíření spektrální citlivosti k delším vlnovým délkám je možné barvením zrn. V dnešní době jsou vyráběny emulze citlivé až do blízké infračervené oblasti (až k 1200 nm). Pro barevnou fotografii se používá metoda doplňkové barevné reprodukce, filmová emulze má několik vrstev. Nejjednodušší může být tvořena (shora ve směru dopadu světla) neobarvenou vrstvou (zaznamenává modré světlo), vrstvou, která nepropouští modré světlo (žlutý filtr, často tvořený koloidním stříbrem v želatině), následuje vrstva citlivá pro zelené světlo a konečně vrstva citlivá pro světlo červené. Tři odlišné záznamy obrazu z jednotlivých vrstev jsou pak převedeny do tří doplňkových barev, žluté, červené a modrozelené (cyanové), z nichž je pak složen výsledný obraz. Barviva většinou nejsou zabudována ve filmu, ale vznikají během vyvolávání v reakci, která se nazývá vázání. Některé produkty halogenidové reakce vstupují do další reakce, v níž jsou tvořena barviva. Ostatní komponenty reakcí jsou buď zabudovány v emulzi, nebo jsou ve vyvolávacím roztoku.

K popisu vlastností detektorů se používají různé parametry. *Citlivostí* se rozumí poměr výstupního signálu detektoru k velikosti toku dopadajícího světla. Vyjadřuje se například v jednotkách V/W nebo V/lm, eventuálně

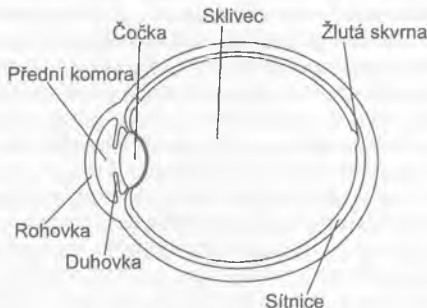
A/W, A/lm. Protože citlivost závisí na vlnové délce, používá se citlivost určená na určité vlnové délce, tedy *spektrální citlivost*. Pro kvantové detektory se používá *kvantová účinnost*, což je citlivost vyjádřená jako počet fotoelektronů vzniklých při dopadu jednoho fotonu. Dalším důležitým parametrem je *odezвовá rychlost detektoru* vyjádřená jako mezní (maximální) modulační frekvence signálu, kterou může ještě detektor sledovat bez zkreslení, nebo jako doba nárůstu a doba poklesu signálu detektoru při dopadu nebo odeznění obdélníkového světelného signálu. V řadě případů je nezbytné detekovat slabé světelné signály. Nejmenší hodnota detekovatelného signálu je omezena šumem detektoru. Na výstupu z detektoru totiž vychází náhodný elektrický proud, jeho střední hodnota odpovídá „ideálnímu“ detekovanému signálu, který je úměrný dopadajícímu světlu. Zdroje šumu mohou být různé, závisí na druhu detektoru. Vždy se ovšem projevuje skutečnost, že fotony dopadají na detektor náhodně (fotonový šum); jejich statistické rozdělení závisí na vlastnostech světla. Dalším obecným zdrojem šumu je šum elektrického obvodu detektoru. V kvantových detektorech se projevuje fotoelektronový šum, který souvisí s tím, že dopadající foton generuje uvolněný fotoelektron nebo elektron – děrový pár s jistou pravděpodobností, tedy náhodně. Dalším zdrojem šumu může být šum zesílení například ve fotodiodách nebo fotonásobičích, protože v každém kroku zesílení se generuje náhodný počet sekundárních elektronů. Šum detektorů je možné charakterizovat například poměrem signál/šum (*SNR, Signal-to-Noise-Ratio*). Nejmenší detekovatelný signál musí mít odezvu detektoru větší než je jeho šumová úroveň. Prahová citlivost může být určena jako velikost signálu, která odpovídá jednotkovému poměru signál/šum. Je proto rozumné zavést veličinu, která se nazývá výkon odpovídající šumu (*NEP, noise equivalent power*).

### 18.2.3 Lidské oko

Skutečnost, že oko umožňuje přímé pozorování optických jevů, dává optice výsadní postavení mezi jinými fyzikálními obory. Zrak člověku zprostředkuje vnímání světa. Základem zrakového vjemu je detekce dopadajícího světla. Proto je snad možné zahrnout lidské oko mezi světelné detektory. Protože je oko přímo provázáno s mozkiem, je jeho funkce velmi složitá a její zkoumání patří spíše do oblasti medicíny. Uvedeme zde jen některé aspekty, které se týkají „optické části“ oka.

Schematicky je lidské oko znázorněno na obr. 18.4. Dopadající světlo prochází rohovkou (*cornea*), přední komorou vyplněnou kapalinou (*humor*

*aqueus*), čočkou (*lens cristallina*) a sklivcem (*corpus vitreum*) a dopadá na sítnici (*retina*), na níž se vytváří zmenšený a převrácený obraz pozorované scény. Rohovka má průměr přibližně 12 mm a její tloušťka je uprostřed přibližně 0,6 mm. Její index lomu je 1,376. Na rozhraní vzduch – rohovka proto dochází k výraznému lomu. Za rohovkou je přední komora vyplněná tekutinou s indexem lomu 1,336. V komoře je duhovka, která plní funkci vstup-



Obr. 18.4 Schéma lidského oka

ní clony, jejíž průměr se mění přibližně od 2 mm (silné světlo,  $> 10^4 \text{ cd m}^{-2}$ ) do 8 mm (tma,  $< 10^{-4} \text{ cd m}^{-2}$ ) podle intenzity dopadajícího světla.<sup>4</sup> Duhovka dává oku také zabarvení, což – jakkoliv významné v životě – není důležité z hlediska optické funkce oka. Světlo pak prochází čočkou. Čočka má, jak říkají lékaři, velikost a tvar malé fazole. Její struktura je vrstevnatá. Čočka je pružná a uchycená na svalových vlákních, která mohou měnit její tloušťku a tvar. Tím se mění jemně a spojitě její optická mohutnost. Při uvolněných svalech je čočka nejplošší, oko je zaostřeno na vzdálené předměty (neakomodované), nejtlustší je při pozorování blízkých předmětů. Index lomu čočky je uprostřed přibližně 1,41, na krajích asi 1,38. Za čočkou je zadní komora s tekutinou o indexu lomu 1,336. Světlo pak dopadá na sítnici, kde dochází k jeho detekci. Celé oko má přibližně kulovitý tvar průměru zhruba 2 cm. Optikou oka se zabýval podrobně již V. H. Helmholtz v 19. stol., který zavedl pojem „schematického oka“. Jeho celková optická mohutnost je 66,6 D (pro oko zaostřené na blízký předmět). Obrazové ohnisko leží na sítnici a předmětové ohnisko 15 mm před povrchem (vrcholem) rohovky. Předmětový hlavní bod je 1,96 mm a obrazový hlavní bod 2,38 mm za vrcholem rohovky.

Neakomodované oko vidí dobře vzdálené předměty. Nejbližší bod, jehož ostrý obraz může oko na sítnici vytvořit, se nazývá *vzdálený bod*. *Blízký bod* je naopak nejbližší ostře zobrazený bod. Poloha blízkého bodu se vyvíjí s věkem člověka, což souvisí s vývojem optické mohutnosti čočky. Pro děti je blízký bod blíže než 10 cm před okem, pro dospělé středního věku 20–40 cm a pro starší lidi až 2 m. Tomu odpovídá vývoj optické mohutnosti čočky, která je přibližně 14 D pro věk 10 let, 9 D pro 20 let, 1–2 D pro 40 let a 0 D pro 70 let). Tento vývoj je způsoben jednak nárůstem tloušťky čočky s věkem, jednak ukládáním bílkoviny ( $\alpha$ -krystalin) spojeným s poklesem indexu lomu. V průměru dochází k velkému posunu blízkého bodu kolem 45 roku věku. Pak je nutné používat brýle se spojnými čočkami, které posunou blízký bod do vzdálenosti vhodné pro čtení. Touto vzdáleností se zpravidla rozumí tzv. *konvenční zraková vzdálenost* 25 cm.

Na sítnici jsou dva typy fotocitlivých buněk: tyčinky (asi 100 milionů) a čípky (asi 10 milionů). Tyčinky jsou velmi citlivé, nerozlišují však barvy. Naopak čípky jsou funkční při vysokých světelných intenzitách a dovolují rozlišovat barvy. Čípky se vyskytují ve střední části sítnice v oblasti o průměru přibližně 3 mm, která se nazývá žlutá skvrna (*macula*). Uprostřed ní je fovea (průměr okolo 0,2 mm), kde nejsou žádné tyčinky, ale kde je zrakový vjem nejkvalitnější. Po dopadu fotonu na fotocitlivou buňku dochází ke konformační změně molekuly barviva (rhodopsin), která vede k prvotní separaci náboje. Vzniklý potenciálový rozdíl je pak přenášen a zpracováván neurony, výsledkem je zrakový vjem. Na sítnici je také slepá skvrna v místě, kde vychází optický nerv, v této oblasti nejsou ani tyčinky, ani čípky.

Oko má řadu zvláštních funkcí, které z něj činí kvalitní detekční a zobrazovací optický systém. K základním funkcím patří *akomodace* (zastřívání), o níž jsme už mluvili. Další funkcí je *adaptace*, která dovoluje správnou činnost pro velké rozpětí světelných toků přes 5 řádů<sup>5</sup>. Nízké světelné toky jsou zaznamenávány tyčinkami. Pokud přesáhne světelný tok jistou úroveň, dojde k jejich saturaci a už další fotony nedetekují. Naopak pro velké hodnoty světelných toků detekují méně citlivé čípky. Nízké světelné toky, pro něž jsou funkční pouze tyčinky, odpovídají nočnímu osvětlení hvězdami až po osvětlení měsícem v jeho čtvrtině. Výlučně čípky pracují pro světelné úrovně odpovídající slunečnímu osvětlení od poledne po soumrak. Pro jisté hodnoty osvětlení může být světlo přijímáno jak tyčinkami, tak čípky. Při snižování úrovně osvětlení se posouvá oblast maximální citlivosti oka ke kratším vlnovým délkám (tzv. *Purkyňův jev*). Vlnová délka maxima se posune přibližně od 550 nm k 500 nm. Barevné vidění je umožněno tím, že jsou tři druhy čípků, které obsahují tři různá fotocitlivá barviva,

kteřá se liší svými absorpčními spektry. Barvivo<sup>6</sup> „modré“ citlivé ve spektrálním intervalu 400–500 nm, barvivo „žluté“ citlivé v intervalu 450–630 nm a barvivo „červené“ s citlivostí v rozmezí 470–700 nm. Signály ze tří typů čípků se mozem zpracovávají a jsou základem pro vnímání barvy. Další funkcí oka je *ostrost vidění (visus)*. Souvisí přímo s rozlišením oka jako zobrazovacího prvku. Definuje se jako převrácená hodnota minimálního úhlu, pod kterým může oko rozlišit dva body. Podle rov. (10.16) pro 550 nm (vlnová délka odpovídající největší citlivosti oka, srov. obr. 1.2) a průměr pupily  $D = 2$  mm vychází úhlové rozlišení jedna úhlová minuta. V praxi se k měření ostrosti používají zkušební tabule. Nejčastější je pravděpodobně Snellenův<sup>7</sup> test, podle kterého se ostrost zkouší čtením písmen, jejichž úhlový rozměr je ze zkušební vzdálenosti (zpravidla 5 m) 5 úhlových minut a jejichž detaily odpovídají úhlu jedna minuta. Na zkušební tabuli jsou i větší a menší písmena. Například velké písmeno může být takové, že jeho velikost odpovídá například 5' ve vzdálenosti 20 m. Zjištěná ostrost se vyjadřuje zlomkem, v jehož čitateli je nominální zkušební vzdálenost (5 m) a ve jmenovateli vzdálenost, v níž se pacientem rozlišené písmeno jeví pod úhlem 5'. Normální ostrosti tedy odpovídá 5/5, horší například 5/20.

Funkce oka může být narušena vadami. *Krátkozrakost (myopia)* je způsobena zpravidla tím, že je oko delší. Dochází k tomu, že se obraz vzdáleného předmětu vytváří před sítnicí, vzdálené body se nezobrazují ostře. Body, které leží blíž k oku (blíže než vzdálený bod krátkozrakého oka), mohou ovšem být zobrazovány na sítnici ostře. Krátkozraké oko může zobrazovat dokonce ostře body, které jsou od oka vzdáleny méně než konvenční zraková vzdálenost. Krátkozrakost se koriguje pomocí brýlí s rozptylnými čočkami. Výsledkem jejich působení je posun vzdáleného bodu krátkozrakého oka do velké vzdálenosti.<sup>8</sup> *Dalekozrakost (hyperopia)* je naopak způsobena tím, že je oko kratší. Obraz velmi vzdáleného bodu je proto neakomodovaným okem vytvořen za sítnicí. Aby oko mohlo zobrazit velmi vzdálené předměty ostře, musí akomodovat. Je zřejmé, že blízký bod pro dalekozraké oko leží dále od oka než je konvenční zraková vzdálenost, bližší body nemohou být ostře zobrazeny. Dalekozrakost se koriguje brýlemi se spojnými čočkami.<sup>9</sup> Lékaři určují optickou mohutnost čoček empiricky pomocí sad zkušebních čoček. Místo klasických brýlí je možné použít ovšem kontaktních čoček se stejnou funkcí nebo provést operaci, při které se změní vhodným způsobem tvar vstupní plochy rohovky. Krátkozrakost lze korigovat seříznutím vstupní plochy rohovky, jedná se zpravidla o operaci prováděnou laserovým svazkem, který je řízen počítačem. Jinou vadou zraku je *astigmatismus*, který je způsoben nepravidelným zakřivením

optických rozhraní v oku, většinou se jedná o vstupní plochu rohovky. Poloměr křivosti plochy ve svislé a vodorovné rovině je jiný, což vede k rozdílné optické mohutnosti pro paprsky ve svislé a vodorovné rovině. Výsledkem je neostré zobrazení, které lze korigovat brýlemi s cylindrickými čočkami nebo čočkami, které jsou kombinací sférické a válcové čočky. Funkce oka může být narušena nemocemi. Například šedý zákal je způsoben sníženou propustností čočky (operativně lze čočku nahradit za umělou), zelený zákal souvisí s poškozením vláken zrakového nervu.

## Poznámky

- <sup>1</sup> Spektrální průběh záření černého tělesa, kterým se budeme zabývat v kapitole 19, je uveden na obr. 19.4.
- <sup>2</sup> Spektrum světla vysílaného vláknem žárovky opět odpovídá dobře spektru tepelného záření odpovídající teploty. V halogenových žárovkách je ovšem modifikováno a závisí na složení plynové náplně.
- <sup>3</sup> Energie fotonu souvisí s jeho vlnovou délkou vztahem  $E[\text{eV}] = 1240/\lambda [\text{nm}]$  /jak plyne z (19.43) a (1.49)/.
- <sup>4</sup> Duhovka se také otevírá působením léků například při vyšetření oka u lékaře („rozkapání oka“).
- <sup>5</sup> Jak jsme již uvedli, také průměr duhovky se zmenšuje s osvětlením. Avšak odpovídající snížení světelného toku do oka je jen malou částí celkové adaptace. Skutečně, poměr světelných toků je přibližně  $(8/2)^2 \approx 36$ , oproti celkovému adaptačnímu rozsahu  $10^5$ .
- <sup>6</sup> Označení barviv není podle jejich barvy, ale podle spektrální oblasti jejich citlivosti. Uvedené intervaly jsou pouze přibližné.
- <sup>7</sup> Hermann Snellen (1833–1908) byl holandský lékař.
- <sup>8</sup> Je nutné zobrazit velmi vzdálený bod ( $a = \infty$ ) do vzdálenosti odpovídající poloze vzdáleného bodu krátkozrakého oka  $a'$ . Podle čočkové rovnice (10.72) lze odhadnout optickou mohutnost rozptylné čočky, tedy  $f' = a'$ . Leží-li například vzdálený bod krátkozrakého oka 1 m před okem,  $a' = -1$  m a optická mohutnost čočky je  $-1$  D. Tato čočka přitom posouvá bod z konvenční zrakové vzdálenosti do zdánlivé polohy blíž k oku. Díky krátkozrakosti může ale být okem ostře zobrazen.
- <sup>9</sup> Vhodnou optickou mohutnost spojné čočky je možné opět odhadnout pomocí rov. (10.72). Nyní je třeba zobrazit bod z konvenční zrakové vzdálenosti do místa, kde leží blízký bod dalekozrakého oka.

# 19 VLNOVĚ-KORPUSKULÁRNÍ DUALISMUS

Hledání odpovědi na otázku, zda světlo má částicový nebo vlnový charakter provází celou historii fyziky. Původní částicovou představu vytvářenou ve starověku vystřídal vlnový přístup v 18. a 19. století. Rozvoj kvantové fyziky začátkem 20. století opět oživil částicové chápání světla, začalo se mluvit o vlnově-korpuskulárním dualismu. Otázka je stále živá i dnes, kdy teoretické i experimentální studium vlnových nebo korpuskulárních projevů světla přispívá k dalšímu rozvoji kvantové teorie. Teorie elektromagnetického záření, která zahrnuje kvantové děje se nazývá *kvantová elektrodynamika*. V této kapitole si všimneme jen velmi stručně některých aspektů kvantové povahy světla.

## 19.1 TEPELNÉ ZÁŘENÍ

Ze základních termodynamických zákonů vyplývá, že v každé části prostoru, která je v termodynamické rovnováze s okolím, musí existovat elektromagnetické pole, které se nazývá tepelné záření. Vlastnosti tohoto záření přitom závisí pouze na rovnovážné teplotě a ne na tvaru části prostoru nebo na vlastnostech jeho hranic. Elektromagnetické pole tepelného záření je spektrálně širokopásmové, má šumový charakter, tj. má náhodné amplitudy, fáze i polarizace.

Tepelné záření udržuje v řadě fyzikálních systémů termodynamickou rovnováhu a má také řadu technických aplikací. Výzkum vlastností tepelného záření ke konci 19. století vyústil k formulaci základů kvantové fyziky (M. Planck, 1900) a základům kvantového popisu interakce světla s látkami (A. Einstein, 1917). Z běžného života je známé, že horká tělesa svítí, přičemž barva emitovaného světla se posouvá od červené ke žluté



s rostoucí teplotou. První kvalitativní měření vyzařovaného spektra byla publikována ke konci 19. století. Uvažujme těleso, které je v rovnováze s okolním zářením. Schopnost tělesa absorbovat světlo je možné kvantifikovat koeficientem pohltivosti  $\alpha$

$$\alpha = \frac{W_{abs}}{W_{dop}}, \quad (19.1)$$

definovaným jako poměr absorbované energie k energii dopadající na těleso. Pokud je těleso neprůhledné, musí být

$$W_{dop} = W_{abs} + W_{odr}, \quad (19.2)$$

tedy dopadající energie musí být rovna součtu absorbované a odražené energie. Z rov. (19.2) plyne, že

$$0 \leq \alpha \leq 1. \quad (19.3)$$

Je vhodné zabývat se ideálním tělesem, pro které  $\alpha = 1$  pro všechny frekvence světla, tedy tělesem, které absorbuje všechno dopadající světlo. Takové těleso se nazývá *absolutně černé*. Pro  $\alpha = 0$  se někdy mluví o tělesem bílém a jinak o tělesem šedém, pokud není  $\alpha$  spektrálně závislé. Zahřáté těleso vyzařuje světlo. Je rozumné předpokládat, že výkon vyzařovaný ve frekvenčním intervalu  $\nu, \nu + d\nu$  je úměrný velikosti povrchu tělesa  $dS$ , z něhož vyzařuje, a velikosti spektrálního intervalu:

$$dL_{vyz} = \varepsilon d\nu dS. \quad (19.4)$$

Koeficient  $\varepsilon$  se nazývá *emisivita*. Zkušenost a experimenty ukazují, že koeficienty  $\alpha$  a  $\varepsilon$  jsou funkcí teploty a frekvence světla  $\alpha = \alpha(\nu, T)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(\nu, T)$ .

Nyní se budeme zabývat *rovnovážným tepelným zářením*. Například tepelné záření v dutině tělesa zahřátého na konstantní teplotu  $T$  bude v rovnováze s okolním tělesem (viz obr. 19.1). Vlastnosti záření uvnitř dutiny mohou být studovány pomocí tenkého otvoru vedoucího z dutiny na povrch tělesa.<sup>1</sup>

Uvažujme nyní, že do dutiny vložíme malé těleso. Po ustavení rovnováhy musí platit

$$L_{abs} = L_{vyz}, \quad (19.5)$$

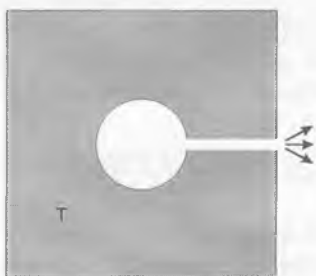
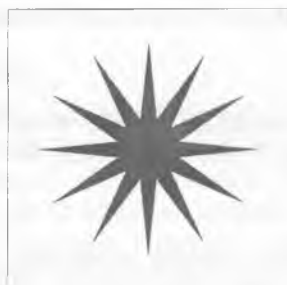
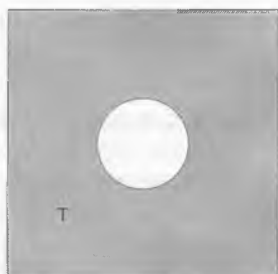
tj. absorbovaný výkon musí být roven výkon vyzařovanému, protože jinak by se měnila teplota tělesa. Podle (19.1) a (19.4) je

$$L_{abs} = \alpha L_{dop} \quad (19.6)$$

$$L_{vyz} = \varepsilon d\nu S \quad (19.7)$$

Z (19.5) až (19.7) plyne

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{L_{dop}}{d\nu S} \quad (19.8)$$



**Obr. 19.1** Příklad rovnovážného tepelného záření uvnitř dutiny tělesa. Malý otvor nezmění vlastnosti záření a umožňuje studium vlastností záření

**Obr. 19.2** Ilustrace Kirchhoffova zákona. Nahoře: keramická deska s černě nakresleným vzorem. Dole: deska zahřívá na vysokou teplotu se ve tmě jeví tmavě oproti vzoru, který má větší emisivitu

Pokud nyní těleso vyměníme za jiné stejného tvaru a velikosti, po ustavení rovnováhy opět musí platit (19.8). Na levé straně rovnice budou teď sice jiné hodnoty  $\varepsilon$  a  $\alpha$ , ale pravá strana bude stejná (stejně podmínky). Dopadající výkon  $L_{dop}$  je funkcí teploty a frekvence světla, tedy pro všechna tělesa platí

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} = f(T, \nu), \quad (19.9)$$

což je *Kirchhoffův zákon* (1859). Na pravé straně je ovšem emisivita absolutně černého tělesa, protože pro něj je  $\alpha=1$ . Tento zákon mimo jiné říká, že tělesa, která hodně absorbují také hodně vyzařují. Tato skutečnost bývá často demonstrována pomocí keramické desky, na níž je nakreslen tmavě obrazec, jak je znázorněno na obr. 19.2. Za normálního osvětlení a při pokojové teplotě je vidět tmavý vzor na světlé podložce, ovšem po rozpálení desky (například na 1000 °C) a ve tmě se situace jeví obráceně: nakreslený vzor vyzařuje více, protože má větší emisivitu.

Jaká je hustota energie tepelného záření v dutině? Energie  $\Delta W$  záření v objemu  $\Delta V$  dutiny, které spadá do spektrálního intervalu  $\nu$ ,  $\nu + d\nu$ , je

$$\Delta W = \rho(\nu, T) \Delta V d\nu. \quad (19.10)$$

Zde  $\rho(\nu, T)$  je spektrální hustota energie záření absolutně černého tělesa, která přímo souvisí s funkcí  $f$  v rov. (19.9). M. Planck ukázal, že platí

$$\rho(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c_0^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} h\nu. \quad (19.11)$$

Zde  $k_B$  je Boltzmannova konstanta a  $h$  je Planckova konstanta. Pravou stranu rov. (19.11) lze chápat jako součin tří členů

$$\rho(\nu, T) d\nu = p(\nu) d\nu g(h\nu) h\nu, \quad (19.12)$$

jejichž interpretace je: hustota stavů světla  $p(\nu) d\nu$  ve spektrálním intervalu  $\nu$ ,  $\nu + d\nu$ ; rozdělovací funkce (obsazení) jednotlivých stavů  $g(h\nu)$ ; a energie fotonu  $h\nu$ . Dnešní fyzika nazývá funkci  $g$  Bose-Einsteinovou rozdělovací funkcí, která platí pro částice s celočíselným spinem, k nimž foton patří. Obsazení určitého stavu pole tepelného záření ve viditelné části spektra je nízké a závisí na teplotě. Například pro teploty 3000 K (teplota typická pro lampy) nabývá hodnoty  $\approx 10^{-3}$  a blíží se 1 pro teploty 30 000 K.

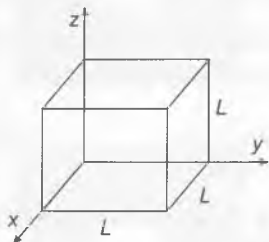
Jaká je hustota stavů  $p(\nu) d\nu$  světla? Hustotu stavů světla uzavřeného v dutině můžeme vypočítat, budeme-li světlo považovat za soubor stojatých vln (spektrální rozvoj). V dutině musí být struktura rovnovážného tepelného záření stacionární a musí platit, že energetický tok vln dopadající na stěnu dutiny musí být roven energetickému toku vyzařovaného stěnou. Nejjedno-

dušší takovou dutinou je například dutina ve tvaru krychle, jejíž stěny jsou dokonale odrazné (ideální vodič). Zvolme krychli o hraně  $L$ , jejíž 3 hrany mají směr souřadných os  $x$ ,  $y$ ,  $z$  a jejíž jeden vrchol je v počátku souřadného systému, viz obr. 19.3. Z okrajových podmínek pro elektrické pole plyne, že tečné složky pole na stěnách jsou nulové. Pole musí být řešením vlnové rovnice pro vakuum (1.14). Hledané stojaté vlny můžeme psát ve tvaru

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = A(t) \vec{u}(\vec{r}). \quad (19.13)$$

Dosazením (19.13) do vlnové rovnice (1.14) lze oddělit v rovnici část prostorovou a časovou, například pro  $x$ -ovou komponentu můžeme (1.14) psát

$$\frac{\Delta u_x(\vec{r})}{u_x(\vec{r})} = \frac{1}{c_0^2 A(t)} \frac{\partial^2 A(t)}{\partial t^2}. \quad (19.14)$$



Obr. 19.3 Volba dutiny pro výpočet hustoty stavů světla

Má-li být rov. (19.14) splněna pro každý čas a prostorovou souřadnici, musí být každá strana rovna konstantě,  $-k^2$ . Dostaneme tak skalární a vektorovou rovnici

$$\frac{\partial^2 A(t)}{\partial t^2} + k^2 A(t) = 0, \quad (19.15)$$

$$\Delta \vec{u}(\vec{r}) + k^2 \vec{u}(\vec{r}) = 0. \quad (19.16)$$

Řešením rov. (19.15) jsou zřejmě harmonické kmity,

$$A(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (19.17)$$

kde

$$\omega^2 = k^2 c_0^2. \quad (19.18)$$

Řešení Helmholtzovy rovnice (19.16) můžeme psát<sup>2</sup> ve tvaru

$$u_x = e_x \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \quad (19.19)$$

$$u_y = e_y \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \quad (19.20)$$

$$u_z = e_z \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z), \quad (19.21)$$

s konstantami  $k_x, k_y, k_z$ , pro něž platí

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2, \quad (19.22)$$

jak je vidět z dosazení (19.18) až (19.21) do rov. (19.16). Tyto konstanty mají význam komponent vlnového vektoru  $\vec{k}$ . Konstanty  $e_x, e_y, e_z$  určují směr (polarizaci) vektoru  $\vec{u}$ . Vzhledem k tomu, že je amplituda pole vyjádřena pomocí  $A_0$ , lze volit  $|\vec{e}|=1$ . Z divergenční rovnice (1.3) pro pole ve vakuu,  $\nabla \cdot \vec{E}=0$ , ovšem plyne příčnost pole, tedy  $\vec{k} \cdot \vec{e}=0$ , což znamená, že existují dva nezávislé polarizační stavy pro každé  $\vec{k}$ . Řešení (19.18) až (19.21) splňuje okrajové podmínky pro stěny krychle  $x=0, y=0, z=0$ . Z požadavku nulovosti tečných složek na stěnách  $x=L, y=L, z=L$  dostáváme přípustné hodnoty komponent vlnového vektoru

$$k_x = m_x \frac{\pi}{L}, \quad k_y = m_y \frac{\pi}{L}, \quad k_z = m_z \frac{\pi}{L}, \quad m_j = 1, 2, 3, \dots \quad (19.23)$$

Různá znaménka celých čísel  $m_j$  odpovídají různým fázím řešení, ale ne různé prostorové struktury pole. Všechny rozlišitelné prostorové konfigurace pole jsou proto určeny například kladnými čísly  $m_j$ , čemuž odpovídají kladné hodnoty komponent vlnového vektoru. V  $k$ -prostoru (trojdimenzionálním) spadají tyto komponenty do kladného oktantu, jednotlivé hodnoty  $k$  leží ve vrcholech krychlové sítě s hranami  $\pi/L$ , což znamená, že každému prostorovému stavu pole odpovídá v  $k$ -prostoru objem

$$V_k = \left( \frac{\pi}{L} \right)^3. \quad (19.24)$$

Uvažujme nyní stavy pole s velikostmi vlnového vektoru od 0 do  $k$ . V  $k$ -prostoru zabírají objem

$$V = \frac{4}{3} \pi k^3. \quad (19.25)$$

Odpovídající počet *různých* prostorových stavů pole dostaneme tak, že jejich objem v  $k$ -prostoru, tj.  $(1/8 V)$  vydělíme objemem na jeden stav, tj.  $V_k$ . Uvážíme-li navíc dva možné polarizační směry, máme pro počet stavů  $P_k$  (v intervalu velikosti vlnového vektoru od 0 do  $k$ )

$$P_k = \frac{2k^3 L^3}{6\pi^2} = \frac{8\pi\nu^3 L^3}{3c_0^3}, \quad (19.26)$$

kde jsme uvážili  $k = \frac{2\pi\nu}{c_0}$ . Spektrální hustota stavů  $p(\nu)$ , tj. počet stavů na jednotkový frekvenční interval a jednotkový objem, je rovna

$$p(\nu) = \frac{1}{L^3} \frac{dP_k(\nu)}{d\nu}, \quad (19.27)$$

tedy

$$p(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c_0^3}. \quad (19.28)$$

Tento výraz pro hustotu stavů světla zůstává v platnosti i pro otevřený prostor /limita  $L \rightarrow \infty$  totiž ve vztahu (19.28) nic nemění/.

Planckův zákon (19.11) můžeme přepsat jako funkci vlnových délek. Uvážíme-li<sup>3</sup>

$$\nu = \frac{c_0}{\lambda}, \quad |d\nu| = \frac{c_0}{\lambda^2} |d\lambda|, \quad (19.29)$$

dostáváme

$$\rho(\lambda, T) d\lambda = \frac{8\pi h c_0 d\lambda}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\lambda k_B T} - 1}. \quad (19.30)$$

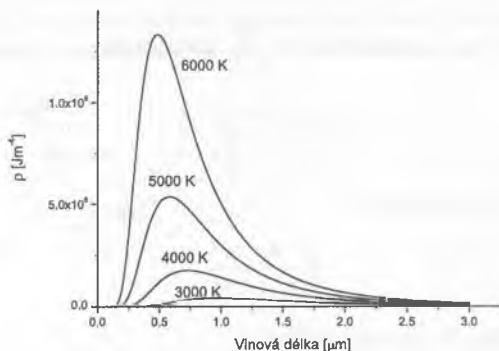
Průběh této funkce pro několik teplot je uveden na obr. 19.4. Z obrázku je zřejmé, že se maximum spektrální hustoty energie tepelného záření posouvá s rostoucí teplotou ke kratším vlnovým délkám. Vlnovou délku  $\lambda_{\max}$ , pro kterou při dané teplotě  $T$  je do intervalu 1 nm vyzářována maximální energie, nalezneme z podmínky maxima funkce  $\rho(\lambda, T)$ , tj.

$$\frac{\partial \rho(\lambda, T)}{\partial \lambda} = 0, \quad (19.31)$$

čili pro

$$x = \frac{hc_0}{\lambda k_B T}, \quad (19.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^5}{e^x - 1} \right) = 0. \quad (19.33)$$



Obr. 19.4 Spektrální hustota energie záření černého tělesa jako funkce vlnové délky pro vybrané teploty /podle rov. (19.30)/

Z rov. (19.33) máme rovnici pro  $x$

$$(5-x)e^x - 5 = 0, \quad (19.34)$$

pro níž lze najít numericky řešení  $x_m = 4,9651$ . Z rov. (19.32) tedy dostáváme

$$\lambda_{\max} = \frac{C_W}{T}, \quad (19.35)$$

což je *Wienův posunovací zákon*<sup>4</sup>. Konstanta  $C_W = \frac{hc_0}{x_m k_B}$  se nazývá Wienovou konstantou, její přibližná hodnota je  $C_W \approx 0,2898 \text{ cmK} \approx 0,3 \text{ cmK}$ . Tento zákon dovoluje určovat teplotu těles, jejichž vyzařování je detekováno.<sup>5</sup> Pro  $T = 300 \text{ K}$  je  $\lambda_{\max} \approx 10 \mu\text{m}$ , záření Slunce odpovídá přibližně spektru tepelného záření při teplotě  $T = 6000 \text{ K}$  s  $\lambda_{\max} \approx 480 \text{ nm}$ . Spektrum tepelného záření vyvolává v lidském oku barevný vjem. Při teplotách

600–1000 K se jeví tělesa tmavě rudá, při 1200 K červená, oranžová při 1400 K, mezi 2000–6000 K bílá.

Často je důležitá znalost celkové hustoty energie tepelného záření pro všechny vlnové délky, resp. frekvence. Získáme ji integrací (19.11) přes všechny frekvence:

$$U = \int_0^{\infty} \rho(\nu, T) d\nu. \quad (19.35)$$

Po dosazení z (19.11) a substituci  $x = \frac{h\nu}{k_B T}$  dostaneme

$$U = \frac{8\pi k_B^4 T^4}{h^3 c_0^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}. \quad (19.36)$$

S hodnotou určitého integrálu

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \quad (19.37)$$

dostáváme *Stefan-Boltzmannův zákon*

$$U = \sigma_{SB} T^4. \quad (19.38)$$

Celková hustota energie rovnovážného tepelného záření je tedy úměrná čtvrté mocnině jeho teploty. Hodnota *Stefan-Boltzmannovy konstanty*  $\sigma_{SB}$  plyne přímo z (19.36) a (19.37)

$$\sigma_{SB} = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3 c_0^3}, \quad (19.39)$$

Číselně je rovna  $\sigma_{SB} = 7,56 \times 10^{-16} \text{ Jm}^{-3}\text{K}^{-4}$ .

Vzhledem k tomu, že tepelné záření je v rovnováze se stěnami tělesa, je zřejmé, že spektrální hustota energie tepelného záření musí souviset s intenzitou vyzařování  $M$  povrchu tělesa (tj. s výkonem vyzařovaným z jednotkové plochy povrchu). Lze ukázat, že intenzita vyzařování  $M$  je rovna

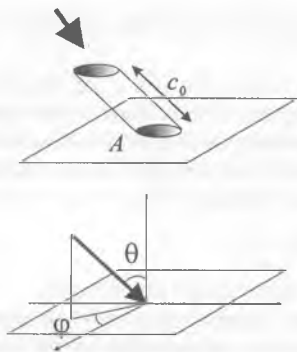
$$M = \frac{c_0}{4} U \quad (19.40)$$

a podobně pro spektrální hustotu intenzity vyzařování a energie platí



$$m(\nu, T) = \frac{c_0}{4} \rho(\nu, T). \quad (19.41)$$

Intenzita vyzařování je definována jako výkon, který vyžáří jednotková plocha povrchu tělesa do všech směrů. Vzhledem k uvažované rovnovážné situaci je zřejmé, že se nic nezmění, pokud část povrchu tělesa o velikosti  $A$  bude nahrazena stejně velkým otvorem, za nímž bude další dutina se stejnou hustotou tepelného záření. Výkon vyzařovaný původní částí povrchu  $A$  bude stejný jako výkon vyzařovaný otvorem (tedy prošlý otvorem z jiné dutiny). Situace je znázorněna na obr. 19.5. Ve směru, který svírá úhel  $\theta$



**Obr. 19.5** K výkladu souvislosti mezi zářivostí a hustotou energie záření absolutně černého tělesa

s normálou k povrchu, projde např. malým kruhovým otvorem velikosti  $dA$  za jednotku času energie, která byla ve válci s podstavou plochy  $(dA \cos\theta)$  a s výškou  $c_0$  a která je spojena se zářením, které se šíří „správným“ směrem, tj. jehož směr šíření spadá do elementu prostorového úhlu  $d\Omega$  kolem daného směru určeného úhly  $\varphi, \theta$ . Velikost  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ . Tomuto směru odpovídá část hustoty energie  $\frac{d\Omega}{4\pi} U$ , je-li celková hustota energie  $U$ .

Intenzitu vyzařování jako výkon vyzařovaný z jednotkové plochy ( $A=1\text{m}^2$ ) do všech směrů, dostaneme integrací přes všechny směry, tedy

$$M = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\sin\theta \cos\theta}{4\pi} U c_0. \quad (19.42)$$

Integrací dostáváme přímo rov. (19.40).

## 19.2 FOTONY

Na základě Planckových závěrů navrhl A. Einstein (1905), že světlo je možné chápat jako složené z částic. Elektromagnetické záření je složené z módů, přičemž energie každého módu nemůže být spojitě proměnná, ale je kvantována. Nejmenší vzdálenost mezi jednotlivými hladinami odpovídá energii fotonu. Energie fotonu<sup>6</sup> o frekvenci  $\nu$  je

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad (19.43)$$

a hybnost

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}. \quad (19.44)$$

Platnost rov. (19.43) byla prokázána studiem *fotoefektu*. Při dopadu světla na materiál z něj mohou vyletovat elektrony.<sup>7</sup> Einsteinoва rovnice pro fotoefekt vyjadřuje maximální kinetickou energii vyletujících elektronů  $E_k$  pomocí energie dopadajících fotonů (19.43) a výstupní práce elektronu  $A_\nu$  (tedy práci nutnou k uvolnění elektronu z kovu)

$$E_k = \hbar\omega - A_\nu. \quad (19.45)$$

Tato rovnice je vlastně zákonem zachování energie pro fotoefekt.

Platnost vztahu (19.45) pro hybnost fotonu byla prokázána experimentálně při pozorování nepružného rozptylu rentgenového záření na elektronech, tzv. *Comptonův jev* (A. H. Compton 1922). Lze ho vyšetřovat jako nepružný rozptyl uvážením zákona zachování energie a hybnosti. Pro foton je nutné vzít vyjádření energie (19.43) a hybnosti (19.44), a stejné veličiny pro elektron vyjádřit pomocí relativistických vztahů. Lze tak získat vlnovou délku rozptýleného záření

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c_0} (1 - \cos\theta), \quad (19.46)$$

kde  $\lambda$  je vlnová délka dopadajícího záření,  $m_e$  je klidová hmotnost elektronu,  $\theta$  je úhel rozptylu. Konstanta před závorkou (*Comptonova vlnová délka elektronu*) má číselnou hodnotu  $\frac{h}{m_e c_0} = 2,43 \times 10^{-12}$  m.

Foton má také vlastní moment hybnosti, spin. Velikost spinu fotonu je  $s = \pm \hbar$ . Význačný směr, ve kterém je možné mluvit o kvantování spinu je směr šíření fotonu, tedy směr jeho hybnosti. Pro světlo s pravotočivou kru-

hovou polarizací je spin fotonu orientován ve směru momentu hybnosti, pro levotočivé světlo je orientace proti směru momentu hybnosti. V lineárně polarizovaném světle, které lze chápat jako složené stejnou měrou ze světla kruhově polarizovaného levotočivě a pravotočivě, je stejná pravděpodobnost nalezení orientace spinu ve směru i proti směru hybnosti fotonu. Fotony mohou nějakému objektu předat hybnost, mohou také předávat vlastní moment hybnosti, tedy působit momentem síly. K tomu dochází například při průchodu kruhově polarizovaného světla čtvrtvlnovou destičkou, z níž vychází světlo lineárně polarizované, jak je popsáno v kapitole 13.

## 19.3 VLNOVÉ VLASTNOSTI ČÁSTIC

Během první poloviny 20. století se rozvíjela kvantová fyzika, která s částicemi s nenulovou klidovou hmotností začala spojovat vlny, jak navrhl de Broglie v roce 1923, který částici hmotnosti  $m$  pohybující se rychlostí  $v$ , tedy s hybností  $p=mv$ , přiřazoval (rovinné) vlny o vlnové délce

$$\lambda_{\text{částice}} = \frac{h}{mv}. \quad (19.47)$$

Současná kvantová fyzika pracuje s vlnovými funkcemi. Vlnové chování hmotných částic se projevuje v řadě experimentů, jejichž variace jsou v dnešní době již zcela běžné a používané například k diagnostice materiálů, jako například neutronová difrakce nebo elektronový mikroskop.

Ve všech předchozích kapitolách jsme se zabývali klasickou optikou, tedy optikou, která neuvažuje kvantovou povahu světla (fotony). Pokud se v kontextu klasické optiky zmiňují fotony, mají se zpravidla na mysli „vlnové balíky“. Pro intenzivní světelné toky se překrývají a vytvářejí (klasické) světelné vlny dobře popsatelné Maxwellovými rovnicemi, resp. vlnovou rovnicí. Otázkou je, zda vše zůstává v platnosti i pro velmi nízké světelné toky, kdy je z klasického pohledu překryv vlnových shluků nepravděpodobný. Většina optických jevů, které jsme vyšetřovali, se popisuje rovnicemi, které jsou lineární. Podobně kvantově mechanické rovnice (např. Schrödingerova rovnice) jsou lineární, a všechny tedy škálují jednoduše s amplitudou elektrického pole. Podle principu korespondence by tedy výsledky získané klasickými rovnicemi měly být správné i pro velmi nízké světelné toky. To se skutečně experimentálně prokazuje, například při dvouštěrbinovém (Youngově) interferenčním experimentu. *Kvantový popis*

*světla* a experimentální situace, kdy se kvantová podstata světla projevuje, vykazují řadu zajímavých vlastností, které jsou významné jak pro chápání podstaty světla, tak aplikačně. Jmenujme například *provázané* („entanglované“) stavy fotonů, jejichž použití v telekomunikacích nebo pro kvantové počítače se v současné době považuje za velmi perspektivní.

## Poznámky

- <sup>1</sup> Poprvé použili takové uspořádání ke studiu vlastností tepelného záření Wien a Lummer v roce 1895.
- <sup>2</sup> Tento tvar řešení je zvolen proto, aby byla splněna část okrajových podmínek, jak uvádíme níže.
- <sup>3</sup> Je jasné, že vlnová délka klesá s rostoucí frekvencí. Znaménko ale nehraje roli v rov. (19.11), resp. (19.30), které vyjadřují vždy nezápornou spektrální hustotu energie.
- <sup>4</sup> Připomeňme, že funkce spektrální hustoty záření  $\rho(\nu, T)$  má maximum pro frekvenci  $\nu_{\max}$ , kterou můžeme najít derivováním vztahu (19.11). Ovšem  $\nu_{\max}$  neodpovídá  $\lambda_{\min}$ , protože jednou je hustota vztažena na jednotkový interval frekvencí, tj. např. 1 Hz, podruhé na jednotkový interval vlnových délek, tj. např. 1 nm /srov. rov. (19.29)/.
- <sup>5</sup> Zajímavá je časová souslednost nalezení zde zmiňovaných zákonů. Stefan-Boltzmannův zákon také nejprve našel experimentálně Josef Stefan v roce 1879, teoreticky ho odvodil Ludwig E. Boltzmann v roce 1884. Wienův posunovací zákon zformuloval na základě teoretických úvah Wilhelm Wien v roce 1893. Zdařilé experimenty přinášející poznatky o spektrálním složení tepelného záření prováděli O. Lummer a E. Pringsheim (1897) a později H. Rubens a F. Kurlbaum (1901). M. Planck byl inspirován k formulaci svého zákona v roce 1900 známými experimentálními výsledky a získal ho na základě „interpolace“ již známých vztahů popisujících spektrální průběh záření pro velmi malé a velmi velké frekvence. Tvar zákona vysvětlil tehdy Planck představou, že atomy tvořící těleso mají ekvidistantně vzdálené energetické hladiny a mohou emitovat světlo pouze ve kvantech, jejichž energie odpovídá vzdálenosti hladin.
- <sup>6</sup> Kvantový stav světla, světelný mód, ve kterém není žádný foton, má energii  $\frac{1}{2}h\nu$ , která se nazývá energií nulových kmitů. Energie módu, který je obsazen  $n$  fotony je tedy rovna  $E = h\nu \left( n + \frac{1}{2} \right)$ . Název foton zavedl v roce 1926 G. Lewis. Základní práci o kvantové teorii záření publikoval v roce 1927 P. A. Dirac.
- <sup>7</sup> Fotoelektrický jev poprvé pozoroval a popsal Hertz v roce 1887, Stoletov v roce 1888 prokázal, že při něm vzniká elektrický proud tvořený zápornými částicemi, jehož velikost je úměrná intenzitě dopadajícího světla. Lennard (v roce 1902) prokázal, že kinetická energie vyletujících elektronů nezávisí na intenzitě osvětlení a Einstein v roce 1905 zformuloval rovnici (19.45), Millikan ji v roce 1915 ověřil experimentálně.

# LITERATURA

- [1] Sedlák, B. – Štoll, J.: *Elektřina a magnetismus*. Praha, Academia, Karolinum 1993.
- [2] Saleh, B. E. A. – Teich, M. C.: *Základy fotoniky*. Praha, Matfyzpress 1994.
- [3] Hecht, E.: *Optics*. 4<sup>th</sup> edition. Reading, MA, Addison-Wesley 2002.
- [4] Akhmanov, S. A. – Nikitin, S. Yu.: *Physical Optics*. Oxford, Clarendon Press 1997.
- [5] Pedrotti, F. L. – Pedrotti, L. S.: *Introduction to Optics*. 2<sup>nd</sup> edition. London, Prentice-Hall International, Inc. 1993.
- [6] Brooker, G.: *Modern Classical Optics*. Oxford, Oxford University Press 2003.
- [7] Born, M. – Wolf, E.: *Principles of Optics*. Cambridge, Cambridge University Press 1998.
- [8] Halliday, D. – Resnik, R. – Walker, J.: *Fundamentals of Physics*. New York, Wiley 2001 (český překlad: Fyzika, Brno, VUTIUM 2000).
- [9] Feynman, R. P. – Leighton, R. B. – Sands, M.: *The Feynman Lectures on Physics*, vol. 1, 2. Reading, Addison-Wesley 1964 (český překlad: Havlíčkův Brod, Fragment 2000).
- [10] Fuka, J. – Havelka, B.: *Optika*. Praha, SPN 1961.
- [11] Štrba, A.: *Optika*. Bratislava, Alfa 1978.
- [12] Klier, E.: *Optika*. Praha, SPN 1980.
- [13] Kolovrat, J.: *Příklady z optiky*. Praha, SPN 1979.
- [14] Mandel, L. – Wolf, E.: *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge, Cambridge University Press 1995.
- [15] M. Bass, editor: *Handbook of Optics*. New York, McGraw-Hill, Inc. 1995.
- [16] Kvasnica, J.: *Matematický aparát fyziky*. Praha, Academia 1997.

Vlastnosti elektromagnetického pole, na jejichž znalost text navazuje, jsou obsahem přednášek a učebnic o elektřině a magnetismu. Proto jako první knihu [1] v seznamu literatury uvádíme učebnici tradičně užívanou na Matematicko-fyzikální fakultě UK v Praze. Kromě známých učebnic optiky je zde „bible optiky“ [7], známé učebnice celého úvodního univerzitního kurzu fyziky [8], [9] a některé starší učebnice v českém nebo slovenském jazyce [10]–[13]. Pro další čtení o kvantové optice a koherenci uvádíme knihu [14]. Číselné hodnoty materiálových parametrů jsou převzaty z [15]. Výklad relevantního matematického aparátu, například Fourierovy transformace, je zdařile podán v [16].

# REJSTŘÍK

Abbeův invariant (rovnice), viz invariant

Abbeův

aberace, 207–217

– chromatická (vada), 216–217

– – podélná, 216

– – příčná, 216

– paprsková, 208–209

– Seidelovy, 209–210

– sférická (kulová vada), 212

– – paprsková, 213

– třetího řádu, 209, 212–213

– vlnová, 208

absorpce, 276–280, 291–295

adaptace (oko), 335

Airyho funkce, viz funkce Airyho

– kroužek (disk), viz kroužek

Airyho

akomodace (oko), 335

amplituda komplexní, 29

apertura, 116, 144, 192

– numerická, 188, 320, 322

aproximace Fraunhoferova, 221

– Fresnelova, 16, 153

– paraxiální, 39, 171, 194

astigmatismus, 215–216

– oční, 336

autofokusace, 313

automodulace fáze, 312–313

Babinetův princip, viz princip Babinetův

Billetova dvojčocha, viz dvojčocha

Billetova

bit, 319

bod blízký (oko), 335

– hlavní, 172

– kardinální, 172

– ohniskový, 173

– uzlový, 174

– vzdálený (oko), 335

bolometr, 327

Boltzmannova konstanta, viz konstanta

Boltzmannova

Boltzmannův zákon, viz zákon

Boltzmannův

Braggova difrakce, viz difrakce

rentgenového záření

– podmínka, viz podmínka Braggova

Braggův úhel, viz úhel Braggův

Brewsterův úhel, viz úhel Brewsterův

camera obscura, 191

CCD, 331

citlivost detektoru, 332

– – spektrální, 333

citlivost oka, 14, 232–233

Clausius-Mossottiho rovnice, viz rovnice

Clausius-Mossottiho

clona irisová, 192

Comptonova vlnová délka, viz délka

Comptonova

Comptonův jev (rozptyl), viz jev

Comptonův

Cornuova spirála, viz spirála Cornuova

Czerny-Turner, viz monochromátor

- čerpání laseru, 295–296  
 činitel (faktor) sklonu, 127–128, 146  
 čípek (oko), 335–336  
 číslo clonové, 192  
 čítání jednotlivých fotonů, 329  
 čočka aplanatická, 214  
 – cylindrická (válcová), 337  
 – oční, 334  
 – optická, 80, 181–183  
 – ploskovypuklá, 155, 214  
 – tenká, 182  
 – tlustá, 182  
 – válcová, 337
- dalekohled, viz teleskop  
 dalekozrakost, 336–337  
 decibel, 322  
 deformace, 263  
 dělič svazku, 81, 112  
 délka Comptonova vlnová, 348  
 – koherenční 101  
 – vlnová světla, 26  
 deska Fresnelova zónová, 135  
 destička čtrtvlnová, 47, 261  
 – polovlnová, 259–260, 264  
 detektor, 327–333  
 – kvantový, 328  
 – fotoemisní, 328  
 – fotografický, 331  
 – fotovodivostní, 329  
 – fotovoltaiický, 330  
 – maticový, 331  
 – pyroelektrický, 327  
 – tepelný, 327  
 diagram stability laserového rezonátoru, 207  
 difrakce světla (ohyb), 115  
 – Fraunhoferova, 116  
 – kruhový otvor, 120–122  
 – mřížka, 223–228  
 – obdélníková apertura, 120  
 – řada štěrbin, 123–126  
 – štěrbin, 116–120  
 – Fresnelova, 126  
 – hrana, 140–141  
 – kruhová apertura, 131  
 – rentgenového záření, 146–148
- dichroismus, 50  
 dioda lavinová, 331  
 – pin, 331  
 – polovodičová, 326  
 – vakuová, 328  
 dioptrie, 183  
 dipól (elektrický), 263–272, 281–284  
 disperze, 37, 66, 69–70  
 – anomální, 70  
 – intermodová, 323  
 – materiálová, 323  
 – módová, 323  
 – normální, 70  
 – optické vlákno, 323–324  
 – úhlová, 221  
 divergence svazku, 300  
 doba života, 290  
 dráha optická, 82  
 duha, 217  
 dvojčočka Billetova, 79–80  
 dvojlom, 238, 252, 254  
 dynoda, 328
- eikonál, 159  
 eikonálová rovnice, viz rovnice eikonálová  
 Einsteinův koeficient, viz koeficient Einsteinův  
 elektrodynamika kvantová, 338  
 emise světla spontánní, 289  
 – stimulovaná, 289  
 emisivita, 339  
 energie elektromagnetického pole, 32, 350  
 – fotonu, 348  
 – zakázaného pásu, 326  
 etalon Fabry-Perotův, viz interferometr Fabry-Perotův  
 experiment Michelson-Morleyův, 80  
 – Youngův, 77–79, 102  
 expozice, 112, 192  
 extinkce světla, 288
- Fabry-Perotův interferometr, viz interferometr Fabry-Perotův  
 fáze vlny, 24  
 Fermatův princip, viz princip Fermatův



- film dielektrický, 81–87, 228
- fotografický, 109–12, 192
- hloubka ostrosti, 191–193
- kovový 81, 226
- polymerní, 50
- filtrace prostorová, 157–158,
- Fizeauovy interferenční proužky, viz proužky interferenční Fizeauovy
- fotoparát, viz přístroj fotografický
- fotodioda, 328, 330
- lavinová, 331
- LED, 326
- pin, 331
- fotoefekt, 328, 348
- fotokatoda, 328
- fotometrie, 16, 232–234
- foton, 348
- fotonásobič, 328–329
- kanálkový, 328
- Fourierova transformace, viz transformace Fourierova
- fourierovská (Fourierova) optika, viz optika fourierovská
- Fraunhoferova aproximace, viz aproximace Fraunhoferova
- difrakce, viz difrakce Fraunhoferova
- frekvence kruhová, 26
- plazmová, 69, 274–275
- prostorová, 152
- vlnění, 27
- Fresnel-Kirchhoffův difrakční integrál, viz integrál difrakční
- Fresnelova aproximace, viz aproximace Fresnelova
- difrakce, viz difrakce Fresnelova
- rovnice, viz rovnice Fresnelova
- Fresnelovy vzorce, viz vzorce Fresnelovy
- zóny, viz zóny Fresnelovy
- funkce Airyho, 90–91, 93
- Besselova, 121–122, 190
- Bose-Einsteinova, 341
- gaussovská (rozložení), 299–300
- korelační, 98
- Lorentzova, 279–280
- spektrální citlivosti oka, 233
- Gauss-Hermiteův svazek, viz svazek Gauss-Hermiteův
- gaussovská funkce (rozložení), viz funkce gaussovská
- gaussovský svazek, viz svazek gaussovský
- Gaussův tvar zobrazovací rovnice, viz zobrazovací rovnice
- generace druhé harmonické frekvence, 310, 317
- součtové a rozdílové frekvence, 309
- superkontinua, 313
- třetí harmonické frekvence, 310
- Glan-Thompsonův polarizátor, viz polarizátor Glan-Thompsonův
- Helmholtzova rovnice, viz rovnice Helmholtzova
- hloubka ostrosti, 192–193
- holografie, 109
- hologram, 109–114
- bodového zdroje, 113
- reflexní, 112
- hranol optický (disperzní), 222–223
- deviace, 222–223
- spektrální rozlišení, 223
- polarizační, 257–258
- Glan-Thompsonův, 258
- Rochonův, 257
- Wollastonův, 258
- hustota elektrického náboje, 20
- proudu, 20
- energie elektromagnetického pole, 32
- tepelného záření, 341
- optická, 40
- spektrální energie, 341, 344–346
- intenzity vyzařování, 347
- stavů světla, 341–344
- zářivého toku, 233
- vrypů, 226
- výkonu, 31, 325
- Huygens-Fresnelův princip, viz princip Huygens-Fresnelův
- Huygensův princip, viz princip Huygensův
- impedance, 26
- vakua, 26

- index lomu, 21, 35, 37, 270–272, 284–285
    - disperze, 66, 270
    - hlavní, 246
    - komplexní 35, 272–275
    - kovů, 273–274,
    - mimořádný (extraordinární), 246
    - nelineární, 311–312, 314
    - řádný (ordinární), 246
    - záporný, 38
  - indikatrix, 248–251, 265
  - indukce elektrická, 20
    - magnetická, 20
  - integrál difrakční, 116, 141–146
    - Fresnel-Kirchhoffův, 128, 141–146
    - Fresnelův kosinový, 138
    - sinový, 138
  - intenzita elektrická (elektrického pole), 20
    - magnetická (magnetického pole), 20
    - ozáření, 232
    - saturační, 294
    - světla, 31–32
    - v geometrické optice, 163–164
    - vyzařování, 346, 347
  - interakce světla s látkou, 266
  - interference světla, 72
    - dielektrická vrstva, 82–84
    - dvojsvazková, 73,
    - dělení amplitudy, 80
    - vlnplochy, 79
    - konstruktivní, 86, 267
    - kroužky, viz proužky interferenční
    - mnohosvazková, 88
    - obrazec, viz obrazec interferenční
    - polarizovaných svazků, 262
    - proužky, viz proužky interferenční
    - rovinných vln, 75–77
  - interferometr, 80, 228
    - Fabry-Perotův, 92–94, 228–231
    - konfokální, 231
    - skenovací, 231
    - Michelsonův, 80–82
    - stelární Michelsonův, 104
  - interval optický, 178, 186
    - volný spektrální, 225, 230
  - invariant Abbeův (rovnice), 170–172
    - Lagrangeův, 163
  - inverze obsazení, 295–296
  - jas, 234
  - jemnost, 90
  - jev (rozptyl) Comptonův, 348
    - fotoelastický, 263
    - fotovoltaiický, 330
    - Kerrův, 263–264
    - Purkyňův, 335
  - Jonesova matice, viz matice Jonesova
  - Jonesův vektor, 15, 45–49
  - kandela, 234
  - Kerrův jev, viz jev Kerrův
  - Kirchhoff-Fresnelův integrál, viz integrál difrakční
  - koeficient absorpční, 36–37, 278–280, 294
    - Einsteinův absorpce, 291
    - spontánní emise, 290
    - stimulované emise, 291
  - extinkční, 288
  - nelineárního indexu lomu, 312, 314
  - odrazu (reflexe), 55, 57
  - amplitudový, 55
  - intenzitní, 57
  - pohltivosti, 339
  - propustnosti (transmise), 55, 57
  - amplitudový, 55
  - intenzitní, 57
  - zesílení, 295–296
- koherence světla, 96
  - časová, 101, 108
  - prostorová, 101–104
- koma, 214
- kombinace dvou zobrazení, 178
- kompenzátor, 47, 258–262
  - Babinetův, 261
  - Soleil-Babinetův, 261
- komunikace optické, 319
- konstanta Boltzmannova, 293
  - časová doznívání, 290
  - Kerrova, 263–64
  - Planckova, 341
  - Stefan-Boltzmannova, 346
  - Wienova, 345
- konvence znaménková v geometrické optice, 169–170
- Kramers-Kronigovy relace, viz relace Kramers-Kronigovy

krátkozrakost, 336–337  
kritérium Nyquistovo, 319  
– Rayleighovo, 190  
kroužek (disk) Airyho, 122, 190  
kroužky Haidingerovy, 85

Lagrangeův invariant, viz invariant  
Lagrangeův

Lambert-Beerův zákon, viz zákon  
Lambert-Beerův

laser, 70, 295–303  
Laueho rovnice, viz rovnice Laueho  
látka dvojosá, 241  
– izotropní, 241  
– jednoosá, 241  
Lloydovo zrcadlo, viz zrcadlo Lloydovo  
Lorentz-Lorenzova rovnice, viz rovnice  
Lorentz-Lorenzova

lupa, 183–186  
lumen, 233  
lux, 234

#### matice

– ABCD (přenosová), 195  
– laserový rezonátor, 204  
– lom, 196  
– obecná optická soustava, 199–203  
– odraz, 196  
– tlustá čočka, 198  
– volné šíření, 195  
– Jonesova, 46–48  
– kompenzátor, 47  
– polarizátor, 48  
– koherenční, 44, 106–107  
– polarizační, viz matice koherenční  
– přenosová, viz matice ABCD  
Maxwellovy rovnice, viz rovnice  
Maxwellovy

metoda sledování paprsků, 168  
Michelson-Morleyův experiment, viz  
experiment Michelson-Morleyův  
Michelsonův interferometr, viz  
interferometr Michelsonův

mikroskop, 186–188  
– elektronový, 188  
– konfokální, 188  
– skenovací s blízkým polem, 188

model Drudeho (volných elektronů), 273  
– Lorentzův, 266–268  
– mikroskopický, 266  
mohutnost optická, 183  
moment dipólový, 268  
monochromátor, 220  
– Czerny-Turner, 220  
mřížka difrakční (ohybová, optická),  
126, 223–228  
– – blejzovaná (pilový profil), 226–227  
– – holografická, 76, 226  
– – Littrowovo uspořádání, 226  
– – rozlišení, 225–226  
– – rytá, 226  
– – volný spektrální interval vlnových  
délek, 225–226

Newtonovy zobrazovací rovnice  
(vztahy), viz rovnice Newtonovy

oblast spektrální, 18  
obrazec interferenční, 74  
obsazení (populace) hladin, 290  
odraz světla, 51–53  
– úplný (totální), 61–63  
odrazivost, 88  
– desky, 90–91  
– kovů, 273–276  
ohyb světla, viz difrakce světla  
oko, 333–336  
optická ohybová mřížka, viz mřížka  
difrakční  
optika fourierovská (Fourierova), 151–157  
– geometrická, 159  
– integrovaná, 324  
– nelineární, 295, 304–306  
– – 2. řádu, 305  
– – 3. řádu, 310  
– paraxiální, 210  
osa optická, 239  
oscilátor, 266–272, 276–278  
ostrost vidění (visus), 336  
osvětlení, 234

paprsek, 159, 162  
– mimořádný, 254  
– řádný, 254  
parametr konfokální, 299

pas svazku, viz gaussovský svazek  
pás valenční, 326, 329–330  
– vodivostní, 326, 329–330  
– zakázaných energií, 327, 329  
permeabilita magnetická, 20  
permitivita elektrická, 20  
– relativní, 20  
– – komplexní, 35  
pixel, 192, 331  
Planckova konstanta, viz konstanta  
Planckova  
Planckův zákon, viz zákon Planckův  
plocha konstantní amplitudy, 38  
– fáze, viz vlnoplocha  
– kulová, 170  
– normálová, 247  
– zrcadlová, 176  
podmínka Braggova, 148  
– okrajová (pole E a B), 53  
– – Kirchhoffova, 116, 144  
– – Sommerfeldova, 150  
– prahová laseru, 296  
Poissonova skvrna, viz skvrna  
Poissonova  
polarizace elektrická (vektor P), 20  
– světla, 41–50  
– – eliptická, 43  
– – kruhová, 43, 45  
– – lineární, 41, 44  
– – maticový popis, 44–49  
polarizátor, 48, 257–258  
– Glan-Thompsonův, 258  
– Rochonův, 257  
– Wollastonův, 258  
polarizovatelnost, 272  
Polaroid, 50  
pole daleké, 120, 130  
– lokální, 271  
polovodič, 326, 329  
poměr signálu k šumu, 333  
Poyntingův vektor, viz vektor  
Poyntingův  
práce výstupní, 348  
princip Babinetův, 129  
– Fermatův, 130, 166–168  
– Huygens-Fresnelův, 116–117  
– Huygensův, 115–116

princip korespondence, 349  
– superpozice, 28–29  
propustnost, 57  
– desky, 90–91  
– spektrální, 220, 223, 280, 284  
prostředí anizotropní, 20, 251–254  
– dielektrické, 20  
– homogenní, 20  
– izotropní, 20  
– nehomogenní, 20  
– vodivé, 35  
proužky interferenční (kroužky),  
81, 84, 101  
– – – delokalizované, 84  
– – – Fizeauovy, 86  
– – – Haidingerovy, 85  
– – – lokalizované, 85  
– – – ostrost, 101, 104  
– – – stejné tloušťky, 85–86  
– – – stejného sklonu, 87, 84–85  
průřez rozptylový, 286  
přechod p-n, 326, 330  
přístroj fotografický, 191–193  
– spektrální, 219

radiance (zář), 232  
radiometrie, 232–234  
Rayleighovo kritérium, viz kritérium  
Rayleighovo  
Rayleighův rozptyl, viz rozptyl  
Rayleighův  
reprezentace komplexní, 29–31  
retina, 334  
rezonátor laserový (optický), 203–207  
– – konfokální, 207, 231  
– – nestabilní, 206  
– – stabilní, 206  
rovina dopadu, 53  
– Gaussova, 30  
– hlavní, 172  
– hlavního řezu, 247  
– ohnisková, 173  
rovnice Abbeova, 170, 211  
– Clausius-Mossottiho, 272  
– čočková, 193, 337  
– eikonálová, 162  
– Einsteinova (fotoefekt), 348

- rovnice Fresnelova, 244–245, 265
- Helmholtzova, 26
- paraxiální, 39
- Laueho, 148
- Lorentz-Lorenzova, 272
- Maxwellovy, 19, 160
- mřížková, 126, 224
- paprsková, 165–166
- Schrödingerova, 39
- vlnová, 19–23
- vlnová Helmholtzova, viz rovnice Helmholtzova
- výrobců čoček, 182
- zobrazovací, 169, 174–175
- Gaussova, 174
- Newtonovy, 175
- rozlišení časové, 219
- fotografické, 192
- mikroskopu, 187–188
- oka, 336
- spektrální (rozlišovací schopnost), 220–222
- Fabry-Perotova interferometru, 228–230
- hranolu, 223
- mřížky, 224–226
- teleskopu, 190–191
- zobrazovacího přístroje, 187
- rozptyl světla, 286, 288
- Rayleighův, 286, 288
- rentgenového záření, 348
- rychlost světla,
- fázová, 21–22, 68, 244
- grupová, 69
- disperze, 324
- odezvová detektoru, 333
- paprsková, 243
- řád difrakční, 158, 224
- duhy, 217
- interferenční Fabry-Perotova interferometru, 230
- samofokusace, viz autofokusace
- saturace absorpce, 294
- Seidelovy aberace, viz aberace Seidelovy sfázování, 307, 308, 309
- Schrödingerova rovnice, viz rovnice Schrödingerova
- signál komplexní analytický, 70
- skvrna Poissonova, 134
- Snellenův test, viz test Snellenův
- Snellův zákon, viz zákon Snellův
- soliton, 314, 324
- soustava optická aplanatická, 214
- spektrometr, 219–221, 226
- spektrograf, 220
- spektrum absorpční, 280
- elektromagnetického záření, 19
- elektromagnetických vln, 18–19
- spirála Cornuova, 137, 139–141
- Stefan-Boltzmannova konstanta, viz konstanta Stefan-Boltzmannova
- Stefan-Boltzmannův zákon, viz zákon Stefan-Boltzmannův
- stočení roviny polarizace světla, 260, 264
- stupeň koherence komplexní, 98
- susceptibilita elektrická, 20
- svazek Gauss-Hermiteův, 303
- gaussovský (Gaussův), 299–301, 312–313
- fokusace, 301
- pas, 300–301
- šířka svazku (poloměr), 299
- laserový, 299, 312
- lomený, 56
- mimořádný (extraordinární), 248, 254, 257
- řádný, 257
- světlo bílé, 66
- koherentní, 101
- kvazimonochromatické, 66
- monochromatické, 64
- nekoherentní, 101
- nepolarizované (přirozené), 44, 107
- úplně polarizované, 107
- svítivost, 234
- šířka čáry, plná v polovině maxima, 280
- koherence, 103
- šum, 333
- teleskop, 189–191
- Galileův, 189–190
- Keplerův, 189–190
- tenzor permitivity, 239–244
- susceptibility, 20, 305

teorém Kirchhoff-Helmholtzův

integrální, 143

termistor, 327

termočlánek, 327

test Snellenův, 336

těleso absolutně černé, 339

tloušťka optická, 95

tok světelný, 233

– zářivý, 232

transformace Fourierova, 65, 151–157

tyčinka (oko), 335

účinnost kvantová detektoru, 333

úhel akceptační, 320

– Braggův, 112

– Brewsterův, 57–59

– dopadu, 53

– – kritický, 59, 320

– lomu, 53

– odrazu, 53

usměrnění optické, 306, 317

útlum optického vlákna, 322

vada zobrazení, viz aberace

Van Cittert-Zernikeova věta, 104

vápenec, 238, 247, 257

vektor Jonesův, 45–49

– paprskový, 162, 242

– Poyntingův, 31–32, 163

– vlnový, 26

věta Greenova, 142, 149

– Poyntingova, 240

– van Cittert-Zernikeova, 104

viditelnost proužků (ostrost), 101

vlákno (optické), 319

– disperze, 323

– jednomodové, 322

– módy, 323

– útlum, 322

vlna cylindrická, 136

– dopadající, 51, 56

– evanescentní, 62

– harmonická, 22, 26–28

– homogenní, 22

– kulová (sférická), 22, 33–35

– kvazimonochromatická, 64–71

– monochromatická, 26

vlna nehomogenní, 38

– odražená, 51, 56

– prošlá, 51, 56

– příčná, 25

– rovinná, 22–32

– řádná, 247

– sférická, viz vlna kulová

– skalární, 22

– stojatá, 77, 95

vlnočet, 39

vlnoplocha, 22

– ve smyslu geometrické optiky, 162

vlnovod planární, 321

vodivost elektrická, 20

vrstva antireflexní (protiodrazná), 86–88

– dielektrická, 82

– ochuzená, 330

vzdálenost konvenční zraková, 184, 335

– ohnisková čočky, 156, 182

– – kombinace zobrazení, 181

– – kulového rozhraní, 174

– – zrcadla, 176

vzorec Cauchyho, 271

vzorce Fresnelovy, 55, 62

– Sellmeierův, 270

vztahy Kramers-Kronigovy, 270

– Stokesovy, 89

Wienova konstanta, viz konstanta

Wienova

Wienův (posunovací) zákon, viz zákon

Wienův

Youngův experiment, viz experiment

Youngův

zákon absorpční, viz Lambert-Beerův

– Boltzmannův, 293

– Kirchhoffův, 340–341

– Lambert-Beerův, 36, 279

– lomu, viz zákon Snellův

– odrazu, 53

– Planckův, 344, 350

– Snellův, 53, 208

– – pro paprsek, 163

– Stefan-Boltzmannův, 346

– Wienův posunovací, 345

zář, viz radiance

- záření černého tělesa, viz záření tepelné
- dipólu, 57, 281
- optické, 18
- rentgenové, 146, 348
- tepelné, 338
- zářivost, 232
- závěrka Kerrova, 264
- zdroj Lambertův, 234
- plošný, 232
- zisk optický, 288, 323
- zklenutí pole (obrazu), 215
- zkreslení obrazu, 214
- – poduškovité, 215
- – soudkovité, 215
- zóny Fresnelovy, 131
- – kulová vlnoplocha, 131–136
- – válcová vlnoplocha, 136
- zpracování obrazu, 58
- zrcadlo, 176
- interferometru, 92–95
- kulové, 176
- laserového rezonátoru, 204–206
- Lloydovo, 80
- spektrometru, 220–222
- zvětšení dalekohledu, 189–191
- lupy, 184–186
- mikroskopu, 187
- optického přístroje, 184, 189
- podélné, 177–178
- příčné, 177–178
- – kulové rozhraní, 172, 175
- – zrcadlové plochy, 176–177
- úhlové, 177–178

Učebnice vznikla na základě přednášky z optiky pro studenty fyziky na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Snahou autora bylo napsat text, který by byl úvodem pro další studium optiky, ale také zdrojem informací o optice pro studenty, kteří se v budoucnu budou věnovat jiným oborům. Učebnice je zaměřena na klasickou (tedy ne kvantovou) optiku, která je tradiční součástí univerzitního základního kurzu fyziky. Nezůstává jen u obvyklých oblastí (elektromagnetická povaha světla, geometrická optika, interakce světla s látkou, ohyb, interference a koherence světla), ale zahrnuje zároveň, i když někdy jen stručně, některá modernější témata (fourierovská optika, vláknová a nelineární optika, laserová fyzika).

Prof. RNDr. PETR MALÝ, DrSc., je profesorem kvantové optiky a optoelektroniky na Karlově univerzitě v Praze. Na katedře chemické fyziky a optiky Matematicko-fyzikální fakulty vede oddělení kvantové optiky a optoelektroniky. Jeho hlavním odborným zájmem je ultrarychlá (femtosekundová a pikosekundová) laserová spektroskopie, zaměřená zejména na studium rychlých procesů v polovodičových materiálech a jejich nanostrukturách. Řadu let přednáší optiku, laserovou fyziku a spektroskopii.

<http://cupress.cuni.cz>

ISBN 978-80-246-1342-0



9 788024 613420