VLNĚNÍ, OPTIKA A ATOMOVÁ FYZIKA

(Základní kurs fyziky FJFI)

J. Tolar

Předmluva

Tato skripta v elektronické formě jsou určena jako studijní pomůcka k předmětu Vlnění, optika a atomová fyzika, který je zařazen jako součást základního kursu fyziky ve druhém ročníku studia na fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské Českého vysokého učení technického v Praze. Obsah navazuje na předchozí přednášky základního kursu fyziky — Mechaniku, Termiku a molekulární fyziku a Elektřinu a magnetismus.

Výklad je zhuštěný, provázen poznámkami a odkazy, jak to odpovídá potřebám samostatného studia. Při studiu se předpokládá souběžné doplňování samostatným řešením úloh a studiem řešených příkladů obsažených ve skriptech J. Tolar, J. Koníček: Sbírka řešených příkladů z fyziky (vlnění) [1].

Skripta vycházejí z dlouholeté přednáškové činnosti autora a také ze zkušeností dalších učitelů katedry fyziky FJFI. Autor skript děkuje Doc. RNDr. Z. Maršákovi, CSc. a dalším, kdo svými kritickými připomínkami přispěli k odstranění nedostatků. Zvláště pak děkuje panu T. Černochovi, A. Honsovi a F. Hanzlíkovi za obětavou práci při přípravě elektronické formy textu včetně obrázků.

Autor

Návod

Cílem studia není jen reprodukovat to, co slyšíte na přednášce. Čas Vámi strávený na přednáškách je velmi cenný a proto se ho snažte využít co nejefektivněji. Úkolem přednášky je poskytnout kostru učiva, která Vás má vést při samostatném studiu nových pojmů a metod v tomto základním fyzikálním předmětu. Tato skripta podávají podrobný popis přednášené látky. Protože je třeba, abyste dobře zvládli aplikace učiva na rozmanité praktické úlohy, studujte současně skriptum [1], které obsahuje rozsáhlý soubor řešených příkladů i neřešených úloh a představuje hlavní pomůcku pro cvičení.

Lze doporučit, abyste se již před přednáškou zběžně seznámili s partií, která přijde na řadu. I když to nestihnete, snažte se na přednáškách pochytit hlavní myšlenky. Textu skript pak lépe porozumíte. Při studiu používejte tužku a papír, doplňujte vynechané kroky a nezapomeňte řešit příklady ! Teprve aplikace studované látky na příkladech Vám ukáže, zda jste jí dobře porozuměli.

Dovolím si ještě obecnou poznámku. Pro jaderné a fyzikální inženýrství potřebujete fyzikální vzdělání založené na znalosti fyzikálních principů. Motivaci k oboru máte, avšak potřebujete hlavně soustavnost a pracovitost. Znalosti oboru budete v budoucnu dále rozvíjet a celý život se učit novému. Uvědomte si, že vzdělání nejsou jen kusé informace, ale znalosti založené na soustavném studiu od základů a s plným porozuměním.

Obsah

1 Kmity soustav hmotných bodů **5**
- 1.1 Netlumené malé kmity kolem stabilní rovnovážné polohy 5
- 1.2 Kmity struny 13
- 1.3 Příčné kmity řetízku atomů 18
- 1.4 Vynucené kmitání tlumených soustav pod vlivem harmonické budící síly 21

2 Postupné vlny **26**
- 2.1 Postupné vlny na struně 26
- 2.2 Harmonická postupná vlna 28
- 2.3 Rovinná vlna 29

3 Vlny v disperzním prostředí **32**
- 3.1 Disperze světla v látkách 32
- 3.2 Elektromagnetické vlny v plazmatu 35
- 3.3 Řetízek atomů jako reaktivní prostředí 37
- 3.4 Vlnové balíky 37
- 3.5 Fourierova transformace 41
- 3.6 Šíření vlnového balíku v disperzním prostředí 43

4 Energie vlnění **46**
- 4.1 Energetické veličiny pro strunu 46
- 4.2 Energetické poměry v postupné vlně 49

5 Odraz vln **52**
- 5.1 Korektní zakončení struny 52
- 5.2 Odraz na nekorektním zakončení 53
- 5.3 Vlna na rozhraní dvou transparentních prostředí 54
- 5.4 Napěťové a proudové vlny na homogenním vedení 56

6 Elektromagnetické vlny **60**
- 6.1 Rovinné elektromagnetické vlny 60
- 6.2 Energetické veličiny v rovinné elektromagnetické vlně 63
- 6.3 Elektromagnetické vlny na rozhraní 66
- 6.4 Elektromagnetická vlna vyzařovaná elektrickým dipólem 67
- 6.5 Rozdělení elektromagnetických vln 70

7 Polarizace **71**
7.1 Popis polarizace monochromatické elektromagnetické vlny 71
7.2 Určení polarizačního stavu měřením souboru intenzit 75
7.3 Polarizované elektromagnetické vlny v látkách 78
7.4 Časová koherence a polarizace 89

8 Interference a difrakce **95**
8.1 Michelsonův interferometr 95
8.2 Babinetův princip 98
8.3 Youngův pokus a prostorová koherence 100
8.4 Difrakční mřížka 106
8.5 Difrakce na štěrbině 110

9 Geometrická optika **116**
9.1 Přechod od optiky vlnové ke geometrické 116
9.2 Fermatův princip 119
9.3 Zrcadla, čočky 123
9.4 Lineární zobrazovací soustavy 130

Kapitola 1

Kmity soustav hmotných bodů

1.1 Netlumené malé kmity kolem stabilní rovnovážné polohy

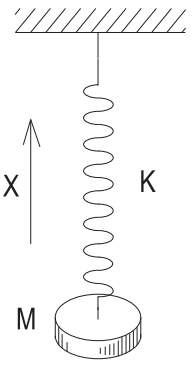
Soustavy s jedním stupněm volnosti; linearita a princip superpozice. Mechanické soustavy s n stupni volnosti; pojem rovnovážné konfigurace; módy; normální souřadnice.

Soustavy s jedním stupněm volnosti Základem vlnových jevů jsou netlumené kmity především lineárních soustav. S kmity se setkáváme ve všech fyzikálních oborech. Namátkou uveďme molekulární spektra, elektrické kmitavé obvody, akustiku, vlny na vodě, seismické vlny. Zopakujme si nejprve několik příkladů netlumených kmitavých soustav s jedním stupněm volnosti.

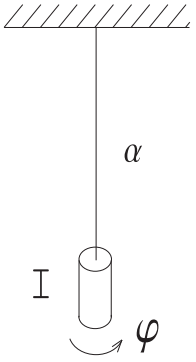
Příklad 1. *Těleso na pružině.* Těleso o hmotnosti m, které se pohybuje pod vlivem pružiny o tuhosti k bez tření po vodorovné podložce, má pohybovou rovnici

$$m\ddot{x} = -kx, \tag{1.1}$$

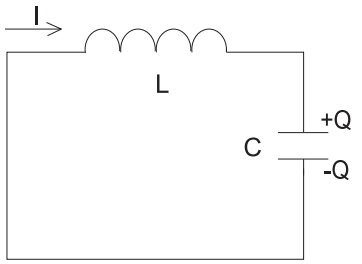
kde x je výchylka tělesa z rovnovážné polohy.



Obrázek 1.1: Těleso na pružině



Obrázek 1.2: Torzní kmity



Obrázek 1.3: LC-obvod

Příklad 2. *Torzní kmity.* Těleso zavěšené na vlákně délky l vykonává netlumené otáčivé torzní kmity podle pohybové rovnice

$$I\ \ddot{\varphi} = -\frac{\alpha}{l}\varphi, \tag{1.2}$$

kde φ je úhel otočení tělesa z rovnovážné polohy $\varphi = 0$, I je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení a $\alpha = \pi G r^4/2$ je konstanta určená poloměrem vlákna r a jeho modulem pružnosti ve smyku G.

Příklad 3. *LC-obvod.* Podle II. Kirchhoffova zákona platí pro napětí na kondenzátoru a cívce rovnost

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{Q}{C}, \tag{1.3}$$

kde náboj na kondenzátoru $Q = CU = \int i\mathrm{d}t$. Zderivováním rovnice (1.3) podle času tedy dostaneme

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{i}{C}. \tag{1.4}$$

Uvedené příklady vykazují matematickou zákonitost stejného typu, tzv. *matematickou analogii* úloh různé fyzikální podstaty. Všechny pohybové rovnice jsou typu obyčejné diferenciální rovnice, *lineární,* 2. řádu, s konstantními koeficienty:

$$\ddot{\psi} + 2\delta\dot{\psi} + \omega^2\psi = 0. \tag{1.5}$$

Nulová hodnota konstanty tlumení $\delta = 0$ vyjadřuje zanedbání odporu prostředí.

Význačnou vlastností řešení $\psi(t)$ lineární rovnice (1.5) je **princip superpozice:**

Jsou-li ψ_1, ψ_2 dvě řešení (1.5), je řešením i každá jejich lineární kombinace $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$, kde c_1, c_2 jsou libovolné konstanty.

Obecné řešení diferenciální rovnice

$$\boxed{\ddot{\psi} + \omega^2\psi = 0,} \tag{1.6}$$

tj. řešení závislé na 2 libovolných reálných konstantách, se obvykle zapisuje v jedné ze tří ekvivalentních forem

$$\begin{aligned} \psi(t) &= A\cos(\omega t + \varphi) && (1.7)\\ &= a\cos\omega t + b\sin\omega t && (1.8)\\ &= C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}. && (1.9) \end{aligned}$$

Mezi konstantami se snadno odvodí vztahy (odvoďte!):

$$A = \sqrt{a^2+b^2},\ \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \tag{1.10}$$

$$C_1 = \frac{a - ib}{2} = \bar{C}_2. \tag{1.11}$$

Konkrétní hodnoty dvojice libovolných integračních konstant se určují ze dvou počátečních podmínek, obvykle v čase $t = 0$:

$$\begin{aligned} \psi(0) &= x_0 && (1.12)\\ \dot{\psi}(0) &= v_0. && (1.13) \end{aligned}$$

Cvičení. Vypočtěte A, φ pomocí x_0, v_0 !
Zopakujte si názvosloví:

A	=			amplituda kmitů
ω	=			úhlová frekvence $[s^{-1}]$
ν	=	$\omega/2\pi$	=	frekvence $[Hz]$
T	=	$1/\nu$	=	perioda $[s]$
φ	=			fázová konstanta [bezrozměrná].

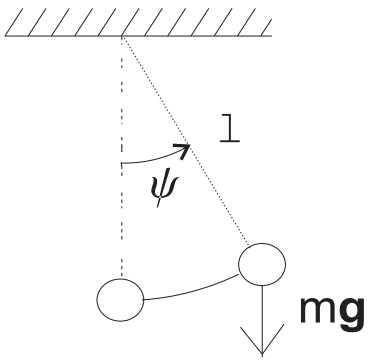
Všimněte si, že velikost $\omega^2 = k/m$ v Př. 1 může být slovy vyjádřena jako *vratná síla vztažená na jednotkové posunutí a jednotkovou hmotnost.*

Příklad 4. *Matematické kyvadlo.* Pohybová rovnice pro úhel ψ

$$Ml\ddot{\psi} = -Mg\sin\psi \tag{1.14}$$

je nelineární, ale pro malé výchylky $\psi << 1$ kolem rovnovážné polohy $\psi = 0$ může být rovnice linearizována, tj. přibližně nahrazena lineární rovnicí

$$\ddot{\psi} + \frac{g}{l}\psi = 0. \tag{1.15}$$



Obrázek 1.4: Matematické kyvadlo

Matematická poznámka. Obyčejná diferenciální rovnice

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0} \tag{1.16}$$

je lineární s konstantními koeficienty. Řešení diferenciálních rovnic tohoto typu vychází z vlastnosti funkce e^t,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^t = \mathrm{e}^t. \tag{1.17}$$

1. Předpokládaný tvar řešení

$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \tag{1.18}$$

dosadíme do (1.16),

$$(\lambda^2 + \omega^2)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0. \tag{1.19}$$

2. Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \tag{1.20}$$

má kořeny

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega, \quad \omega > 0. \tag{1.21}$$

3. Získali jsme **fundamentální systém** lineárně nezávislých řešení rovnice (1.16)

$$\{\mathrm{e}^{i\omega t}, \mathrm{e}^{-i\omega t}\}. \tag{1.22}$$

4. Obecné řešení (závislé na 2 libovolných reálných konstantách) obdržíme pomocí principu superpozice

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{i\omega t} + C_2\mathrm{e}^{-i\omega t}, \quad C_2 = \bar{C_1}. \tag{1.23}$$

Mechanické soustavy s n stupni volnosti. Budeme studovat netlumené kmity, které vznikají při malých výchylkách konservativní soustavy z její stabilní rovnovážné konfigurace.

Uvažujme tedy konservativní soustavu o n stupních volnosti, jejíž potenciál U je funkcí (kartézských) souřadnic $x_1, \ldots, x_n$. Pohybové rovnice soustavy zapíšeme ve tvaru

$$m_i \ddot{x}_i = F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \tag{1.24}$$

kde m_i jsou hmotnostní konstanty příslušné souřadnicím x_i. Soustava je podle definice v konfiguraci $x_{01}, \ldots, x_{0n}$ v *rovnováze,* jestliže síly na ni působící jsou v této *rovnovážné konfiguraci* rovny nule,

$$F_i|_{\text{rovn. konfig.}} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}(x_{01}, \ldots, x_{0n}) = 0. \tag{1.25}$$

To znamená, že v rovnovážné konfiguraci nabývá U stacionární (extremální) hodnoty. Rovnovážná konfigurace se nazývá *stabilní,* jestliže pohyb vlivem malé poruchy neopustí jisté okolí rovnovážné konfigurace (z nestabilní konfigurace se soustava při malém vychýlení vychyluje dále). Rovnováha je stabilní v těch stacionárních bodech potenciálu U, které odpovídají *lokálnímu ostrému minimu.* Při malých výchylkách z rovnovážné polohy potenciální energie roste a síla vrací systém do rovnovážné polohy. Pohyb vlivem malé poruchy pak nevyjde z malého okolí rovnovážné konfigurace soustavy. Není-li extrém ostrým minimem, existují směry výchylek, v nichž se potenciální energie nezvětšuje; v těchto směrech se soustava může při malé poruše neomezeně vzdalovat.

Jelikož chceme pohybové rovnice soustavy linearisovat v bezprostředním okolí rovnovážné konfigurace $x_{01}, \ldots, x_{0n}$, použijeme Taylorův rozvoj funkce U n proměnných kolem bodu $(x_{01}, \ldots, x_{0n})$ do 2. řádu včetně:

$$\begin{aligned} U(x_1, \ldots, x_n) &= U(x_{01}, \ldots, x_{0n}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(x_{01}, \ldots, x_{0n})(x_i - x_{0i}) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}(x_{01}, \ldots, x_{0n})(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) + \ldots, \end{aligned} \tag{1.26}$$

Zde člen lineární ve výchylkách $x_i - x_{0i}$ je podle (1.25) roven nule a nultý člen můžeme položit rovným nule (volba bodu nulového potenciálu). Při zanedbání členů od 3. řádu můžeme tedy potenciál přibližně zapsat jako kvadratickou formu

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} U_{ij} \xi_i \xi_j \tag{1.27}$$

v proměnných $\xi_i = x_i - x_{0i}$ s konstantními koeficienty

$$U_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}(x_{01}, \ldots, x_{0n}) = U_{ji}, \tag{1.28}$$

které tvoří *symetrickou matici* (U_{ij}). Podmínka minima znamená, že matice (U_{ij}) je *positivně definitní* (tj. příslušná kvadratická forma (1.27) je positivně definitní). Připomeňte si [5] též Sylvestrovo kriterium, podle něhož všechny rohové subdeterminanty musí být positivní !

Pohybové rovnice (1.24), (1.27) po substituci $x_i = \xi_i + x_{0i}$ mají tvar

$$m_i\ddot{\xi}_i + \sum_{j=1}^{n} U_{ij}\xi_j = 0,\ i = 1, \ldots, n. \tag{1.29}$$

Tato soustava obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu s konstantními koeficienty určuje malé kmity soustavy kolem rovnovážné polohy $\xi_1 = \ldots = \xi_n = 0$. Rovnice (1.29) mají řešení typu $e^{\lambda t}$ a v našem případě — bez tlumení — speciálně typu $\exp(\pm i\omega t)$ nebo $\cos(\omega t + \varphi)$.

Pro určení řešení postupem podle Matematické poznámky zapišme soustavu (1.29) v maticovém tvaru. Zavedeme–li konstantní matice

$$A = (m_i\delta_{ij}), \quad B = (U_{ij}) \tag{1.30}$$

a sloupcový vektor ξ, kde $\xi^T = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, lze soustavu (1.29) zapsat ve tvaru

$$A\ddot{\xi} + B\xi = 0 \tag{1.31}$$

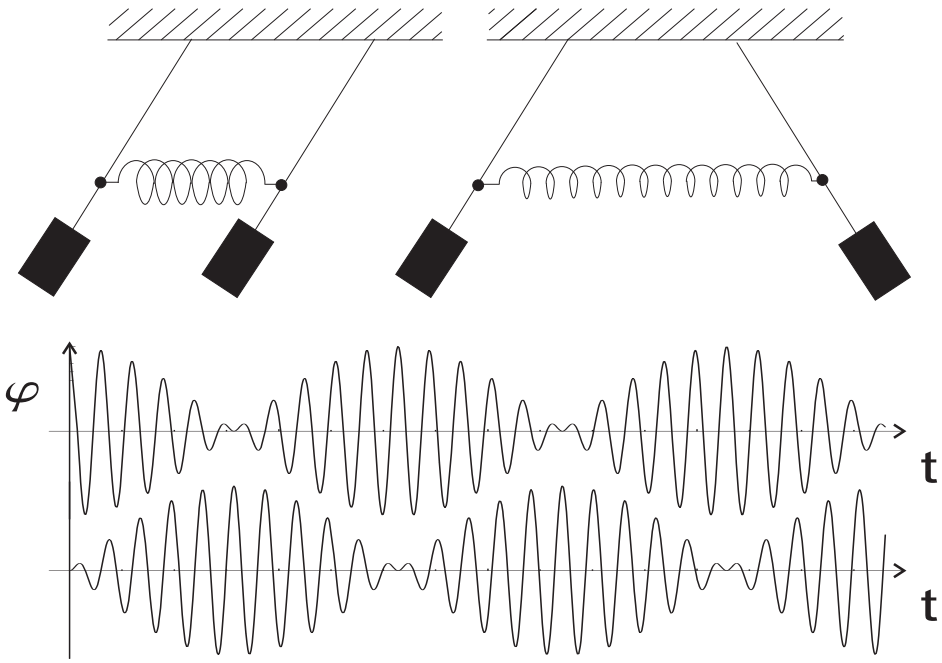
(A, B jsou matice $n \times n$, symetrické a positivně definitní).

1. Hledejme řešení ve tvaru
$$\xi(t) = X\cos(\omega t + \varphi), \tag{1.32}$$
kde amplituda X je konstantní sloupcový vektor. V takovém řešení, které ve fyzice nese název *mód* (česky též *vid*) soustavy, *všechny části soustavy kmitají se stejnou frekvencí ω a ve fázi.*

2. Po dosazení (1.32) do soustavy (1.31) obdržíme homogenní systém
$$(-\omega^2 A + B)X = 0 \tag{1.33}$$
n lineárních rovnic pro určení n neznámých amplitud X_i. Tato rovnice má nenulové řešení, jen když
$$det(B - \omega^2 A) = |U_{ij} - \omega^2 m_i\delta_{ij}| = 0, \tag{1.34}$$
To je tzv. *sekulární rovnice* pro určení *vlastních frekvencí soustavy.* Jako algebraická rovnice n–tého stupně pro ω^2 má n kořenů $\omega_1^2, \ldots, \omega_n^2$. Všechny jsou positivní v důsledku positivní definitnosti matic A, B.

3. Dosadíme–li jednotlivé kořeny ω^2 do systému (1.33) a určíme (normalizovaná) řešení $X^{(k)}$, získáme *fundamentální systém* lineárně nezávislých řešení soustavy diferenciálních rovnic (1.31)
$$\{X^{(1)}\cos(\omega_1 t + \varphi_1), \ldots, X^{(n)}\cos(\omega_n t + \varphi_n)\}. \tag{1.35}$$
Vektory amplitud $X^{(k)}$ určují *tvary módů.*

4. Obecné řešení (závislé na $2n$ libovolných reálných konstantách) obdržíme pomocí principu superpozice
$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k X^{(k)}\cos(\omega_k t + \varphi_k). \tag{1.36}$$



Obrázek 1.5: Módy vázaných oscilátorů (kyvadel): (a) Pro $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$, $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$ jsou výchylky kyvadel jsou stále shodné; (b) Pro $\varphi_1(0) = -\varphi_2(0)$, $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$ se výchylky kyvadel liší jen znaménkem; (c) Při jiných počátečních podmínkách se módy superponují. Při jakých počátečních podmínkách vzniká situace naznačená na grafu?

Další podrobnosti o řešení úlohy *současné diagonalizace dvojice symetrických matic A, B* naleznete např. v klasické učebnici [4]. Najdete tam vysvětlení, že kvadráty frekvencí módů ω_k^2 jsou vlastními čísly úlohy

$$BX = \omega^2 AX \tag{1.37}$$

a tvary módů $X^{(k)}$ jsou vlastními vektory této úlohy. Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou zde ortogonální vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(X, Y)_A = \sum_{i,j=1}^{n} X_i A_{ij} Y_j = \sum_{i=1}^{n} m_i X_i Y_i \tag{1.38}$$

(viz [5], příklady 592 –594). Normu definovanou tímto skalárním součinem pak lze použít k normalizaci vlastních vektorů.

Systém normalizovaných vlastních vektorů $X^{(k)}$ představuje význačnou ortogonální bázi v R^n. Kartézské souřadnice v nových směrech $X^{(k)}$ se nazývají **normální souřadnice** η_k. Lineární (A–ortogonální) transformace od souřadnic ξ_i ve standardní bázi k normálním souřadnicím η_k v bázi vlastních vektorů je

$$\xi = C\eta, \quad \text{kde} \quad C_{ij} = X_i^{(j)}. \tag{1.39}$$

Ověřte si (viz též [4]), že transformace C provádí současnou diagonalizaci matic A, B:

$$C^T AC = I, \quad C^T BC = \Lambda, \tag{1.40}$$

kde $\Lambda = \mathrm{diag}(\omega_1^2, \ldots, \omega_n^2)$. V důsledku transformačních vzorců (1.40) se pohybové rovnice (1.31) po vynásobení C^t zleva dají upravit na tvar

$$C^T(A\ddot{\xi} + B\xi) = C^T AC\ddot{\eta} + C^T BC\eta = \ddot{\eta} + \Lambda\eta = 0, \tag{1.41}$$

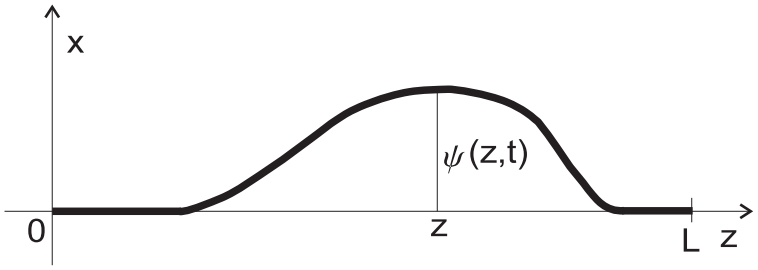
neboli

$$\boxed{\ddot{\eta}_k + \omega_k^2 \eta_k = 0.} \tag{1.42}$$

To znamená, že

> *v normálních souřadnicích se soustava jeví jako systém nezávislých harmonických oscilátorů.*

Shrnutí. *Kmitající soustava s n stupni volnosti má právě n módů. Je-li v soustavě vybuzen pouze jeden mód, např. k-tý s úhlovou frekvencí ω_k, pak všechny její stupně volnosti kmitají se stejnou frekvencí $\nu_k = \omega_k/2\pi$, ve fázi (rovnovážnými polohami procházejí současně) a tvar módu je dán poměrem amplitud jednotlivých stupňů volnosti. V daném módu na každý stupeň volnosti působí táž vratná síla na jednotkovou výchylku a jednotkovou hmotnost, rovná ω_k^2. Každá soustava o n stupních volnosti, která vykonává malé netlumené kmity kolem rovnovážné polohy, je ekvivalentní soustavě n nezávislých harmonických oscilátorů.*



Obrázek 1.6: Struna

1.2 Kmity struny

Odvození vlnové rovnice pro strunu. Stojaté vlny jako módy. Okrajové podmínky, vlastní funkce a vlastní frekvence. Počáteční podmínky a Fourierovy řady. Obecný pohyb struny.

Vlnová rovnice pro strunu. Jestliže soustava obsahuje velmi mnoho pohyblivých částí (1 mol vzduchu obsahuje $N_A \approx 6.10^{23}$ molekul) a jestliže pohyb sousedících částí je téměř stejný, pak můžeme výchylky z rovnovážných poloh (x, y, z) popsat vektorovým polem

$$\boldsymbol{\psi}(x, y, z, t) = (\psi_x(x, y, z, t), \psi_y(x, y, z, t), \psi_z(x, y, z, t)),$$

jež je spojitou funkcí polohy a času. Vzhledem k jejímu interpolačnímu charakteru můžeme předpokládat, že je i dostatečně hladká (diferencovatelná). Vztah kmitů diskretní soustavy a její spojité aproximace budeme zkoumat v oddílu 1.3.

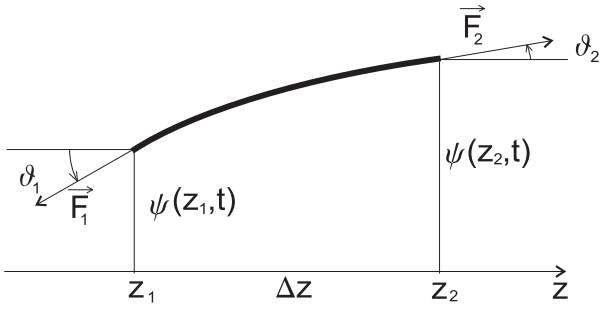
Pro jednoduchost se omezíme na jednorozměrnou modelovou soustavu, *strunu.* Pod strunou rozumíme dostatečně tenké pružné vlákno, které klade zanedbatelný odpor vůči ohýbání. Strunu si znázorníme podle obr. 1.6 napjatou silou T v rovnovážné poloze podél osy z mezi body 0 a L. Budeme uvažovat pouze příčné výchylky $\psi(z, t)$ ve směru osy x. Nechť ϱ označuje konstantní lineární hustotu struny. Pak pohybová rovnice pro krátký úsek struny délky Δz mezi body z_1 a z_2 (viz obr. 1.7) se dostane z I. věty impulsové (zopakujte si ji!) [1]

$$\frac{\mathrm{d}P_x}{\mathrm{d}t} = F_x^{(e)} \overset{obr1.7}{=\!=} F_{1x} + F_{2x} = -|\boldsymbol{F}_1| \sin\vartheta_1 + |\boldsymbol{F}_2| \sin\vartheta_2. \tag{1.43}$$

Abychom dospěli k výsledné příčné síle *lineární v* $\psi(z, t)$, budeme předpokládat, že výchylky jsou velmi malé, takže platí (srovnej [1], př. 1.1)

1. $|\boldsymbol{F}_1| = |\boldsymbol{F}_2| = T$,
2. $\vartheta_1, \vartheta_2 \ll 1$.

[1] *I. věta impulsová.* Pro soustavu hmotných bodů m_α, $\alpha = 1, \ldots, N$ pod vlivem vnitřních sil (splňujících zákon akce a reakce) a vnějších sil $\boldsymbol{F}_\alpha^{(e)}$ je časová změna úhrnné hybnosti soustavy rovna výslednici vnějších sil $\boldsymbol{F}^{(e)} = \sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^{(e)}$. Vzhledem k tomu, že $\boldsymbol{P} = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\boldsymbol{r}}^\alpha$ lze jednoduše vyjádřit pomocí radiusvektoru těžiště $\boldsymbol{R} = 1/M \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{r}^\alpha$, kde $M = \sum_\alpha m_\alpha$, jako $\boldsymbol{P} = M\dot{\boldsymbol{R}}$, můžeme I. větu impulsovou zapsat $M\ddot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{F}^{(e)}$.



Obrázek 1.7: K odvození vlnové rovnice

Potom $F_x^{(e)} \doteq -T\mathrm{tg}\vartheta_1 + T\mathrm{tg}\vartheta_2 = T\left[\frac{\partial\psi}{\partial z}(z_2,t) - \frac{\partial\psi}{\partial z}(z_1,t)\right]$ a pomocí Lagrangeovy věty $f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a), a<\xi<b$, dostaneme pravou stranu pohybové rovnice

$$F_x^{(e)} \doteq T\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}(z_0,t)\Delta z; \qquad z_1 < z_0 < z_2. \tag{1.44}$$

Levá strana pohybové rovnice je

$$\frac{\mathrm{d}P_x}{\mathrm{d}t} = \Delta m\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(z_{CM},t) = \varrho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(z_{CM},t)\Delta z, \tag{1.45}$$

kde z_{CM} je souřadnice těžiště (center of mass). Po vykrácení Δz provedeme limitu $z_2 \to z_1$, přičemž $z_{CM} \to z_1, z_0 \to z_1$. Nakonec píšeme z místo z_1:

$$\boxed{\varrho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(z,t) = T\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}(z,t).} \tag{1.46}$$

Tato *vlnová rovnice pro strunu* je pohybovou rovnicí pro všechny *vnitřní body* struny $z \in (0,L)$. Musíme ji proto doplnit ještě *okrajovými podmínkami*, které vyjadřují tzv. *pevné konce*[2] :

$$\psi(0,t) = 0 = \psi(L,t), \quad t \in \boldsymbol{R}. \tag{1.47}$$

Stojaté vlny jako módy.

1. Při řešení vlnové rovnice (1.46) pomocí módů předpokládáme tvar řešení

$$\psi(z,t) = X(z)\cos(\omega t + \varphi). \tag{1.48}$$

[2]Okrajová podmínka pro tzv. *volný konec* vyjadřuje, že upevnění působí na strunu *nulovou příčnou silou*. Podle obr. 1.7 působí v bodě z_2 na úsek struny příčná síla

$$F_{2x} \doteq T\,\mathrm{tg}\vartheta_2 = T\frac{\partial\psi}{\partial z}(z_2,t) = 0.$$

Volný konec struny v bodě $z_2 = L$ proto vyjádříme okrajovou podmínkou

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}(L,t) = 0\ .$$

Protože všechny body kmitají se stejnou frekvencí a procházejí současně rovnovážnou polohou, jedná se vlastně o **stojatou vlnu**.

2. Po dosazení (1.48) do (1.46) dostaneme

$$-\omega^2 \varrho X(z)\cos(\omega t+\varphi) = TX''(z)\cos(\omega t+\varphi)\ .$$

Vzhledem k tomu, že tato rovnice má platit pro všechna t, musí platit

$$X''(z) + k^2 X(z) = 0, \tag{1.49}$$

kde

$$k^2 = \frac{\varrho}{T}\omega^2. \tag{1.50}$$

Obyčejná diferenciální rovnice (1.49) v prostorové souřadnici z má přesně stejný tvar jako (1.6) v čase. Její obecné řešení má tedy tvar

$$X(z) = A\sin kz + B\cos kz, \tag{1.51}$$

kde k je kladné (odmocnina z k^2). Okrajové podmínky pro pevné konce dávají

$$\begin{aligned} X(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad B = 0\ , \\ X(L) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sin kL = 0\ . \end{aligned}$$

Poslední rovnice je transcendentní a má nekonečně mnoho kořenů

$$k_m = \frac{m\pi}{L}\,, \quad m \in \mathrm{Z}; \tag{1.52}$$

poněvadž $k > 0$, vybíráme pouze kladné hodnoty $m = 1, 2 \ldots$. Příslušné *vlastní frekvence* obdržíme ze vztahu (1.50)

$$\omega_m = \sqrt{\frac{T}{\varrho}}k_m = m\sqrt{\frac{T}{\varrho}}\frac{\pi}{L} = m\omega_1, \tag{1.53}$$

$$\nu_m = \frac{m}{2L}\sqrt{\frac{T}{\varrho}} = m\nu_1, \qquad m = 1, 2 \ldots . \tag{1.54}$$

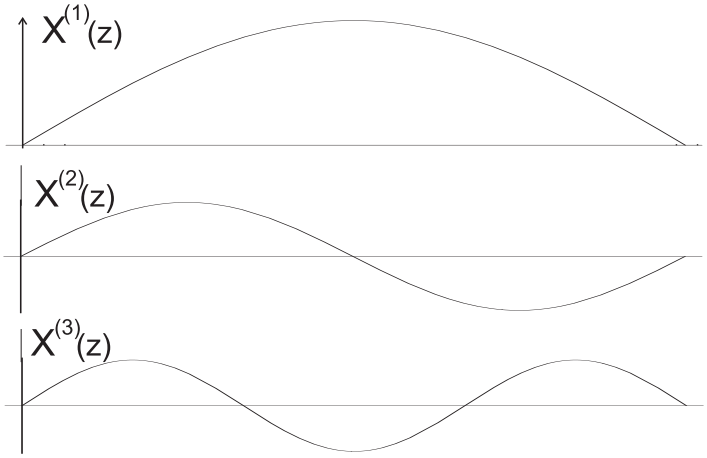
Vlastní frekvence struny jsou tedy celočíselnými násobky základní frekvence ν_1 základního tónu; ν_m pro $m > 1$ se nazývají vyšší harmonické (svrchní tóny). Příslušné *vlastní funkce*

$$X^{(m)}(z) = \sin k_m z = \sin m\pi\frac{z}{L}$$

jsou znázorněny na obr. 1.8. Určují tvar odpovídajícího módu. Jejich vlnové délky jsou $\lambda_1 = 2L, \lambda_2 = \frac{2L}{2}, \lambda_3 = \frac{2L}{3}, \ldots, \lambda_m = \frac{2L}{m} = \frac{\lambda_1}{m}, \ldots$ Veličina k, nazývaná *vlnové číslo*, je tedy s vlnovou délkou spojena vztahem $k = 2\pi/\lambda$. (Veličina $\sigma = 1/\lambda$ se nazývá *vlnočet*.) Závislost (1.50) úhlové frekvence na vlnovém čísle se nazývá *disperzní vztah*; pro strunu máme tedy

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{\varrho}}k. \tag{1.55}$$

V kapitole 2 uvidíme, že podíl $\omega/k = \lambda\nu = v$ je roven tzv. *fázové rychlosti.*



Obrázek 1.8: Stojaté vlny na struně s pevnými konci

3. Fundamentální systém řešení vlnové rovnice je nekonečný,

$$\{\sin(k_m z)\cos(\omega_m t + \varphi_m)\}_{m=1}^{\infty} \ .$$

4. Princip superpozice dává obecné řešení ve formě nekonečné řady

$$\psi(z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(k_m z)\cos(\omega_m t + \varphi_m), \tag{1.56}$$

obsahující nekonečně mnoho konstant A_m, φ_m, které se mají určit z počátečních podmínek.

Počáteční podmínky a Fourierovy řady. Protože vlnová rovnice je lineární, obecný pohyb spojité struny upevněné na obou koncích je dán superpozicí (1.56) všech módů $m = 1, 2, \ldots$ s libovolnými amplitudami A_m a fázovými konstantami φ_m. Amplitudy a fázové konstanty lze určit z počátečních podmínek pro polohu a rychlost v čase $t = 0$:

$$\psi(z,0) = f(z), \tag{1.57}$$

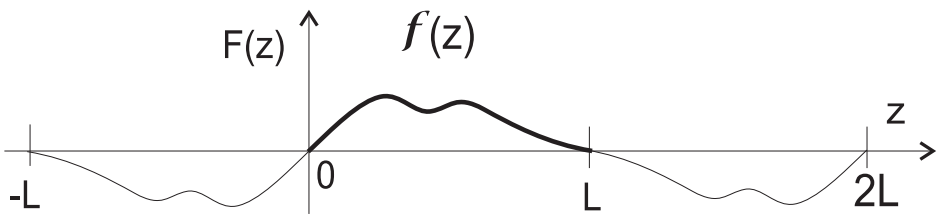
$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(z,0) = g(z), \tag{1.58}$$

kde funkce $f(z)$, $g(z)$ jsou předepsány na intervalu $\langle 0, L\rangle$, v souladu s okrajovými podmínkami. Dosazením obecného řešení (1.56) do počátečních podmínek dostaneme

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(k_m z)\cos\varphi_m = f(z), \tag{1.59}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m(-\omega_m)\sin(k_m z)\sin\varphi_m = g(z). \tag{1.60}$$

Levé strany rovnic (1.59), (1.60) představují *Fourierovy rozvoje* daných funkcí na pravé straně a naším úkolem je najít jejich *Fourierovy koeficienty* $A_m \cos\varphi_m$ resp. $-A_m\omega_m \sin\varphi_m$.



Obrázek 1.9: Periodické prodloužení funkce $f(z)$

V matematice se dozvíte podmínky, za nichž rozvoje funkcí konvergují k rozvíjeným funkcím. Ve fyzice musí být funkce $f(z)$ dostatečně hladká, aby platilo odvození vlnové rovnice; v matematice je třída přípustných $f(z)$ mnohem širší.

Fourierův rozvoj na levé straně (1.59) je zřejmě periodickou funkcí z s periodou $\lambda_1 = 2L$. Také pravou stranu $f(z)$, $0 \le z \le L$, můžeme dodefinovat pro všechna z, abychom obdrželi periodickou funkci $F(z)$ (viz obr. 1.9). Máme tedy třídu všech periodických (hladkých) funkcí $F(z)$ s periodou $\lambda_1 = 2l$, které jsou nulové pro $z = 0, z = L$.

Fourierův rozvoj lze však psát pro poměrně širokou třídu funkcí[3], jestliže se vzdáme okrajových podmínek odpovídajících pevným koncům. Všechny 'rozumné' periodické funkce $F(z)$ s periodou λ_1, $F(z + \lambda_1) = F(z)$, lze rozvinout

$$\boxed{F(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nk_1 z + b_n \sin nk_1 z\right),} \tag{1.61}$$

kde $k_1 = 2\pi/\lambda_1$. Přidané kosinové členy pak odpovídají kmitům s volnými konci.

Hledání konstant a_n, b_n se nazývá *Fourierova analýza*. Používá se k ní relací ortogonality mezi vlastními funkcemi:

$$\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} \sin nk_1 z \sin mk_1 z \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left(\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} \cos(n-m)k_1 z \,\mathrm{d}z - \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} \cos(n+m)k_1 z \,\mathrm{d}z\right) =$$
$$= \left\{ \begin{array}{ll} 0, & n \neq m \\ \frac{1}{2}\lambda_1, & n = m \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\lambda_1 \delta_{mn} \ ,$$
$$\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} \cos nk_1 z \cos mk_1 z \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\lambda_1 \delta_{mn} \ ,$$
$$\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} \sin nk_1 z \cos mk_1 z \,\mathrm{d}z = \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} \left[\sin(n+m)k_1 z + \sin(n-m)k_1 z\right] \mathrm{d}z = 0 \ .$$

Jednotlivé koeficienty vypočteme tak, že řadu (1.61) vynásobíme příslušnou vlastní funkcí a vyintegrujeme přes periodu λ_1 (vlastní funkce odpovídající a_0 je 1); dostaneme tak vztahy

[3]Pro třídu po částech spojitých periodických funkcí s konečným počtem konečných nespojitostí Fourierova řada (1.61) konverguje k dané funkci, přičemž v bodech nespojitosti konverguje k aritmetickému průměru jejích hodnot.

$$\boxed{\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{\lambda_1}\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z)\cos mk_1 z\ \mathrm{d}z\,, \\ b_m &= \frac{2}{\lambda_1}\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z)\sin mk_1 z\ \mathrm{d}z\,. \end{aligned}} \tag{1.62}$$

Analogické vztahy lze samozřejmě psát pro Fourierovy řady periodické funkce času ($\omega = 2\pi/T$):

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)\ , \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} F(t)\cos n\omega t\ \mathrm{d}t\,, \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} F(t)\sin n\omega t\ \mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

1.3 Příčné kmity řetízku atomů

Znalost řešení pohybu struny metodou stojatých vln (Fourierovou metodou) nám pomůže k vyřešení úlohy na určení kmitů nejjednodušší periodické struktury — jednorozměrného řetízku atomů. Vedle nového pohledu na spojitou strunu jako na limitní případ řetízku, má tato úloha zásadní důležitost v teorii pevných látek s krystalickou strukturou.

Zkoumejme tedy příčné kmity soustavy N hmotných bodů (všechny o hmotnosti M) spojených pružinkami (všechny o tuhosti K) podle obr. 1.10 . V rovnovážné poloze je řetízek napjat silou $T = Ka$. Výchylky hmotných bodů ve směru osy x označíme $\psi_n,\ n = 1, 2, \ldots, N$. Při malých výchylkách můžeme sestavit lineární pohybovou rovnici pro n-tý hmotný bod postupem analogickým postupu u spojité struny.

Podle obr. 1.11 působí na n-tý hmotný bod pouze pružné síly od sousedních atomů,

$$M\ddot{\psi}_n = F_x = F_{1x} + F_{2x} = -|\boldsymbol{F}_1|\sin\vartheta_1 + |\boldsymbol{F}_2|\sin\vartheta_2\ . \tag{1.63}$$

Vzhledem k tomu, že síly závisí lineárně na prodloužení, platí $F_x = T\mathrm{tg}\vartheta_2 - T\mathrm{tg}\vartheta_1$, takže dostáváme soustavu lineárních pohybových rovnic

$$M\ddot{\psi}_n = T\frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{a} - T\frac{\psi_n - \psi_{n-1}}{a} \tag{1.64}$$

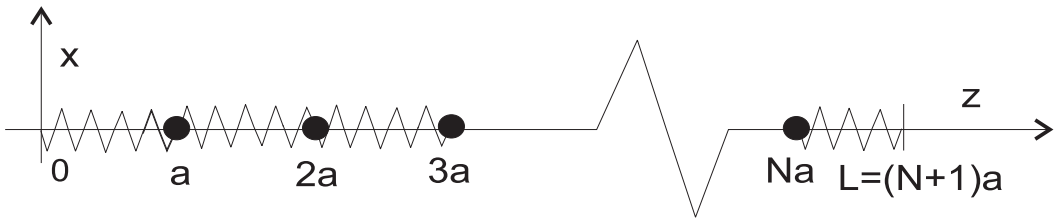
pro hmotné body $n = 1, 2, \ldots, N$. Pro krajní body musíme pohybové rovnice doplnit okrajovými podmínkami (pevné konce) $\psi_0(t) = 0 = \psi_{N+1}(t)$.

Pohybové rovnice řešíme metodou módů z oddílu 1.1, tj. hledáme módy soustavy

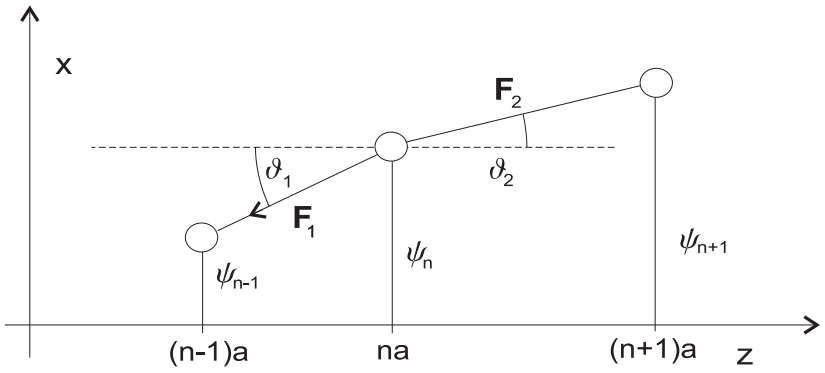
$$\psi_n(t) = X_n\cos(\omega t + \varphi)\ , \qquad n = 1, 2, \ldots, N\ . \tag{1.65}$$

Všimněte si, že index n odpovídá souřadnici z v $\psi(z,t)$ pro spojitou strunu. Dosazení módu (1.65) do (1.64) vede na soustavu N lineárních homogenních rovnic pro amplitudy X_n

$$-\omega^2 X_n = \frac{K}{M}(X_{n+1} - 2X_n + X_{n-1})\ , \tag{1.66}$$



Obrázek 1.10: Rovnovážná poloha řetízku N hmotných bodů



Obrázek 1.11: K odvození pohybové rovnice

kde $X_0 = X_{N+1} = 0$. Nenulové řešení existuje jen v případě, že $\boldsymbol{X}$ je vlastním vektorem matice soustavy. Místo sestavení a řešení sekulární (charakteristické) rovnice ukážeme, že stojaté vlny $X(z) = A\sin kz + B\cos kz$ v bodech $z = na$, tj.

$$X_n = X(na) = A\sin kna + B\cos kna \tag{1.67}$$

řeší (1.66) pro nějaké ω. Stačí vypočítat

$$\begin{gathered} X_{n+1} + X_{n-1} = \\ A\left[\sin(kna + ka) + \sin(kna - ka)\right] + B\left[\cos(kna + ka) + \cos(kna - ka)\right] = \\ = 2(A\sin kna + B\cos kna)\cos ka = 2X_n\cos ka \end{gathered}$$

a srovnat s (1.66) ve formě

$$X_{n+1} + X_{n-1} = X_n(2 - \frac{M}{K}\omega^2)\ .$$

Vidíme, že (1.67) je nenulovým řešením (1.66) za podmínky

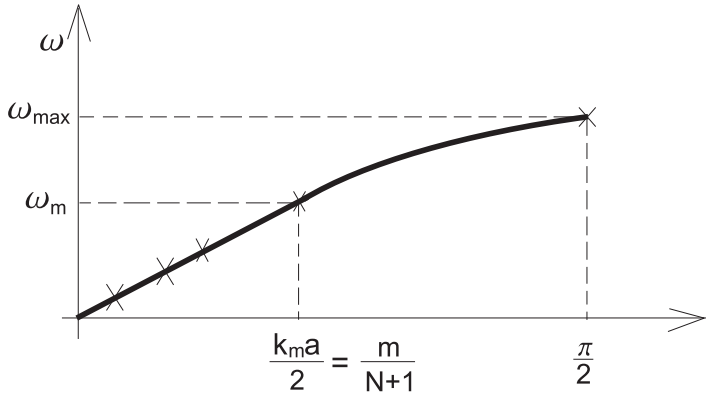
$$2\cos ka = 2 - \frac{M}{K}\omega^2\ , \tag{1.68}$$

neboli

$$\omega^2 = 2\frac{K}{M}(1 - \cos ka) = 4\frac{K}{M}\sin^2\frac{ka}{2}\ . \tag{1.69}$$

Graf tohoto *nelineárního disperzního vztahu*

$$\boxed{\omega = 2\sqrt{\frac{K}{M}}\sin\frac{ka}{2}\,, \qquad 0 \le \frac{ka}{2} \le \frac{\pi}{2}} \tag{1.70}$$



Obrázek 1.12: Disperzní vztah pro řetízek atomů

je na obr. 1.12. Slouží k určení vlastních frekvencí ω_m řetízku pro hodnoty k_m, které vyplývají z okrajových podmínek:

$$\begin{aligned} X_0 = 0 \quad &\Rightarrow \quad B = 0 \\ X_{N+1} = 0 \quad &\Rightarrow \quad A \sin k(N+1)a = 0. \end{aligned} \tag{1.71}$$

Dostáváme tedy N vlnových čísel

$$k_m = \frac{m\,\pi}{(N+1)a}\ , \quad m = 1, \ldots, N \tag{1.72}$$

Příslušné módy jsou zakresleny na obr.1.13. [4]

Obecné řešení je lineární superpozicí nalezených módů,

$$\psi_n(t) = \sum_{m=1}^{N} A_m \sin(k_m n a) \cos(\omega_m t + \varphi_m), \tag{1.74}$$

s libovolnými konstantami A_m, φ_m.

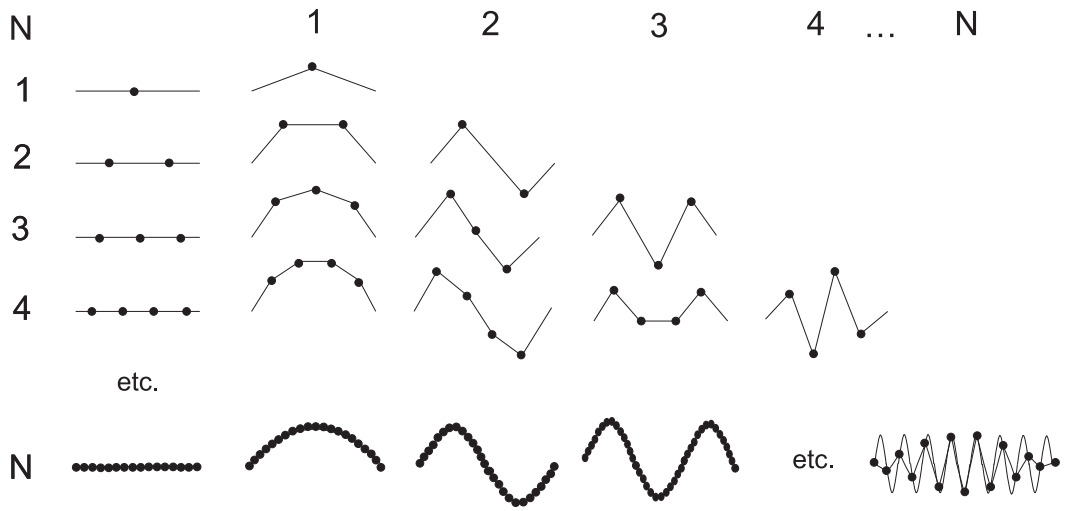
Na závěr se vraťme ke *spojité limitě řetízku* $a \to 0$. Vzhledem k dané délce $L = (N+1)a$, lineární hustotě $\varrho = M/a$ a síle $T = Ka$ musí současně $a \to 0, N \to \infty$, $M \to 0, K \to \infty$. V této limitě můžeme disperzní vztah přibližně vyjádřit pomocí Taylorova rozvoje funkce sinus,

$$\omega = 2\sqrt{\frac{K}{M}} \sin\frac{ka}{2} = 2\sqrt{\frac{K}{M}} \left(\frac{ka}{2} - \frac{1}{3!}(\frac{ka}{2})^3 + \cdots \right) \doteq \sqrt{\frac{T}{a^2\varrho}} \left(ka - \frac{1}{24}(ka)^3 + \cdots \right). \tag{1.75}$$

[4] Řešení pro $m = N+1$ je identicky nulové, tedy jako pro $m = 0$, pro vyšší hodnoty $m = N+2, \ldots$ se — až na znamení výchylek — periodicky opakují módy $m = 1, 2, \ldots, N$. Např. pro $m = N+1+l\,,\ l = 1, \ldots, N\,,$

$$X_n = \sin k_{N+1+l} n a = \sin\left(\frac{ln\pi}{N+1} + n\pi \right) = (-1)^n \sin\frac{ln\pi}{N+1}\ . \tag{1.73}$$

Z jiného pohledu, tato vyšší vlnová čísla odpovídají půlvlnám kratším než je vzdálenost a. V oddíle 3.3 uvidíme, že při frekvencích $\omega > \omega_{max}$ se místo takových vln realizují kvalitativně zcela odlišná řešení.



Obrázek 1.13: Módy na řetízku atomů

V limitě $a \to 0$ tak zbývá jen první člen, který dává disperzní vztah pro spojitou strunu $\omega = \sqrt{T/\varrho}\, k$. Zanedbání členů vyššího řádu je u řetízku možné, když

$$ka \ll 1, \qquad \text{tj. když} \qquad \frac{\lambda}{2\pi} \gg a \ . \tag{1.76}$$

Spojitá limita je tedy dobrou aproximací pouze tehdy, když vlnové délky módů jsou dostatečně velké vůči vzdálenosti sousedních bodů a. Pak se ovšem výchylky sousedních bodů budou velmi málo lišit. Z těchto důvodů často mluvíme o dlouhovlnné limitě.

1.4 Vynucené kmitání tlumených soustav pod vlivem harmonické budící síly

V tomto oddíle si nejprve zopakujeme základní vlastnosti pohybu tlumeného harmonického oscilátoru ([7], oddíl 2.2) Jeho pohybová rovnice

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} \tag{1.77}$$

má na pravé straně součet elastické síly a *síly viskózního tlumení*, která je úměrná rychlosti a míří proti směru pohybu.

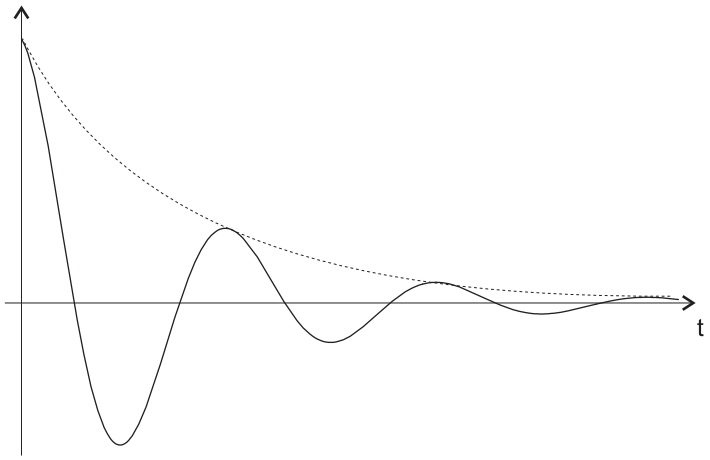
Diferenciální rovnice (1.77) má tvar (1.5)

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \ , \tag{1.78}$$

kde $\omega_0^2 = k/m$ a parametr $\delta = h/2m > 0$ se nazývá *dekrement útlumu.* Řešení (1.77) hledáme ve tvaru $x(t) = \exp \lambda t$, který vede na charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \ . \tag{1.79}$$

Podle hodnoty diskriminantu $\mathcal{D} = 4(\delta^2 - \omega_0^2)$, tedy podle velikosti útlumu, dostáváme tři typy řešení:



Obrázek 1.14: Graf slabě tlumených kmitů

$\mathcal{D} = 4(\delta^2 - \omega_0^2)$	Útlum	Pohyb
< 0	slabý	periodický tlumený
$= 0$	kritický	aperiodický mezní
> 0	silný	aperiodický

Zapišme podrobně tvar řešení rovnice (1.78) pouze pro případ *slabého tlumení* $\delta < \omega_0$, který budeme potřebovat v dalších kapitolách. V tomto případě má charakteristická rovnice kořeny

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega \ , \qquad \text{kde} \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \ , \tag{1.80}$$

takže obecné řešení je dáno vztahy (odvoďte!)

$$x(t) = e^{-\delta t}\left(C_1 e^{i\omega t} + \overline{C}_1 e^{-i\omega t}\right) \tag{1.81}$$

nebo

$$x(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \alpha) \ . \tag{1.82}$$

Při slabém útlumu tedy oscilátor kmitá, ale amplituda kmitů exponenciálně klesá k nule (viz obr.1.14).

Mechanická energie oscilátoru se vlivem viskózního tlumení mění nevratně v teplo. Tuto ztrátu energie lze vyrovnávat dodáváním energie vnější *periodickou silou* $F_x(t) = F_0 \cos \Omega t$. Pohybová rovnice pro vynucené kmity má pak tvar

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + F_0 \cos \Omega t \ , \tag{1.83}$$

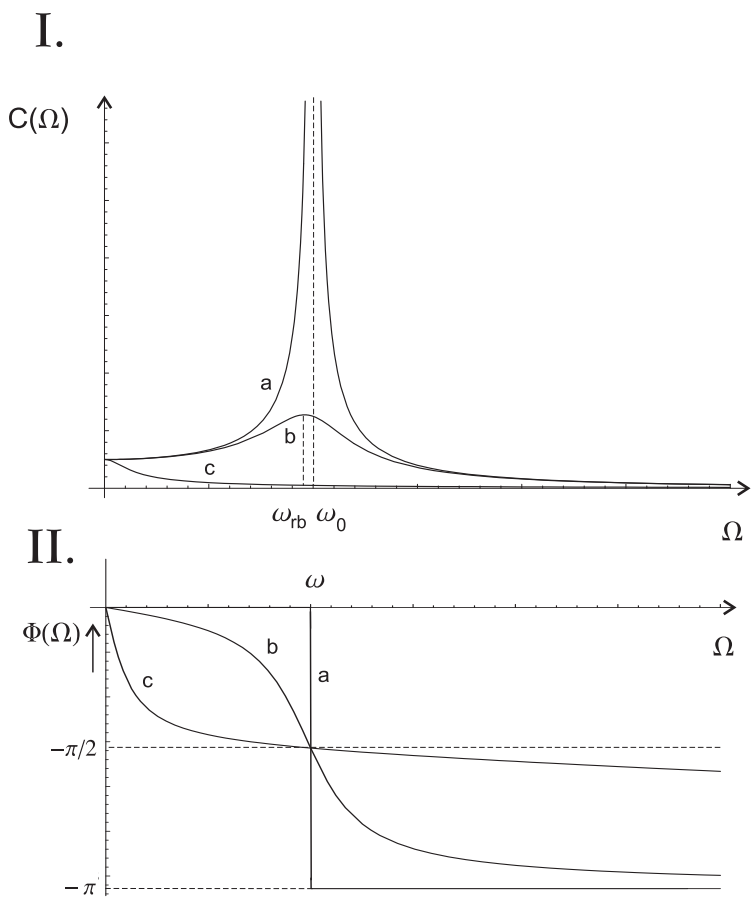
neboli

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = B \cos \Omega t \ , \tag{1.84}$$

kde $B = F_0/m$.

Obecné řešení závislé na dvou integračních konstantách je podle nauky o diferenciálních rovnicích superpozicí řešení $x_{hom}(t)$ rovnice s nulovou pravou stranou (1.78), tedy (1.81) nebo (1.82) a partikulárního řešení $x_{part}(t)$ rovnice (1.84),

$$x(t) = x_{hom}(t) + x_{part}(t) \ . \tag{1.85}$$



Obrázek 1.15: Ĭ. Amplituda $C(\Omega)$, II. Fázové posunutí $\Phi(\Omega)$ a) pro zanedbatelné tlumení, b) pro $\delta = 0,2\,\omega_0$, c) pro $\delta = 5\omega_0$.

(Ověřte!)

Připomeňme, že partikulární řešení při speciálním tvaru pravé strany rovnice (1.84) lze snadno nalézt: do (1.84) dosaďte předpokládaný tvar řešení

$$x_{part}(t) = C(\Omega)\cos(\Omega t + \Phi(\Omega)) \tag{1.86}$$

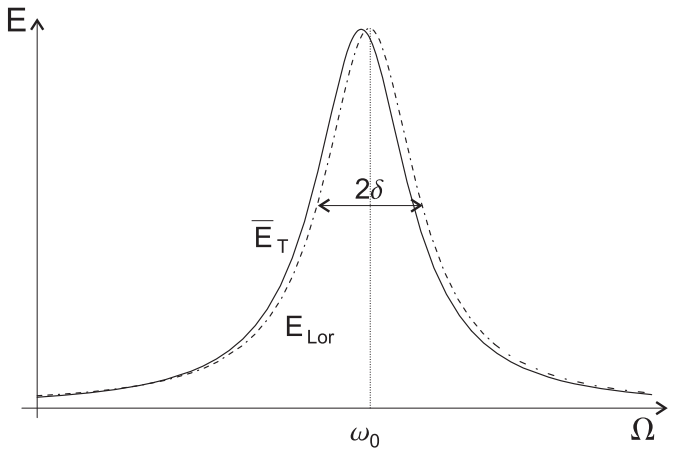
a porovnáním koeficientů u $\cos\Omega t$ a $\sin\Omega t$ vypočítejte

$$C(\Omega) = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}\ , \tag{1.87}$$

$$\mathrm{tg}\Phi(\Omega) = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\ . \tag{1.88}$$

Závislost amplitudy C na budící úhlové frekvenci Ω dosahuje (při dosti slabém útlumu $\delta < \omega/\sqrt{2}$) při hodnotě $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ *rezonančního maxima.*

Rezonanční křivka na obr.1.15.I je grafem závislosti $C(\Omega)$. Při $\Omega = 0$ (konstantní budící síla) má oscilátor statickou výchylku B/ω_0^2, při rezonanční frekvenci Ω_r kmitá s



Obrázek 1.16: Energie vynucených kmitů — skutečná vystředovaná energie a její Lorentzova aproximace (čerchovaně) pro $\delta = 0.2\,\omega_0$

maximální amplitudou

$$C_m = \frac{B}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \ . \tag{1.89}$$

Viděli jsme, že obecné řešení (1.85) se skládá ze dvou částí (1.82) a (1.86)

$$x(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_0 t + \alpha) + C(\Omega)\cos(\Omega t + \Phi(\Omega)) \ . \tag{1.90}$$

V první části závisí na dvou integračních konstantách A, α, které se určí ze dvou počátečních podmínek. Všimněte si, že tato první část se časem exponenciálně utlumí, představuje tedy *přechodný jev.* Druhý člen, který přetrvává po odeznění přechodného jevu, se nazývá *ustálený (stacionární) děj.* Z průběhu fáze $\Phi(\Omega)$ (obr.1.15.II) je patrné, že fáze ustáleného děje je záporná, *vynucené kmity soustavy se zpožďují za kmity budící síly.*

Zajímavé je chování řešení (1.90) pro velmi slabé až zanedbatelné tlumení $\delta \ll \omega$. V tomto případě rezonanční křivka (obr.1.15.I.a) má velmi úzké a vysoké rezonanční maximum při $\Omega_r \approx \omega_0$ a fáze $\Phi(\Omega)$ se skokem mění z 0 na $-\pi$. Energie přechodného jevu exponenciálně klesá s časem

$$E_{hom}(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}_{hom}^2 + \frac{1}{2}kx_{hom}^2 \approx \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 e^{-2\delta t} \tag{1.91}$$

s časovou konstantou $\tau = 1/(2\delta)$. Celková energie oscilátoru při ustáleném ději se periodicky mění s periodou $T = 2\pi/\Omega$ budící síly:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}m\dot{x}_{part}^2 + \frac{1}{2}kx_{part}^2 = \\ &= \frac{1}{2}m\Omega^2 C^2 \sin^2(\Omega t + \Phi) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 C^2 \cos^2(\Omega t + \Phi) \ . \end{aligned} \tag{1.92}$$

Tuto energii můžeme vystředovat přes periodu

$$\bar{E}_T = \frac{1}{2} m \frac{\Omega^2 + \omega_0^2}{2} C^2 \tag{1.93}$$

V *těsné blízkosti rezonance* lze průběh energie aproximovat jednodušší *Lorentzovou* (Breit-Wignerovou) *křivkou* (viz obr. 1.16 a [1], př. 4.13)

$$E \approx \frac{1}{8} \frac{mB^2}{(\Omega - \omega_0)^2 + (\frac{\Gamma}{4})^2} \ . \tag{1.94}$$

Zde $\Gamma = 2\delta$ značí šířku rezonanční křivky (1.94) v poloviční výšce $E_{max}/2$, kde

$$E_{max} = \frac{mB^2}{2\Gamma^2} \ .$$

(Ověřte!) [5]

Cvičení 1. Při ustáleném ději je veškerá energie dodávaná budící silou přeměňována viskózním tlumičem na teplo. Vypočítejte střední výkon $\bar{P}$ dodaný budící silou během jedné periody $T = 2\pi/\Omega$ a ukažte, že je roven střednímu výkonu spotřebovanému třením.

$$\left[\bar{P} = \frac{m\delta\Omega^2 B^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}\right]$$

Cvičení 2. Ukažte, že při velmi slabém tlumení $\delta \ll \omega_0$ lze určit 'dobu života' τ soustavy ponechané bez vlivu budící síly z šířky Γ rezonanční křivky pro energii podle vztahu

$$\Gamma\tau \approx 1 \ .$$

Cvičení 3. Obvykle se zavádí *činitel jakosti (kvalita)* slabě tlumeného oscilátoru jako bezrozměrné číslo

$$Q = \frac{\omega_0 E}{\overline{P}} \ .$$

Ukažte, jak lze vlastnosti oscilátoru ω_0, Q určit z rezonanční křivky (1.94) pro energii.

$$\left[Q \approx \frac{\omega_0}{\Gamma}\right]$$

[5] Ve skriptech [7] jste se zabývali *jinou aproximací.* Ta však není tak přesná.

Kapitola 2

Postupné vlny

2.1 Postupné vlny na struně

d'Alembertovo řešení vlnové rovnice a jeho fyzikální smysl. Fáze, fázová rychlost, retardovaný čas.

Soustavy, které jsme doposud uvažovali, byly *uzavřené*, ohraničené, takže energie kmitání zůstávala v mezích soustavy. Kmity struny upevněné na obou koncích byly popsány jako superpozice módů — stojatých vln.

Nyní budeme uvažovat soustavy *otevřené*, neohraničené. Vlny vzbuzené v otevřeném prostředí se nazývají *postupné vlny*. Putují od zdroje, který je budí, nenávratně pryč. Případné vzdálené meze soustavy mohou vést k odrazům, které si podrobně popíšeme v kapitole 5.

Vraťme se opět k jednorozměrné modelové soustavě — *homogenní struně* — nyní natažené podél osy z od $-\infty$ do $+\infty$. Zapišme pohybovou rovnici struny

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\,, \qquad\qquad v^2 = \frac{T}{\varrho}\,. \tag{2.1}$$

Obecné řešení určíme d'Alembertovou metodou. Zavedeme nové nezávislé proměnné

$$(z,\,t) \;\longmapsto\; (\xi = z - vt,\,\eta = z + vt) \tag{2.2}$$

a položíme $\tilde{\psi}(\xi,\,\eta) = \psi(z,\,t)$. Pak transformujeme parciální derivace

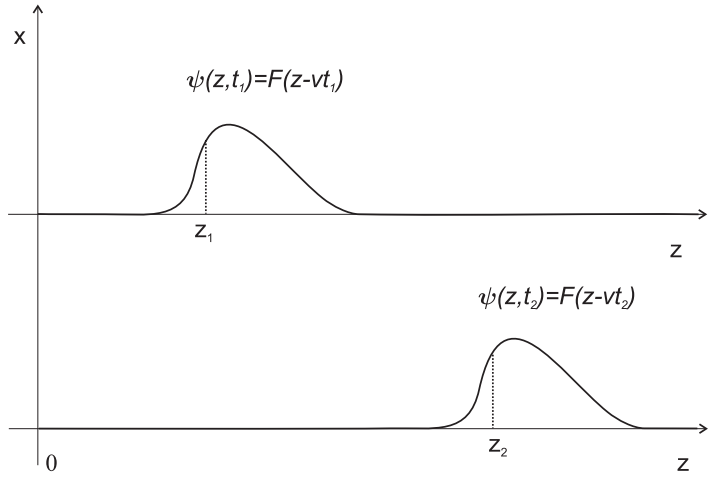
$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t} = \left(-v\frac{\partial}{\partial\xi} + v\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\tilde{\psi}\,, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta}\right)\tilde{\psi}\,. \tag{2.4}$$

Druhé derivace vzniknou iterací předešlých operací,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-v\frac{\partial}{\partial\xi} + v\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(-v\frac{\partial}{\partial\xi} + v\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\tilde{\psi}\,, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\psi = \left(\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta}\right)\tilde{\psi}\,. \tag{2.6}$$



Obrázek 2.1: Význam fázové rychlosti

Po dosazení do vlnové rovnice (2.1) zbudou v ní pouze smíšené derivace

$$4\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\xi\partial\eta} = 0\,, \tag{2.7}$$

neboť pro dostatečně hladkou funkci platí $\partial^2\tilde{\psi}/\partial\xi\partial\eta = \partial^2\tilde{\psi}/\partial\eta\partial\xi$. Řešení rovnice (2.7) — *d'Alembertovo řešení vlnové rovnice* —

$$\tilde{\psi}(\xi,\,\eta) = F(\xi) + G(\eta) \tag{2.8}$$

je součtem dvou libovolných funkcí, z nichž každá triviálně řeší (2.7). V původních souřadnicích z, t

$$\boxed{\psi(z,\,t) = F(z - vt) + G(z + vt)\,.} \tag{2.9}$$

Jaký fyzikální smysl má d'Alembertovo řešení (2.9) ? Všimněte si průběhu řešení s $G \equiv 0$, tj. $\psi(z,\,t) = F(z - vt)$, v časech t_1 a $t_2 > t_1$ podle obr. 2.1, kde F je krátký puls. Argument $z - vt$ funkce F se nazývá *fáze*. Na obr. 2.1 místo s určitou hodnotou fáze

$$z_1 - vt_1 = z_2 - vt_2 = C \tag{2.10}$$

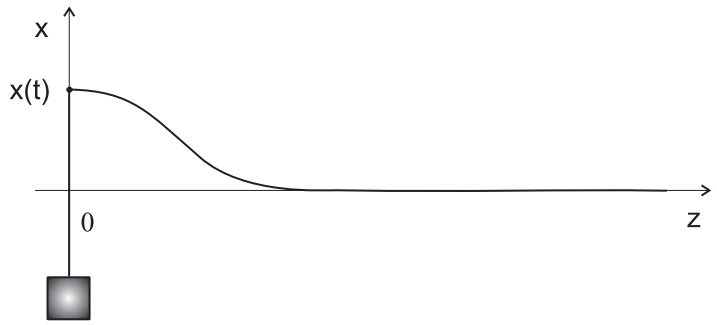
odpovídá stejné výchylce

$$F(z_1 - vt_1) = F(z_2 - vt_2) = F(C). \tag{2.11}$$

Toto *místo konstantní fáze* se podle (2.10) pohybuje ve směru osy z *fázovou rychlostí* v:

$$z_2 - z_1 = v(t_2 - t_1)\,. \tag{2.12}$$

Celý puls tedy postupuje ve směru $+z$ *beze změny tvaru.* Podobně funkce $G(z + vt)$ představuje (obecně jiný) puls postupující po struně beze změny tvaru rychlostí $-v$, tedy ve směru $-z$.



Obrázek 2.2: Vysílání postupné vlny na struně

Příklad. *Vyzařování postupných vln.* Nechť je struna upevněna v bodě $z = 0$ a sahá velmi daleko (podél kladné osy z). Předpokládejme, že počátkem struny pohybuje hnací mechanismus (vysílač) předepsaným způsobem

$$\psi(0,\, t) = x(t)\,, \tag{2.13}$$

kde $x(t)$ je daná funkce času (obr. 2.2). Jde vlastně o vysílání vlny po struně z počátku $z = 0$. Pro jednoznačnost řešení této úlohy je nutné předepsat ještě tzv. *podmínku vyzařování*

$$G \equiv 0\,, \tag{2.14}$$

tj. že se po struně nešíří žádný signál z $+\infty$. Pak

$$\psi(z,\, t) = F(z - vt)\,, \tag{2.15}$$

kde funkci F určíme z podmínky (2.13):

$$\psi(z,\, t) = F(z - vt) = F\left(0 - v\left(t - \frac{z}{v}\right)\right) = \psi\left(0,\, t - \frac{z}{v}\right) = x\left(t - \frac{z}{v}\right)\,. \tag{2.16}$$

Výchylky počátku se šíří po struně směrem $+z$ rychlostí v. Výchylka $\psi(z,\, t)$ v místě z v čase t je stejná jako v $z = 0$ v dřívějším, tzv. *retardovaném čase*

$$t' = t - \frac{z}{v}\,. \tag{2.17}$$

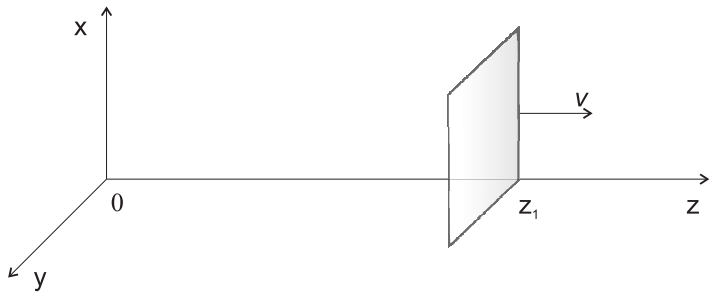
2.2 Harmonická postupná vlna

Jestliže hnací mechanismus vykonává harmonický pohyb

$$\psi(0,\, t) = x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)\,, \tag{2.18}$$

pak se po struně šíří *harmonická postupná vlna*

$$\psi(z,\, t) = x\left(t - \frac{z}{v}\right) = A\cos(\omega t - kz + \alpha)\,, \tag{2.19}$$



Obrázek 2.3: Rovinná vlna

kde $k = \omega/v$ se nazývá vlnové číslo. *Fáze* vlny je $\omega t - kz + \alpha$, *frekvence* $\nu = \omega/2\pi$, perioda $T = 1/\nu$, *vlnová délka* $\lambda = 2\pi/k$. Jakou fázi má harmonická postupná vlna šířící se ve směru záporné osy z?

Vztah

$$\omega = vk\,, \qquad\qquad v = \sqrt{\frac{T}{\varrho}}\,, \tag{2.20}$$

je *disperzní vztah* pro strunu. Jiné, nelineární disperzní vztahy $\omega = \omega(k)$ budeme studovat v kap. 3.

Ukažme si ještě na příkladě, jak řešení pomocí stojatých vln z oddílu 1.2 lze převést na superpozici stojatých vln postupujících proti sobě:

$$\psi(z,\,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin k_m z \sin \omega_m t = \tag{2.21}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(k_m z - \omega_m t) - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(k_m z + \omega_m t)\,. \tag{2.22}$$

2.3 Rovinná vlna

Přímým zobecněním postupných vln v trojrozměrném případě jsou *rovinné vlny*. Vztah

$$\psi(x,\,y,\,z,\,t) = F(z - vt) \tag{2.23}$$

totiž definuje vlnu v prostoru, pro niž množina bodů konstantní fáze (v daném čase t_1) je rovina

$$z - vt_1 = C \tag{2.24}$$

kolmá k ose z a protínající ji v bodě $z_1 = vt_1 + C$ (obr. 2.3). Rovinná vlna (2.23) je řešením vlnové rovnice v trojrozměrném prostoru

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\Delta\psi = v^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right),} \tag{2.25}$$

neboť parciální derivace podle x a y jsou nulové.

Vzhledem k tomu, že Laplaceův operátor $\Delta = \nabla.\nabla$ je invariantní při rotaci souřadného systému [9], je řešením prostorové vlnové rovnice (2.25) rovinná vlna šířící se v libovolném směru určeném jednotkovým vektorem $\boldsymbol{s}$:

$$\psi(\boldsymbol{r}\,,\,t) = F(\boldsymbol{s}\,.\boldsymbol{r} - vt)\,, \qquad |\boldsymbol{s}\,| = 1\,. \tag{2.26}$$

Výraz (2.26) přechází zřejmě v (2.23), zvolíme-li $\boldsymbol{s} = (0,\,0,\,1)$. *Rovina konstantní fáze* (v čase t_1) je nyní dána rovnicí

$$\boldsymbol{s}\,.\boldsymbol{r} - vt_1 = C\,, \tag{2.27}$$

neboli známou rovnicí roviny kolmé k vektoru $\boldsymbol{s} = (s_x,\,s_y,\,s_z)$,

$$s_x x + s_y y + s_z z - vt_1 - C = 0\,. \tag{2.28}$$

Harmonickou rovinnou vlnu obdržíme z (2.26) pro funkci

$$\psi(0,t) = F(-vt) = A\cos(\omega t + \alpha)\,,$$

tj.

$$\psi(\boldsymbol{r}\,,\,t) = \psi\left(0,\,t - \frac{\mathbf{s.r}}{v}\right) = A\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\,.\boldsymbol{r} + \alpha)\,.$$

Zde zavedený vektor ve směru šíření

$$\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{s}$$

se nazývá *vlnový vektor*. Příslušný disperzní vztah je nyní

$$\omega = vk = v\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}\,.$$

Poznámka. Od rovinné vlny musíme odlišovat sférickou vlnu vysílanou bodovým zdrojem. Množina bodů konstantní fáze (vlnoplocha) takové vlny

$$r - vt_1 = C \tag{2.29}$$

je sféra o poloměru r se středem ve zdroji. Potom například *harmonická sférická vlna* má tvar

$$\psi(r,\,t) = A\cos(\omega t - kr + \alpha)$$

a rovnice sférické vlnoplochy je

$$kr = \omega t_1 + \alpha + kC\,.$$

Matematická poznámka. V d'Alembertově řešení (2.9) lze elegantním způsobem uplatnit počáteční podmínky

$$\psi(z,\,0) = f(z)\,, \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(z,\,0) = g(z)\,. \tag{2.31}$$

Dosazením (2.9) do (2.31) a (2.31) dostaneme vztahy

$$F(z) + G(z) = f(z)\,, \tag{2.32}$$

$$-vF'(z) + vG'(z) = g(z)\,. \tag{2.33}$$

Rovnici (2.33) vynásobíme $-1/v$ a zintegrujeme od 0 do z

$$F(z) - G(z) - F(0) + G(0) = -\frac{1}{v}\int_0^z g(z')\mathrm{d}z' \,. \tag{2.34}$$

Lineární rovnice (2.32), (2.34) pro $F(z)$, $G(z)$ snadno vyřešíme:

$$F(z) = \frac{1}{2}f(z) - \frac{1}{2v}\int_0^z g(z')\mathrm{d}z' + \frac{1}{2}F(0) - \frac{1}{2}G(0)\,, \tag{2.35}$$

$$G(z) = \frac{1}{2}f(z) + \frac{1}{2v}\int_0^z g(z')\mathrm{d}z' - \frac{1}{2}F(0) + \frac{1}{2}G(0)\,. \tag{2.36}$$

Dosazením do (2.9) pak dostaneme konečný výsledek

$$\psi(z,\,t) = \frac{1}{2}f(z-vt) + \frac{1}{2}f(z+vt) + \frac{1}{2v}\int_{z-vt}^{z+vt} g(z')\mathrm{d}z' \,. \tag{2.37}$$

Cvičení. Rozmyslete si, jaké vlny se šíří po struně

a) když je struna v čase $t = 0$ vychýlena podle $\psi(z,\,0) = f(z)$ a puštěna s nulovou počáteční rychlostí $g(z) \equiv 0$,

b) při rozkmitání úderem $g(z) \neq 0$ z rovnovážné polohy $f(z) = 0$.

Kapitola 3

Vlny v disperzním prostředí

3.1 Disperze světla v látkách

Jev disperze světla. Klasický model disperzního prostředí. Disperze elektromagnetických vln v plazmatu, aplikace na ionosféru. Rozlišení prostředí: disperzní — nedisperzní, transparentní — reaktivní. Plazma a řetízek atomů jako příklady reaktivních prostředí. Kvazimonochromatické vlnové balíky: vztah mezi šířkou vlnového balíku a šířkou jeho spektra, šíření vlnového balíku v disperzním prostředí, grupová rychlost. Fourierova transformace.

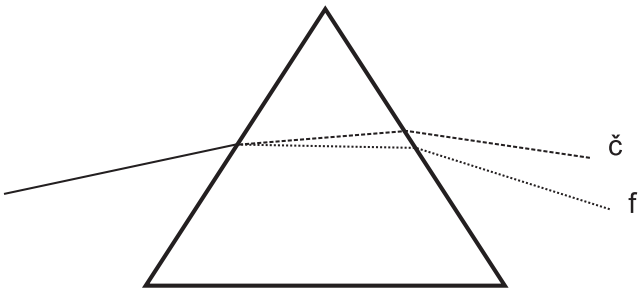
Důsledky disperze neboli rozkladu světla dobře znáte: např. duhu nebo rozklad světla skleněným hranolem. V druhém efektu (obr. 3.1) je bílé světlo lomem na dvou rozhraních rozloženo na viditelné spektrum sahající od červené až po fialovou barvu. O mechanismu vzniku duhy si přečtěte v [8].

V kap. 6 si podrobněji ukážeme, že světlo je elektromagnetické vlnění, které se šíří ve vakuu s fázovou rychlostí $c = 3.10^8\, m/s$. V dielektrickém prostředí o permitivitě ε a permeabilitě μ je jeho *fázová rychlost*

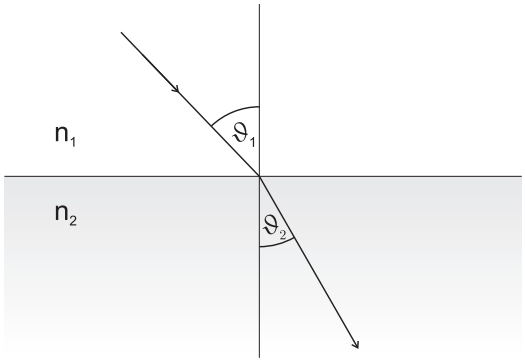
$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\,. \tag{3.1}$$

Pro vakuum platí vztah $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. *Index lomu prostředí* n je pak definován vztahem

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r} \doteq \sqrt{\varepsilon_r}\,, \tag{3.2}$$



Obrázek 3.1: Rozklad světla hranolem



Obrázek 3.2: Snellův zákon lomu

kde $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$, $\mu = \mu_0\mu_r$. Pro obvyklá průhledná prostředí jsme položili $\mu_r \doteq 1$, protože μ_r se od jedničky liší až na třetím resp. šestém desetinném místě (pro paramagnetické, resp. diamagnetické látky).

Průchod světla hranolem se řídí Snellovým zákonem lomu (obr. 3.2)

$$n_1 \sin\vartheta_1 = n_2 \sin\vartheta_2 \ ,$$

kde n_1, n_2 jsou indexy lomu po obou stranách rozhraní. Vlnové délky viditelného světla sahají od 400 do 800 nm a odpovídají barvám od fialové po červenou. Při rozkladu světla hranolem je tedy světlo rozloženo na *monochromatické (harmonické) vlny.* Protože $n_{vzduch} \doteq 1$, znamená to, že index lomu skla a tudíž i fázová rychlost světla ve skle jsou závislé na (vakuové) vlnové délce neboli ekvivalentně na úhlové frekvenci ω, $v(\omega) = c/n(\omega)$. Vzhledem k tomu, že $v = \omega/k$, dá se tato vlastnost skla vyjádřit *nelineárním disperzním vztahem*

$$\omega = \frac{c}{n(\omega)}k. \tag{3.3}$$

Z tohoto hlediska model struny z kapitol 1 a 2 představuje *nedisperzní prostředí*, v němž

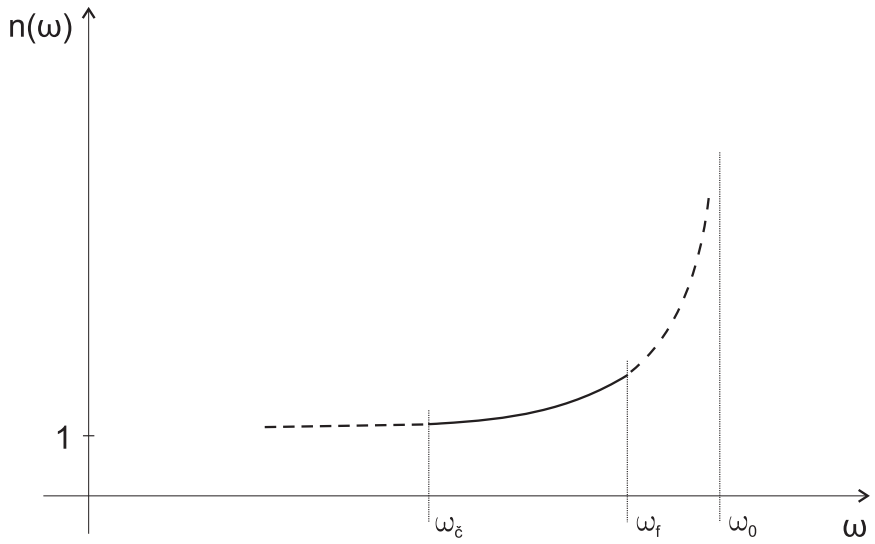
$$\frac{\omega}{k} = v = \sqrt{\frac{T}{\varrho}} = konst. \tag{3.4}$$

a harmonické vlny s libovolnými frekvencemi se šíří touž fázovou rychlostí! Důsledkem pak je i šíření vlny libovolné formy beze změny tvaru fázovou rychlostí $v = \sqrt{T/\varrho}$. Disperzní křivka pro sklo je nelineární, pro ilustraci je na obr. 3.3 vynesena závislost indexu lomu na úhlové frekvenci v oboru viditelného světla (tzv. normální disperze).

Nejjednodušší *model disperzního prostředí*, který popisuje základní rysy disperze, vychází z elektronové teorie látek. Stačí k tomu více než sto let stará představa *J.J.Thomsona*, že elektrony v atomech se v klidu nacházejí v rovnovážných polohách a po vychýlení (vlivem srážek) vykonávají malé kmity a vyzařují se speciálními vlastními frekvencemi charakteristickými pro daný atom. Disperze světla, které dopadá na látku, pak vzniká jako odezva látky na dopadající elektromagnetickou vlnu.

Reakce látky je součtem (lineárních) reakcí jednotlivých elektronů. Elektron s vlastní frekvencí ω_0 pod vlivem elektromagnetického pole dopadající vlny o úhlové frekvenci $\omega < \omega_0$ má pohybovou rovnici

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} + m\omega_0^2\boldsymbol{r} = e\boldsymbol{E}\,(t) = e\boldsymbol{E}_0 \cos\omega t \tag{3.5}$$



Obrázek 3.3: Sklo jako disperzní prostředí

vynucených kmitů ($m \doteq 9,1.10^{-31}\,kg$, $e = -1,6.10^{-19}\,C$, magnetickou část Lorentzovy síly lze zanedbat — proč?). *Ustálené kmity* elektronu jsou dány partikulárním řešením

$$\boldsymbol{r}\,(t) = \frac{e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\boldsymbol{E}_0 \cos\omega t\,.$$

Lineární odezva látky vzniká součtem indukovaných elektrických dipólových momentů jednotlivých elektronů

$$\boldsymbol{p}\,(t) = e\boldsymbol{r}\,(t) = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\boldsymbol{E}\,(t)\,. \tag{3.6}$$

Výsledný vektor polarizace $\boldsymbol{P}\,(t)$ je dipólovým momentem objemové jednotky látky

$$\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{p}\ , \tag{3.7}$$

kde N je počet elektronů (typu ω_0) v $1\,m^3$. Index lomu lze nyní vypočítat ze vztahu

$$\boldsymbol{D}\,(t) = \varepsilon_0\boldsymbol{E}\,(t) + \boldsymbol{P}\,(t) = \varepsilon\boldsymbol{E}\,(t)$$

dosazením (3.6), (3.7):

$$\varepsilon_0\left(1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right)\boldsymbol{E}\,(t) = \varepsilon\boldsymbol{E}\,(t)\,,$$

tedy

$$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}}\ . \tag{3.8}$$

Graf této závislosti (obr.3.3) ukazuje, že frekvence ω_0 leží v ultrafialové oblasti. Vzorec (3.8) se dá zapsat pro elektrony více typů ω_k s hustotami N_k ve formě

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \sum_k \frac{N_k e^2}{\varepsilon_0 m(\omega_k^2 - \omega^2)}}\ .$$

Pro látky s malou hustotou elektronů se vzorec (3.8) aproximuje podle $(1+x)^{1/2} \approx 1+\frac{1}{2}x,\ x \ll 1$,

$$n(\omega) \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}\ . \tag{3.9}$$

V této formě jej naleznete v příkladech [1], kap. 4. Singularity vzorců při rezonančních frekvencích se dají odstranit v přesnějším popisu elektronu vyzařujícího s *radiačním útlumem* [9], kap. 9.

Šíření elektromagnetické vlny v disperzním prostředí se tedy řídí příslušným disperzním vztahem

$$\omega = \omega(k)\,.$$

Prostředí je pro tyto vlny *transparentní*. Podle disperzního vztahu však dobře definovanou fázovou rychlost $v = \omega(k)/k$ mají pouze monochromatické (harmonické) postupné vlny

$$\psi(z,\,t) = A\cos(\omega t - kz + \varphi)\,.$$

Všimněte si, že dosazení tohoto ψ do vlnové rovnice (2.1) vede díky rovnostem

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega^2\psi, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -k^2\psi \tag{3.10}$$

právě k disperznímu vztahu $\omega^2 = v^2k^2$.

3.2 Elektromagnetické vlny v plazmatu

Plazma, zvané též čtvrté skupenství hmoty, je ionizovaný plyn, tedy soustava volně se pohybujících elektronů a kladně nabitých iontů. Vzhledem k velkým hmotnostem iontů lze zkoumat pohyb elektronového podsystému. Abychom zjistili odezvu plazmatu na dopadající elektromagnetickou vlnu, vyjdeme (jako v odstavci 3.1) z pohybové rovnice jednoho elektronu

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = e\boldsymbol{E}\,(t) = e\boldsymbol{E}_0\cos\omega t\,.$$

Vidíme, že je to rovnice (3.5) pro $\omega_0 = 0$, takže můžeme převzít výsledek (3.8)

$$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m\omega^2}}\ , \tag{3.11}$$

kde N je počet elektronů v objemové jednotce plazmatu.

Pro šíření elekromagnetických vln v plazmatu je důležitá veličina

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}}$$

zvaná *plazmová frekvence*. Vztah (3.11) pak lze psát

$$\omega^2 n^2 = \omega^2 - \omega_p^2\,.$$

S využitím $n = c/v$ a $\omega/v = k$ dospějeme k *disperznímu vztahu pro plazma*

$$\boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2} \tag{3.12}$$

Při $\omega > \omega_p$ je plazma *transparentním disperzním prostředím.* Jak se plazma chová k elektromagnetickým vlnám s úhlovými frekvencemi $\omega < \omega_p$? K tomu nejprve pomocí (3.10) zapíšeme vlnovou rovnici pro plazma, která pro harmonické vlny vede právě na disperzní vztah (3.12):

$$-\omega^2\psi = -\omega_p^2\psi - c^2k^2\psi \overset{(3.10)}{\Longrightarrow} \boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega_p^2\psi + c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}}. \tag{3.13}$$

Zkoumejme řešení (3.13) jako *ustálené vynucené kmity*, tj. položme

$$\psi(z,\, t) = X(z)\cos(\omega t + \varphi)\,. \tag{3.14}$$

Po dosazení (3.14) do (3.13) dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici pro $X(z)$,

$$X'' + \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}X = 0\,. \tag{3.15}$$

Při jejím řešení musíme rozlišovat dva případy, které se od sebe kvalitativně liší:

1. $\omega > \omega_p, \qquad X'' + k^2X = 0, \qquad \omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2,$
2. $\omega < \omega_p, \qquad X'' - \kappa^2X = 0, \qquad \omega^2 = \omega_p^2 - c^2\kappa^2.$

Rozbor druhého případu dává odpověď na chování prostředí při $\omega < \omega_p$. Na rozdíl od fundamentálního systému $\{\mathrm{e}^{ikz},\, \mathrm{e}^{-ikz}\}$, který vede na netlumené kmity v transparentním případě, máme ve druhém případě fundamentální systém $\{\mathrm{e}^{\kappa z},\, \mathrm{e}^{-\kappa z}\}$ vyjadřující útlum vln s frekvencemi $\omega < \omega_p$. Prostředí pak nazýváme *reaktivní.*

Zaujímá-li prostředí např. poloprostor $z \geq 0$, bude mít řešení při $\omega < \omega_p$ formu ustálených vynucených kmitů

$$\psi(z,\, t) = A\mathrm{e}^{-\kappa z}\cos(\omega t + \varphi)\,, \qquad z\in\langle 0,\, +\infty)\,, \tag{3.16}$$

jejichž amplituda $A\mathrm{e}^{-\kappa z}$ s rostoucím z exponenciálně klesá (tzv. *evanescentní vlna*). Rychlost zeslabení charakterizujeme *hloubkou pronikání* $\delta = 1/\kappa$. Pro každou frekvenci $\omega < \omega_p$ se konstanta útlumu určí z disperzního vztahu 2. Zde je na místě zdůraznit, že útlum kmitů v prostředí není způsoben disipací energie, ale neschopností prostředí přenášet vlny s frekvencemi $\omega < \omega_p$.

Případy 1. a 2. tedy odpovídají transparentní a reaktivní oblasti. Velice důležitou praktickou aplikací těchto poznatků je *šíření elektromagnetických vln v ionosféře.* Plazmová frekvence není konstantní, ale je různá podle denních a ročních období, kdy se vlivem slunečního záření mění počet elektronů N v objemové jednotce. Udávají se hodnoty $\nu_p = \omega_p/2\pi$ v rozmezí od 10 do 30 MHz. Televizní stanice a radiové stanice v oblasti frekvenčně modulovaných (tj. velmi krátkých) vln pracují na frekvencích řádu 100 MHz a vyšších, ionosféra je pro ně tedy transparentní. Pro nízké frekvence řádu 1 MHz, na kterých pracují rozhlasové stanice s amplitudovou modulací (pásma dlouhých, středních a krátkých vln), je ionosféra reaktivním prostředím a odráží tyto vlny zpět k Zemi.

3.3 Řetízek atomů jako reaktivní prostředí

Pro řetízek atomů jsme si odvodili disperzní vztah (1.70)

$$\omega = \omega_{max} \sin \frac{ka}{2}\,, \qquad \omega_{max} = 2\sqrt{\frac{K}{M}}\,.$$

Z průběhu této závislosti v intervalu $0 \leq \frac{ka}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ je patrné, že řetízek je transparentní jen pro úhlové frekvence od 0 do ω_{max}. Jak se řetízek chová při $\omega > \omega_{max}$?

Vodítkem nám bude řešení (3.16) v odstavci 3.2, které ve spojitém případě exponenciálně klesá směrem do prostředí. Odpovídá tomu fyzikální představa, že následující atomy při kmitech o vysokých frekvencích již nestačí sledovat pohyb předcházejících atomů a amplitudy výchylek klesají s rostoucím n. Exponenciální pokles dává v diskretním případě předpokládaný tvar ustálených vynucených kmitů[1]

$$\psi_n(t) = A(-1)^n \mathrm{e}^{-\kappa n a} \cos(\omega t + \varphi)\,. \tag{3.17}$$

Dosazením (3.17) do pohybových rovnic řetízku

$$M\ddot{\psi}_n = K(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1})$$

dostaneme

$$-M\omega^2\psi_n = K(-\mathrm{e}^{-\kappa a} - 2 - \mathrm{e}^{\kappa a})\,\psi_n\,,$$

odkud plyne *disperzní vztah v reaktivní oblasti* $\omega > \omega_{max}$,

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\kappa a}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{\kappa a}{2}}\right) = \omega_{max} \cosh \frac{\kappa a}{2}\,. \tag{3.18}$$

Kdykoliv v prostředí nastává exponenciální útlum a přitom nikoli v důsledku tření a přeměny energie v teplo, nazýváme prostředí *reaktivní*. Tlumená pronikající vlna se nazývá *evanescentní*. Do reaktivního prostředí $0 \leq z < +\infty$ energie neproudí, vlna dopadající z oblasti $-\infty < z \leq 0$ se odráží. V optice analogická situace nastává při *totálním odrazu*. Má-li však reaktivní prostředí konečnou tloušťku L, odraz není totální, nýbrž částečný: vlna projde se zeslabenou amplitudou $A\mathrm{e}^{-\kappa L}$. V kvantové fyzice se tento vlnový jev nazývá průnik potenciálovou bariérou (tunelový jev) a vysvětluje se jím například radioaktivita α.

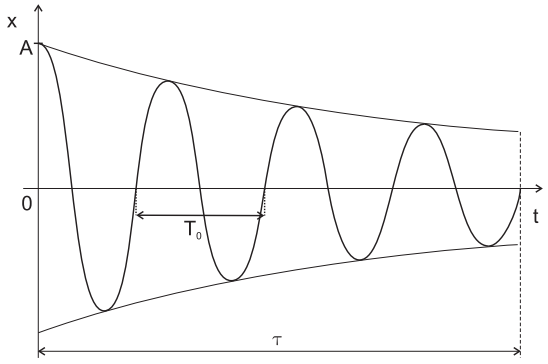
3.4 Vlnové balíky

Kvaziharmonické kmity, kvazimonochromatické vlny a vlnové balíky. Vztah mezi šířkou vlnového balíku a šířkou jeho spektra.

Skutečné kmity oscilujících soustav se málokdy blíží ideálnímu čistě harmonickému průběhu

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta)\,, \qquad -\infty < t < +\infty\,. \tag{3.19}$$

[1] Faktor $(-1)^n$ zaručuje stejná limitní řešení při $\omega \to \omega_{max}+$ a $\omega \to \omega_{max}-$.



Obrázek 3.4: Časový průběh velmi slabě tlumených kmitů, $T_0 \ll \tau$

V některých případech a zvláště v optice je užitečný pojem *kvaziharmonických kmitů,* které se v dostatečně dlouhých časových úsecích $\tau \gg T_0$ velmi málo odlišují od harmonického průběhu (3.19) Znamená to, že v časovém intervalu délky τ zůstávají parametry A, ω_0, δ prakticky konstantní.

Důležitým příkladem jsou kmity elektronu v Thomsonově modelu atomu. Elektron s vlastní frekvencí ω_0, rozkmitaný v čase $t = 0$ srážkou atomů, vykonává velmi slabě tlumené kmity, neboť ztrácí energii vyzařováním elektromagnetických vln (viz odd. 6.5 a [9], kap. 9). Jako jednorozměrný model nám poslouží struna natažená od $z = 0$ do $+\infty$, která má na počátku $z = 0$ připojený harmonický oscilátor. Je-li v čase $t = 0$ oscilátor vychýlen, $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$, začne kmitat. Protože však ztrácí energii tím, jak koná na struně práci, budou jeho kmity tlumené. (Zkuste odvodit průměrné tlumení metodou [9], úloha 9.10 !)

Za předpokladu velmi slabého útlumu bude oscilátor vykonávat kvaziharmonické kmity

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \\ A\mathrm{e}^{-\frac{t}{2\tau}} \cos\omega_0 t & \text{pro } t \geq 0 \end{cases}, \tag{3.20}$$

neboť $\tau \gg T_0 = 2\pi/\omega_0$ (obr. 3.4) . Energie oscilátoru klesá též exponenciálně s časovou konstantou τ:

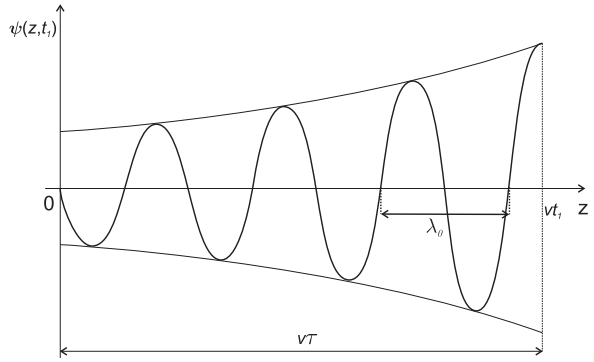
$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \\ E(0)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \cos^2\omega_0 t & \text{pro } t \geq 0 \end{cases}. \tag{3.21}$$

V důsledku rozkmitání počátku struny $\psi(0,\, t) = x(t)$ podle (3.20) vzniká na struně, jak víme z kapitoly 2, postupná vlna

$$\psi(z,\, t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } z > vt \\ A\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\tau}(t-\frac{z}{v})} \cos(\omega_0 t - k_0 z) & \text{pro } z \leq vt \end{cases} \tag{3.22}$$

postupující ve kladném směru $+z$ s fázovou rychlostí $v = \omega_0/k_0 = \sqrt{T/\varrho}$. Při $\tau \to +\infty$ by (3.22) byla harmonická postupná vlna. Pro $\tau \gg T_0$ se přidržíme názvosloví z optiky a budeme mluvit o *kvazimonochromatické postupné vlně.* Tato vlna má v některém časovém okamžiku $t_1 > 0$ *čelo* v místě $z = vt_1$.

Na prostorovém grafu vlny (obr. 3.5) je kvazimonochromatičnost vyjádřena podmínkou $v\tau \gg vT_0 = \lambda_0$. Pro kmitající elektron byla z Maxwellových rovnic odvozena časová



Obrázek 3.5: Prostorový průběh kvazimonochromatické vlny

konstanta radiačního útlumu energie $\tau \approx 10^{-8}\,s$. Během tohoto, z našeho hlediska velmi krátkého časového intervalu, optické záření vykoná řádově 10^7 kmitů s periodou $T_0 \approx 10^{-15}\,s$. V prostorovém průběhu se na vzdálenosti $c\tau \approx 3\,m$ vejde řádově 10^7 vlnových délek viditelného světla $(400 - 800\,nm)$.

Vlna vyzářená elektronem má další důležitou vlastnost: za krátký časový interval, řekněme $10\tau \approx 10^{-7}$s se rychle utlumí na zanedbatelný zlomek $\mathrm{e}^{-5} \doteq 1/150$ počáteční amplitudy. V prostoru je odpovídající vzdálenost $10\,c\tau \doteq 30\,m$. Vlna je tedy v prostorovém i časovém průběhu ohraničená. Taková vlna se nazývá *vlnový balík*. Vlnový balík vyzářený elektronem je kvazimonochromatický.

Kvazimonochromatický vlnový balík lze získat jako *spojitou superpozici* monochromatických vln ($\omega = vk$)

$$\psi(z,\,t) = \int_0^{+\infty} B(\omega)\cos(\omega t - kz + \delta(\omega))\mathrm{d}\omega\ . \tag{3.23}$$

Ukážeme si to na velmi jednoduchém příkladě (viz obr. 3.6, 3.7 a [1], př. 4.11), v němž volíme

$$\delta(\omega) = 0, \qquad B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \le \omega \le \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \\ 0 & \text{pro ostatní } \omega \end{cases}\ . \tag{3.24}$$

Uvidíme, že za předpokladu, že *šířka spektra* $\Delta\omega$ je malá vůči *dominantní frekvenci* ω_0, $\Delta\omega \ll \omega_0$ bude $\psi(z,\,t)$ opět kvazimonochromatický vlnový balík!

Integrál (3.23) s použitím (3.24) a označením $t' = t - (z/v)$ se snadno postupně upraví

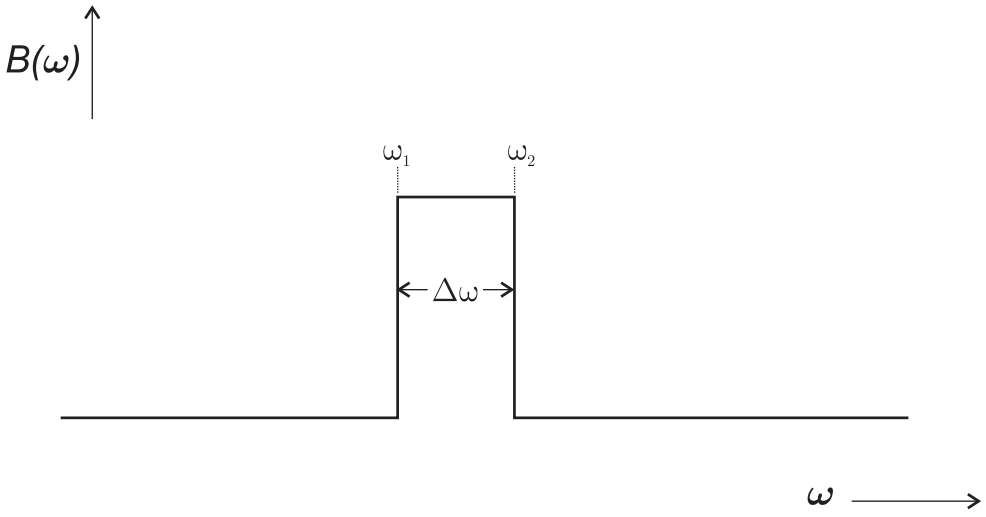
$$\psi(z,\,t) = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \cos(\omega t')\,\mathrm{d}\omega =$$

$$= \frac{1}{t'}\left[\sin\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t' - \sin\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t'\right]$$

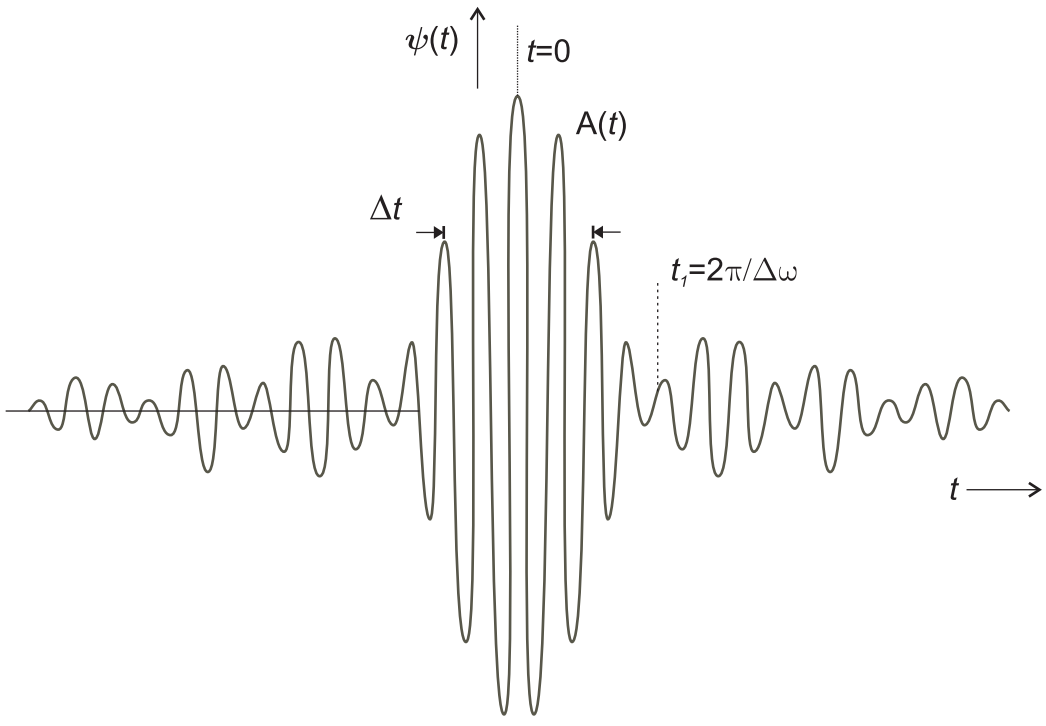
na výsledný tvar

$$\psi(z,\,t) = \frac{1}{t'}2\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t'\right)\cos(\omega_0 t - kz)\,. \tag{3.25}$$

Výsledkem je *amplitudově modulovaná vlna* s *nosnou vlnou* o vlnové délce λ_0. Časový



Obrázek 3.6: Spektrum signálu



Obrázek 3.7: Časový průběh signálu se spektrem z obr. 3.6

průběh signálu v místě $z = 0$ (obr. 3.7)

$$\psi(0,\, t) = \Delta\omega \frac{\sin \frac{\Delta\omega}{2} t}{\frac{\Delta\omega}{2} t} \cos \omega_0 t \tag{3.26}$$

má amplitudovou modulaci typu $\sin x/x$. Pro určení *šířky signálu* jsou směrodatné body $x_{1,2} = \frac{\Delta\omega}{2} t_{1,2} = \pm\pi$, kde modulační funkce poprvé prochází nulou. Zvolíme-li za míru šířky signálu $\Delta t = t_1$, platí

$$\boxed{\Delta\omega \Delta t \approx 2\pi.} \tag{3.27}$$

Podobný vztah mezi šířkou signálu a šířkou jeho spektra lze odvodit i pro prostorový průběh signálu (v čase $t = 0$)

$$\psi(z,\, 0) = v\Delta k \frac{\sin \frac{\Delta k}{2} z}{\frac{\Delta k}{2} z} \cos k_0 z\,, \tag{3.28}$$

kde jsme označili $\Delta k = \Delta\omega / v$. Stejná definice šířky signálu $\Delta z = z_1$, kde $\frac{\Delta k}{2} z_1 = \pi$, dává

$$\boxed{\Delta k \Delta z \approx 2\pi.} \tag{3.29}$$

Vztahy (3.27) a (3.29) vyjadřují *univerzální vlastnost* kvazimonochromatických vlnových balíků: čím jsou rozměry balíků menší, tím je jeho spektrum frekvencí širší a naopak. Tuto důležitou vlastnost musíme bezpodmínečně brát v úvahu při návrzích soustav, které přenášejí signál nesoucí informace. Aby nedošlo k neopravitelnému zkreslení, musí přenosová soustava být schopna přenést celé spektrum o šířce $\Delta\omega$.

Vraťme se ještě k příkladu na začátku tohoto oddílu, kde je časová šířka vlnového balíku $\Delta t \approx \tau$. Ze vztahu (3.27) zde vyplývá, že hlavní spektrální příspěvky ke kvaziharmonickému signálu $x(t)$ pocházejí ze spojitého pásma frekvencí o šířce $\Delta\omega \approx 2\pi/\tau$ kolem dominantní frekvence ω_0. (Porovnejte s výsledky příkladů 4.9 — 4.13 v [1], kap.4).

3.5 Fourierova transformace

Fourierova transformace přímá a inverzní. Parsevalova rovnost a její fyzikální obsah.

V oddílu 3.4 jsme vlnový balík vyjádřili ve formě 'spojité superpozice' (3.23) monochromatických vln. V místě $z = 0$ je příspěvek od intervalu frekvencí $(\omega,\, \omega + \mathrm{d}\omega)$ dán výrazem $A(\omega)\cos(\omega t + \delta(\omega))\mathrm{d}\omega$, který představuje *spektrální složku* balíku. Vidíme, že $A(\omega)$ je amplituda vztažená na jednotkový interval frekvencí.

Matematickým vyjádřením přechodu od signálu $x(t)$ k jeho spektrálním složkám a naopak jsou vzorce *Fourierovy transformace*

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^\infty A(\omega)\cos(\omega t + \delta(\omega))\,\mathrm{d}\omega = \\ &= \int_0^\infty \Big[a(\omega)\cos(\omega t) + b(\omega)\sin(\omega t)\Big]\,\mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{3.30}$$

a

$$a(\omega) = A(\omega)\cos\delta(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t\,, \tag{3.31}$$

$$b(\omega) = -A(\omega)\sin\delta(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{3.32}$$

Formule (3.30) a (3.31)-(3.32) udávají inverzní a přímou Fourierovu transformaci. Všimněte si podobnosti se vzorci oddílu 1.2.3 pro Fourierovy řady. Rozdíl je v tom, že Fourierovy řady jsou definovány pouze pro *periodické* funkce, zatímco Fourierovu transformaci lze použít pro *neperiodické* signály $x(t)$, $-\infty < t < +\infty$ splňující $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$.

Vzorce Fourierovy transformace mají elegantní jednoduchou formu, vyjádříme-li kosinus a sinus pomocí Eulerových vztahů. Nejprve upravíme

$$a(\omega)\cos(\omega t) + b(\omega)\sin(\omega t) = c(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t} + \overline{c(\omega)}\mathrm{e}^{-i\omega t}\,, \tag{3.33}$$

kde

$$c(\omega) = \frac{1}{2}\Big[a(\omega) - ib(\omega)\Big]. \tag{3.34}$$

Ze vzorců (3.31)-(3.32) plyne, že $a(\omega)$ je sudou funkcí ω, $b(\omega)$ lichou funkcí ω. To nám dovolí formálně rozšířit definiční obor funkce $c(\omega)$ do záporných hodnot ω vztahem

$$c(-\omega) = \overline{c(\omega)} \tag{3.35}$$

Inverzní Fourierova transformace (3.30) se upraví pomocí (3.33) a (3.35)

$$x(t) = \int_0^{\infty}\Big[c(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t} + \overline{c(\omega)}\mathrm{e}^{-i\omega t}\Big]\mathrm{d}\omega =$$
$$= \int_0^{\infty} c(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{d}\omega + \int_0^{\infty} c(-\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

a po substituci $\omega' = -\omega$ ve druhém integrálu

$$x(t) = \int_0^{\infty} c(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{d}\omega + \int_0^{-\infty} c(\omega')\mathrm{e}^{-i\omega' t}(-\mathrm{d}\omega') =$$
$$= \left(\int_0^{\infty} + \int_{-\infty}^{0}\right) c(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

dostaneme výsledný vzorec pro *inverzní Fourierovu transformaci* $c(\omega) \mapsto x(t)$

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{d}\omega.} \tag{3.36}$$

Vzorce (3.31)-(3.32) *přímé Fourierovy transformace* $x(t) \mapsto c(\omega)$ se spojí pomocí (3.34)

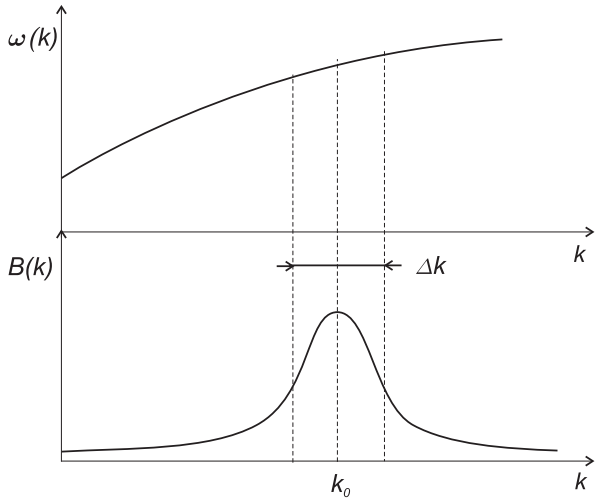
$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)(\cos\omega t - i\sin\omega t)\mathrm{d}t$$

na výsledný vzorec[2]

$$\boxed{c(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t} \tag{3.37}$$

[2]Vzorce (3.36), (3.37) Fourierovy transformace se obvykle zapisují v symetrickém tvaru

$$x(t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{d}\omega\,,$$



Obrázek 3.8: Disperzní vztah prostředí a spektrum kvazimonochromatického vlnového balíku

Pro spektrální rozklad energetických veličin (intenzit) má velký význam *Parsevalova rovnost*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\left[x(t)\right]^2\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty}x(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty}c(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{d}\omega\right)\mathrm{d}t = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}c(\omega)\left(\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\omega = \\ &= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}c(\omega)c(-\omega)\mathrm{d}\omega = \\ &= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|c(\omega)|^2\mathrm{d}\omega. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Vyjadřuje celkovou energii signálu jako superpozici příspěvků k intenzitě od jednotlivých spektrálních složek. Z matematického hlediska uvedený vztah říká, že kvadraticky integrabilní signál $x(t)$ má kvadraticky integrabilní spektrum $c(\omega)$.

3.6 Šíření vlnového balíku v disperzním prostředí

Dva hlavní efekty: grupová rychlost a rozplývání grupového balíku.
Přenos informace modulovanou vlnou.

Zkoumejme šíření kvazimonochromatického vlnového balíku (3.23) (bez újmy na obecnosti s $\delta(\omega) = 0$) v disperzním prostředí $\omega = \omega(k)$.

$$X(\omega) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t\,,$$

který dostaneme, položíme-li $X(\omega) = \sqrt{2\pi}c(\omega)$.

Vlnový balík (3.23) můžeme (po substituci $\omega = \omega(k)$) vyjádřit jako integrál přes k,

$$\psi(z,\, t) = \int_0^\infty B(k)\cos(\omega(k)t - kz)\,\mathrm{d}k\,.$$

Pro další úpravy je užitečný komplexní zápis ($\psi = \mathrm{Re}\,\hat{\psi}$)

$$\hat{\psi}(z,\, t) = \int_0^\infty B(k)\mathrm{e}^{i(\omega(k)t - kz)}\mathrm{d}k. \tag{3.39}$$

Vzhledem k tomu, že spektrum signálu je podle obr.3.8 soustředěno v úzké oblasti šířky $\Delta k \ll k_0$ kolem dominantního vlnového čísla k_0, můžeme disperzní vztah s dobrou přesností vyjádřit Taylorovým rozvojem v bodě k_0 do 2. řádu

$$\omega(k) \doteq \omega(k_0) + \omega'(k_0)(k - k_0) + \frac{1}{2}\omega''(k_0)(k - k_0)^2. \tag{3.40}$$

Signál (3.39) snadno upravíme dosazením (3.40) na tvar

$$\hat{\psi}(z,\, t) \doteq \mathrm{e}^{i(\omega(k_0)t - k_0 z)} \int_0^\infty B(k)\mathrm{e}^{-i(k-k_0)[z - \omega'(k_0)t]}\mathrm{e}^{\frac{i}{2}\omega''(k_0)(k-k_0)^2 t}\mathrm{d}k\,. \tag{3.41}$$

Exponenciální faktor před integrálem představuje *nosnou vlnu* s dominantní frekvencí $\omega(k_0)$. Samotný signál představuje *modulaci amplitudy a fáze nosné vlny* a závisí na proměnných z, t v kombinaci $F(z - \omega'(k_0)t,\, t)$. Vlnový balík se tedy pohybuje jako celek $F(z - \omega'(k_0)t,\, .\,)$ *grupovou rychlostí*

$$\boxed{v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}(k_0)} \tag{3.42}$$

a mění přitom s časem svůj tvar $F(\,.\,,\, t)$. Nosná vlna má fázovou rychlost $v_0 = \omega(k_0)/k_0$, která obecně není rovna grupové rychlosti v_g.

Změna tvaru signálu s časem v praxi znamená jeho *zkreslení, deformaci* během přenosu disperzním prostředím. Následující velice hrubá úvaha ukazuje, že toto zkreslení má charakter *rozplývání vlnového balíku s časem.*

Je-li $(\Delta t)_0$ doba potřebná k vyslání balíku, pak jeho šířka právě po vyslání bude zřejmě $(\Delta z)_0 \approx v_g(\Delta t)_0$. Na počátku platí též vztah $(\Delta z)_0 \Delta k \approx 2\pi$. Abychom viděli, jak rychle se balík ψ bude v disperzním prostředí rozplývat, rozpůlíme jeho pásmo vlnových čísel $(k_0 - \frac{\Delta k}{2},\, k_0 + \frac{\Delta k}{2})$ na dva půlintervaly $(k_0 - \frac{\Delta k}{2},\, k_0)$ a $(k_0,\, k_0 + \frac{\Delta k}{2})$. Spektra v půlintervalech dávají dva signály ψ_-, ψ_+, jejichž součet je roven našemu ψ, $\psi_- + \psi_+ = \psi$. Signály $\psi_\pm$ mají rozdílná dominantní vlnová čísla $k_0 \pm \frac{\Delta k}{4}$ a tedy i různé grupové rychlosti

$$v_{g\pm} = \omega'(k_0 \pm \frac{\Delta k}{4}).$$

Na počátku se sice překrývaly, ale s časem se jejich středy budou vzdalovat úměrně rozdílu grupových rychlostí

$$\Delta v_g = |v_{g+} - v_{g-}| \doteq \frac{\mathrm{d}v_g}{\mathrm{d}k}(k_0)\frac{\Delta k}{2} = \omega''(k_0)\frac{\Delta k}{2}\,.$$

Proto i šířka balíku ψ poroste s časem přibližně podle vztahu

$$(\Delta z)_t \doteq (\Delta z)_0 + \Delta v_g\, t \doteq (\Delta z)_0 + \frac{1}{2}\omega''(k_0)\Delta k\, t > (\Delta z)_0\,.$$

Pro rozplývání balíku je v této aproximaci rozhodující nenulovost druhé derivace $\omega''(k_0)$, stejně jako v integrálu (3.41).

Důležitým důsledkem efektu rozplývaní je korekce vztahů (3.27), (3.29) mezi šířkou signálu a šířkou jeho spektra na *nerovnosti*

$$(\Delta z)_t \Delta k \gtrsim 2\pi\,, \qquad (\Delta t)_t \Delta\omega \gtrsim 2\pi\,.$$

Druhá nerovnost vyplývá z první, neboť $\Delta\omega \approx \omega'(k_0)\Delta k = v_g \Delta k$ a dále $(\Delta z)_t \approx v_g(\Delta t)_t$, protože celý balík projde daným bodem rychlostí v_g za čas $(\Delta t)_t$.

Na závěr je nutná poznámka k některým případům tzv. anomální disperze ($n < 1$), jako např. v případě plazmatu s disperzním vztahem $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2$. Snadná úvaha zde dává ([1], př. 4.4) nerovnosti $v > c$, $v_g < c$. Tato skutečnost, že fázová rychlost v může převýšit c, vyvolala obavy o příčinnost již brzy po vytvoření speciální teorie relativity. Problém byl značně diskutován kolem r. 1910 a posléze v r. 1914 vyřešen A. Sommerfeldem a L. Brillouinem (viz [20], str. 101) v tom smyslu, že ne každé řešení Maxwellových rovnic představuje signál schopný přenášet informace. Tak např. rovinná monochromatická vlna (s fázovou rychlostí $v > c$) homogenně vyplňující celý prostor není signálem přenášejícím informace. Naopak vlnový balík s prostorovou nehomogenitou je signálem, který přenáší informace grupovou rychlostí $v_g < c$.

Kapitola 4

Energie vlnění

4.1 Energetické veličiny pro strunu

Hustota kinetické, potenciální a celkové energie na struně. Vektor toku energie. Zákon zachvání energie. Energie pro superpozici vln. Amplituda a intenzita.

Z mechaniky víte, že celková energie $E_{kin} + E_{pot}$ *izolované soustavy* hmotných bodů při působení *konservativních sil* mezi hmotnými body se zachovává, tj. během pohybu se nemění. To ovšem neplatí pro jednotlivé částice izolované soustavy: energie se uvnitř soustavy přelévá.[1] Ukážeme si, jak se tato skutečnost dá matematicky vyjádřit pro nejjednodušší vlnící se prostředí - strunu.

Pro odvození vzorců pro energetické veličiny na struně si pomůžeme diskretní aproximací z oddílu 1.3 a spojitou limitou. Kinetická energie krátkého úseku struny $< z, z + dz >$ je součtem kinetických energií všech hmotných bodů řetízku, které leží v intervalu $< z, z + dz >$:

$$E_{kin}(z, z + dz) = \frac{1}{2} \sum_{z \leq na \leq z+dz} M \dot{\psi}_n^{\,2}. \tag{4.1}$$

Vyjádříme-li levou stranu (4.1) pomocí *hustoty kinetické energie* $\kappa(z, t)$ a na pravé straně nahradíme všechna $\dot{\psi}_n(t)$ hodnotou spojité funkce $\frac{\partial \psi}{\partial t}(z, t)$, dostaneme

$$\kappa(z, t)dz = \frac{1}{2} M \frac{dz}{a} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(z, t) \right)^2 .$$

Součinitel dz/a zde vyjadřuje počet členů sumy v (4.1). Ve spojité limitě $a \to 0$ musí $M \to 0$, aby hustota $\rho = M/a$ zůstala konstantní, takže

$$\boxed{\kappa(z, t) = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2} \tag{4.2}$$

[1] Rovněž to neplatí při působení disipativních sil (tření).

Pro určení hustoty potenciální energie vyjdeme z potenciální energie $U_{n,n+1}$, kterou získá pružinka spojující sousední hmotné body n, $n+1$ řetízku při vychýlení z rovnovážné polohy. Při natažení z počáteční délky a na konečnou délku l bude

$$U_{n,n+1} = -\int_a^l (-Kz')dz' = \frac{1}{2}K(l^2 - a^2) = \frac{1}{2}K(\psi_{n+1} - \psi_n)^2,$$

takže potenciální energie úseku $< z, z + dz >$ bude rovna

$$E_{pot}(z, z + dz) = \frac{1}{2} \sum_{z \le na \le z+dz} K(\psi_{n+1} - \psi_n)^2. \tag{4.3}$$

Levou stranu (4.3) lze vyjádřit pomocí *hustoty potenciální energie* $u(z,t)$. Na pravé straně ve spojité limitě $a \to 0$, $K \to \infty$, aby síla napínající strunu $T = Ka$ zůstala konstantní. Současně nahradíme ve všech sčítancích

$$\frac{\psi_{n+1}(t) - \psi_n(t)}{a} \doteq \frac{\partial \psi}{\partial z}(z,t),$$

takže při počtu dz/a sčítanců

$$u(z,t)dz = \frac{1}{2}K\frac{dz}{a}\left(a\frac{\partial \psi}{\partial z}(z,t)\right)^2$$

a v limitě $a \to 0$ dostaneme

$$\boxed{u(z,t) = \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2.} \tag{4.4}$$

Celková energie na jednotku délky — *hustota energie* $\varepsilon(z,t)$ — je součtem $\kappa + u$,

$$\boxed{\varepsilon(z,t) = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2.} \tag{4.5}$$

Dovoluje v každém okamžiku t zapsat energii vlnění zvoleného úseku struny $< a, b >$ jako integrál

$$E_{<a,b>}(t) = \int_a^b \varepsilon(z,t)dz, \tag{4.6}$$

který se obecně mění s časem. Tyto změny energie v intervalu $< a, b >$ jsou nutně kompenzovány tokem energie přes hranice intervalu $< a, b >$. K vyjádření toku energie uvažujme dvojici bodů n, $n+1$ a zkoumejme, jak velká energie se při vlnění přenáší za 1 sekundu z bodu n na bod $n+1$. Tento výkon koná síla, kterou n-tý bod působí na bod $n+1$. Podle obr. 1.7 a 1.11 je rovna

$$-F_{2x} = -|\boldsymbol{F_2}|\sin(\vartheta_2) \doteq -T\tan(\vartheta_2) = -T\frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{a} \doteq -T\frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Výkon, který tato síla koná na bodu $n+1$, dostaneme vynásobením rychlostí $\dot{\psi}_{n+1} \doteq \partial\psi/\partial t$:

$$\boxed{S_z(z,t) = -T\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial t}.} \tag{4.7}$$

Veličina S_z o rozměru Js^{-1} (watt) představuje tok energie místem z ve směru $+z$. Protože má charakter vektorové veličiny, zavádíme vektor toku energie

$$\boxed{\mathbf{S}(z,t) = -T\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial t}\mathbf{z_0},} \tag{4.8}$$

kde $\boldsymbol{z_0}$ je jednotkový vektor ve směru osy z.

Abychom vyjádřili bilanci energie v daném intervalu $< a, b >$, zapíšeme úbytek energie (4.6) za jednotku času

$$-\frac{dE_{<a,b>}}{dt} = -\int_a^b \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}dz = -\int_a^b \left[\rho\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + T\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial z}\right]dz. \tag{4.9}$$

Jestliže v prvním členu integrandu vyjádříme $\partial^2\psi/\partial t^2$ pomocí vlnové rovnice, dostaneme po snadné úpravě

$$-\frac{dE_{<a,b>}}{dt} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial z}\left(-T\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)dz = S_z(b) - S_z(a). \tag{4.10}$$

Jako důsledek pohybové rovnice jsme tedy obdrželi zákon zachování energie v integrálním tvaru.

Cvičení: Odvoďte diferenciální tvar zákona zachování energie, který má formu jednorozměrné rovnice kontinuity pro energii

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial S_z}{\partial z} = 0.$$

Zapamatujte si, že energetické veličiny κ, u, ε, $\boldsymbol{S}$ jsou *kvadratické* ve výchylkách ψ. Pro výchylku ψ víme, že platí *princip superpozice*, který plyne z linearity vlnové rovnice: jsou-li ψ_1, ψ_2 řešení vlnové rovnice, pak i jejich součet $\psi = \psi_1 + \psi_2$ je řešením. Z hlediska vzniku vlnění na struně můžeme předpokládat, že vlny ψ_1 resp. ψ_2 jsou buzeny silami $F_1(t)$ resp. $F_2(t)$ působícími na počátku polonekonečné struny. Při skládání vlnění se aditivně skládají i derivace

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \frac{\partial\psi_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\partial\psi_1}{\partial z} + \frac{\partial\psi_2}{\partial z}.$$

Pro kvadratické veličiny to ovšem neplatí, např.

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\frac{\partial\psi_2}{\partial t} \neq \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right)^2.$$

Přídavný *interferenční člen* vytváří dojem, že vzniká další energie, nebo se ztrácí. Z hlediska buzení vlny ψ součtem sil $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$ však tento paradox mizí: výkon dodávaný na strunu

$$P(t) = F(t)\frac{\partial\psi}{\partial t}(0,t) = (F_1+F_2)\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right) \neq F_1\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+F_2\frac{\partial\psi_2}{\partial t} = P_1(t)+P_2(t)$$

není roven součtu výkonů sil F_1, F_2 !

Poznámka k terminologii: Výraz *amplituda* jsme použili pro označení kladné konstanty A v harmonické vlně. V širším smyslu se často používá k označení veličiny *lineární* v ψ. Výraz *intenzita* se pak v tomto širším smyslu používá pro veličiny, které jsou kvadratické v ψ nebo v derivacích ψ. (V užším smyslu intenzita znamená časovou střední hodnotu toku energie v postupné vlně.)

Amplitudy vyhovují principu superpozice, intenzity nikoliv.

4.2 Energetické poměry v postupné vlně

Energetické veličiny v postupné vlně a jejich vzájemný vztah. Časové a prostorové střední hodnoty pro harmonické postupné vlny.

V postupné vlně $\psi(z,t) = F(z-vt)$, která se šíří po struně ve směru $+z$, platí speciální vztah mezi derivacemi

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -vF'(z-vt), \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = F'(z-vt) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial\psi}{\partial t} = -v\frac{\partial\psi}{\partial z}.} \tag{4.11}$$

V důsledku vztahu (4.11) dostáváme rovnost hustoty kinetické a hustoty potenciální energie v libovolném místě a čase

$$\kappa = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho\left(-v\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 = u,$$

takže

$$\varepsilon = 2\kappa = 2u. \tag{4.12}$$

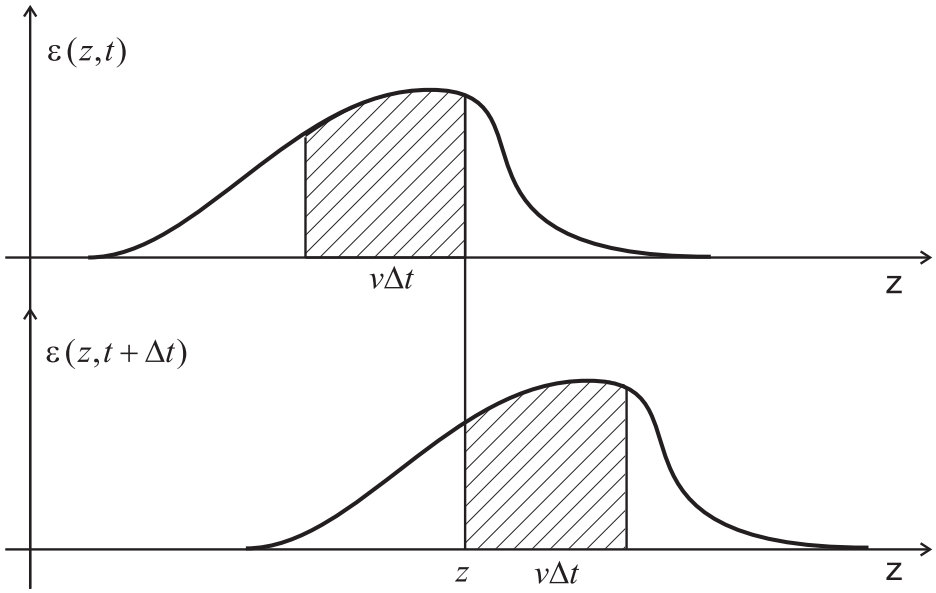
Tok energie lze pak jednoduše zapsat

$$S_z = -T\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -T\frac{\partial\psi}{\partial z}\left(-v\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = vT\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 = \varepsilon v. \tag{4.13}$$

Poslední vztah můžeme interpretovat podle obr. 4.1: za čas Δt bodem z projde energie z vyšrafované oblasti $\varepsilon v\Delta t$, tedy za jednotku času εv.

Zavedené energetické veličiny κ, u, S_z budeme ilustrovat na harmonické postupné vlně

$$\psi(z,t) = A\cos(\omega t - kz + \alpha).$$



Obrázek 4.1: Přenos energie v postupné vlně

Intenzity

$$\begin{aligned} \kappa(z,t) &= \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kz + \alpha), \\ u(z,t) &= \frac{1}{2}Tk^2 A^2 \sin^2(\omega t - kz + \alpha), \\ S_z(z,t) &= Tk\omega A^2 \sin^2(\omega t - kz + \alpha) \end{aligned} \tag{4.14}$$

jsou všechny úměrné kvadrátu $A^2 \sin^2(\omega t - kz + \alpha)$.

V praxi, vzhledem k vysokým frekvencím, obvykle měříme střední hodnoty těchto veličin. V daném místě pak určujeme časovou střední hodnotu. Časová střední hodnota integrabilní funkce $f(t)$ v intervalu $t_1 \leq t \leq t_2$ je definována integrálem

$$< f(t) >= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt.$$

Pro periodický děj $f(t+T) = f(t)$ se střední hodnota počítá přes interval o délce jedné periody T:

$$< f(t) >_T = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt. \tag{4.15}$$

Pro harmonické kmity jsou užitečné vzorce (odvoďte!)

$$< \cos(\omega t + \alpha) >_T = 0, \quad < \cos^2(\omega t + \alpha) >_T = \frac{1}{2} \tag{4.16}$$

a analogické vzorce pro sinus. Odtud ihned plyne:

Časové střední hodnoty intenzit pro harmonické postupné vlny nezávisí na z, t a jsou rovny polovině jejich maximálních hodnot.

Cvičení: Definujte prostorové střední hodnoty a odvoďte vzorce analogické (4.16)

$$< \cos(kz + \beta) >_\lambda = 0, \quad < \cos^2(kz + \beta >_\lambda = \frac{1}{2}.$$

Kapitola 5

Odraz vln

5.1 Korektní zakončení struny

Zakončení viskózním tlumičem. Charakteristická impedance.

V mnoha praktických situacích požadujeme, aby prostředím postupovaly signály pouze jedním směrem, tj. aby nevznikaly odrazy. Namátkou uveďme vedení televizního signálu koaxiálním kabelem od antény k přijímači nebo snímání zvuku v nahrávacím studiu. Na struně takový požadavek znamená, že na počátku rozkmitávaná struna je na svém konci opatřena mechanickým zařízením, které přesně napodobuje další pokračování struny. Takové zařízení budeme nazývat *korektní zakončení.*

Z hlediska energie musí korektní zakončení úplně pohltit energii dopadající postupné vlny, aniž vznikne vlna odražená. Bude tedy tlumičem a sílu F_x, kterou má působit na strunu, si odvodíme ze síly $F_{2x} = T(\partial\psi/\partial z)$ známé z odvození vlnové rovnice, oddíl 1.2, obr. 1.7. Vzpomeňme si, že F_{2x} je příčná síla, kterou působí pokračování struny na strunu v bodě z_2. Podle definice musí korektní zakončení (simulující pokračování struny) působit na strunu příčnou silou F_x rovnou F_{2x} , jestliže na zakončení dopadá postupná vlna typu $\psi(z,\, t) = F(z - vt)$. Pomocí vzorce (4.11) pak můžeme psát

$$F_x = T\frac{\partial\psi}{\partial z} = T(-\frac{1}{v}\frac{\partial\psi}{\partial t}) = -\sqrt{T\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -Z\frac{\partial\psi}{\partial t}\,.$$

Síla F_x je tedy síla *viskózního tlumení*, úměrná rychlosti s konstantou úměrnosti, tzv. zatěžovací impedancí, rovnou *charakteristické impedanci struny* $Z = \sqrt{T\varrho}$. Zařízení, které má realizovat korektní zakončení v místě $z_2 = 0$, musí tedy působit na strunu příčnou silou

$$F_x = -Z\frac{\partial\psi}{\partial t}(0,\, t) = -Z\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \tag{5.1}$$

kde $x(t) = \psi(0,\, t)$ je výchylka tlumiče v čase t.

Je-li struna korektně zakončena, nemůžeme vysláním pulsů určit délku struny, protože žádný puls se nevrací odražen. Stejný efekt nastává, i když je tlumič přímo napojen na zdroj pulsů. Odtud plyne, že na zdroj postupných vln emitující na nekonečnou nebo korektně zakončenou strunu působí od struny síla reakce, která je stejná, jako kdyby byl zdroj přímo napojen na viskózní tlumič (5.1).

5.2 Odraz na nekorektním zakončení

Koeficient odrazu na zakončení struny viskózním tlumičem. Odrazivost. Přizpůsobení.

Mějme strunu napjatou podél záporné osy z, $-\infty < z \leq 0$ a v bodě $z = 0$ zakončenou viskózním tlumičem $F_x = -Z_2\dot{x}$ o *zatěžovací impedanci* Z_2 . Struna s mechanickými parametry T, ϱ má vlnové parametry

$$v = \sqrt{\frac{T}{\varrho}}\,, \qquad\qquad Z = \sqrt{T\varrho}\,.$$

Pro nekorektní zakončení $Z_2 \neq Z$ musíme vedle *dopadající* harmonické postupné vlny

$$\psi_{dop}(z,\,t) = A\cos(\omega t - kz)$$

uvažovat jako řešení vlnové rovnice i *odraženou* harmonickou postupnou vlnu

$$\psi_{odr}(z,\,t) = RA\cos(\omega t + kz)\,.$$

V ustáleném stavu dopadající vlna pohybuje zakončením s úhlovou frekvencí ω. Zakončení jednak pohlcuje část energie vlny, jednak budí zeslabenou odraženou vlnu o stejné frekvenci. Příslušný *koeficient odrazu* R určíme z *okrajové podmínky* v místě $z = 0$

$$-T\frac{\partial\psi}{\partial z}(0,\,t) = -\left(-Z_2\frac{\partial\psi}{\partial t}(0,\,t)\right)\,, \tag{5.2}$$

jež vyjadřuje zákon akce a reakce pro příčné síly, jimiž působí struna na zakončení a zakončení na strunu. Výsledná vlna na struně je pak takovou superpozicí

$$\psi(z,\,t) = \psi_{dop} + \psi_{odr} = A\cos(\omega t - kz) + RA\cos(\omega t + kz)\,, \tag{5.3}$$

jež navíc splňuje okrajovou podmínku (5.2). Dosazení (5.3) do (5.2) dává

$$-TkA(1-R)\sin\omega t = Z_2\omega A(-1-R)\sin\omega t$$

pro všechna t, odkud

$$R = \frac{Tk - Z_2\omega}{Tk + Z_2\omega} = \frac{Z - Z_2}{Z + Z_2}\,. \tag{5.4}$$

kde jsme s použili $Tk = T\omega/v = Z\omega$. Všimněte si, že koeficient odrazu při hodnotách $0 \leq Z_2 \leq +\infty$ nabývá hodnot v intervalu $-1 \leq R \leq 1$. Protože nezávisí na ω, každá Fourierova komponenta se odráží se stejným R a tvar pulsu se odrazem nemění. Rozlišujeme tři důležité speciální případy:

Z_2	R	
0	+1	volný konec
Z	0	korektní zakončení
$+\infty$	-1	pevný konec [1]

(5.5)

.

Při korektním zakončení tlumič pohltí veškerý dopadající tok energie, při pevném a volném konci naopak tlumič neabsorbuje žádnou energii (při pevném konci je $\dot{x}(t) = 0$, při volném $F_x(t) = 0$) a veškerou energii odnáší odražená vlna. Veličina, která určuje podíl odraženého toku energie, je *odrazivost* $\mathcal{R} = R^2 \in \langle 0,\, 1\rangle$.

Cvičení. Ukažte, že vlnu (5.3) lze psát ve tvaru

$$\psi(z,\, t) = (1 - R)A \sin kz \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + (1 + R)A \cos kz \cos \omega t$$

dvou stojatých vln, z nichž první má v bodě $z = 0$ uzel, druhá kmitnu. Diskutujte speciální případy $R = \pm 1$!

5.3 Vlna na rozhraní dvou transparentních prostředí

Formulace úlohy pro strunu: vlna dopadající, odražená a prošlá. Podmínky na rozhraní. Koeficienty odrazu a prostupnosti pro amplitudu; odrazivost a transmitivita.

Uvažujme jednorozměrný model ostrého rozhraní mezi dvěma prostředími. Nechť dvě struny natažené podél osy z jsou spojeny v bodě $z = 0$ a spojovací bod se může pohybovat jen v příčném směru:

struna 1	struna 2
$-\infty < z < 0$	$0 < z < +\infty$
$T_1,\ \varrho_1$	$T_2,\ \varrho_2$
$v_1 = \sqrt{\dfrac{T_1}{\varrho_1}},\ Z_1 = \sqrt{T_1\varrho_1}$	$v_2 = \sqrt{\dfrac{T_2}{\varrho_2}},\ Z_2 = \sqrt{T_2\varrho_2}$
$\dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} = v_1^2 \dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial z_1^2}$	$\dfrac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} = v_2^2 \dfrac{\partial^2\psi_2}{\partial z_2^2}$

V úloze na odraz a průchod vln rozhraním předpokládáme, že po struně 1 *dopadá* harmonická postupná vlna (řešení vlnové rovnice 1)

$$\psi_{dop}(z,\, t) = A \cos(\omega t - k_1 z)\,, \qquad k_1 = \frac{\omega}{v_1}\,.$$

Kmity rozhraní budí vlnu *odraženou* s koeficientem odrazu pro amplitudu R_{12}

$$\psi_{odr}(z,\, t) = R_{12} A \cos(\omega t + k_1 z)$$

a vlnu *prošlou* na strunu 2 (řešení vlnové rovnice 2)

$$\psi_2(z,\, t) = T_{12} A \cos(\omega t - k_2 z)\,, \qquad k_2 = \frac{\omega}{v_2}\,, \tag{5.6}$$

kde T_{12} se nazývá *koeficient prostupnosti pro amplitudu*. Na struně 1 máme proto v ustáleném stavu řešení vlnové rovnice 1, $\psi_1 = \psi_{dop} + \psi_{odr}$ v oblasti $-\infty < z < 0$,

$$\psi_1(z,\, t) = A \cos(\omega t - k_1 z) + R_{12} A \cos(\omega t + k_1 z). \tag{5.7}$$

[1] Změnu znamení výchylky na pevném konci lze ekvivalentně vyjádřit změnou fáze o 180°

Toto řešení je třeba 'sešít' v bodě $z = 0$ s řešením (5.6) vlnové rovnice 2 v oblasti $0 < z < +\infty$. K tomu musíme zformulovat *podmínky na rozhraní* $z = 0$:

1. spojitost výchylek

$$\boxed{\psi_1(0,\, t) = \psi_2(0,\, t)\,.} \tag{5.8}$$

pro všechna t (a diferencovatelnost podle času) implikuje též spojitost rychlostí

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t}(0,\, t) = \frac{\partial \psi_2}{\partial t}(0,\, t)\,. \tag{5.9}$$

2. zákon akce a reakce pro příčné síly na rozhraní ($-F_{1x} = F_{2x}$)

$$\boxed{T_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z}(0,\, t) = T_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial z}(0,\, t)} \tag{5.10}$$

pro všechna t připouští skok derivace $\partial\psi/\partial z$ při $T_1 \neq T_2$.

Prošlá vlna (5.6) se snadno určí z podmínky spojitosti: kmity počátku struny 2

$$\psi_2(0,\, t) = \psi_1(0,\, t) = (1 + R_{12}) A \cos \omega t$$

budí na intervalu $0 < z < +\infty$ prošlou harmonickou postupnou vlnu

$$\psi_2(z,\, t) = \psi_2\left(0,\, t - \frac{z}{v_2}\right) = (1 + R_{12}) A \cos(\omega t - k_2 z)$$

s koeficientem prostupnosti

$$\boxed{T_{12} = 1 + R_{12}}\,. \tag{5.11}$$

Pro nalezení koeficientu odrazu přepišme pravou stranu podmínky (5.10) pomocí vztahu

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial z} = -\frac{1}{v_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial t}\,,$$

který platí pro vlnu postupující ve směru $+z$. Získaný vztah

$$T_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z}(0,\, t) = -\frac{T_2}{v_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial t}(0,\, t) \overset{(5.9)}{=\!=} -Z_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial t}(0,\, t)$$

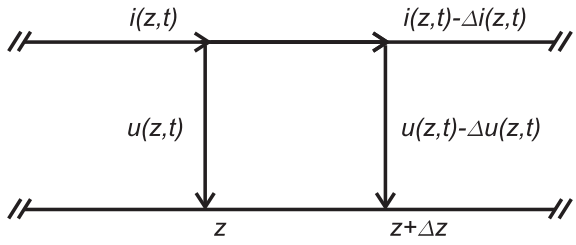
má stejný tvar jako podmínka nekorektního zakončení (5.2) a tudíž vede postupem oddílu 5.2 na koeficient odrazu

$$\boxed{R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}}\,. \tag{5.12}$$

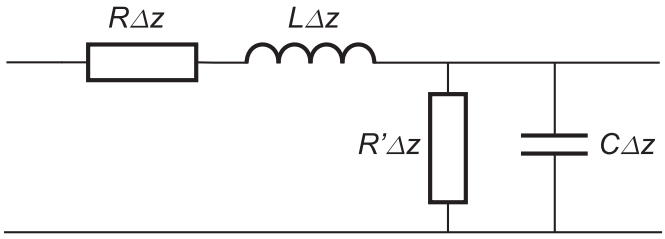
Intervalu hodnot $-1 \leq R_{12} \leq 1$ odpovídá podle (5.11) interval přípustných hodnot koeficientu prostupnosti $0 \leq T_{12} \leq 2$. Vlna tedy prochází vždy se stejným znaménkem. Energetické veličiny se odrážejí s *odrazivostí* $\mathcal{R}_{12} = R_{12}^2$ a procházejí rozhraním s *transmitivitou*

$$\mathcal{T} = \frac{S_z^{dop}(0,t) - S_z^{odr}(0,t)}{S_z^{dop}(0,t)} = 1 - R_{12}^2 = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

Cvičení. Dosaďte vlny (5.6), (5.7) do podmínek na rozhraní (5.8), (5.10). Řešením získaných vztahů odvoďte (5.11), (5.12)!



Obrázek 5.1: Napětí u a proud i na homogenním vedení



Obrázek 5.2: Náhradní obvod úseku vedení $(z,\, z+\Delta z)$ (místo R' má být G)

5.4 Napěťové a proudové vlny na homogenním vedení

Homogenní vedení (Lecherovy dráty). Telegrafní rovnice a jejich řešení. Odraz na zatěžovací impedanci.

Homogenní vedení jsou dva dlouhé přímé rovnoběžné vodiče zapuštěné v prostředí o dielektrické permitivitě ε a magnetické permeabilitě μ, obr. (5.1)

Vedení má spojitě rozložené parametry vztažené na jednotku délky:

odpor R	$[\Omega/\mathrm{m}]$
indukčnost L	$[\mathrm{H}/\mathrm{m}]$
kapacitu C	$[\mathrm{F}/\mathrm{m}]$
svod $G = 1/R'$	$[\mathrm{S}/\mathrm{m}]$

Úsek vedení $(z,\, z+\Delta z)$ bude tedy mít odpor $R\Delta z$, indukčnost $L\Delta z$, kapacitu $C\Delta z$ a svod $G\Delta z$. (Náhradní obvod je na obr.5.2, kde místo $R'\Delta z$ má být $G\Delta z$.)

Podle obr. 5.1 a 5.2 můžeme psát rovnice pro úbytek napětí $-\Delta u$ a úbytek proudu $-\Delta i$ na úseku délky Δz

$$-\Delta u(z,\,t) = \Delta z\left(Ri(z,\,t) + L\frac{\partial i(z,\,t)}{\partial t}\right),$$

$$-\Delta i(z,\,t) = \Delta z\left(Gu(z,\,t) + C\frac{\partial u(z,\,t)}{\partial t}\right).$$

Podíly $\Delta u/\Delta z$ a $\Delta i/\Delta z$ při pevném t definují v limitě $\Delta z \to 0$ parciální derivace $\partial u/\partial z$ a $\partial i/\partial z$, takže dostáváme *telegrafní rovnice*

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t}, \tag{5.13}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = Gu + C\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{5.14}$$

Jejich řešení udává průběh napětí $u(z,\,t)$ a proudu $i(z,\,t)$ podél vedení v závislosti na čase.

Zabývejme se nejprve speciálním případem, kdy je v rovnicích (5.13), (5.14) možno zanedbat disipativní členy

$$|Ri| \ll \left|L\frac{\partial i}{\partial t}\right|,\ |Gu| \ll \left|C\frac{\partial u}{\partial t}\right|. \tag{5.15}$$

Takové poměry vznikají na vedení typicky při velmi vysokých frekvencích. Předpokládáme-li totiž harmonickou časovou závislost (Fourierovu složku) v komplexním tvaru, $j = \sqrt{-1}$,

$$u(z,\,t) = U(z)\mathrm{e}^{j\omega t}, \qquad i(z,\,t) = I(z)\mathrm{e}^{j\omega t}, \tag{5.16}$$

lze nerovnosti (5.15) ekvivalentně zapsat

$$R \ll \omega L, \qquad G \ll \omega C. \tag{5.17}$$

Za těchto podmínek se z telegrafních rovnic

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = L\frac{\partial i}{\partial t}, \qquad -\frac{\partial i}{\partial z} = C\frac{\partial u}{\partial t} \tag{5.18}$$

snadno odvodí vlnové rovnice[2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}, \tag{5.19}$$

které popisují šíření netlumených vln $u(z,\,t)$, $i(z,\,t)$ s fázovou rychlostí $v = 1/\sqrt{LC}$.

Příklad. Pro dva nekonečně dlouhé přímé vodiče (Lecherovy dráty) o poloměru a a vzdálenosti D povrchů v prostředí ε, μ platí vzorce

$$C = \frac{\varepsilon}{4\ln\frac{D+a}{a}}, \qquad L = 4\mu\ln\frac{D+a}{a}$$

[2]První rovnici zderivujeme podle z a použijeme druhou rovnici

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = L\frac{\partial^2 i}{\partial z\partial t} = L\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial i}{\partial z}\right) = -LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Analogicky se získá stejná vlnová rovnice pro $i(z,\,t)$.

a tedy $LC = \varepsilon\mu$. Vidíme, že fázová rychlost napěťových a proudových vln na Lecherových drátech

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{5.20}$$

se přesně shoduje s fázovou rychlostí elektromagnetických vln v prostředí ε, μ. Můžeme tedy říci:

> *Vlny $u(z,\,t)$, $i(z,\,t)$ jsou pouze projevem šíření elektromagnetické vlny, která postupuje podél vedení.*

Vraťme se k telegrafním rovnicím (5.13), (5.14) zahrnujícím disipativní členy a zkoumejme jejich řešení s harmonickou časovou závislostí (5.16). Po dosazení (5.16) do (5.13), (5.14) dostaneme soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic

$$-U'(z) = (R + j\omega L)I(z)\,, \tag{5.21}$$
$$-I'(z) = (G + j\omega C)U(z)\,, \tag{5.22}$$

z nichž vyloučením $I(z)$

$$-U''(z) = (R + j\omega L)I'(z) = -(R + j\omega L)(G + j\omega C)U(z)$$

plyne

$$U'' - \gamma^2 U = 0, \tag{5.23}$$

kde

$$\gamma^2 = (R + j\omega L)(G + j\omega C). \tag{5.24}$$

Při nenulových R, G zvolíme za γ komplexní odmocninu $\gamma = \beta + jk$, $\beta \geq 0$, $k > 0$ (pro $R = G = 0$ je $\beta = 0$, $\gamma = jk = j\omega/v = j\omega\sqrt{LC}$). Charakteristická rovnice pro (5.23), $\lambda^2 - \gamma^2 = 0$, má komplexní kořeny $\lambda_{1,2} = \pm\gamma$, takže obecné řešení rovnice (5.23) je

$$U(z) = A_1 \mathrm{e}^{\gamma z} + A_2 \mathrm{e}^{-\gamma z}\,. \tag{5.25}$$

Dosazením do (5.16) zjistíme, že dva členy (5.25) odpovídají harmonickým tlumeným vlnám, které postupují (a exponenciálně se tlumí) ve směrech $-z$ a $+z$:

$$u(z,\,t) = A_1 \mathrm{e}^{\beta z}\mathrm{e}^{j(\omega t + kz)} + A_2 \mathrm{e}^{-\beta z}\mathrm{e}^{j(\omega t - kz)}. \tag{5.26}$$

Příslušná proudová vlna se určí pomocí rovnice (5.21)

$$i(z,\,t) = -\frac{U'(z)\mathrm{e}^{j\omega t}}{R + j\omega L} = \frac{1}{Z}\left(-A_1 \mathrm{e}^{\beta z}\mathrm{e}^{j(\omega t + kz)} + A_2 \mathrm{e}^{-\beta z}\mathrm{e}^{j(\omega t - kz)}\right). \tag{5.27}$$

Zde jsme definovali *charakteristickou impedanci* vedení

$$Z = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

fyzikálně jako *poměr napětí a proudu pro vlnu postupující ve směru $+z$.*

Na závěr odvodíme koeficienty odrazu R_U, R_I pro napětí a proud, je-li na vedení $-\infty < z < 0$ v místě $z = 0$ připojena *zatěžovací impedance* Z_2. Nejdříve určíme

integrační konstanty A_1, A_2 z podmínek $U(0) = A_1 + A_2$, $ZI(0) = -A_1 + A_2$ na konci vedení:

$$A_1 = \frac{1}{2}(U(0) - ZI(0)), \qquad A_2 = \frac{1}{2}(U(0) + ZI(0)).$$

Vzhledem k tomu, že na zatěžovací impedanci platí $U(0) = Z_2 I(0)$, vlny budou mít výsledný tvar

$$u(z,\, t) = \frac{I(0)}{2}\left[(Z_2 - Z)\mathrm{e}^{\beta z}\mathrm{e}^{j(\omega t + kz)} + (Z_2 + Z)\mathrm{e}^{-\beta z}\mathrm{e}^{j(\omega t - kz)}\right],$$

$$i(z,\, t) = \frac{I(0)}{2Z}\left[-(Z_2 - Z)\mathrm{e}^{\beta z}\mathrm{e}^{j(\omega t + kz)} + (Z_2 + Z)\mathrm{e}^{-\beta z}\mathrm{e}^{j(\omega t - kz)}\right].$$

První členy představují vlny odražené u_{odr}, i_{odr}, druhé členy vlny dopadající u_{dop}, i_{dop}. Koeficienty odrazu R_U, R_I pak definujeme jako poměry $u_{odr}(0,\, t)/u_{dop}(0,\, t)$, $i_{odr}/i_{dop}(0,\, t)$ v bodě $z = 0$ (vzhledem k tlumení):

$$R_U = \frac{Z_2 - Z}{Z_2 + Z} = -R_I\,.$$

Cvičení. Diskutujte případy $Z_2 = Z$ (korektní zakončení), $Z_2 = 0$ (vedení nakrátko) a $Z_2 \to \infty$ (vedení naprázdno)! Srovnejte s analogickými situacemi na struně. Co nastane při $Z_2 = Z\mathrm{e}^{j\alpha}$?

Kapitola 6

Elektromagnetické vlny

6.1 Rovinné elektromagnetické vlny

Maxwellovy rovnice v prostředí. Vlnové rovnice. Rovinná elektromagnetická vlna jako řešení Maxwellových rovnic v prázdném prostředí.

V této kapitole shrneme základní poznatky o elektromagnetických vlnách, které budeme potřebovat pro výklad optiky — nauky o světle. Dnes je známo, že elektromagnetické jevy tvoří základ veškeré makroskopické fyziky a účastní se většiny mikroskopických (atomárních, jaderných) procesů. Speciálně jsou *podstatou optiky* a to nejen v oblasti viditelného světla.

Fundamentální elektromagnetická interakce mezi nabitými hmotnými částicemi se řídí **Maxwellovými rovnicemi**, které popisují buzení elektromagnetického pole $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ danou hustotou náboje $\rho(\boldsymbol{r},t)$ a proudovou hustotou $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$. Zapíšeme je v lineárním, měkkém prostředí s konstantní dielektrickou permitivitou ε a magnetickou permeabilitou μ:

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0, \quad \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0,$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \mathrm{rot}\boldsymbol{B} - \varepsilon\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu\boldsymbol{j}.$$

Působení elektromagnetického pole na nabité částice je pak dáno zákonem Lorentzovy síly

$$\boldsymbol{F} = Q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}).$$

Existence elektromagnetických vln je přímým důsledkem Maxwellových rovnic. Ukažme, že z Maxwellových rovnic *v prázdném prostoru*, tj. v oblasti bez zřídel $\rho = 0$, $\boldsymbol{j} = 0$, lze odvodit vlnové rovnice pro pole $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$. K tomu stačí na rovnice pro $\mathrm{rot}\boldsymbol{E}$ zapůsobit operátorem rot a použít vzorec (odvoďte!)

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\boldsymbol{E} - \Delta\boldsymbol{E}.$$

S použitím ostatních Maxwellových rovnic se nám podaří vyloučit $\boldsymbol{B}$,

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\Delta\boldsymbol{E} = -\mathrm{rot}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}rot\boldsymbol{B} = -\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2},$$

takže

$$\boxed{\Delta \boldsymbol{E} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}.} \tag{6.1}$$

Analogickým postupem lze vyloučit $\boldsymbol{E}$ s výsledkem

$$\boxed{\Delta \boldsymbol{B} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}.} \tag{6.2}$$

Z tohoto odvození současně vidíme, že elektromagnetické vlny se v homogenním prostředí ε, μ šíří s **fázovou rychlostí**

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.}$$

Elektromagnetické vlny se mohou šířit i vakuem, kde platí $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. V oddíle 3.1 jsme definovali **index lomu** prostředí

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r} \doteq \sqrt{\varepsilon_r}.$$

Pro pochopení hlavních vlastností elektromagnetických vln si zkonstruujeme speciální prostorové řešení Maxwellových rovnic bez zřídel — *rovinnou vlnu* postupující ve směru osy z. Pole $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ tedy budou konstantní v rovinách kolmých k ose z,

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(z,t), \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(z,t).$$

Z Maxwellových rovnic

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad \mathrm{div}\boldsymbol{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$(\mathrm{rot}\boldsymbol{E})_z = 0 = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad (\mathrm{rot}\boldsymbol{B})_z = 0 = \varepsilon\mu\frac{\partial E_z}{\partial t}$$

vidíme, že podélné složky E_z, B_z nezávisí na z, t, jsou v prostoru i čase konstantní a tedy neodpovídají šíření vlny. Položme proto

$$E_z(z,t) = 0, \quad B_z(z,t) = 0$$

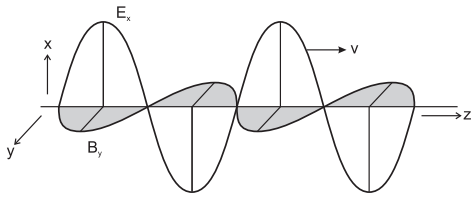
a zkoumejme zbývající Maxwellovy rovnice pro příčné složky

$$(\mathrm{rot}\boldsymbol{E})_x = -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad (\mathrm{rot}\boldsymbol{B})_x = -\frac{\partial B_y}{\partial z} = \varepsilon\mu\frac{\partial E_x}{\partial t},$$

$$(\mathrm{rot}\boldsymbol{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad (\mathrm{rot}\boldsymbol{B})_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} = \varepsilon\mu\frac{\partial E_y}{\partial t}.$$

K velmi jednoduchému řešení nyní dospějeme za předpokladu, že $E_y(z,t) = 0$. Pak totiž $\partial B_x/\partial z = \partial B_x/\partial t = 0$, takže můžeme položit $B_x = 0$. Pro vlny

$$\boldsymbol{E} = (E_x(z,t), 0, 0), \quad \boldsymbol{B} = (0, B_y(z,t), 0)$$



Obrázek 6.1: Harmonická rovinná elektromagnetická vlna

nyní platí Maxwellovy rovnice

$$-\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad -\frac{\partial B_y}{\partial z} = \varepsilon\mu\frac{\partial E_x}{\partial t}. \tag{6.3}$$

Všimněte si, že mají matematicky stejný tvar jako telegrafní rovnice bez tlumení (5.18). Stejně jako v oddíle 5.4 pak z (6.3) plynou vlnové rovnice

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}. \tag{6.4}$$

Víme, že vlny E_x, B_y postupující v kladném směru osy z lze zapsat ve tvaru d'Alembertova řešení rovnic (6.4)

$$E_x(z,t) = F_E(z - vt), \quad B_y(z,t) = F_B(z - vt).$$

Vztah mezi vlnami E_x, B_y udávají Maxwellovy rovnice (6.3), z nichž plyne

$$F'_E(\xi) = vF'_B(\xi) \quad \Rightarrow \quad F_E(\xi) = vF_B(\xi) + konst.,$$

kde $\xi = z - vt$ a integrační konstantu pokládáme rovnou nule (odpovídala by opět konstantnímu řešení). V rovinné vlně postupující ve směru $+z$ tedy platí

$$E_x(z,t) = vB_y(z,t), \quad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Je-li tato vlna **harmonická** (**monochromatická**),

$$E_x(z,t) = E_0\cos(\omega t - kz + \varphi), \quad B_y(z,t) = B_0\cos(\omega t - kz + \varphi'),$$

platí

$$E_0 = vB_0 > 0, \quad \varphi = \varphi', \quad \omega = vk$$

(viz obr. 6.1).

Shrneme nyní odvozené vlastnosti rovinných elektromagnetických vln. Protože nejsou závislé na volbě souřadného systému, můžeme je zformulovat pro rovinnou vlnu postupující v libovolném směru $\boldsymbol{s}$ ($|\boldsymbol{s}| = 1$):

(i) $\boldsymbol{E}\,(\boldsymbol{r}\,,t) = \boldsymbol{F_E}\,(\boldsymbol{s}\,.\boldsymbol{r} - vt), \quad \boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{r}\,,t) = \boldsymbol{F_B}\,(\boldsymbol{s}\,.\boldsymbol{r} - vt);$

(ii) $\boldsymbol{E}\,, \boldsymbol{B}\,, \boldsymbol{s}$ *tvoří v tomto pořadí pravotočivý systém vzájemně ortogonálních vektorů (vlna je příčná);*

(iii) $E = vB$, *kde* $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Pole $\boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{r}\,,t)$ je tedy plně určeno polem $\boldsymbol{E}\,(\boldsymbol{r}\,,t)$. Monochromatická rovinná vlna má tvar

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E_0}\cos\left(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \varphi\right), \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{B_0}\cos\left(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \varphi\right), \tag{6.5}$$

kde $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{s}$ je vlnový vektor, $\omega = v\,|\boldsymbol{k}\,|$, $|\boldsymbol{s}\,| = 1$ a vektorové amplitudy $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{B}_0$ splňují vlastnosti (ii), (iii).

6.2 Energetické veličiny v rovinné elektromagnetické vlně

Hustota energie, hustota toku energie a hustota hybnosti v rovinné elektromagnetické vlně. Časové střední hodnoty v monochromatické vlně. Tlak záření.

Elektromagnetické pole má jako fyzikální objekt energii, hybnost a moment hybnoti. Vzhledem ke kontinuálnímu charakteru pole je jeho energetický obsah popsán **hustotou energie** $w(\boldsymbol{r}\,,t)$ (jednotka Jm^{-3}), jejíž objemový integrál $\int_V w dV$ udává okamžitou energii obsaženou v libovolné prostorové oblasti V.

Podle J. C. Maxwella je hustota energie elektromagnetického pole v nevodivém prostředí ε, μ dána kvadratickým výrazem

$$w = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}) = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2).$$

Přenos energie v prostoru popisuje **hustota toku energie** $\boldsymbol{S}\,(\boldsymbol{r}\,,t)$, která je definována jako množství energie, jež za jednotku času projde jednotkovou plochou postavenou kolmo na směr šíření energie pole (jednotka $Jm^{-2}s^{-1} = W/m^2$). V časově proměnném elektromagnetickém poli v prostředí ε, μ je dána Poyntingovým vektorem

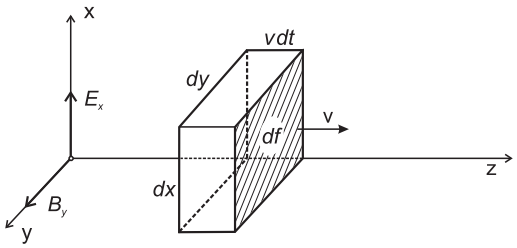
$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\,.$$

Pro **hustotu hybnosti** elektromagnetického pole **ve vakuu** platí vzorec

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B} = \varepsilon_0\mu_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{S}}{c^2}.$$

Všimněte si, že všechny uvedené výrazy pro energetické veličiny jsou *kvadratické* v polích. Upravme je pro případ *rovinné elektromagnetické vlny*. Vztah (iii) z oddílu 6.1 lze ekvivalentně zapsat

$$E = vB \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H. \tag{6.6}$$



Obrázek 6.2: Ke vztahu $\boldsymbol{S} = wv\boldsymbol{s}$ pro hustotu toku energie. Přenáší-li se energie vlny rychlostí v, projde plochou $df = dxdy$ za čas dt energie $wdV = wvdtdxdy$. Hustota toku energie S_z je pak rovna energii, která projde za jednotku času jednotkovou plochou, tj. $(w\ dV)/(df\ dt) = wv$.

Proto elektrická a magnetická část hustoty energie w jsou si v rovinné vlně rovny a platí

$$\boxed{w = \varepsilon E^2.}$$

Vlastnosti (ii) a (iii) z oddílu 6.1 dovolují zapsat

$$\boldsymbol{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{E}, \tag{6.7}$$

takže Poyntingův vektor v rovinné elektromagnetické vlně je úměrný hustotě energie (viz obr. 6.2)

$$\boldsymbol{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\boldsymbol{E} \times (\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{E}) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2\boldsymbol{s},$$

$$\boxed{\boldsymbol{S} = wv\boldsymbol{s}.} \tag{6.8}$$

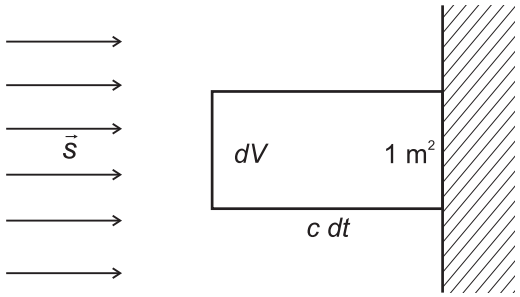
Konečně hustota hybnosti (ve vakuu)

$$\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{S}}{c^2} = \frac{w}{c}\boldsymbol{s}.$$

V monochromatické rovinné vlně (6.5) nás vzhledem k vysokým frekvencím zajímají časové střední hodnoty přes jednu periodu $T = 2\pi/\omega$:

$$< w >_T = \varepsilon < E^2 >_T = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2,$$

$$< \boldsymbol{S} >_T = < w >_T v\boldsymbol{s} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2\boldsymbol{s},$$



Obrázek 6.3: K odvození tlaku záření.

$$< \boldsymbol{g} >_T = \frac{< \boldsymbol{S} >_T}{c^2} = \frac{< w >_T}{c} \boldsymbol{s}.$$

Skutečnost, že rovinná elektromagnetická vlna má nenulovou hustotu hybnosti, přivedla v r. 1873 J. C. Maxwella k odvození **tlaku záření**. Abychom odvodili velikost tlaku záření, předpokládejme, že rovinná elektromagnetická vlna ve vakuu dopadá kolmo na dokonale absorbující (černý) rovinný povrch masivního tělesa (obr. 6.3). Záření ve válcovém objemu o průřezu 1 m^2 a výšce $c\,dt$ bude absorbováno plochou 1 m^2 povrchu tělesa za čas dt. To znamená, že z tohoto objemu těleso převezme za čas dt hybnost pole

$$d\boldsymbol{G} = \boldsymbol{g} dV = \frac{w}{c} \boldsymbol{s} c\, dt.$$

Z mechaniky víme, že časová změna hybnosti $d\boldsymbol{G}\,/dt$ udává sílu, v našem případě působící kolmo na jednotku plochy povrchu tělesa. Její normálová složka představuje hledaný tlak :

$$\boxed{\textit{tlak záření} = w.}$$

Tlak záření je číselně roven hustotě energie záření.

Poznámka. Odráží-li povrch tělesa kolmo dopadající rovinnou elektromagnetickou vlnu s koeficientem odrazu pro amplitudu R^E, bude mít pole odražené vlny hustotu hybnosti opačného směru $\mathcal{R}\boldsymbol{g}$, kde $\mathcal{R} = \left(R^E\right)^2$ je odrazivost povrchu. Protože celková změna hybnosti tělesa je nyní

$$d\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{g} + \mathcal{R}\boldsymbol{g})\, dV,$$

dostáváme vzorec

$$\boxed{\textit{tlak záření} = (1 + \mathcal{R}) w.}$$

Experimentálně byl Maxwellův vzorec pro tlak svazku světla potvrzen teprve v pracích [17], [18] z roku 1901. Samozřejmě je pozorována časová střední hodnota

$$<\textit{tlak záření}>_T = (1+\mathcal{R}) < w >_T .$$

Tlak záření částečně ovlivňuje tvar komet. Protože je důležitou veličinou v termodynamice záření, nelze ho pominout např. při studiu vnitřní dynamiky hvězd.

6.3 Elektromagnetické vlny na rozhraní

Fázová rychlost a charakteristická impedance. Dopadající, odražená a prošlá vlna. Koeficient odrazu a propustnosti pro kolmý dopad.

Základními vlnovými parametry homogenního prostředí jsou fázová rychlost v a charakteristická impedance Z. Na struně byly dány vztahy $v = \sqrt{T/\rho}$, $Z = \sqrt{T\rho}$, na homogenním vedení bez tlumení $v = 1/\sqrt{LC}$, $Z = \sqrt{L/C}$. Pro elektromagnetické vlny jsme viděli, že $v = c/n = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$. **Charakteristickou impedanci** (vlnový odpor) prostředí ε, μ budeme definovat podobně jako u homogenního vedení — jako poměr velikostí intenzit elektrického a magnetického pole pro vlnu postupující v daném směru $\boldsymbol{s}$. Ze vztahů (6.6) ihned vyplývá, že charakteristická impedance prostředí je rovna

$$\boxed{Z = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.}$$

Hodnoty $\varepsilon_0 = 8,854.10^{-12} AsV^{-1}m^{-1}$, $\mu_0 = (\varepsilon_0 c^2)^{-1} = 4\pi.10^{-7} VsA^{-1}m^{-1}$ dávají pro charakteristickou impedanci vakua hodnotu

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \doteq 377\ \Omega,$$

kterou si lze pamatovat jako 120π ohmů.

Úloha na kolmý dopad rovinné elektromagnetické vlny na rozhraní dvou homogenních prostředí ε_1, μ_1 a ε_2, μ_2 je jednorozměrným problémem, který jsme již řešili pro strunu a pro homogenní vedení v oddílech 5.3 a 5.4. V prostředí ε_1, μ_1 je dopadající a odražená vlna, v prostředí ε_2, μ_2 vlna prošlá. Amplitudy těchto vln E_0, $R^E_{12}E_0$ a $T^E_{12}E_0$ jsou určeny koeficienty odrazu R^E_{12} a prostupnosti T^E_{12}. Z podmínek spojitosti na rozhraní (podrobně viz [9], kap. 9) plyne

$$T^E_{12} = 1 + R^E_{12}, \quad T^B_{12} = 1 + R^B_{12}$$

a pro R^E_{12}, R^B_{12} stejné vztahy jako u homogenního vedení (kde bylo $R_U = (Z_2 - Z)/(Z_2 + Z) = -R_I$):

$$R^E_{12} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = -R^B_{12}.$$

Vzhledem k tomu, že v optice obvykle $\mu_{1r} \doteq 1 \doteq \mu_{2r}$, používáme poslední vztah nejčastěji ve tvaru

$$R^E_{12} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} - \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}} \doteq \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2},$$

kde $n_1 \doteq \sqrt{\varepsilon_{1r}}$, $n_2 \doteq \sqrt{\varepsilon_{2r}}$ jsou indexy lomu obou prostředí.

Poznámka. V úlohách na určení interferenčních maxim a minim při odrazu monochromatického světla na tenkých vrstvách se skládají amplitudy. Proto je nutno vzít v úvahu i znamení koeficientu odrazu: je-li záporné (při $n_1 < n_2$), nahradí se změna znamení harmonické vlny při odrazu ekvivalentním posunem fáze o π (180°) !

6.4 Elektromagnetická vlna vyzařovaná elektrickým dipólem

Vlastnosti záření kmitajícího elektrického dipólu. Srovnání s rovinnou vlnou. Poyntingův vektor, intenzita záření, vyzařovací diagram, celkový vyzařovaný výkon.

Obvyklé zdroje světla jsou soustavy atomů (molekul), které jsou energeticky buzeny různými fyzikálními nebo chemickými způsoby a v jejich důsledku vyzařují elektromagnetické vlny. Nejjednodušším klasickým modelem vyzařování je řešení Maxwellových rovnic, jehož zdrojem je časově proměnný *elektrický dipól* (tzv. krátký dipól, [9], kap. 9). S kmitajícími dipóly $\boldsymbol{p}\,(t) = e\boldsymbol{r}\,(t)$ jsme se již setkali v oddíle 3.1 při aplikaci klasického Thomsonova modelu atomu k vysvětlení disperze světla v látkách vynucenými kmity elektronů v atomech.

V tomto oddíle uvedeme tvar elektromagnetické vlny v nevodivém prostředí ε, μ *ve velké vzdálenosti* r od elektrického dipólu umístěného v počátku O a kmitajícího podle předepsané časové závislosti $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}\,(t)$, speciálně pak $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p_0}\cos\omega t$. Na obr 6.4 jsou vyobrazeny vektory $\boldsymbol{E}\,(\boldsymbol{r}\,,t)$, $\boldsymbol{H}\,(\boldsymbol{r}\,,t)$ v souřadném systému, jehož osa z míří ve směru $\boldsymbol{p_0}$. Jsou dány vzorci ([9])

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\ddot{\boldsymbol{p}}_\perp\left(t-\frac{r}{v}\right)}{4\pi\varepsilon v^2 r}, \quad \boldsymbol{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\boldsymbol{r_0}\times\boldsymbol{E}, \tag{6.9}$$

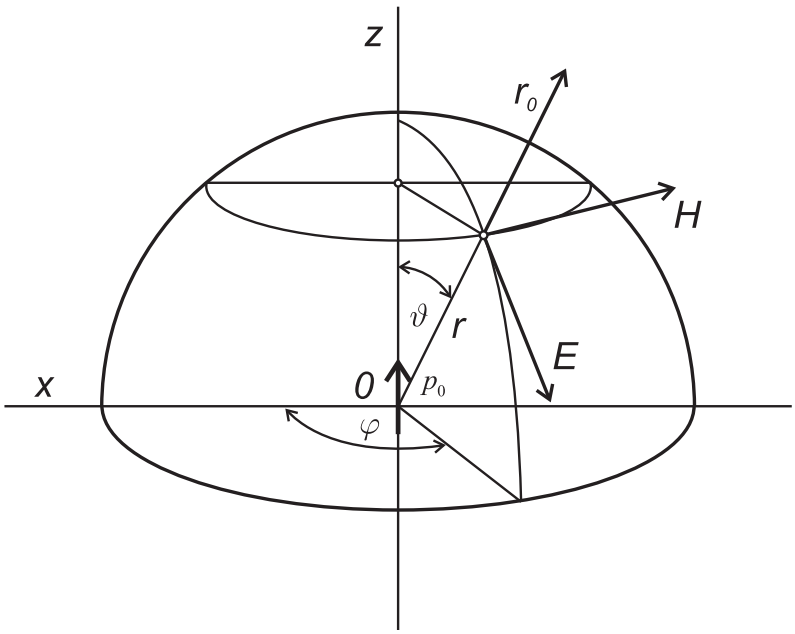
kde $\ddot{\boldsymbol{p}}_\perp$ je kolmou složkou v rozkladu vektoru $\ddot{\boldsymbol{p}} = (\ddot{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{r_0})\boldsymbol{r_0}+\ddot{\boldsymbol{p}}_\perp$ na složku rovnoběžnou s vektorem $\boldsymbol{r_0}=\boldsymbol{r}\,/r$ a složku kolmou k $\boldsymbol{r_0}$. K vyzařování elektrického dipólu $\boldsymbol{p}\,(t) = e\boldsymbol{r}\,(t)$ tedy dochází pouze tehdy, když se náboj pohybuje zrychleně, $\ddot{\boldsymbol{r}} \neq 0$!

Z toho, že fáze vlny (6.9) je dána retardovaným časem $t-(r/v)$, je patrné, že se jedná o vlnu *sférickou*, jejíž vlnoplochy (2.29) jsou kulové plochy se středem v počátku. Vzorce (6.9) dále ukazují, že vlna je *příčná* vzhledem ke směru $\boldsymbol{r_0}$ a že její amplituda klesá *nepřímo úměrně vzdálenosti* r. Porovnáním s vlastnostmi rovinné elektromagnetické vlny v oddílu 6.1 (viz též vztahy (6.6), (6.7) v oddíle 6.4) zjistíme, že vektory $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{r_0}$ rovněž tvoří v tomto pořadí pravotočivý systém vzájemně ortogonálních vektorů a pro velikosti E, H rovněž platí (6.6).[1]

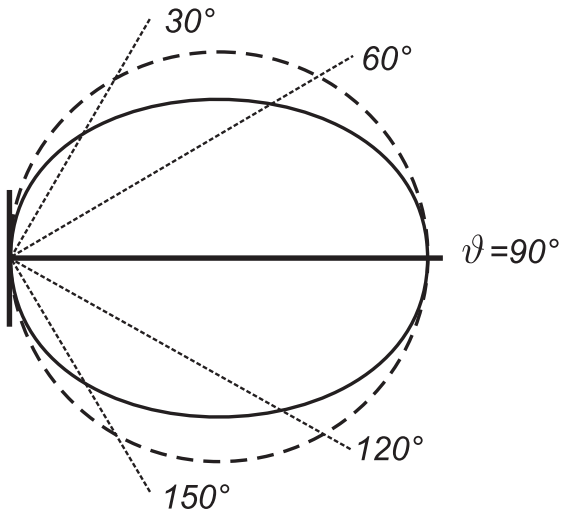
Okamžitá hustota toku energie elektrického dipólového záření v místě $\boldsymbol{r}$ je podle (6.8) vektor mířící ve směru $\boldsymbol{r_0}=\boldsymbol{r}\,/r$

$$\boldsymbol{S}\,(\boldsymbol{r}\,,t) = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} = wv\boldsymbol{r_0}\,,$$

[1] Protože kulovou plochu lze pro velká r aproximovat její tečnou rovinou, dává model záření dipólu možnost přibližné realizace rovinné vlny ($\boldsymbol{s}=\boldsymbol{r_0}$) alespoň v malé oblasti tečné roviny. Pro odhad velikosti této oblasti viz [1], př. 5.11.



Obrázek 6.4: Elektrické dipólové záření



Obrázek 6.5: Vyzařovací diagram elektrického dipólu (plná čára). Čárkovaná kružnice je grafem funkce $\sin\vartheta$.

kde $w = \varepsilon E^2$. Ve sférických souřadnicích podle obr. 6.4 platí $|\ddot{\boldsymbol{p}}_\perp| = \omega^2 p_0 \sin\vartheta \cos\omega t$, takže okamžitá velikost hustoty toku energie je rovna

$$|\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)| = \varepsilon E^2 v = \frac{\omega^4 p_0^2}{16\pi^2 \varepsilon v^3} \frac{\sin^2\vartheta}{r^2} \cos^2(\omega t - kr).$$

Její časovou střední hodnotu obvykle nazýváme **intenzitou záření**

$$\mathcal{I}(r,\vartheta,\varphi) = | < \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) >_T | = \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 \varepsilon v^3} \frac{\sin^2\vartheta}{r^2}.$$

Vidíme, že klesá se čtvercem vzdálenosti r a nezávisí na úhlu φ. Její závislost na úhlu ϑ zakreslujeme do **vyzařovacího diagramu elektrického dipólu** (obr. 6.5): hodnotu $\sin^2\vartheta$ vynášíme na polopřímku svírající úhel ϑ s osou z. Maximum intenzity je v kolmém směru k dipólu ($\vartheta = \pi/2$), ve směru dipólu je intenzita nulová !

To, že vzorce (6.9) skutečně popisují elektromagnetické pole záření, které od zdroje unáší energii nenávratně pryč, zjistíme výpočtem celkové energie, která za jednotku času projde sférou o poloměru r. Tento **celkový vyzařovaný výkon** je roven plošnému integrálu přes tuto sféru z Poyntingova vektoru $\boldsymbol{S}$,

$$P(t) = \int \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) \cdot d\boldsymbol{f}.$$

Ve sférických souřadnicích je $d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{r_0}\, r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$, takže po dosazení za $\boldsymbol{S}$ a jednoduchých integracích přes $\vartheta \in < 0, \pi >$ a $\varphi \in < 0, 2\pi >$ dostaneme okamžitý celkový výkon

$$P(t) = \frac{\omega^4 p_0^2}{6\pi\varepsilon v^3} \cos^2(\omega t - kr).$$

Jeho časová střední hodnota je konstantní, *nezávisí na poloměru sféry* r :

$$< P(t) >_T = \frac{\omega^4 p_0^2}{12\pi\varepsilon v^3}.$$

Energie mezi různými poloměry se ani neztrácí, ani nevzniká. Pro docílení ustáleného vyzařování je ovšem nutno příslušný výkon zářícímu dipólu neustále dodávat.

6.5 Rozdělení elektromagnetických vln

Pásma elektromagnetických vln podle vlnových délek.

Podrobná tabulka ukazuje rozdělení elektromagnetických vln podle vlnových délek. Pouze velmi úzké pásmo — od fialové barvy 350 nm po červenou 750 nm — odpovídá viditelnému světlu. Všimněte si v porovnání s vlnovými délkami velkého rozsahu frekvencí od 10^4 do 10^{23} Hz! Pro rentgenové záření (záření X) je typickou vlnovou délkou $\lambda = 1$ (angström) $= 10^{-10}$ m, pro záření gama $\lambda = 1$ $X = 10^{-13}$ m.

<table>
<tr><th>$\nu/3$
(Hz)</th><th>λ
(m)</th><th></th><th></th><th></th><th></th></tr>
<tr><td>10^4</td><td>10^4</td><td></td><td colspan="3" rowspan="2"></td><td rowspan="6">Elektro-
magnetické
vlny
(v užším
smyslu),
radiovlny</td></tr>
<tr><td>10^5</td><td>10^3</td><td>1 až 15 km</td><td>dlouhé</td><td rowspan="4">Rozhlasové
vlny</td></tr>
<tr><td>10^6</td><td>10^2</td><td>200 až 700 m</td><td>střední</td></tr>
<tr><td>10^7</td><td>10</td><td rowspan="2">2 až 100 m</td><td rowspan="2">krátké,
velmi krátké</td></tr>
<tr><td>10^8</td><td>1</td></tr>
<tr><td>10^9</td><td>10^{-1}</td><td>0,1 až 2 m</td><td colspan="2">Hertzovy vlny</td></tr>
<tr><td>10^{10}</td><td>10^{-2}</td><td rowspan="2">1 až 100 mm</td><td colspan="2" rowspan="2">Mikrovlny</td></tr>
<tr><td>10^{11}</td><td>10^{-3}</td></tr>
<tr><td>10^{12}</td><td>10^{-4}</td><td rowspan="2">10 až 1000 μm</td><td colspan="3" rowspan="2">Infračervené záření (tepelné sálání)</td></tr>
<tr><td>10^{13}</td><td>10^{-5}</td></tr>
<tr><td>10^{14}</td><td>10^{-6}</td><td>0,75 až 10 μm</td><td>Infračervené</td><td colspan="2" rowspan="3">Optické záření</td></tr>
<tr><td>10^{15}</td><td>10^{-7}</td><td>0,35 až 0,75 μm</td><td>Viditelné světlo</td></tr>
<tr><td>10^{16}</td><td>10^{-8}</td><td>0,35 až 0,014 μm</td><td>Ultrafialové</td></tr>
<tr><td>10^{17}</td><td>10^{-9}</td><td>10 až 100 Å</td><td>Měkké záření X</td><td colspan="2" rowspan="2">Záření X
Rentgenové</td></tr>
<tr><td>10^{18}</td><td>10^{-10}</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Tvrdé záření X</td></tr>
<tr><td>10^{19}</td><td>10^{-11}</td><td>0,1 až 10 Å</td><td>Měkké záření γ</td><td>Záření γ</td></tr>
<tr><td>10^{20}</td><td>10^{-12}</td><td>0,001 až 0,1 Å</td><td colspan="2">Tvrdé záření γ</td><td rowspan="2">Zánikové
záření</td></tr>
<tr><td>10^{21}</td><td>10^{-13}</td><td>1 až 100 X</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>10^{22}</td><td>10^{-14}</td><td rowspan="2">$>$ 0,001 X</td><td colspan="2" rowspan="2">Penetrantní záření

(ultragama)</td><td rowspan="2">Elektro-
magnetická
složka
kosmického
záření</td></tr>
<tr><td>10^{23}</td><td>10^{-15}</td></tr>
</table>

Kapitola 7

Polarizace

7.1 Popis polarizace monochromatické elektromagnetické vlny

Obecný tvar monochromatické vlny. Polarizace lineární, kruhová a eliptická. Komplexní zápis.

V kapitole 6 jsme viděli, že vektory $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ v elektromagnetické rovinné vlně jsou vzájemně kolmé a tvoří se směrem šíření $\boldsymbol{s}$ pravotočivou trojici vektorů. Proto říkáme, že elektromagnetická vlna je příčná. V rovině kolmé ke směru šíření ovšem existují dva nezávislé příčné směry, např. určené jednotkovými vektory $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{y}_0$; v této souvislosti mluvíme o dvou nezávislých polarizačních stavech. Polarizační stav vlny stačí udávat elektrickým vektorem $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$, neboť magnetický vektor $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ je elektrickým jednoznačně určen.

Uvažujme postupnou vlnu monochromatického světla s danou úhlovou frekvencí ω ve vakuu nebo v homogenním nevodivém prostředí ε, μ. Jak jsme se zmínili v odstavci 6.4, lze např. sférickou vlnu v dostatečně malé oblasti prostoru aproximovat rovinnou vlnou. Takovou vlnu s elektrickým vektorem

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_0 \cos\left(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} + \varphi\right)$$

jsme si uvedli v odstavci 6.1, rovnice (6.5). Vzhledem k tomu, že Maxwellovy rovnice v prázdném prostoru jsou *lineární*, bude obecná monochromatická rovinná vlna (postupující např. ve směru osy z) dána superpozicí vln harmonicky kmitajících ve dvou nezávislých směrech $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{y}_0$:

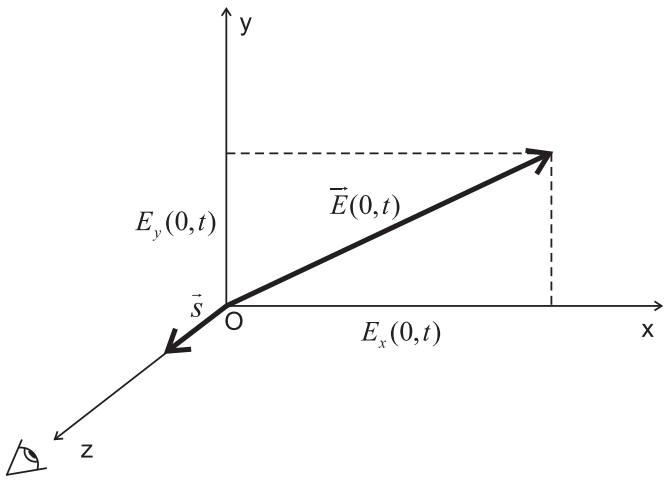
$$\boldsymbol{E}(z, t) = \boldsymbol{x}_0 E_1 cos(\omega t - kz + \varphi_1) + \boldsymbol{y}_0 E_2 cos(\omega t - kz + \varphi_2). \tag{7.1}$$

Amplitudy E_1, E_2 a fázové konstanty φ_1, φ_2 jsou nezávislé konstanty; obě vlny v superpozici (7.1) mají stejnou úhlovou frekvenci ω; z vlnové rovnice plyne

$$\omega = vk.$$

Pro získání představy o možných polarizačních stavech stačí zkoumat vlnu (7.1) v počátku O

$$\boldsymbol{E}(0, t) = \boldsymbol{x}_0 E_1 cos(\omega t + \varphi_1) + \boldsymbol{y}_0 E_2 cos(\omega t + \varphi_2). \tag{7.2}$$



Obrázek 7.1: Časový vývoj vektoru $\boldsymbol{E}(0,t)$.

Podle obr. 7.1 časový vývoj vektoru $\boldsymbol{E}(0,t)$ vzniká skládáním harmonických kmitů ve dvou kolmých směrech

$$\begin{aligned} E_x(0,t) &= E_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ E_y(0,t) &= E_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{aligned}$$

se stejnými frekvencemi. Vektor $\boldsymbol{E}(0,t)$ proto opisuje Lissajousovu křivku, jež je obecně elipsou v rovině xy se středem v počátku.[1] Příslušný polarizační stav nazýváme **eliptickou polarizací**.

Mezi polarizačními stavy světla mají zvláštní důležitost dva typy polarizace: polarizace lineární a kruhová.

Lineární polarizace odpovídá situaci, kdy vektor $\boldsymbol{E}(0,t)$ kmitá stále ve stejném směru. Tento případ lze charakterizovat hodnotami rozdílu fázových konstant $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ nebo π. Tehdy totiž podíl

$$\frac{E_y(0,t)}{E_x(0,t)} = \pm\frac{E_2}{E_1} = \mathrm{tg}\vartheta$$

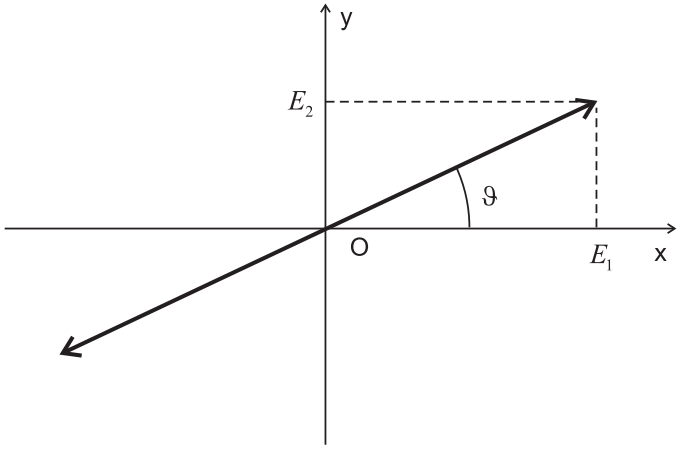
[1] K důkazu si stačí uvědomit, že rovnice

$$\begin{aligned} E_x(0,t) &= E_1 (\cos\omega t \cos\varphi_1 - \sin\omega t \sin\varphi_1) \\ E_y(0,t) &= E_2 (\cos\omega t \cos\varphi_2 - \sin\omega t \sin\varphi_2) \end{aligned}$$

(v případě, že se nejedná o lineární polarizaci) dovolují vypočítat $\cos\omega t$, $\sin\omega t$ jako lineární kombinace E_x, E_y:

$$\begin{aligned} \cos\omega t &= aE_x + bE_y \\ \sin\omega t &= cE_x + dE_y. \end{aligned}$$

Potom $\cos^2\omega t + \sin^2\omega t = (aE_x + bE_y)^2 + (cE_x + dE_y)^2 = 1$ je rovnicí kuželosečky. Musí to být elipsa (nebo její degenerované případy), protože E_x a E_y jsou omezené !



Obrázek 7.2: Lineární polarizace ($\mathrm{tg}\vartheta = E_2/E_1$).

zůstává konstantní (viz obr. 7.2, 7.3). Vlny lineárně polarizované ve směrech $\boldsymbol{x}_0$ a $\boldsymbol{y}_0$ vystupovaly v (7.1), (7.2) jako složky rozkladu obecně elipticky polarizované vlny.

Kruhová polarizace vzniká jako superpozice (7.2) vln lineárně polarizovaných ve směrech $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{y}_0$ se stejnými amplitudami, ale fázově posunutými o 90°,

$$E_1 = E_2, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Vektor $\boldsymbol{E}(0,t)$ se nyní pohybuje po kružnici o poloměru E_1 v rovině xy podle vztahů

$$\begin{aligned} E_x(0,t) &= E_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ E_y(0,t) &= \pm E_1 \sin(\omega t + \varphi_1). \end{aligned}$$

Horní znamení odpovídá pohybu proti směru hodinových ručiček a konvenčně se nazývá *levotočivá kruhová polarizace*; dolní znamení pak odpovídá *pravotočivé kruhové polarizaci*. Všimněte si, že při určování smyslu otáčení vektoru $\boldsymbol{E}(0,t)$ míří osa z — směr šíření světla $\boldsymbol{s}$ — k pozorovateli P (obr. 7.1).

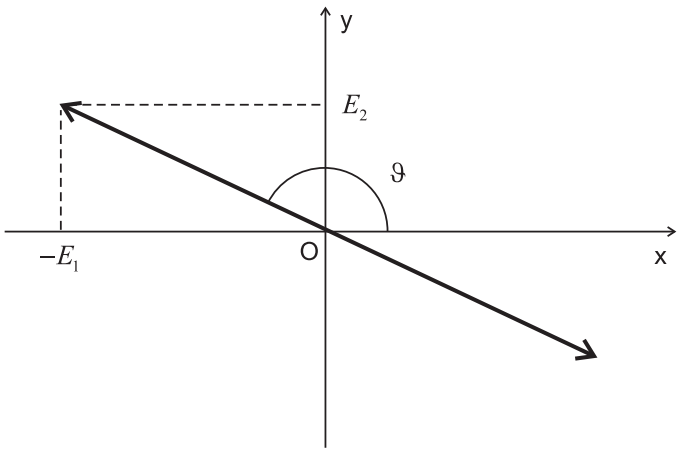
Závěr. Podle podaného výkladu superpozicí dvou lineárně polarizovaných vln se stejnou úhlovou frekvencí se směry polarizace $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{y}_0$ a s různými fázemi vznikne elipticky polarizovaná vlna (viz obr. 7.4). Obecný tvar (7.1), (7.2) monochromatické elektromagnetické vlny s úhlovou frekvencí ω, směrem šíření $\boldsymbol{s} = (0,0,1)$ a libovolnými konstantami E_1, E_2, φ_1, φ_2 proto znamená, že *každá taková vlna je polarizovaná*. V oddíle 7.4 se budeme snažit vysvětlit skutečnost, že ne každé světlo je polarizované. Uvědomte si ještě, že pro určitý typ polarizace není rozhodující celková intenzita záření, úměrná

$$\langle \boldsymbol{E}^2 \rangle_T = \frac{1}{2}\left(E_1^2 + E_2^2\right),$$

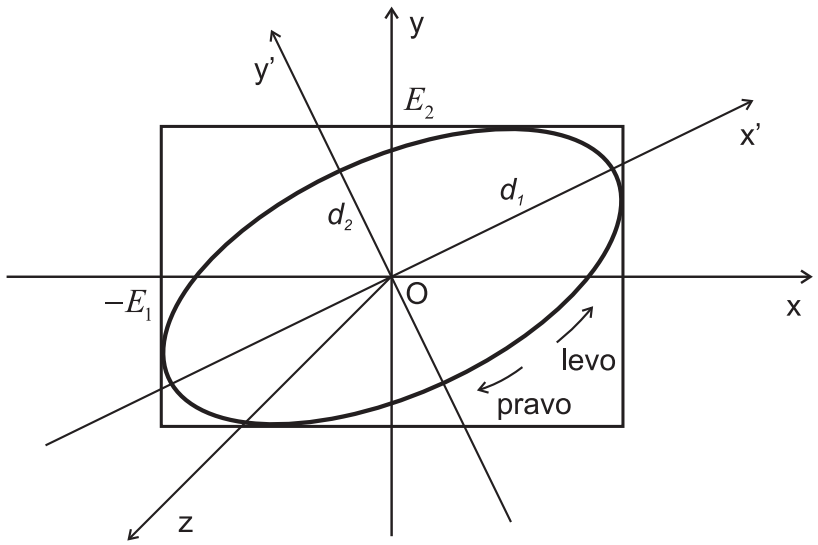
ani hodnoty fázových konstant φ_1, φ_2, ale jen jejich rozdíl $\varphi_1 - \varphi_2$.

Polarizace v komplexním zápisu. Tvar (7.1) vektoru $\boldsymbol{E}(z,t)$ lze elegantně vyjádřit jako reálnou část komplexní vektorové funkce

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \mathrm{Re}\left[\widehat{\boldsymbol{E}_0} e^{i(\omega t - kz)}\right],$$



Obrázek 7.3: Lineární polarizace ($\mathrm{tg}\vartheta = -E_2/E_1$).



Obrázek 7.4: Eliptická polarizace.

s komplexní amplitudou

$$\widehat{\boldsymbol{E}_0} = \boldsymbol{x}_0 E_1 e^{i\varphi_1} + \boldsymbol{y}_0 E_2 e^{i\varphi_2} \in C^2$$

představující obecný dvojrozměrný komplexní vektor. Množinu monochromatických vln (7.1) lze tedy vzájemně jednoznačně zobrazit na lineární prostor C^2 vektorů $\widehat{\boldsymbol{E}_0}$. Daný polarizační stav pak odpovídá podmnožině monochromatických vln, jejichž amplitudy jsou násobky rE_1, rE_2 a fáze $\varphi_1 + \alpha$, $\varphi_2 + \alpha$ pro libovolné $r > 0$, $\alpha \in R$. V komplexním zápisu tyto množiny $\{re^{i\alpha}\widehat{\boldsymbol{E}_0} \mid r \in R_+ \wedge \alpha \in R\}$ jsou komplexní přímky v C^2 procházející počátkem (jednorozměrné komplexní podprostory v C^2). Množina polarizačních stavů je tedy ekvivalentní množině jednorozměrných podprostorů v C^2, která se nazývá komplexní projektivní prostor CP^1. Lze ukázat, že prostor CP^1 je geometricky ekvivalentní dvojrozměrné sféře S^2 zvané Poincaréova sféra.

Komplexní zápis rovněž dovoluje algebraickým způsobem určit parametry polarizační elipsy v rovině xy. Nejprve si všimneme, že kvadrát $\widehat{\boldsymbol{E}_0}$ je obecně komplexní číslo

$$\widehat{\boldsymbol{E}_0}^2 = \widehat{\boldsymbol{E}_0} \cdot \widehat{\boldsymbol{E}_0} = De^{-2i\delta} \in C.$$

Vynásobením $e^{i\delta}$ dostaneme tedy z $\widehat{\boldsymbol{E}_0}$ komplexní vektor $\boldsymbol{d} = \widehat{\boldsymbol{E}_0}e^{i\delta}$ s reálným kvadrátem

$$\boldsymbol{d}^2 = \left(\widehat{\boldsymbol{E}_0}e^{i\delta}\right)^2 = D > 0.$$

Rozložíme-li $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d_1} + i\boldsymbol{d_2}$ kde $\boldsymbol{d_1}$, $\boldsymbol{d_2}$ jsou reálné vektory, dostaneme podmínku

$$\boldsymbol{d}^2 = \boldsymbol{d_1}^2 - \boldsymbol{d_2}^2 + 2i\boldsymbol{d_1} \cdot \boldsymbol{d_2} = D \in R,$$

čili

$$\boldsymbol{d_1} \cdot \boldsymbol{d_2} = 0.$$

Vztah $\widehat{\boldsymbol{E}_0} = (\boldsymbol{d_1} + i\boldsymbol{d_2})\, e^{-i\delta}$ nyní vede na vektor $\boldsymbol{E}(z,t)$ jako superpozici kmitů ve směrech $\boldsymbol{d_1}$, $\boldsymbol{d_2}$ splňujících $\boldsymbol{d_1} \cdot \boldsymbol{d_2} = 0$:

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{d_1} \cos(\omega t - kz - \delta) - \boldsymbol{d_2} \sin(\omega t - kz - \delta).$$

Zvolíme-li nové osy x', y' tak, že osa x' míří ve směru $\boldsymbol{d_1}$, pak

$$\begin{aligned} E_{x'} &= d_1 \cos(\omega t - kz - \delta) \\ E_{y'} &= \mp d_2 \sin(\omega t - kz - \delta), \end{aligned}$$

kde dvě znaménka u $E_{y'}$ odpovídají vektoru $\boldsymbol{d_2}$ ve směru nebo proti směru osy y'. Vektor $\boldsymbol{E}(0,t)$ opisuje elipsu s poloosami d_1, d_2, neboť

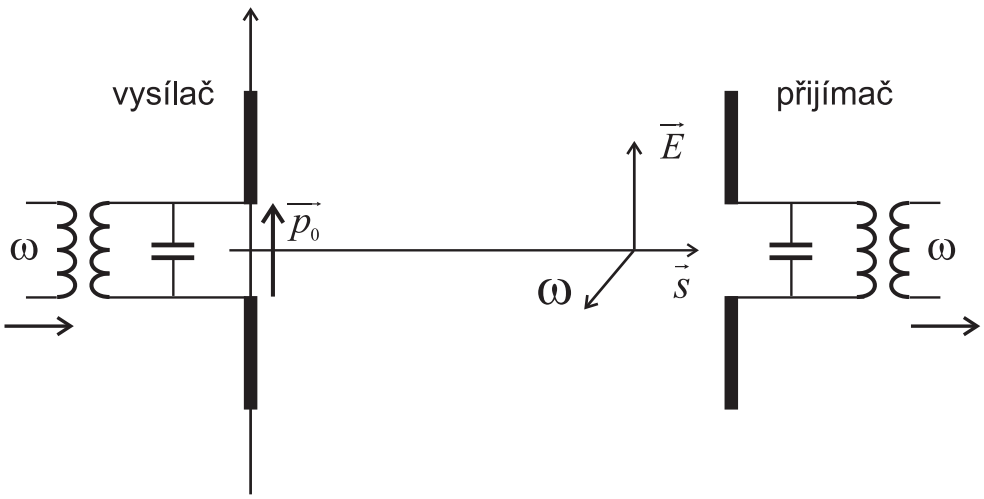
$$\frac{E_{x'}^2}{d_1^2} + \frac{E_{y'}^2}{d_2^2} = 1.$$

Kruhová polarizace nastává při $d_1 = d_2$, lineární při $d_1 = 0$ nebo $d_2 = 0$.

Cvičení 1. Odvoďte komplexní amplitudy $\widehat{\boldsymbol{E}_0}$ pro levotočivě a pravotočivě kruhově polarizované vlny.

7.2 Určení polarizačního stavu měřením souboru intenzit

Dipólová anténa jako vysílač a přijímač. Soubor měřených intenzit. Měření pomocí dvou antén.



Obrázek 7.5: Vysílací a přijímací dipólové antény.

V oddíle 6.5 bylo popsáno elektromagnetické pole záření kmitajícího elektromagnetického dipólu. Podle vyzařovacího diagramu na obr. 6.5 je maximální intenzita vyzařována ve směrech kolmých k dipólu. Podle obr. 6.4 je toto záření lineárně polarizované ve směru rovnoběžném s dipólem. Možnou realizaci představuje ***vysílací dipólová anténa*** napájená střídavým napětím o frekvenci $\nu = \omega/2\pi$ schematicky znázorněná na obr. 7.5. Je-li délka antény l malá vzhledem k vlnové délce záření $\lambda = c/\nu$, lze použít vztahy z oddílu 6.5.

Stejnou anténu lze použít jako ***přijímač*** dopadajícího elektromagnetického záření, jehož energii selektivně odebíráme z rezonančního obvodu. Přijímací vlastnosti antény jsou stejné jako při vysílání: jelikož napětí indukované v anténě $U = \int_{-l/2}^{l/2} \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{l}$ je určeno složkou $\boldsymbol{E}$, která je rovnoběžná s anténou, maximální příjem nastane, když záření dopadá kolmo na anténu. Maximální citlivost při příjmu tedy přesně odpovídá podmínkám pro maximální vysílaný výkon.

Nechť se zkoumané monochromatické záření šíří ve směru osy $+z$ a v místě O, kde platí (7.2). Chceme určit jeho polarizační stav měřením souboru vhodně definovaných intenzit. Těmto intenzitám je posléze úměrný střední výkon přicházející z přijímací antény do rezonančního obvodu. Pro výběr intenzit je směrodatné, že při určení polarizačního stavu nás nezajímá ani celková intenzita ani přesná hodnota fázových konstant φ_1, φ_2 ve výrazu (7.2) pro $\boldsymbol{E}(0,t)$. Potřebujeme ovšem zjistit relativní hodnoty E_1, E_2 a rozdíl $\varphi_1 - \varphi_2$. K jejich určení stačí provést *relativní měření čtyř intenzit* definovaných časovými středními hodnotami (u monochromatického záření stačí středovat přes

jednu periodu T)

$$\begin{aligned}
< E_x^2 >_T &= E_1^2 < \cos^2(\omega t + \varphi_1) >_T = \frac{E_1^2}{2}, \\
< E_y^2 >_T &= E_2^2 < \cos^2(\omega t + \varphi_2) >_T = \frac{E_2^2}{2}, \\
< 2E_xE_y >_T &= E_1E_2 < 2\cos(\omega t + \varphi_1)\cos(\omega t + \varphi_2) >_T \\
&= E_1E_2 < \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) >_T \\
&= E_1E_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2), \\
< 2E_x(\omega t - \frac{\pi}{2})E_y(\omega t) >_T &= E_1E_2 < 2\sin(\omega t + \varphi_1)\cos(\omega t + \varphi_2) >_T \\
&= E_1E_2 < \sin(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) >_T \\
&= E_1E_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2).
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Vidíme, že změřením intenzit $< E_x^2 >_T$, $< E_y^2 >_T$, $< 2E_xE_y >_T$ a $< 2E_x(\omega t - \frac{\pi}{2})E_y(\omega t) >_T$ dostaneme úplnou informaci o amplitudách E_1, E_2 a rozdílu fázových konstant $\varphi_1 - \varphi_2$. [2]

Měření lze u rozhlasových vln realizovat pomocí dvou přijímacích dipólových antén A_1, A_2:

1. Anténu A_1 orientujeme ve směru osy x a měříme časovou střední hodnotu přijímaného výkonu úměrnou $< E_x^2 >_T = E_1^2/2$.

2. Anténu A_2 orientujeme podél osy y a měříme $< E_y^2 >_T = E_2^2/2$.

3. Obě antény připojíme ke společnému rezonančnímu obvodu stejně dlouhým vedením a tak, aby do rezonančního obvodu přicházel součet napětí od antén (sériové zapojení). Měříme pak $< (E_x + E_y)^2 >_T = < E_x^2 >_T + < E_y^2 >_T + < 2E_xE_y >_T$, odkud se již snadno určí $< 2E_xE_y >_T$ a $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$.

4. Antény připojíme sériově ke společnému rezonančnímu obvodu vedeními různé délky tak, aby anténa A_1 měla přípojku delší o $\lambda/4$, dávající zpoždění $T/4$. Přijímaný výkon pak bude úměrný $< (E_x(\omega t - \frac{\pi}{2}) + E_y(\omega t))^2 >_T = < E_x^2 >_T + < E_y^2 >_T + < 2E_x(\omega t - \frac{\pi}{2})E_y(\omega t) >_T$ a odtud se již snadno určí $\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$.[3]

Viditelné světlo má vlnové délky kratší než 1 mikrometr a tak je nelze detekovat pomocí antén. K určení jeho polarizačního stavu měřením uvedených čtyř intenzit lze však využít speciálních optických vlastností některých transparentních látek, jak uvidíme v oddíle 7.3.

[2] Při úpravách jsme použili vzorce $2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, $2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.

[3] Je-li z_0 délka přípojky antény A_2, pak napětí přicházející do rezonančního obvodu v čase t vyšlo z antény A_1 v retardovaném čase $t - (z_0 + \frac{\lambda}{4})/c$, zatímco z antény A_2 v čase $t - (z_0/c)$. Měřená elektrická intenzita je tedy součtem $E_x(t - (z_0 + \frac{\lambda}{4})/c) + E_y(t - (z_0/c))$. Protože výsledky středování nezávisí na společném posunu z_0/c, můžeme měřené intenzity psát ve tvaru $< (E_x(t - (T/4)) + E_y(t))^2 >_T$ neboli $< (E_x(\omega t - \frac{\pi}{2}) + E_y(\omega t))^2 >_T$.

7.3 Polarizované elektromagnetické vlny v látkách

Polarizační filtry, Malusův zákon, polaroid, polarizace odrazem. Dvojlom, vlnové destičky, nikol. Měření polarizace. Optická aktivita. Fotoelastický jev, jevy elektrooptické a magnetooptické.

V oddílech 6.5 a 7.2 jsme viděli, že vysílací dipólová anténa napájená střídavým napětím o frekvenci $\nu = \omega/2\pi$ budí ve velké vzdálenosti sférickou *lineárně polarizovanou* elektromagnetickou vlnu. K buzení lineárně polarizovaného světla však nemáme k dispozici pevně orientované dipólové antény atomárních rozměrů. Lineárně polarizované světlo proto obvykle získáváme pomocí selektivní absorpce.

Optické přístroje, založené na různých principech, které propouštějí z dopadajícího světla jen část polarizovanou lineárně v určitém pevném směru, se nazývají ***polarizační filtry***. Označíme-li tento pevný směr — ***osu propustnosti*** filtru — jednotkovým vektorem $\boldsymbol{e}$, můžeme vztah mezi vstupujícím a vystupujícím elektrickým polem zapsat jako vektorový vztah

$$\boldsymbol{E}_{výst} = \boldsymbol{e}(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{vst}}), \tag{7.4}$$

který vyjadřuje projekci vektoru $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{vst}}$ do směru $\boldsymbol{e}$. Je-li $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{vst}} \parallel \boldsymbol{e}$, světlo prochází (u skutečných filtrů dochází k malému zeslabení absorpcí). Je-li $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{vst}} \perp \boldsymbol{e}$, světlo neprochází (ve skutečnosti je téměř úplně pohlceno). Pro intenzity vstupujícího a vystupujícího světla z (7.4) plyne vztah

$$\boxed{I_{výst} = I_{vst} \cos^2 \vartheta} \tag{7.5}$$

kde ϑ je úhel mezi $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{vst}}$ a osou propustnosti. Rovnice (7.5) je známa jako ***Malusův zákon***.[4] (Při jeho použití u skutečných polarizačních filtrů za I_{vst} klademe intenzitu, která projde filtrem při $\vartheta = 0$, tedy vstupní intenzitu zeslabenou případnou absorpcí.)

Moderní typy polarizačních filtrů fungují na principu husté mřížky z tenkých rovnoběžných vodičů podle obr. 7.6. Zatímco složka $E_x(0,t)$ vlny (7.2) prakticky neinteraguje s elektrony ve vodičích a prochází beze změny, složka $E_y(0,t)$ s nimi silně interaguje a její energie je disipována vodivostními proudy.[5]

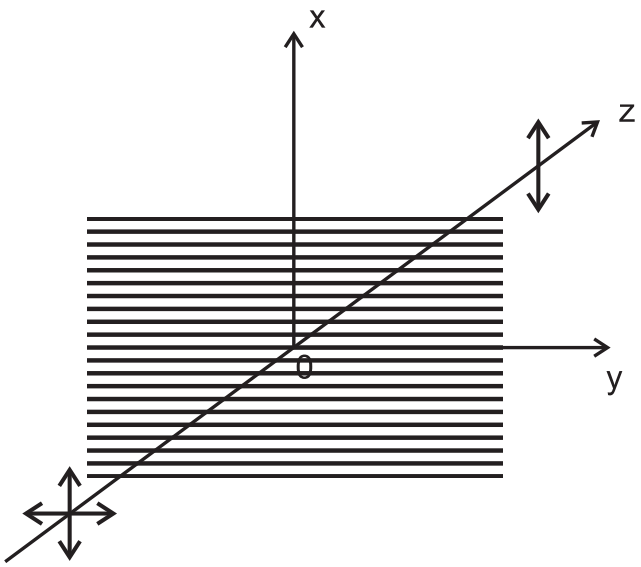
Snadnější výrobu polarizačních filtrů nabídla chemie polymerů. Při tažení plastových fólií, jež obsahují dlouhé řetězce uhlovodíkových makromolekul, se molekuly převážně napřímí do směru tažení (nebo válcování). Chemicky vázaný jod poskytuje makromolekulám vodivostní elektrony, které se mohou pohybovat jen ve směru makromolekul. Výsledný materiál, ***polaroid*** vynalezený v 30. letech E.H. Landem[6], pak má vlastnosti polarizačního filtru pro viditelné světlo, jehož osa propustnosti leží v rovině filtru kolmo ke směru tažení fólie.

Ke klasickému polarizačnímu filtru — Nicolovu hranolu — se vrátíme při výkladu dvojlomu. Zde se ještě zmíníme o ***polarizaci světla odrazem***. Při dopadu světla na rozhraní dvou prostředí s indexy lomu n_1, n_2 vzniká vlna odražená a vlna prošlá podle obr. 7.7. Intenzity vzniklých vln (tj. odrazivost $\mathcal{R}$ a propustnost $\mathcal{T}$) závisí nejen na úhlu

[4] Etienne–Louis Malus (1775 – 1812) objevil polarizaci světla v r. 1808.

[5] Pro viditelné světlo byla takto fungující mřížka vyrobena napařením zlata na difrakční mřížku z umělé hmoty s cca 2000 vrypy na 1 mm [16].

[6] Edwin H. Land (1909–1991). Původní polaroidy byly celuloidové desky pokryté asi 0,1 mm silnou vrstvou tvořenou orientovanými krystalky herapatitu (síran jodchininový).



Obrázek 7.6: Polarizační filtr z rovnoběžných vodičů.

dopadu ϑ_1, ale též na polarizaci dopadající vlny. Z Fresnelových vzorců pro $\mathcal{R}$ ([9], kap. 9) vyplývá, že pro dopadající *vlnu lineárně polarizovanou v rovině dopadu* existuje tzv. ***Brewsterův úhel*** ϑ_{1B}, při němž je odrazivost $\mathcal{R}^{\parallel}(\vartheta_{1B}) = 0$. Dobrou pomůckou pro zapamatování je skutečnost, že při $\vartheta_1 = \vartheta_{1B}$ svírají směry odražené a prošlé vlny úhel 90°. Můžeme si k tomu představit, že příčně kmitající elektrony v látce, které vysílají prošlou vlnu, nevysílají ve směru svých kmitů, takže odražená vlna nevzniká. Ze vztahu

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$$

a ze Snelliova zákonu lomu

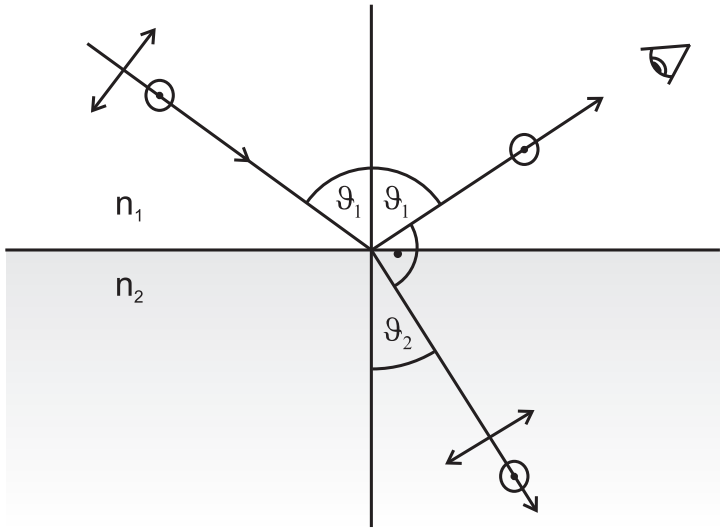
$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2$$

dostaneme vyloučením ϑ_2 vzorec pro Brewsterův úhel

$$\boxed{\mathrm{tg}\vartheta_{1B} = \frac{n_2}{n_1}.}$$

Složka dopadající vlny polarizovaná kolmo k rovině dopadu se odrazí, $\mathcal{R}^{\perp}(\vartheta_{1B}) \neq 0$, takže výsledné odražené světlo je lineárně polarizované kolmo k rovině dopadu. Naopak nulový odraz při polarizaci v rovině dopadu lze využít k bezztrátovému průchodu polarizovaného světla ($\mathcal{T}^{\parallel}(\vartheta_{1B}) = 1$) rozhraním (šikmo orientované Brewsterovo okénko v laserové technice).

V přírodě existují transparentní ***opticky anizotropní látky***, u nichž průchod světla podstatně závisí na jeho polarizaci. Jsou to látky vyskytující se v krystalické



Obrázek 7.7: Polarizace odrazem. Brewsterův úhel.

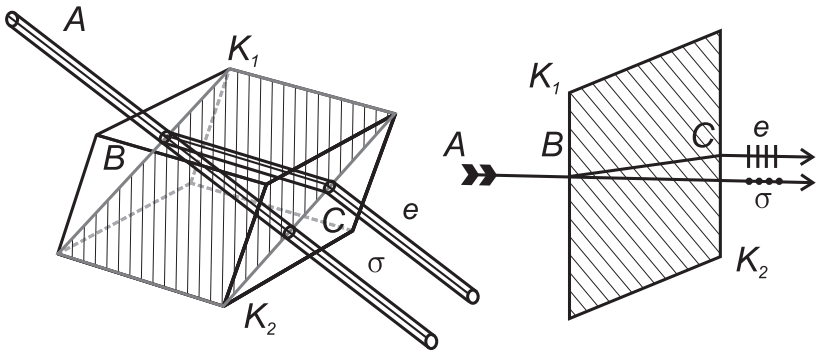
formě, jejichž elektrická anizotropie je určena tenzorem elektrické permitivity ε_{jk}.[7] Rozmanitost krystalických forem byla klasifikována do 32 krystalografických tříd ([9], kap. 6). Krystalová optika, která zkoumá průchod rovinných monochromatických vln, rozlišuje mezi nimi — podle typu Fresnelova elipsoidu $\sum_{j,k} \varepsilon_{jk} x_j x_k = 1$ — jen 3 třídy opticky anizotropních látek [20]:

- dvojosé (poloosy elipsoidu jsou vzájemně různé),
- jednoosé (rotační elipsoid, v hlavních osách $\varepsilon_1(x_1^2 + x_2^2) + \varepsilon_3 x_3^2 = 1$),
- izotropní ($\varepsilon_{jk} = \varepsilon\delta_{jk}$, elipsoid je sférou).

Krystaly se středem symetrie (např. krystaly NaCl, KCl, CaF_2, jež patří ke kubické soustavě) se z optického hlediska chovají jako izotropní prostředí. O izotropním prostředí již víme, že každá rovinná monochromatická vlna je v něm obecně elipticky polarizovaná. *V opticky jednoosých nebo dvojosých krystalech (se symetrií nižší než kubické soustavy) tomu tak není, všechny rovinné monochromatické vlny jsou lineárně polarizované ve směrech určených optickými osami.*

Zde se zmíníme o některých ***jednoosých krystalech***; jejich optická osa je osou symetrie Fresnelova rotačního elipsoidu. Známé jsou krystaly tzv. islandského vápence ($CaCO_3$), krystalizující v šesterečné soustavě ve formě klence (rombu) podle obr. 7.8. Svazek dopadajícího světla se v krystalu rozdělí na dva lineárně polarizované svazky, které leží v rovině hlavního řezu určené dopadajícím svazkem a optickou osou. Dochází k ***dvojlomu***. ***Paprsek mimořádný*** *e* má elektrický vektor v hlavním řezu, ***paprsek řádný*** *o* kolmo k hlavnímu řezu.

[7] Existují též magneticky anizotropní krystaly. Vzhledem k tomu, že magnetizace není schopna sledovat velmi vysoké optické frekvence, jejich anizotropie se projevuje u mikrovln.



Obrázek 7.8: Průchod svazku světla krystalem vápence. Optická osa je $\overline{K_1K_2}$. Spolu s dopadajícím paprskem $\overline{AB}$ určuje hlavní řez, v němž leží paprsek řádný o (ordinarius) a mimořádný e (extraordinarius).

Situace se zjednoduší pro destičku vyříznutou z jednoosého krystalu tak, aby optická osa $\boldsymbol{n}$ ležela v rovině destičky. Dopadá-li svazek monochromatického světla kolmo na destičku, nedojde k oddělení směrů šíření obou paprsků (obr. 7.9). Ovšem i když se oba paprsky šíří stejným směrem, jsou lineárně polarizované ve vzájemně kolmých směrech (pro paprsek mimořádný $\boldsymbol{E} \parallel \boldsymbol{n}$, pro paprsek řádný $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{n}$) a mají různé indexy lomu n_e, n_o a tedy i různé fázové rychlosti $v_e = c/n_e$, $v_o = c/n_o$. Taková destička funguje jako ***zpožďovací destička*** (též ***vlnová destička***), neboť v ní dochází k fázovému posunutí $\Delta\varphi$ mezi oběma paprsky v závislosti na tloušťce destičky d.

Indexy lomu některých jednoosých krystalů pro žlutou spektrální čáru sodíku o vlnové délce $\lambda = 589\ nm$ udává následující tabulka. [8]

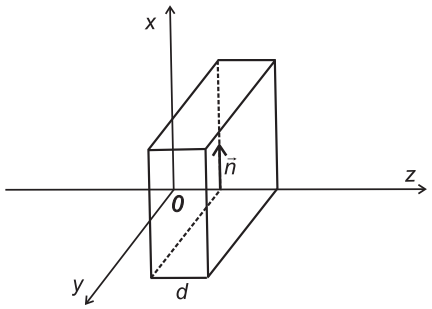
	n_e	n_o
křemen	1,553	1,544
vápenec	1,4864	1,6583
led při 0^oC	1,310	1,309
turmalin	1,619	1,637

Dopadá-li na destičku podle obr. 7.9 monochromatická rovinná elektromagnetická vlna (7.1), bude mít na vstupu $z = 0$ elektrický vektor (7.2)

$$\boldsymbol{E_{vst}}(0,t) = \boldsymbol{x_0} E_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \boldsymbol{y_o} E_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Uvnitř destičky se její složky, lineárně polarizované ve směrech $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{y_0} \perp \boldsymbol{n}$, šíří

[8] Krystaly s $n_e > n_o$ se nazývají pozitivní, s $n_e < n_o$ negativní.



Obrázek 7.9: Vlnová destička tloušťky d, s optickou osou $\boldsymbol{n}$.

různými fázovými rychlostmi v_e, v_o, takže na výstupu $z = d$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_{výst}(d,t) &= \boldsymbol{x_0} E_{vst\,x}(0, t - \frac{d}{v_e}) + \boldsymbol{y_0} E_{vst\,y}(0, t - \frac{d}{v_o}) \\ &= \boldsymbol{x_0} E_1 \cos(\omega t - k_e d + \varphi_1) + \boldsymbol{y_0} E_2 \cos(\omega t - k_o d + \varphi_2). \end{aligned}$$

V destičce se počáteční rozdíl fází obou složek $\varphi_2 - \varphi_1$ změní na $\varphi_2 - \varphi_1 + (k_e - k_o)d$. Přídavný fázový posuv $\Delta\varphi$ vzniklý v destičce lze vyjádřit pomocí vlnové délky λ ve vakuu a indexů lomu n_e, n_o vzorcem [9]

$$\boxed{\Delta\varphi = (k_e - k_o)d = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d.}$$

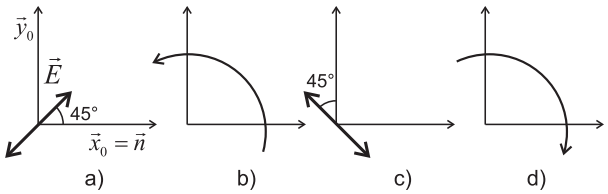
Možnost změnit fázový rozdíl a tedy i polarizační stav světla se nejčastěji využívá u ***čtvrtvlnové destičky***, v níž vzniká fázový rozdíl $\pi/2$. Dopadá-li lineárně polarizované světlo na $\lambda/4$-destičku z negativního krystalu ($n_e < n_o$) orientovanou podle obr. 7.10a, pak na výstupu dostaneme levotočivě kruhově polarizované světlo (obr. 7.10b). Změny polarizačního stavu po dalších čtvrtvlnových posunech jsou znázorněny na obr. 7.10c, d.

Cvičení 2. Plátky průhledné slídy (muskovitu) jsou dvojosými krystaly a mají pro $\lambda = 589\ nm$ indexy lomu $n_1 = 1,594$, $n_2 = 1,589$. Spočítejte tloušťku slídové $\lambda/4$-destičky pro $\lambda = 589\ nm$ ([1],př. 6.36). Její tloušťka není $\lambda/4$, ale $d \doteq 0,027\ mm$!

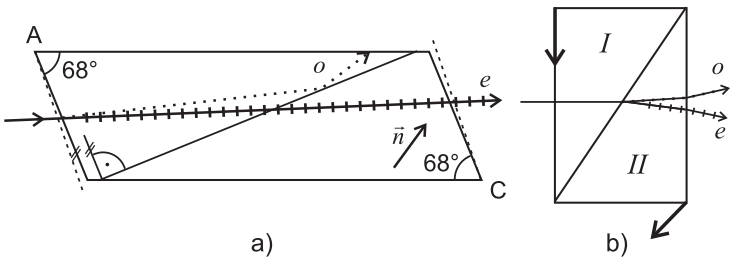
Využití dvojlomného vápence ke konstrukci polarizačního filtru představuje ***Nicolův hranol***, obr. 7.11a.

Je vyroben z krystalu vápence ve třech krocích: sbroušením z původního úhlu 71° v klenci na 68°, rozříznutím, aby druhý vyznačený úhel byl 90° a slepením obou dílů kanadským balzámem, jehož index lomu 1,55 leží mezi indexy lomu vápence $n_e \doteq 1,49$ a $n_o \doteq 1,66$. Při dopadu světla podle obr. 7.11a se řádný paprsek na rozhraní vápence a lepidla totálně odráží, protože příslušný mezní úhel je 69°10' ($\sin 69°10' = 1,55/1,66$). Z nikolu vychází jen mimořádný paprsek se známou lineární polarizací ve svislém směru.

[9] $k_o = \omega/v_o = n_o\omega/c = n_o 2\pi/\lambda$ a stejně pro k_e.



Obrázek 7.10: Změna polarizačního stavu pro $\Delta\varphi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.



Obrázek 7.11: Polarizační hranoly. a) Nicolův hranol, b) Wollastonův hranol. Šipky značí směry optických os.

Cvičení 3. Promyslete si konstrukci a funkci dalšího polarizačního hranolu na obr. 7.11b [11].

Umístíme-li dva otočné polarizační filtry do svazku světla na optické lavici, nazývá se první z nich ***polarizátor***, druhý ***analyzátor***. Je-li orientace analyzátoru kolmá na orientaci polarizátoru, světlo podle Malusova zákona neprochází; říkáme, že *polarizační filtry jsou zkřížené.*

Cvičení 4. Vložíme-li mezi zkřížené polarizační filtry vlnovou destičku a otáčíme jí v bílém dopadajícím světle, dochází na stínítku ke krásným barevným efektům. Vysvětlete !

Měření polarizace světla. Na konci oddílu 7.2 jsme uvedli, že k určení polarizačního stavu monochromatického viditelného světla měřením intenzit (7.3) je nutné použít speciální optické elementy. Měření souboru čtyř intenzit lze realizovat *pomocí polarizačního filtru a čtvrtvlnové destičky* následujícím způsobem:

1. Osu propustnosti polarizátoru orientujeme ve směru osy x a podle (7.1), (7.5) měříme intenzitu prošlého světla $< E_x^2 >_T = E_1^2/2$.

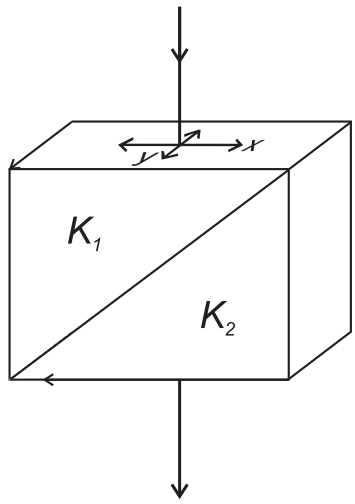
2. Polarizátor orientujeme podél osy y a měříme $< E_y^2 >_T = E_2^2/2$.

3. Osu propustnosti $\boldsymbol{e}$ polarizátoru orientujeme pod úhlem 45^o mezi osami x, y, tj. $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{y_0})/\sqrt{2}$. Měříme pak intenzitu prošlého světla $< (\frac{E_x}{\sqrt{2}} + \frac{E_y}{\sqrt{2}})^2 >_T = \frac{1}{2} < E_x^2 >_T + \frac{1}{2} < E_y^2 >_T + < E_x E_y >_T$; odtud se již snadno určí $< 2E_x E_y >_T$ a $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$.

4. K určení $\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$ z intenzity $< 2E_x(\omega t - \frac{\pi}{2})E_y(\omega t) >_T$ se v uspořádání s polarizačním filtrem podle bodu 3. použije ještě čtvrtvlnová destička umístěná *před* polarizačním filtrem. Je-li např. z pozitivního krystalu, orientuje se podle obr. 7.9 s optickou osou $\boldsymbol{n}$ ve směru osy x, aby způsobila dodatečný fázový posuv $\Delta\varphi = \pi/2$.

Babinetův kompenzátor (obr. 7.12) je přístroj sloužící k určení fázového posunutí $\Delta\varphi$ zpožďovací destičky neznámé tloušťky. Sestává ze dvou křemenných klínů K_1, K_2 (pevný a posuvný) podle obr. 7.12 s optickými osami vyznačenými šipkami. Klíny způsobují fázová posunutí opačného znaménka, uprostřed je výsledné fázové posunutí nulové. Je-li kompenzátor při monochromatickém světle vložen mezi zkřížené polarizační filtry orientované pod úhlem 45^o k optickým osám x, y, objeví se podél osy x tmavé proužky na místech, kde výsledné fázové posunutí má hodnoty $\Delta\varphi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, ...$ Kompenzátor se okalibruje odečtením počtu n mikrometrických dílků, o něž se musí posunout posuvný klín (ve směru x), aby tmavé proužky přešly přesně do sousedních původních poloh. Pak lze změřit fázový posuv destičky neznámé tloušťky. Mezi zkřížené polarizátory ještě vložíme destičku neznámé tloušťky s optickou osou ve směru x nebo y. Tím se tmavé proužky posunou. Mikrometrickým posunem kompenzátoru (o n_1 dílků) vrátíme proužky do původní polohy. Velikost fázového posunutí je pak $\Delta\varphi = 2\pi n_1/n$.

Optická aktivita je schopnost látky stáčet směr polarizace procházejícího lineárně polarizovaného světla. Vykazuje ji řada látek, především křemen, a dále vodní roztoky cukru, kyseliny hroznové a pod. V polarimetrickém uspořádání podle obr. 7.13 lze např. přesně určit koncentraci cukru v roztoku. V důsledku optické aktivity dojde po



Obrázek 7.12: Babinetův kompenzátor. Optické osy klínů jsou označeny šipkami. Jeden z klínů je posuvný ve směru x.

průchodu lineárně polarizovaného monochromatického světla roztokem v nádobce P o délce l k otočení směru polarizace o úhel

$$\varphi = \varphi_0 \frac{w}{100} l,$$

kde φ_0 je tzv. měrná otáčivost a w je hmotnostní zlomek (koncentrace) aktivní látky v roztoku v procentech. Měrná otáčivost závisí na vlnové délce a teplotě.

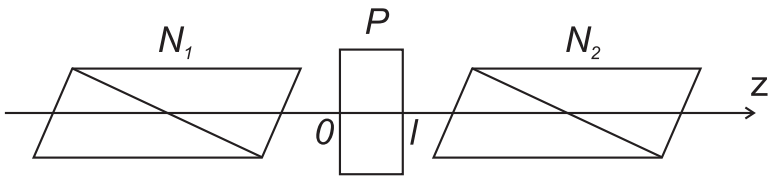
Vlastnost optické aktivity roztoků souvisí s prostorovou strukturou molekul rozpuštěné látky, jež se vyskytují ve dvou prostorově odlišných formách (např. s asymetricky vázaným uhlíkem), jež se dají ztotožnit pouze zrcadlením. Podobné zrcadlové (enantiomorfní) tvary vykazují i krystaly křemene, obr. 7.14.

Ukážeme si, že optickou aktivitu lze považovat za *dvojlom vzhledem ke kruhové polarizaci*. Lineárně polarizované monochromatické světlo vstupující do opticky aktivního prostředí se dá zapsat ve tvaru superpozice pravotočivě a levotočivě kruhově polarizovaného světla (obr. 7.15) s nulovou relativní fází

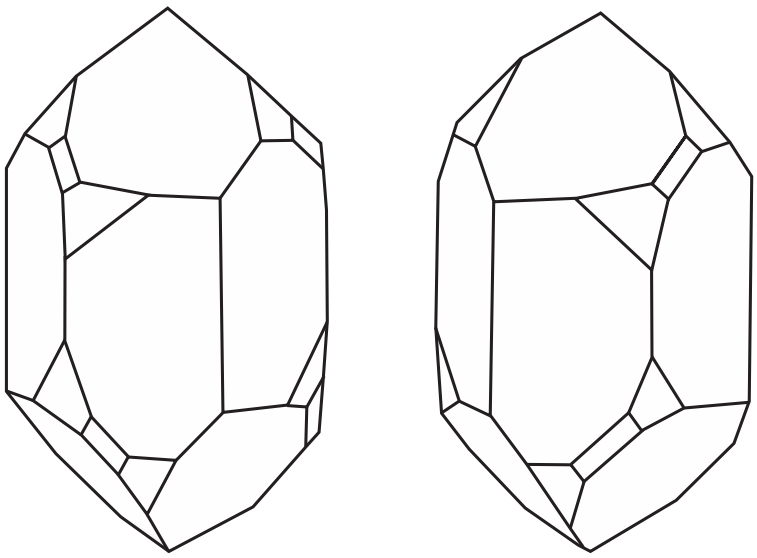
$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(0,t) &= \boldsymbol{x_0} E_0 \cos\omega t = \boldsymbol{E}^+(0,t) + \boldsymbol{E}^-(0,t) \\ &= \frac{E_0}{2}(\boldsymbol{x_0}\cos\omega t - \boldsymbol{y_0}\sin\omega t) + \frac{E_0}{2}(\boldsymbol{x_0}\cos\omega t + \boldsymbol{y_0}\sin\omega t). \end{aligned}$$

Předpokládáme-li, že se složky $\boldsymbol{E}^+$, $\boldsymbol{E}^-$ šíří s indexy lomu $n^+ \neq n^-$, v prostředí o délce l dojde ke vzniku fázového posunutí

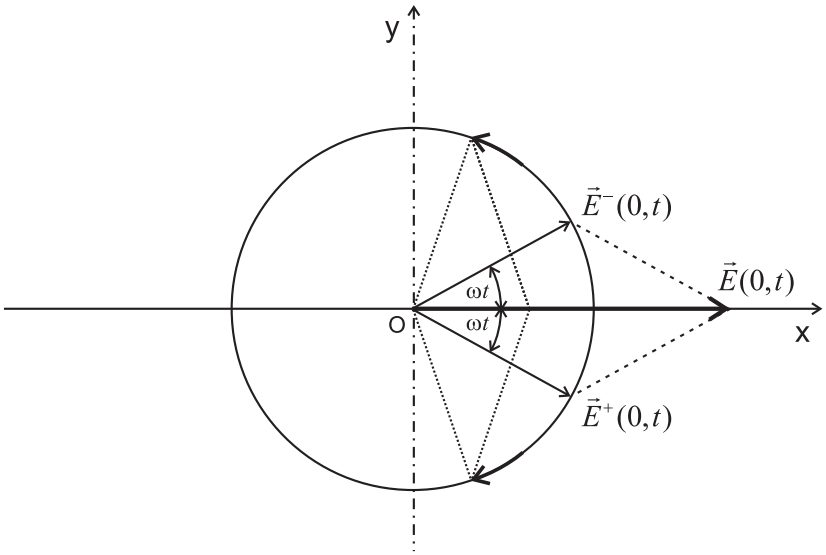
$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n^+ - n^-)l.$$



Obrázek 7.13: Stáčení směru polarizace lineárně polarizovaného světla v látce P. Určuje se v uspořádání s polarizátorem N_1 a analyzátorem N_2.



Obrázek 7.14: Enantiomorfismus krystalů křemene.



Obrázek 7.15: Rozklad lineárně polarizovaného světla na dvě kruhově polarizované složky.

Z obr. 7.16 je patrné, že nový směr polarizace vznikne půlením úhlu $2\alpha+\Delta\varphi$ mezi $\boldsymbol{E}^+$ a $\boldsymbol{E}^-$. Vidíme, že úhel $\alpha+\varphi$ mezi $\boldsymbol{E}^+$ a $\boldsymbol{E}^-$ je současně roven $(2\alpha+\Delta\varphi)/2 = \alpha+(\Delta\varphi/2)$ a tedy stočení směru polarizace φ činí přesně polovinu fázového posunutí,

$$\varphi = \frac{\Delta\varphi}{2}.$$

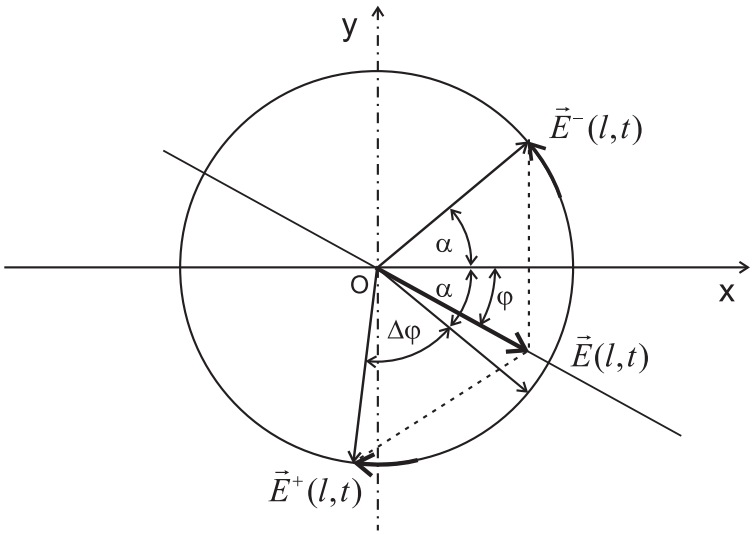
Cvičení 5.: Co se stane, když lineárně polarizované světlo projde opticky aktivním prostředím, je odraženo zrcadlem a projde prostředím zpět? Uvažte, že levotočivá složka $\boldsymbol{E}^-$ se po odrazu stane pravotočivou $\boldsymbol{E}^+$, neboť smysl rotace se odrazem nezmění, ale vlna se šíří opačným směrem !

Indukovaná optická anizotropie. V předchozím příkladu jsme si uvedli dva hlavní projevy anizotropie optického prostředí — dvojlom a optickou aktivitu. Přirozená anizotropie látek je dána buď anizotropií krystalů nebo asymetrií molekul. Indukovaná optická anizotropie je způsobena působením vnějších sil na původně izotropní prostředí. Příslušné optické efekty mají vesměs důležité praktické aplikace. Podle druhu fyzikálního působení mluvíme o fotoelastickém jevu a jevech elektrooptických a magnetooptických.

Fotoelastický jev je vznik dvojlomu v původně izotropních látkách (sklo, plexisklo apod.) vyvolaný mechanickým namáháním, s nímž je spojena vnitřní deformace prostředí. Pro malá elastická napětí je rozdíl indexů lomu řádné a mimořádné vlny uměrný tlaku p, tj.

$$\Delta n = |n_e - n_o| = kp.$$

Konstanta k se nazývá Brewsterův součinitel; např. pro sklo $k \approx 10^{-11} m^2 N^{-1}$.



Obrázek 7.16: Stočení φ směru polarizace lineárně polarizovaného světla v opticky aktivním prostředí.

Elektrooptické jevy mají velký praktický význam pro regulaci a modulaci svazku světla, rychlé spínání obvodů a pod. Podle závislosti Δn na vnějším elektrickém poli $\boldsymbol{E}$ rozlišujeme lineární resp. kvadratický elektrooptický jev. Kvadratický ***Kerrův jev*** (J. Kerr, 1875) je dvojlom indukovaný příčným elektrickým polem $\boldsymbol{E}$ v polárních kapalinách, např. v nitrobenzenu nebo sirouhlíku. Tyto kapaliny získávají v důsledku orientace polárních molekul vlastnosti jednoosých krystalů s optickou osou $\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{E}$. Vzhledem k tomu, že rozdíl indexů lomu

$$\Delta n = n_e - n_o = \lambda B E^2,$$

dochází na délce l k fázovému posuvu

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta n l = 2\pi B l E^2.$$

Největší Kerrovu konstantu $B = 2,4.10^{-12} m/V^2$ má nitrobenzen (udaná hodnota je při $\lambda = 550\ nm$ a teplotě 20^oC). Lineární ***Pockelsův jev*** (F. Pockels, 1894) našel široké uplatnění po objevu laserů. Je založen na vlastnosti některých jednoosých krystalů, že se ve vnějším elektrickém poli stanou dvojosými. Při podélně přiloženém elektrickém poli je fázový rozdíl na délce l dán vztahem

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} n_o^3 R E l$$

a je tedy úměrný přiloženému napětí $U = El$. Pro často užívaný elektrooptický krystal ADP (dihydrogenfosfát amonia, $NH_4H_2PO_4$ je při $\lambda = 550\ nm$ index lomu pro řádný paprsek $n_o = 1,53$. Místo konstanty R se udává půlvlnové napětí $U_{\lambda/2} = 9,2\ kV$, které

způsobuje fázový posuv $\Delta\varphi = \pi$. (Pro krystal KDP s chemickým složením KH_2PO_4, je $n_o = 1,51$ a $U_{\lambda/2} = 7,5\ kV$).

Magnetooptické jevy jsou rovněž lineární a kvadratické. Kvadratický ***Cottonův–Moutonův jev*** se pozoruje např. v nitrobenzenu nebo sirouhlíku, které v příčném magnetickém poli $\boldsymbol{H}$ získají vlastnosti pozitivních jednoosých krystalů s $\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{H}$. Vzhledem k tomu, že ve vztahu

$$\Delta n = n_e - n_o = \lambda C H^2$$

je konstanta C velmi malá, nenašel tento jev praktické uplatnění. Lineární ***Faradayův jev*** (M. Faraday, 1845) je stáčení směru lineární polarizace světla v původně opticky neaktivní látce, je-li vložena do podélného magnetického pole. Indexy lomu pro kruhově levotočivě a pravotočivě polarizované světlo se stávají rozdílnými a úhel stočení směru polarizace lineárně polarizovaného světla je dán vztahem

$$\varphi = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi}{\lambda}(n^+ - n^-)l = VlH,$$

kde Verdetova konstanta V závisí na vlnové délce λ , hustotě látky a teplotě. Zajímavé využití Faradayova jevu představuje ***optický izolátor***. Je uspořádán podle obr. 7.13, kde P je solenoid, jehož skleněné jádro má velkou Verdetovu konstantu a polarizační filtry N_1, N_2 jsou vzájemně otočeny o $\pm 45^o$. Proud v solenoidu budí takové magnetické pole, aby stočení $\varphi = 45^o$. Na rozdíl od přirozeně opticky aktivních látek dochází v případě Faradayova jevu při zpětném průchodu odraženého záření k dalšímu stočení směru polarizace ve stejném smyslu, v našem případě o dalších 45^o, celkem tedy 90^o. Zpětný svazek proto neprojde polarizátorem N_1 zpět. V laserové technice optické izolátory chrání poslední stupně optických kvantových zesilovačů před jejich případnou destrukcí zářením odraženým zpět od terče.

7.4 Časová koherence a polarizace

Kvazimonochromatické záření z tepelných zdrojů. Pojem časové koherence: světlo dokonale koherentní a nekoherentní, koherenční čas. Světlo dokonale polarizované, nepolarizované a částečně polarizované. Stokesovy parametry.

Při výkladu polarizačních jevů jsme zatím vycházeli z předpokladu oddílu 7.1, že elektromagnetické vlny jsou monochromatické. Viděli jsme, ža každá taková vlna je polarizovaná. Jak se potom máme vyrovnat s faktem, že se v praxi nejčastěji setkáváme se světlem nepolarizovaným?

K tomu si musíme na prvním místě uvědomit, že skutečné zdroje elektromagnetického záření nikdy nevyzařují přesně monochromatické vlny. Monochromatičnost je idealizace, která se nikdy v přírodě v dokonalé formě nevyskytuje. U *tepelných světelných zdrojů* světlo je vysíláno mnoha nezávislými atomárními zdroji a výsledné pole vzniká jejich složením.

Jako model tepelného zdroje můžeme uvažovat soubor velkého počtu oscilátorů (Thomsonových atomů), z nichž každý nezávisle a nahodile vysílá vlnový balík (3.22) exponenciálně tlumený v čase s typickou časovou konstantou $\tau \approx 10^{-8}s$. Výsledné záření tedy nebude monochromatické. Jestliže všechny atomární oscilátory mají stejnou

vlastní úhlovou frekvenci ω_0, bude spektrum jejich záření soustředěno do jistého intervalu šířky $\Delta\omega$ okolo **střední (dominantní) frekvence** ω_0. V případě $\Delta\omega \ll \omega_0$ pak mluvíme o *zdroji kvazimonochromatického záření*. Vzhledem ke vztahu (3.27) mezi šířkou signálu a šířkou jeho spektra bude platit

$$\Delta\omega.\tau \approx 2\pi,$$

tj. $\Delta\nu \approx 10^8\,Hz \ll \nu_0 \approx 10^{15}\,Hz$.

Z uvedeného vyplývá, že světelný signál vysílaný tepelným zdrojem je **náhodným (stochastickým) procesem**. V daném místě v okamžiku t neumíme přesně určit vektor $\boldsymbol{E}(t)$, ale můžeme ho popsat jistým pravděpodobnostním rozložením. Celkově pak lze náhodný proces charakterizovat souborem statistických středních hodnot. Jsou-li tyto střední hodnoty konstantní v čase, mluvíme o **stacionárním** náhodném procesu.

U kvazimonochromatického signálu $\boldsymbol{E}(t)$ si můžeme představit, že u složky

$$E(t) = E_0(t)\cos\left(\omega_0 t + \varphi(t)\right), \tag{7.6}$$

amplituda $E_0(t)$ a fáze $\varphi(t)$ nezůstávají konstantní, ale náhodně se mění s časovou konstantou $\tau \gg T_0$. Během jedné periody T_0 nebo malého počtu period můžeme $E_0(t)$ a $\varphi(t)$ ovšem považovat za konstanty jako u monochromatického signálu.

Signál (7.6) můžeme posuzovat z hlediska **časové koherence**. Nechť jsou dána náhodná pole $E_1(t)$, $E_2(t)$ v témže bodě a časový interval Δt. Lze-li pole $E_2(t+\Delta t)$ přesně určit ze znalosti $E_1(t)$, říkáme, že pole $E_1(t)$ a $E_2(t+\Delta t)$ jsou **dokonale (úplně) koherentní**. Nelze-li pole $E_2(t+\Delta t)$ předpovědět na základě znalosti $E_1(t)$, říkáme, že tato pole jsou **nekoherentní**.

Příklad. Nechť $E_0(t) = E_0 = konst.$ (konstantní intenzita) a $\varphi(t)$ se pomalu náhodně mění s časovou konstantou $\tau \gg T_0$. Potom pole

$$E_1(t) \equiv E(t) = E_0\cos\left(\omega_0 t + \varphi(t)\right),$$

a

$$E_2(t+\Delta t) \equiv E(t+\Delta t) = E_0\cos\left(\omega_0 t + \omega_0\Delta t + \varphi(t+\Delta t)\right)$$

jsou dokonale koherentní pro $\Delta t \ll \tau$, protože $\varphi(t+\Delta t) = \varphi(t)$, a pro $\Delta t \geq \tau$ nekoherentní, protože $\varphi(t+\Delta t)$ již nelze předpovědět ze znalosti $\varphi(t)$.

Jako v tomto příkladě i obecně existuje tzv. **koherenční čas** τ_{koh}, který odděluje situace dokonalé koherence ($\Delta t \ll \tau_{koh}$) a nekoherence ($\Delta t \geq \tau_{koh}$). Užívá se celá řada konvencí, jak τ_{koh} definovat. My se přidržíme vlastnosti kvazimonochromatických tepelných zdrojů, kde

$$\tau_{koh} \approx \tau \approx \frac{2\pi}{\Delta\omega} \approx 10^{-8}\ s.$$

Jinou mírou časové koherence je bezrozměrný **stupeň monochromatičnosti** $\Delta\nu/\nu_0$, který je nepřímo úměrný koherenčnímu času,

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx \frac{2\pi}{\omega_0\tau_{koh}} \approx \frac{10^{-15}}{10^{-8}} = 10^{-7}.$$

Názornou mírou časové koherence je **koherenční délka**

$$l_{koh} = c\tau_{koh} \approx 3\ m,$$

která představuje délku vlny vyslané za čas τ_{koh}.

Cvičení 6. Vypočítejte vlastnosti časové koherence pro výbojku, kde atomy vykonávají tepelný pohyb s nerelativistickou střední rychlostí $v \approx 10^2\ m/s$. **Dopplerův jev** způsobuje maximální změny frekvence registrované pozorovatelem při pohybu zdrojů ve směru k němu resp. od něho podle vztahu

$$\nu'_{\pm} = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 \pm \frac{v}{c}}\nu_0 \doteq \frac{c}{c \pm v}\nu_0.$$

Potom stupeň monochromatičnosti

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{|\nu'_+ - \nu'_-|}{\nu_0} = \left|\frac{c}{c+v} - \frac{c}{c-v}\right| \doteq 2\frac{v}{c} \approx 10^{-6}$$

je o řád větší než hodnota 10^{-7}. Odpovídající **dopplerovské rozšíření spektrální čáry** proto vede na šířku spektra

$$\Delta\nu \approx 10^9\ Hz,$$

tj. je desetkrát větší než tzv. **přirozená šířka spektrální čáry**. Koherenční čas vychází $\tau_{koh} \approx 10^{-9}\ s$ a koherenční délka $l_{koh} \approx 0,3\ m$.

Při popisu polarizace kvazimonochromatického světla vznikajícího ve výbojce předpokládáme, že ve vztahu pro elektrické pole rovinné vlny pro $z = 0$

$$\boldsymbol{E}(0,t) = \boldsymbol{x_0}E_1(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_1(t)) + \boldsymbol{y_0}E_2(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_2(t)) \tag{7.7}$$

veličiny $E_1(t), E_2(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)$ již nejsou konstanty jako ve vztahu (7.2), ale pomalu se náhodně mění s koherenční dobou $\tau_{koh} \gg T_0$. Vypočteme-li čtyři intenzity (7.3), které nám slouží k určení polarizačního stavu, se středováním přes jednu periodu délky T_0,

$$\begin{aligned}
< E_x^2 >_{T_0} &= \frac{1}{2}E_1(t)^2, \qquad (7.8)\\
< E_y^2 >_{T_0} &= \frac{1}{2}E_2(t)^2,\\
< 2E_xE_y >_{T_0} &= E_1(t)E_2(t)\cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)),\\
< 2E_x(\omega t - \frac{\pi}{2})E_y(\omega t) >_{T_0} &= E_1(t)E_2(t)\sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)),
\end{aligned}$$

vidíme, že získané střední hodnoty se budou pomalu měnit. Kdybychom měli rychlý přístroj s **rozlišovací dobou** $t_r \ll \tau_{koh}$, mohli bychom pomalé změny středních hodnot zachytit. Každé takové měření by poskytlo soubor okamžitých hodnot $E_1(t), E_2(t), \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$, které určují polarizované světlo. Jeho polarizace by se ovšem s časem měnila v časových intervalech délky řádu $\tau_{koh} \approx 10^{-9}\ s$, tj. nanosekund.

Obvyklé detektory intenzity světla mají rozlišovací dobu delší než τ_{koh}, zvláště pak klasický detektor — *lidské oko* — s rozlišovací dobou $t_r \approx 0,1\ s$. Intenzity (7.3) se středováním přes rozlišovací dobu přístroje $t_r \gg \tau_{koh}$,

$$< E_x^2 >_r, < E_y^2 >_r, < 2E_xE_y >_r, < 2E_x(\omega t - \frac{\pi}{2})E_y(\omega t) >_r,$$

by se daly získat dodatečným středováním pomalu se měnících intenzit (7.8), avšak výsledek bude záviset na konkrétní souhře náhodných změn veličin $E_1(t)$, $E_2(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$.

Nepolarizované světlo. Uvažujme obvyklý případ zcela náhodných změn $E_1(t)$, $E_2(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ během rozlišovací doby $t_r \gg \tau_{koh}$, kdy se fáze mění navzájem nezávisle a amplitudy nabývají náhodně hodnot v intervalu $0 \leq E_{1,2}(t) \leq E_0$ při konstantní celkové intenzitě $E_1(t)^2 + E_2(t)^2 = E_0^2$ (při libovolné volbě souřadných os). Středováním posledního vztahu dostaneme

$$< E_x^2 >_r = < E_y^2 >_r = \frac{1}{2} E_0^2.$$

Středování intenzit (7.8) úměrných $\cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))$ a $\sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))$ dává v tomto případě nulové hodnoty

$$< 2E_x E_y >_r = 0 = < 2E_x(\omega t - \frac{\pi}{2}) E_y(\omega t) >_r,$$

neboť za dobu $t_r \gg \tau_{koh}$ rozdíl fází $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ projde se stejnou pravděpodobností všemi hodnotami v intervalu $< 0, 2\pi >$. Světlo těchto vlastností registrované pomalým přístrojem nazýváme **nepolarizované.** Všimněte si, že dané výsledky měření středních hodnot

1. nezávisí na konkrétní volbě os x, y,
2. nelze vyjádřit pomocí konstant E_1, E_2, $\varphi_1 - \varphi_2$ (neboť $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ a $\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$ nikdy nemohou být současně rovny nule).

Pokud u kvazimonochromatického světla intenzity (7.8) naměřené pomalým přístrojem lze vyjádřit vztahy (7.3) s konstantami E_1, E_2, $\varphi_1 - \varphi_2$, říkáme, že světlo je **dokonale (úplně) polarizované**. Takové světlo získáme např. po průchodu nepolarizovaného světla polarizačním filtrem.

Mezi dokonale polarizovaným a nepolarizovaným světlem se nacházejí stavy **částečné polarizace**, u nichž náhodné změny veličin $E_1(t), E_2(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)$ mohou být nějak vzájemně závislé. Pro jejich popis se používají **Stokesovy parametry**

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{< E_x^2 >_r - < E_y^2 >_r}{< E_x^2 >_r + < E_y^2 >_r}, \\ P_2 &= \frac{< 2E_x E_y >_r}{< E_x^2 >_r + < E_y^2 >_r}, \\ P_3 &= \frac{< 2E_x(\omega t - \frac{\pi}{2}) E_y >_r}{< E_x^2 >_r + < E_y^2 >_r}, \end{aligned} \tag{7.9}$$

které nezávisí na celkové intenzitě a tedy popisují pouze polarizační stav.

Cvičení 7. Ověřte, že pro dokonale polarizované světlo platí $P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = 1$, kdežto pro nepolarizované světlo máme $P_1 = P_2 = P_3 = 0$. Jaké Stokesovy parametry má kruhově polarizované světlo?

Obecně lze dokázat nerovnost

$$\boxed{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 \leq 1.} \tag{7.10}$$

Mezi extrémními stavy úplně polarizovaného světla (rovnost v (7.10)) a nepolarizovaného světla ($P_1 = P_2 = P_3 = 0$) jsou tedy stavy částečné polarizace. Geometricky se dají možné polarizační stavy znázornit body (P_1, P_2, P_3) v kouli jednotkového poloměru: stavy úplně polarizovaného světla odpovídají bodům na povrchu koule (na Poincaréově sféře), nepolarizované světlo odpovídá středu a ostatní vnitřní body odpovídají částečně polarizovanému světlu. Mírou polarizace světla je **stupeň polarizace** definovaný jako délka vektoru $\boldsymbol{P} = (P_1, P_2, P_3)$. Nabývá hodnot:

$|\boldsymbol{P}| = 0$ pro nepolarizované světlo,

$0 < |\boldsymbol{P}| < 1$ pro částečně polarizované světlo,

$|\boldsymbol{P}| = 1$ pro úplně polarizované světlo.

Nerovnost (7.10) se snadno dokáže v komplexním vyjádření kvazimonochromatické vlny

$$\boldsymbol{E}(0,t) = \mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{x_0} E_1(t) e^{i(\omega_0 t + \varphi_1(t))} + \boldsymbol{y_0} E_2(t) e^{i(\omega_0 t + \varphi_2(t))}\right\}$$

kde $E_1(t), E_2(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)$ jsou pomalé náhodné funkce času (s koherenčním časem τ_{koh}). Podobně jako v oddíle 7.1 má komplexní vektor $\widehat{\boldsymbol{E_0}}$ složky

$$E_{0x}(t) = E_1(t) e^{i\varphi_1(t)}, \quad E_{0y}(t) = E_2(t) e^{i\varphi_2(t)}. \tag{7.11}$$

V oddíle 7.2 jsme viděli, že polarizační stav monochromatického světla lze určit měřením čtyř intenzit (7.3). U kvazimonochromatického světla je doba, přes kterou středujeme, dána dlouhou rozlišovací dobou měřícího přístroje $t_r \gg \tau_{koh}$. Ukážeme si nejprve, že čtyři intenzity (7.3) získané středováním přes t_r, lze kompaktně zapsat ve formě komplexní hermitovské matice

$$J = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{pmatrix},$$

jejíž prvky jsou střední hodnoty

$$J_{ab} = < E_{0a}(t) \overline{E_{0b}(t)} >_r .$$

Dosazením (7.11) do J_{ab} dostaneme

$$\begin{aligned} J_{xx} &= < E_{0x} \overline{E_{0x}} >_r = < E_1(t)^2 >_r = 2 < E_x^2 >_r \\ J_{yy} &= 2 < E_y^2 >_r \\ J_{xy} &= < E_{0x} \overline{E_{0y}} >_r = < E_1(t) E_2(t) e^{i(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))} >_r \\ &= < 2E_x E_y >_r + i < 2E_x(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) E_y(\omega_0 t) >_r = \overline{J_{yx}}. \end{aligned}$$

Celkovou intenzitu a Stokesovy parametry lze tedy zapsat pomocí prvků matice J:

$$I = \frac{1}{2}(J_{xx} + J_{yy}), P_1 = \frac{J_{xx} - J_{yy}}{J_{xx} + J_{yy}}, P_2 = \frac{J_{xy} + J_{yx}}{J_{xx} + J_{yy}}, P_3 = \frac{J_{xy} - J_{yx}}{i(J_{xx} + J_{yy})}.$$

Obráceně se komplexní hermitovská matice J dá vyjádřit pomocí čtyř nezávislých reálných parametrů I, P_1, P_2, P_3:

$$J = I \begin{pmatrix} 1 + P_1 & P_2 + iP_3 \\ P_2 - iP_3 & 1 - P_1 \end{pmatrix}.$$

V dalším budeme potřebovat její determinant

$$\det J = I^2(1 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2).$$

Při středování přes *statistický soubor* velkého počtu N realizací náhodných veličin $E_{0a}^{(n)}, n \in \hat{N}, a \in \{x, y\}$, jsou střední hodnoty J_{ab} rovny

$$J_{ab} =< E_{0a}\overline{E_{0b}} >_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} E_{0a}^{(n)}\overline{E_{0b}^{(n)}}.$$

Potom pro determinant

$$\det J = J_{xx}J_{yy} - |J_{xy}|^2 = \frac{1}{N^2}\sum_m \left|E_{0x}^{(m)}\right|^2 \sum_n \left|E_{0y}^{(n)}\right|^2 - \frac{1}{N^2}\left|\sum_n E_{0x}^{(n)}\overline{E_{0y}^{(n)}}\right|^2$$

vzhledem ke Schwartzově nerovnosti v C^N

$$\left|\sum_n x_n\overline{y_n}\right|^2 \leq \sum_n |x_n|^2 \sum_n |y_n|^2$$

platí nerovnost

$$\det J = I^2(1 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2) \geq 0.$$

Na závěr je třeba poznamenat, že intenzity jsou správně definovány jako střední hodnoty přes statistický soubor. Jejich vyjádření pomocí časových středních hodnot je založeno na obvykle splněném předpokladu o **ergodičnosti** stochastického procesu, což zhruba znamená, že během dostatečně dlouhé doby systém projde v blízkosti všech možných stavů realizovaných ve statistickém souboru.

Kapitola 8

Interference a difrakce

8.1 Michelsonův interferometr

Pojmy interference,interference a difrakce, podmínka pro interferenci. Michelsonův interferometr, případy dokonalé koherence a nekoherence, viditelnost interferenčního jevu, určení koherenční doby.

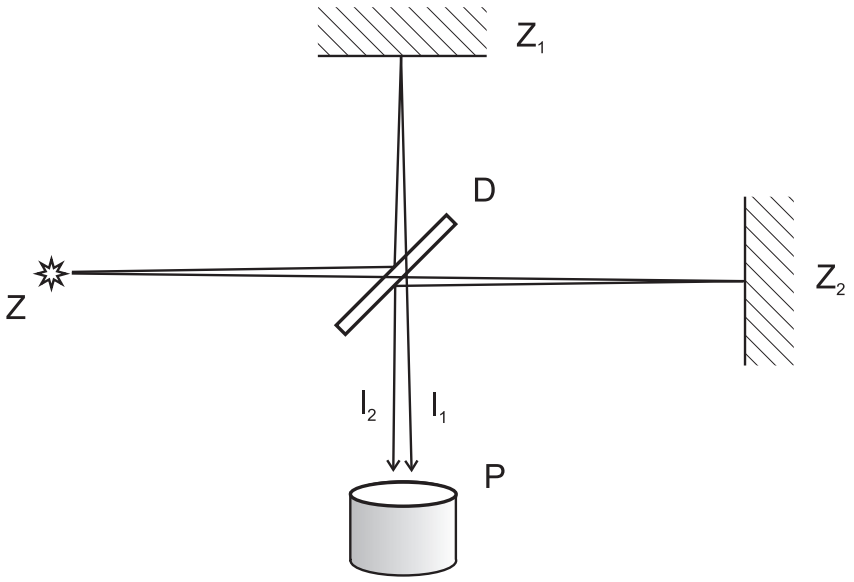
Samozřejmým důsledkem linearity Maxwellových rovnic ve vakuu nebo lineárním prostředí a z nich plynoucích vlnových rovnic je princip superpozice: s danými dvěma řešeními je řešením i každá jejich lineární kombinace, speciálně jejich součet nebo rozdíl. U harmonických postupných vln stejné frekvence tak dochází v různých místech prostoru ke konstruktivní respektive destruktivní superpozici. Výsledné vlnění v prostoru má formu stojatého vlnění, v němž je energie přerozdělena s maximy a minimy intenzity. Tato **interferenční struktura** ve stacionárním světelném poli se na stínítku projeví určitým vzorem světlých a tmavých interferenčních proužků — **interferenčním jevem**. Objev interference světla Thomasem Youngem (1807) v uspořádání se dvěma štěrbinami (oddíl 8.3) byl považován za potvrzení vlnové podstaty světla.

Při detekci interferenčních jevů buď lidským okem nebo jinými detektory záření se registruje nikoliv okamžitá hodnota amplitudy, nýbrž intenzita, tj. časová střední hodnota kvadratické energetické veličiny s charakteristickou prostorovou modulací.

Uvedený obecný pojem interference vlnění je v optice obvyklé dělit na případy skládání vlnění z diskrétních bodových zdrojů (*interference v užším smyslu*) a skládání vlnění ze spojitě rozložených zdrojů (*difrakce* neboli *ohyb*).

Ve skutečných světelných polích, která nejsou monochromatická, ale v nejlepším případě kvazimonochromatická, je třeba zkoumat podmínky pro vznik interferenčních jevů. Hlavním činitelem, který ve stacionárním náhodném světelném poli může narušit realizaci interferenčního jevu, jsou nepředvídatelné náhodné změny fáze v čase a v prostoru. K popisu náhodných změn fáze v čase jsme v oddíle 7.4 zavedli pojem **časové koherence**.

Dobrým příkladem, na kterém lze ilustrovat roli časové koherence a vliv koherenční doby na realizaci interferenčního jevu, je Michelsonův interferometr (obr. 8.1). Svazek kvazimonochromatického světla z bodového zdroje Z dojde na dělič svazku (polopropustné zrcadlo) D. Dva vzniklé svazky se odrážejí od zrcadel Z_1, Z_2 a po opětném dopadu na dělič D se registruje světlo přicházející k pozorovateli (okuláru) P. Světlo



Obrázek 8.1: Michelsonův interferometr.

ze zdroje Z se tedy k pozorovateli P šíří po dvou cestách, jejichž celkové délky označme l_1, l_2. Tyto délky lze měnit posuvem zrcadel.

Zapíšeme-li složku kvazimonochromatického elektrického pole v místě zdroje

$$E(Z,t) = E_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi(t)\right),$$

můžeme elektrické pole svazků $i = 1, 2$ v bodě P vyjádřit pomocí příslušných retardovaných časů $t'_i = t - (l_i/c)$ a koeficientů zeslabení amplitud a_i:

$$E_i(P,t) = a_i E(Z,t'_i) = a_i E_0 \cos\left(\omega_0 t - k_0 l_i + \varphi(t'_i)\right).$$

K interferenčnímu jevu vede interferenční člen v kvadratickém výrazu pro intenzitu superpozice obou svazků

$$I = < \left[E_1(P,t) + E_2(P,t)\right]^2 >_r .$$

Pro objasnění vlivu časové koherence provedeme nejprve středování přes periodu $T_0 \ll \tau_{koh}$:

$$< \left[E_1(P,t) + E_2(P,t)\right]^2 >_{T_0} = I_1 + I_2 + I_{int}(t).$$

Interferenční člen

$$\begin{aligned} I_{int}(t) &= a_1 a_2 < 2E(Z,t'_1)E(Z,t'_2) >_{T_0} \\ &= a_1 a_2 E_0^2 < 2\cos\left(\omega_0 t'_1 + \varphi(t'_1)\right)\cos\left(\omega_0 t'_2 + \varphi(t'_2)\right) >_{T_0} \end{aligned}$$

se upraví pomocí vzorce $2\cos a\cos b = \cos(a+b)+\cos(a-b)$. Při středování přes T_0 dá člen $\cos(a+b)$ nulu a v členu $\cos(a-b)$ uvážíme, že $\varphi(t)$ se během jedné periody nemění, takže

$$I_{int}(t) = a_1 a_2 E_0^2 \cos\left(k_0(l_2-l_1)+\varphi(t_1')-\varphi(t_2')\right).$$

Za předpokladu pozorování velmi pomalým přístrojem s reakční dobou $t_r \gg \tau_{koh}$ bude výsledný interferenční jev záviset na délce časového intervalu

$$\Delta t = |t_1' - t_2'| = \frac{|l_2-l_1|}{c}$$

mezi vysláním signálů ze zdroje Z tak, aby oba dospěly k pozorovateli ve stejném okamžiku t.

1. *Případ dokonalé koherence.* Je-li $\Delta t \ll \tau_{koh}$, pak $\varphi(t_1') \doteq \varphi(t_2')$ a interferenční člen

   $$I_{int}(t) = a_1 a_2 E_0^2 \cos\left(k_0(l_2-l_1)\right)$$

   se nemění s časem, je tedy roven intenzitě změřené velmi pomalým přístrojem. Jeho velikost závisí jen na dráhovém rozdílu $|l_2-l_1| = c\Delta t$ a leží v intervalu

   $$-a_1 a_2 E_0^2 \le I_{int} \le a_1 a_2 E_0^2.$$

   Celková intezita v místě P je rovněž konstantní

   $$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}E_0^2(a_1^2+a_2^2+2a_1a_2\cos k_0(l_2-l_1)) \\ &= I_1+I_2+2\sqrt{I_1 I_2}\cos k_0(l_2-l_1) \end{aligned}$$

   a leží v intervalu

   $$\left(\sqrt{I_1}-\sqrt{I_2}\right)^2 \le I \le \left(\sqrt{I_1}+\sqrt{I_2}\right)^2. \tag{8.1}$$

   Podmínka $\Delta t \ll 10^{-9}s$ se pomocí dráhového rozdílu vyjádří jako $|l_2-l_1| \ll 0,3\,m$.

   Cvičení 1. Interferenční proužky pozorované v Michelsonově pokusu jsou způsobeny interferencí ne zcela rovnoběžných svazků přicházejících do místa pozorování. K tomu si spočtěte příklad 7.16 ze skript [1].

2. *Případ nekoherence.* Je-li $\Delta t \ge \tau_{koh}$, pak $\varphi(t_1')-\varphi(t_2')$ se zcela náhodně mění s časem. Vzhledem k tomu, že během velmi dlouhé doby t_r rozdíl fází nabývá se stejnou pravděpodobností všech hodnot v intervalu $<0,2\pi>$, bude přístroj registrovat

   $$< I_{int}(t) >_r = \frac{1}{t_r}\int_0^{t_r} I_{int}(t)dt = 0,$$

   tj. $I = I_1 + I_2$ a interferenční jev nevzniká.[1]

[1] Tento výsledek se někdy vyjadřuje slovy, že "nekoherentní vlny spolu neinterferují". K tomu je třeba si připomenout zásadní roli předpokladu $t_r \gg \tau_{koh}$. Pro dostatečně rychlý přístroj $t_r \le \tau_{koh} \le \Delta t$ by se totiž fáze změnila během měření jen nepatrně, $\varphi(t_1') \approx \varphi(t_2')$, takže přístroj by stačil sledovat náhodné změny interferenčního jevu v čase.

Popsané případy dokonalé časové koherence a nekoherence představují mezní situace, mezi nimiž se spojitě vyskytují případy *částečné koherence*. Přechod mezi nimi charakterizuje veličina

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

zvaná **viditelnost (kontrast)** interferenčního jevu. Při dokonalé koherenci nabývá viditelnost své maximální hodnoty

$$V_{max} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

(při $I_1 = I_2$ je $V_{max} = 1$), zatímco u nekoherentních signálů je $V = 0$. Koherenční čas τ_{koh} je pak z experimentální praxe konvečně definován hodnotou Δt, pro kterou V poklesne např. na $V_{max}/\sqrt{2}$ nebo na $0,1\,V_{max}$ apod.

8.2 Babinetův princip

Doplňková stínítka; Babinetův doplňkový princip; Huygensova konstrukce; Fraunhoferova a Fresnelova difrakce.

Další obvyklé uspořádání pro pozorování interferenčních jevů je vyobrazeno na obr. 8.2: kvazimonochromatické světlo se střední vlnovou délkou λ se šíří prostorem od zdroje Z k pozorovateli P, přičemž mezi Z a P je umístěno stínítko s otvorem nebo jiné překážky, jejichž rozměry jsou poměrně velké vzhledem k vlnové délce λ. Nejjednodušší úlohy tohoto typu budou popsány v následujících oddílech této kapitoly. Pro jejich přeformulování do snadno řešitelné formy zásadní roli hraje **Babinetův doplňkový princip**.

Babinetův princip se vztahuje na případy doplňkových stínítek podle obr. 8.2. Říká téměř evidentní fakt, že součet elektrických polí $E_A(P)$ resp. $E_B(P)$ která vzniknou v bodě P v přítomnosti pouze stínítka A resp. pouze stínítka B, je roven elektrickému poli $E_\emptyset(P)$ v nepřítomnosti stínítek:

$$\boxed{E_A(P) + E_B(P) = E_\emptyset(P).} \tag{8.2}$$

Rovnici (8.2) lze porozumět z hlediska představy o funkci **neprůhledného stínítka** $A \cup B$. Pole $E_\emptyset$ ze zdroje Z totiž budí ve stínítku $A \cup B$ další indukované pole $E_A^{ind} + E_B^{ind}$, jež se za stínítkem přesně ruší s dopadajícím. Tuto situaci podle obr. 8.2a můžeme v místě P vyjádřit rovnicí

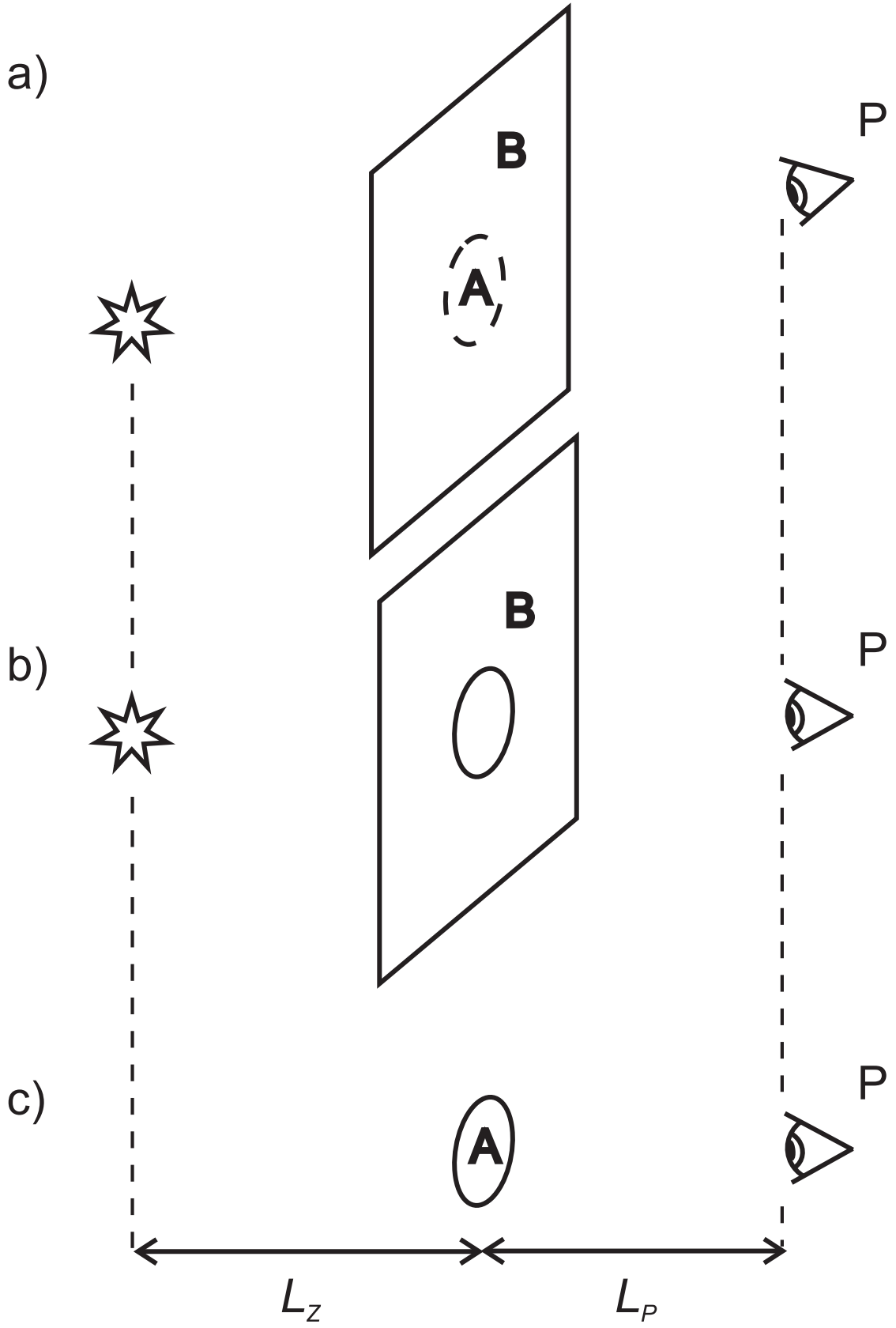
$$E_\emptyset(P) + E_A^{ind}(P) + E_B^{ind}(P) = 0. \tag{8.3}$$

Stejná úvaha použitá na situaci podle obr. 8.2b dává pro výsledné pole v místě P

$$E_\emptyset(P) + E_B^{ind}(P) = E_B(P). \tag{8.4}$$

Je-li překážkou pouze stínítko A, platí

$$E_\emptyset(P) + E_A^{ind}(P) = E_A(P).$$



Obrázek 8.2: Stinítko s otvorem. Doplňková stinítka A, B.

Sečtením posledních dvou rovnic se přesvědčíme, že Babinetův doplňkový princip (8.2) je ekvivalentní rovnici (8.3) definující funkci neprůhledného stínítka.

Z rovnic (8.3) a (8.4) nyní vyplývá udivující výsledek

$$E_B(P) = -E_A^{ind}(P). \tag{8.5}$$

Z pohledu pozorovaných intenzit to znamená, že **intenzita $I_B(P)$ v situaci podle obr. 8.2b je stejná jako intenzita $I_A^{ind}(P)$ za stínítkem A, obr. 8.2c, pokud uvažujeme pouze indukované pole !** Babinetův princip tedy (až na znaménko) úzce souvisí s **Huygensovou konstrukcí** světelného pole. Stačí si představit otvor ve stínítku B zaplněný bodovými Huygensovými zdroji, jež pohlcují dopadající světlo a vyzařují právě jen elementární indukovaná pole, jež v součtu vytvářejí pole $E_A^{ind}(P)$.

Cvičení 2. Pomocí Huygensovy konstrukce vlnoploch odvoďte zákony odrazu a lomu světla na rovinném rozhraní dvou prostředí s indexy lomu n_1, n_2.

V dalších oddílech budeme aplikovat důležitý výsledek (8.5) na speciální případy rovinného stínítka B s jednou nebo více štěrbinami. Praktickou realizací může být např. plátek staniolu nalepený na skle, z něhož vyřízneme úzké proužky.

Experimentální uspořádání pro studium ohybových jevů typu obr. 8.2 se v optice dělí do dvou kategorií:

1. **Fraunhoferova difrakce**, kde vzdálenosti zdroje i pozorovatele od stínítka jsou asymptotické, $L_Z \longrightarrow \infty$, $L_P \longrightarrow \infty$. Mluví se zde o vzdálené zoně světelného pole určené nerovností $L\lambda \gg D^2$, kde D je rozměr otvoru.

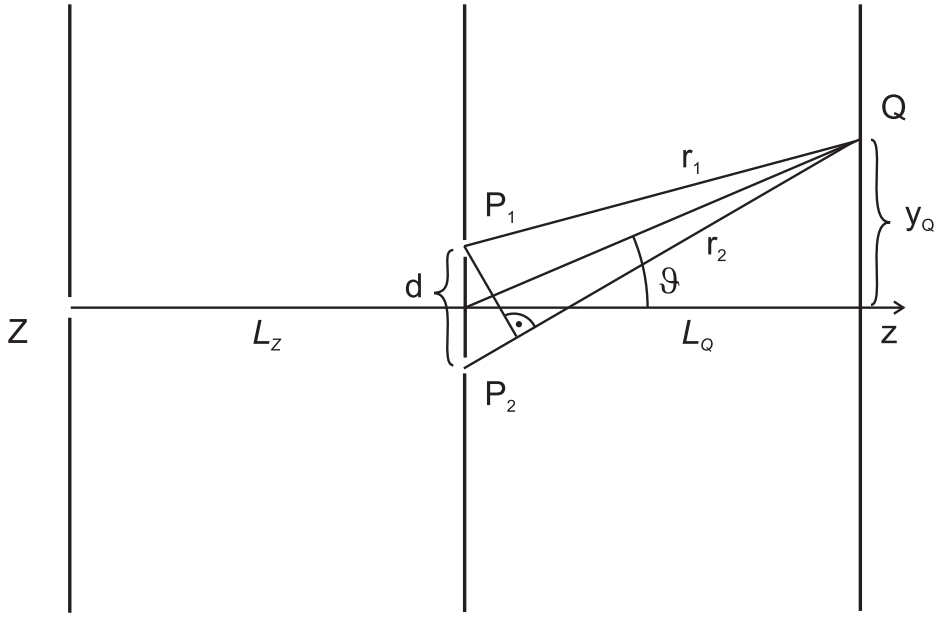
2. **Fresnelova difrakce**, kde alespoň jedna ze vzdáleností L_Z, L_P není asymptotická.

Fraunhoferův ohyb se vyznačuje snažší experimentální realizací i jednodušším teoretickým popisem. Všechny případy difrakce uvedené v těchto skriptech patří do této kategorie. Velké vzdálenosti L_Z, L_P znamenají, že paprsky od zdroje do všech bodů otvoru (a od všech bodů otvoru k pozorovateli) jsou prakticky rovnoběžné, takže je lze charakterizovat úhly. Abychom se při praktické realizaci vyhnuli poklesu intenzity na velké vzdálenosti, můžeme rovnoběžné paprsky soustředit tenkou čočkou do ohniskové roviny ve vzdálenosti f.

8.3 Youngův pokus a prostorová koherence

Uspořádání Youngova dvouštěrbinového pokusu. Fraunhoferův ohyb na dvojici rovnoběžných štěrbin — aplikace Babinetova principu. Interference vln v rovině ze dvou monochromatických bodových zdrojů. Vliv časové a prostorové koherence světla na viditelnost interferenčního jevu; kritérium pro boční koherenci.

Youngův interferenční pokus, který měl základní význam pro důkaz vlnové podstaty světla (Thomas Young 1807), používá dvě rovnoběžné štěrbiny P_1, P_2, na něž dopadá světlo z velmi úzké štěrbiny Z intenzivně osvětlené kvazimonochromatickým světlem (obr. 8.3). Štěrbiny jsou velmi tenké ($\sim 10^{-2}\,mm$) a jejich vzdálenost $d \sim$



Obrázek 8.3: Schema Youngova pokusu.

$0,5\,mm$. Místo štěrbiny Z lze použit osvětlení laserem. Uspořádání pokusu má odpovídat Fraunhoferově difrakci, tj. vzdálenosti L_Z, L_Q vyhovují $L\lambda \gg d^2$. Poloha pozorovaného bodu Q je určena úhlem ϑ,

$$y_Q = L_Q \mathrm{tg}\vartheta.$$

Cvičení 3. Vzdálená zona světelného pole je v blízkosti osy z určena podmínkou $|r_2 - r_1| \ll \lambda/2$. Při $y_Q = d/2$ platí $r_2^2 = r_1^2 + d^2$ a tedy

$$d^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) \ll \frac{\lambda}{2} 2L_Q.$$

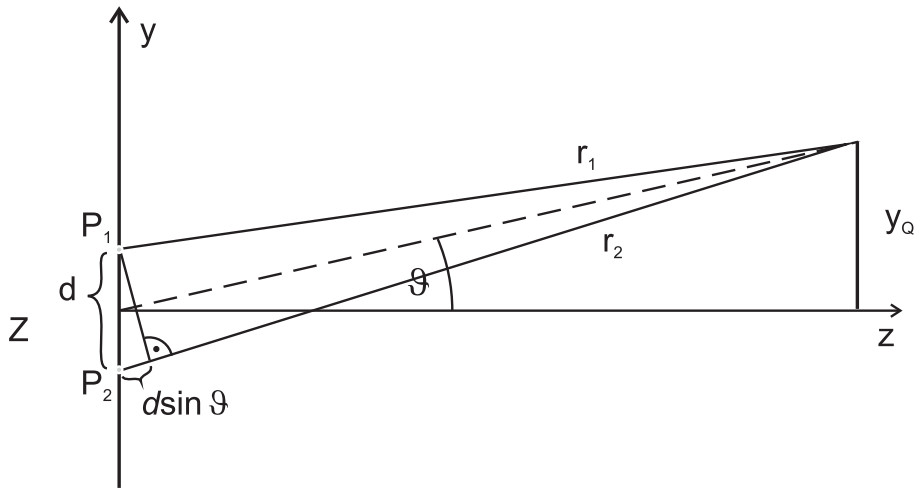
Zjistěte, zda je tato podmínka splněna při $L_Q \sim 5\,m$, jestliže $d = 0,5\,mm$, $\lambda = 500\,nm$.

Teoretická analýza pokusu se významně zjednoduší pomocí Babinetova principu: místo uspořádání podle obr. 8.4 stačí zkoumat pouze indukovaná pole vysílaná ze štěrbin P_1, P_2! V prvním přiblížení uvažujeme velmi tenké štěrbiny. Vliv jejich konečné šířky bude ukázán v oddíle 8.5. Jako zjednodušený model tedy předpokládejme rovinnou situaci podle obr. 8.4 se dvěma kvazimonochromatickými bodovými zdroji P_1, P_2 s dominantní úhlovou frekvencí ω. Z bodových zdrojů se šíří kruhové monochromatické vlny, jež obecně zapíšeme s různými amplitudami a fázovými konstantami:

$$\begin{aligned} E_1(Q,t) &= a_1 E_0 \cos(\omega t - k r_1 + \varphi_1), \\ E_2(Q,t) &= a_2 E_0 \cos(\omega t - k r_2 + \varphi_2). \end{aligned}$$

Intenzita každé vlny zvlášť je

$$I_i = < E_i(Q,t)^2 >_T = \frac{1}{2} a_1^2 E_0^2, \quad i = 1,2.$$



Obrázek 8.4: Interference kruhových vln ze dvou bodových zdrojů.

Interferenční jev je dán intenzitou vln superponovaných v místě pozorování Q,

$$I(Q) =< [E_1(Q,t) + E_2(Q,t)]^2 >_T .$$

(Středujeme přes periodu T, protože se jedná o monochromatické vlny.) Stejným postupem jako v oddíle 8.1 pak dostaneme

$$I(Q) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos[k(r_2 - r_1) + \varphi_1 - \varphi_2]. \tag{8.6}$$

Opět tedy platí nerovnost (8.1). Při stejném osvětlení štěrbin máme $a_1 = a_2, \varphi_1 = \varphi_2, I_1 = I_2$, takže

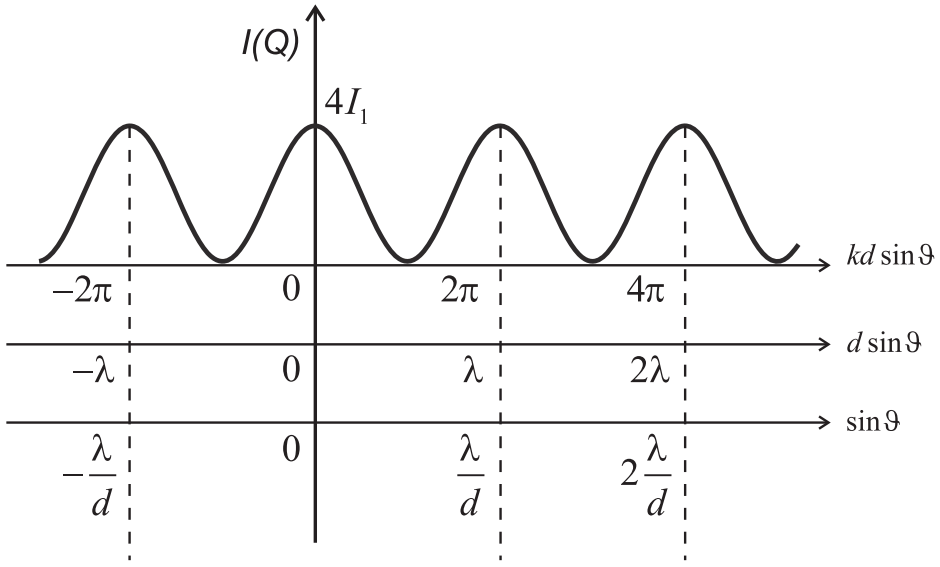
$$I(Q) = 2I_1(1 + \cos[k(r_2 - r_1)]).$$

Poloha interferenčních maxim a minim záleží na rozdílu vzdáleností $r_2 - r_1$. Při pozorování ve vzdálené zoně můžeme spojnice P_1Q a P_2Q považovat za prakticky rovnoběžné a rozdíl $r_2 - r_1$ vyjádřit pomocí úhlu ϑ,

$$r_2 - r_1 \doteq d\sin\vartheta.$$

Prostorové rozdělení intenzity $I(Q)$ je pak dáno vztahem

$$\boxed{I(Q) = 2I_1(1 + \cos(kd\sin\vartheta)).} \tag{8.7}$$



Obrázek 8.5: Graf intenzity $I(Q)$ jako funkce fázového rozdílu $kd\sin\vartheta$, dráhového rozdílu $d\sin\vartheta$ a $\sin\vartheta$).

Na obr. 8.5 vidíme, ve kterých směrech dochází podle rovnice (8.7) ke konstruktivní resp. destruktivní superpozici

$$\begin{aligned}(\sin\vartheta)_{max} &= 2m\frac{\lambda}{2d},\\ (\sin\vartheta)_{min} &= (2m+1)\frac{\lambda}{2d},\end{aligned}$$

kde $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; mluvíme o maximu centrálním (nultého řádu) a dále prvního, druhého, atd. řádu.

Youngův pokus dovolil určit vlnovou délku λ světla změřením polohy y_Q světlých proužků na pozorovacím stínítku,

$$(y_Q)_{max} = L_Q(\mathrm{tg}\vartheta)_{max} \doteq L_Q(\sin\vartheta)_{max} = mL_Q\frac{\lambda}{d},$$

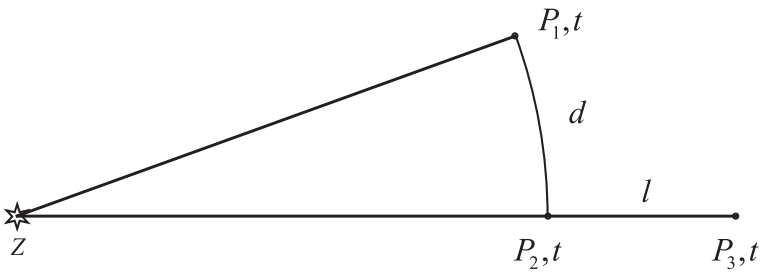
kde $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ a předpokládáme $\vartheta \ll 1$. Vzdálenost sousedních proužků je

$$\Delta y \doteq L_Q\frac{\lambda}{d},$$

odkud lze určit vlnovou délku

$$\lambda \doteq \frac{d\Delta y}{L_Q}.$$

Cvičení 4. Odvoďte vztah (8.6). Jak se změní graf průběhu (8.7) na obr. 8.5, když $\varphi_1 \neq \varphi_2, I_1 \neq I_2$?



Obrázek 8.6: K pojmům podélné a boční prostorové koherence.

Interferenční jev na obr. 8.5 byl odvozen za tří hlavních zjednodušujících předpokladů:

1. aproximace velmi tenkých štěrbin,
2. monochromatické světlo,
3. dokonalá koherence světla ve štěrbinách P_1, P_2.

V prvním případě je třeba vzít v úvahu vliv Fraunhoferova ohybu na štěrbinách konečné šířky, který bude studován v oddíle 8.5. Další dva předpoklady souvisí s koherencí světla. Při použití tepelného zdroje je světlo kvazimonochromatické s koherenční dobou $\tau_{koh} \approx 10^{-9}\, s$. Geometrie pokusu je ovšem taková, že je splněna nerovnost

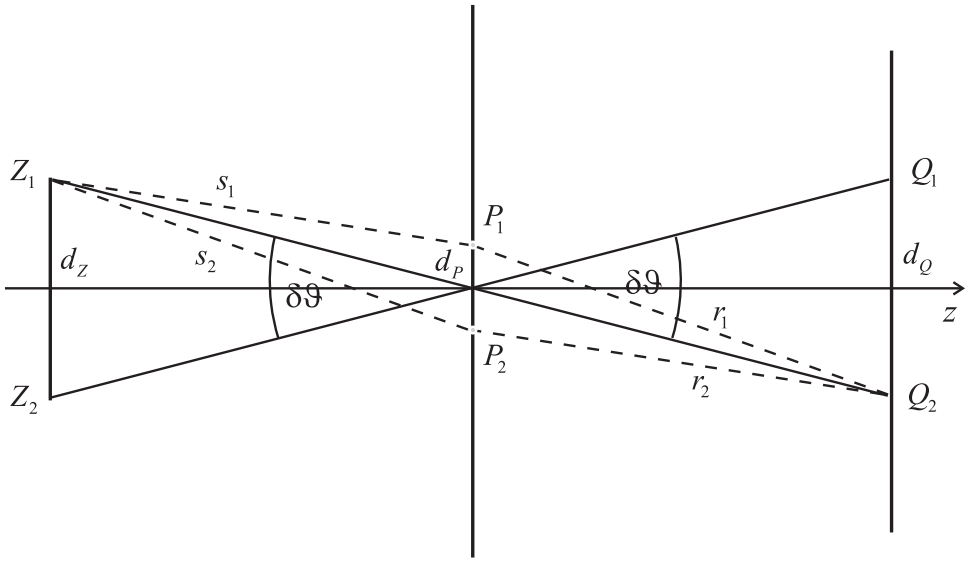
$$|r_2 - r_1| = d\,|\sin\vartheta| \approx 0,5\, mm \ll c\tau_{koh} \approx 30\, cm,$$

takže časová koherence nemá vliv na výsledný interferenční jev.

Koherence světla ve štěrbinách P_1, P_2 má však jiný charakter. Pro viditelnost interferenčního jevu na pozorovacím stínítku je třeba, aby pole $E_1(P_1, t)$, $E_2(P_2, t)$ byla dokonale koherentní *ve stejném časovém okamžiku*. To odpovídá definici prostorové koherence:

Pole $E_1(P_1, t)$, $E_2(P_2, t)$ v různých bodech P_1, P_2 jsou **dokonale prostorově koherentní**, jestliže znalost pole E_1 v místě P_1 v čase t dovoluje přesně předpovědět pole E_2 v místě P_2 ve stejném čase. Nazveme je **prostorově nekoherentní**, jestliže znalost jednoho z polí nedává žádnou informaci o druhém.

V případě kvazimonochromatického bodového zdroje Z se prostorová koherence mezi body P_2, P_3 na obr. 8.6 nazývá **podélnou**. Nebudeme ji uvažovat, protože ji lze jednoznačně převést na časovou: pole v bodě P_3 v čase t je totiž jednoznačně určeno



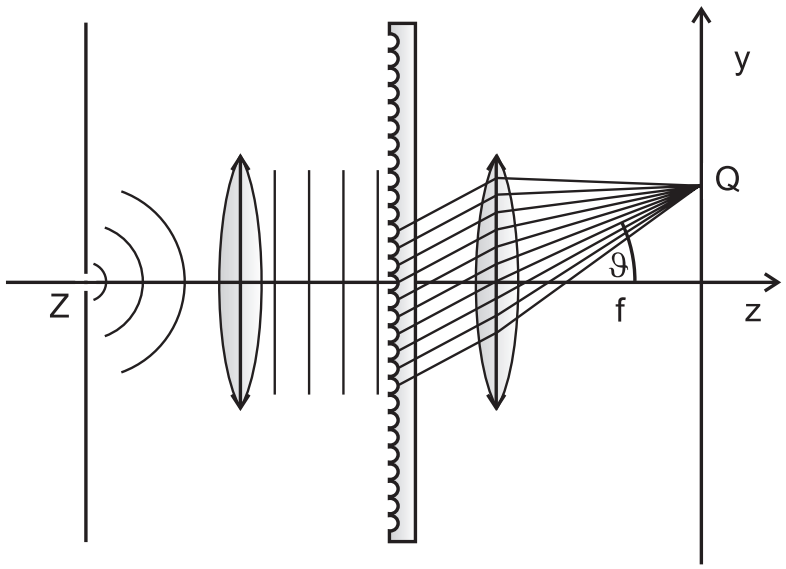
Obrázek 8.7: Vliv konečné šířky tepelného zdroje na boční koherenci ve štěrbinách P_1, P_2.

polem v P_2 v retardovaném čase $t - (l/c)$. Stačí tedy porovnávat pole v bodě P_2 v různých časech t, $t - (l/c)$.

Prostorovou koherenci světla mezi body P_1, P_2, do nichž sférická vlnoplocha dorazí ve stejném časovém okamžiku t, nazýváme **boční**. K boční nekoherenci v bodech P_1, P_2 a tím ke snížení viditelnosti interferenčních proužků v Youngově pokusu může dojít, když tepelný zdroj není bodový. Uvažujme proto Youngovo experimentální uspořádání s tepelným zdrojem konečné šířky d_Z (obr. 8.7) Takový zdroj je soustavou nezávislých zářičů, u nichž fáze záření v daném čase se náhodně mění s polohou ve zdroji a v daném místě zdroje se náhodně mění s časem. Na obr. 8.7 každý z elementárních zářičů mezi body Z_1, Z_2 by na pozorovacím stínítku způsobil jasné interferenční proužky. Centrální maxima zdrojů Z_1, Z_2 budou v bodech Q_1, Q_2. [2] Při pozorování okem nebo jiným pomalým detektorem s rozlišovací dobou $t_r \gg \tau_{koh}$ nekoherentní vlny pocházející z různých míst zdroje spolu neinterferují a *výsledná intenzita bude součtem intenzit jednotlivých zářičů*. Výsledný interferenční obrazec bude velmi málo porušen pouze tehdy, když vzdálenost d_Q bude velmi malá vzhledem ke vzdálenosti $\Delta y \doteq L_Q \lambda / d_P$ sousedních interferenčních maxim, $d_Q \ll \triangle y$. V případě $d_Q \geq \Delta y$ se viditelnost interference blíží nule.

Podmínku dokonalé prostorové koherence ve štěrbinách P_1, P_2 lze podle před-

[2] Ukažte, že nulté maximum od zdroje Z_1 bude určeno podmínkou $r_1 + s_1 - r_2 - s_2 = 0$, tj. $r_1 - r_2 = s_2 - s_1 = d \sin \vartheta_1$.



Obrázek 8.8: Uspořádání pro pozorování difrakce světla na optické mřížce.

chozí úvahy a obr. 8.7 vyjádřit následujícími ekvivalentními způsoby:

$$d_Q \ll \Delta y \quad \Leftrightarrow \quad \delta\vartheta \ll \frac{\lambda}{d_P} \quad \Leftrightarrow \quad d_Z d_P \ll \lambda L_Z. \tag{8.8}$$

Cvičení 5. Jaká by musela být vzdálenost štěrbin d, aby při jejich osvětlení přímým slunečním světlem byla splněna podmínka dokonalé koherence? [3]

8.4 Difrakční mřížka

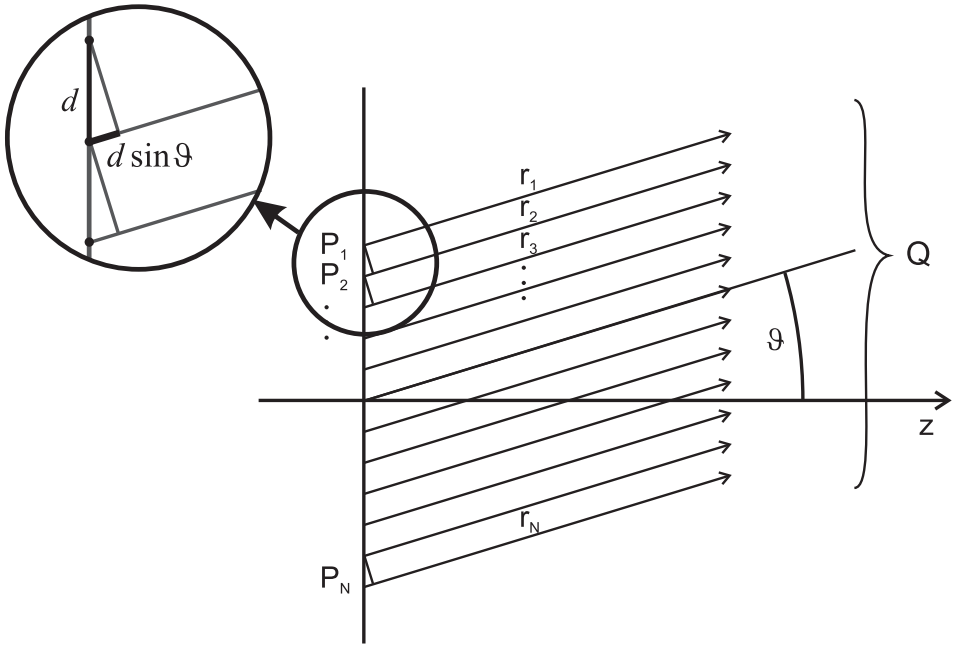
Optická mřížka. Interference vln z N zdrojů. Průběh interferenční intenzity. Spektrální rozklad světla. Rayleighovo kritérium rozlišení spektrálních čar.

Optická mřížka je obvykle skleněná destička s nanesenou měkkou vrstvou např. hliníku, do níž jsou pomocí diamantového nástroje vyryty rovnoběžné vrypy. Musí být přesně stejně široké a přesně stejně navzájem vzdálené, většinou $0,25$ až 6000 vrypů na 1 mm. Vzdálenost středů sousedních vrypů d se nazývá **mřížková konstanta**.

Dopadá-li na mřížku rovnoběžný svazek kvazimonochromatického světla (obr. 8.8), vrypy vyzařují cylindrické vlny a na stínítku pozorujeme interferenční proužky. Na rozdíl od Youngova pokusu se dvěma štěrbinami se na pozorovacím stínítku vytvoří velmi ostré tenké světlé čáry na tmavém pozadí.

Abychom pochopili funkci mřížky, nahradíme uspořádání na obr. 8.8 pomocí Babinetova principu soustavou zdrojů v místech vrypů. Na obr. 8.9 je zjednodušená soustava

[3] Viz [1], př. 7.2: průměr Slunce 700 tisíc km, vzdálenost Slunce 150 milionů km.



Obrázek 8.9: Interference vln z N zdrojů.

N bodových zdrojů $P_1, P_2, \ldots, P_N$, jejichž vzdálenosti jsou d a všechny vyzařují v rovině kvazimonochromatické světlo se stejnou amplitudou E_0, stejnou střední úhlovou frekvencí ω a stejnou fázovou konstantou φ_0. [4] Pozorovací bod Q je tak daleko, že úhel ϑ je přibližně stejný pro všech N zdrojů. Pak ve vzdáleném bodě Q v blízkosti osy z je superpozice polí z N zdrojů

$$E(Q,t) = aE_0\cos(\omega t_1' + \varphi_0) + \ldots + aE_0\cos(\omega t_N' + \varphi_0)$$

určena koeficientem zeslabení $a < 1$ a retardovanými časy $t_i' = t - (r_i/c)$, $i = 1, \ldots, N$, jež odpovídají vzdálenostem $r_1, \ldots, r_N$ od bodů $P_1, \ldots, P_N$ k bodu Q,

Pro další výpočet vyjádříme pole $E(Q,t)$ jako reálnou část sumy komplexních členů

$$E(Q,t) = \sum_{i=1}^{N} aE_0\cos(\omega(t - \frac{r_i}{c}) + \varphi_0) = \mathrm{Re}\sum_{i=1}^{N} aE_0 e^{i(\omega t - kr_i + \varphi_0)}.$$

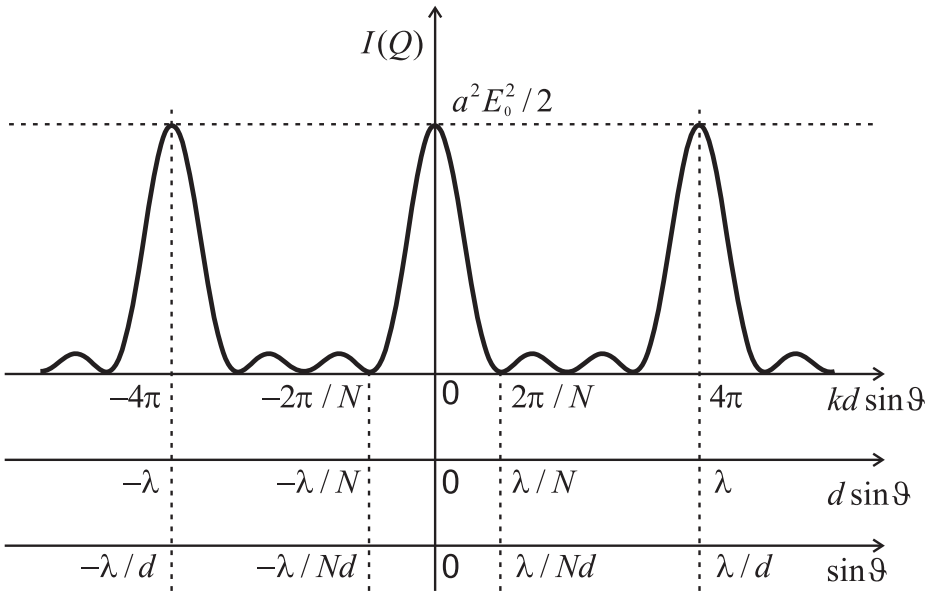
Protože sousední vzdálenosti r_i, r_{i+1} splňují s dobrou přesností vztahy

$$r_2 - r_1 = d\sin\vartheta,\ r_3 - r_2 = d\sin\vartheta,\ \ldots,\ r_N - r_{N-1} = d\sin\vartheta,$$

můžeme pole $E(Q,t)$ upravit na reálnou část konečné komplexní geometrické řady s kvocientem $q = \exp(-ikd\sin\vartheta)$:

$$\begin{aligned} E(Q,t) &= \mathrm{Re}\left\{aE_0 e^{i(\omega t - kr_1 + \varphi_0)}\left(1 + q + q^2 + ... + q^{N-1}\right)\right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{aE_0 e^{i(\omega t - kr_1 + \varphi_0)}\frac{e^{-iNkd\sin\vartheta} - 1}{e^{-ikd\sin\vartheta} - 1}\right\}. \end{aligned}$$

[4] Předpokládáme, že na celé šířce mřížky je splněno kritérium boční koherence.



Obrázek 8.10: Graf intenzity $I(Q)$ jako funkce fázového rozdílu $kd\sin\vartheta$, dráhového rozdílu $d\sin\vartheta$ a $\sin\vartheta$.

Zlomek dále upravíme vytknutím faktorů $\exp\left(-\frac{1}{2}iNkd\sin\vartheta\right)$ z čitatele a $\exp\left(-\frac{1}{2}ikd\sin\vartheta\right)$ z jmenovatele na podíl sinů, takže výsledný vztah můžeme napsat ve tvaru součinu modulované amplitudy a nosné vlny:

$$E(Q,t) = aE_0\frac{\sin\left(\frac{1}{2}Nkd\sin\vartheta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}kd\sin\vartheta\right)}\cos\left(\omega t - kr_1 - \frac{1}{2}(N-1)kd\sin\vartheta + \varphi_0\right).$$

Hledaný interferenční jev má následující průběh intenzity na stínítku (stačí středovat přes jednu periodu):

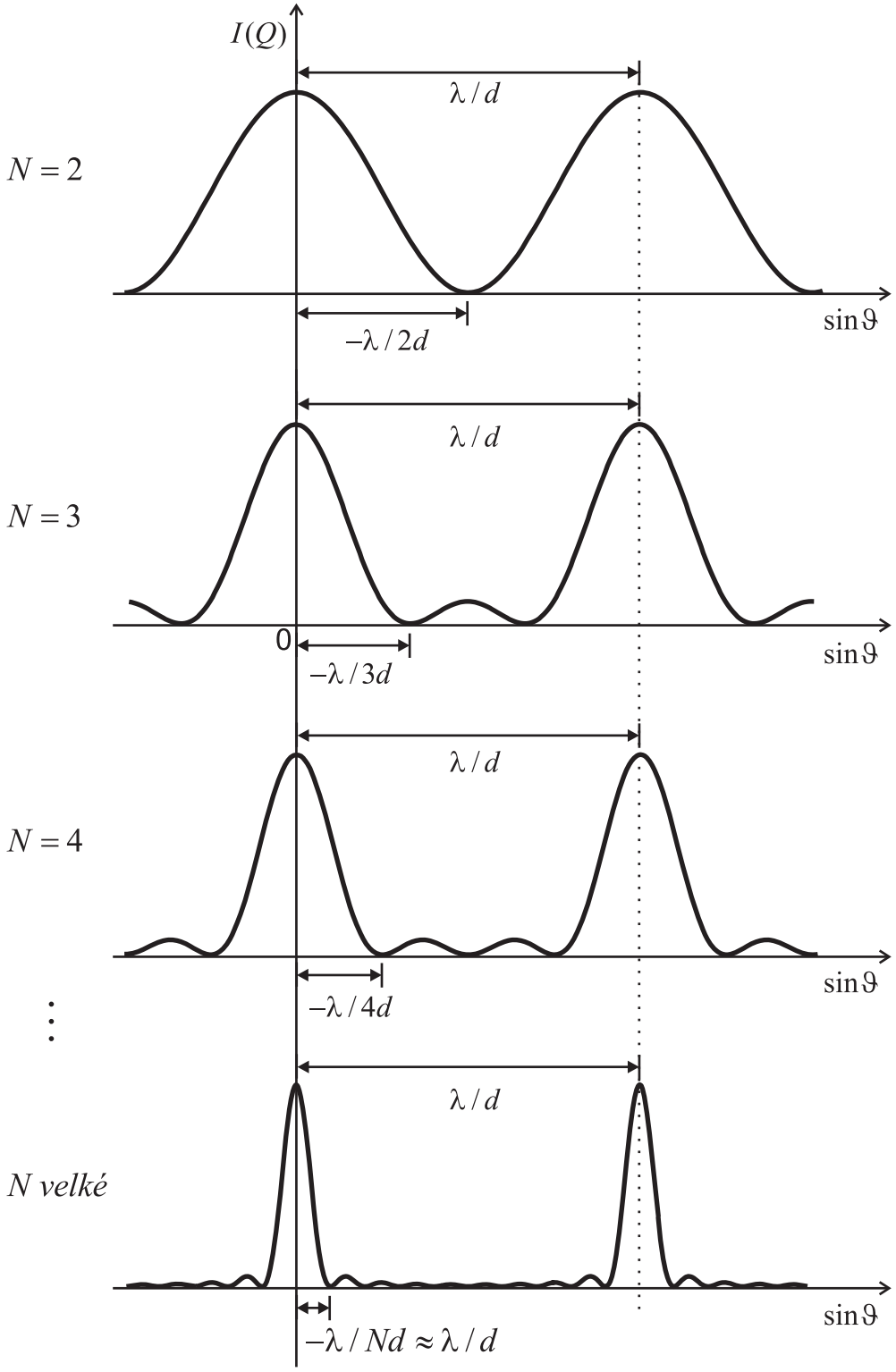
$$I(Q) =< E(Q,t)^2 >_T = \frac{a^2E_0^2}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}Nkd\sin\vartheta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}kd\sin\vartheta\right)}\right)^2. \tag{8.9}$$

Graf funkce (8.9) na obrázcích 8.10 a 8.11 se v jednom ohledu podobá grafu intenzity pro Youngův pokus ($N = 2$) na obr. 8.5: funkce $I(Q)$ jsou v obou případech *periodické* s periodou 2π v proměnné $kd\sin\vartheta$. Polohy interferenčních maxim jsou proto určeny stejným vztahem jako u Youngova pokusu,

$$(\sin\vartheta)_{max} = m\frac{\lambda}{d}, \qquad m = 0, \pm1, ..., \pm\left[\frac{d}{\lambda}\right]. \tag{8.10}$$

Maxima jsou však daleko užší, neboť např. centrální maximum prochází první nulou v bodech $\frac{1}{2}Nkd\sin\vartheta = \pm\pi$, tj.

$$\sin\vartheta = \pm\frac{\lambda}{Nd}.$$



Obrázek 8.11: Graf intenzity $I(Q)$ jako funkce $\sin\vartheta$ pro $N = 2, 3, 4$ a velké N.

Tato veličina se bere jako míra úhlové šířky maxima: maximum má úhlovou šířku λ/Nd ve výšce $4I_0/\pi^2 \doteq 0,41\,I_0$, kde $I_0 = N^2a^2E_0^2/2$. Čím je počet vrypů N větší, tím jsou maxima ostřejší. To je důležité při spektrálním rozkladu světla mřížkou.

Dopadá-li na mřížku světlo složené, např. bílé světlo žárovky, bude centrální maximum bílé, avšak již v 1. řádu budeme pozorovat příspěvky různých barev spektra pod různými úhly ϑ. Základní vlastností difrakční mřížky je tedy schopnost rozložit dopadající světlo do různých směrů podle vlnových délek, tj. provést jeho **spektrální rozklad**. Praktický význam optické spektroskopie je v tom, že každá látka vyzařuje jistý, pro ni charakteristický soubor **spektrálních čar** (viz kap. 12). Lze tak získat informace o složení látek a např. v astronomii i o složení vzdálených objektů (planet, komet, hvězd, galaxií apod.).

Protože spektrální čáry mohou mít velmi blízké vlnové délky, vzniká otázka, jaké vlastnosti musí mřížka mít, abychom takové čáry ve spektru zřetelně rozlišili. Podle **Rayleighova kritéria** (obr. 8.12) jsou dvě blízké kvazimonochromatické spektrální čáry λ_1, λ_2 rozlišeny v mřížkovém spektru 1. řádu, když úhlová vzdálenost středů maxim je větší nebo rovna úhlové šířce maxim:

$$\left|\frac{\lambda_1}{d} - \frac{\lambda_2}{d}\right| \geq \frac{\lambda_{str}}{Nd},$$

kde $\lambda_{str} = (\lambda_1 + \lambda_2)/2 \doteq \lambda_{1,2}$. Po vykrácení d dostaneme podmínku

$$\frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{\lambda_{str}} \geq \frac{1}{N},$$

která říká, že spektrální rozlišení mřížky je tím lepší, čím je celkový počet vrypů N větší ! U maxim vyššího řádu $|m|$ je vzdálenost maxim $|m|$–krát větší, získá se tedy $|m|$–krát lepší rozlišení[5]. Situaci však zhoršuje ohybový jev způsobený konečnou šířkou vrypů, který vede k zeslabení intenzity ve vyšších řádech (viz oddíl 8.5).

Cvičení 6. Známé žluté světlo plamene znečištěného kuchyňskou solí obsahuje spektrální čáry $\lambda_1 = 589,6\,nm$ a $\lambda_2 = 589,0\,nm$. Kolik vrypů musí mít mřížka, aby v 1. řádu právě rozlišila tento sodíkový dublet?

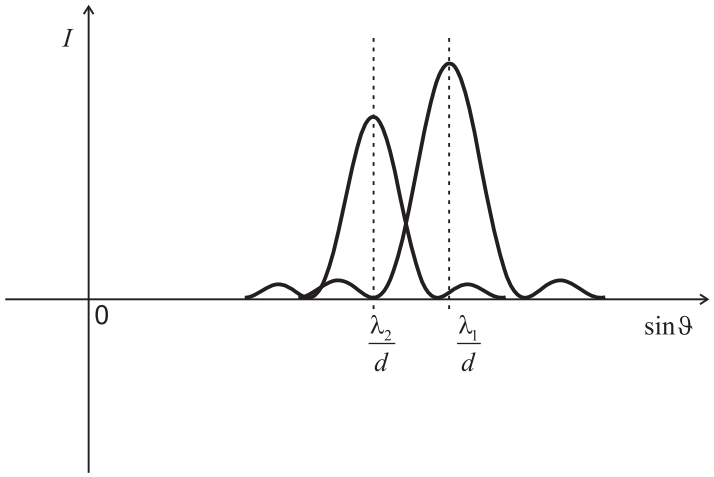
8.5 Difrakce na štěrbině

Fraunhoferova difrakce na štěrbině a na kruhovém otvoru. Vliv omezení svazku světla na difrakční rozbíhavost; rozlišovací schopnost optických přístrojů; ostrost zraku.

Vlnová povaha světla má závažné důsledky při Fraunhoferově difrakci na štěrbině konečné šířky. Předpokládejme, že na štěrbinu šířky D dopadá rovnoběžný svazek kvazimonochromatického světla o vlnové délce $\lambda < D$. Uspořádání dle obr. 8.13 lze pomocí Babinetova principu nahradit ekvivalentní soustavou zdrojů *spojitě rozložených* v ploše štěrbiny a vyzařujících se stejnou fází.

Se soustavou ekvidistantních *diskrétních zdrojů* jsme se setkali v oddíle 8.4 u difrakční mřížky. Intenzitu světla na pozorovacím stínítku lze u štěrbiny šířky D snadno odvodit

[5] **Rozlišovací schopnost mřížky** se definuje podílem $R = \lambda_{str}/|\lambda_1 - \lambda_2| = |m|N$.



Obrázek 8.12: Spektrální čáry λ_1, λ_2 jsou podle Rayleigha právě rozlišeny, když maximum intezity jedné čáry leží právě v prvním minimu intenzity druhé čáry.

ze vzorce (8.9) pro mřížku pomocí limity $N \to \infty$. V limitním přechodu ke spojitě rozloženým zdrojům musíme současně předpokládat zmenšování mřížkové konstanty $d \to 0$, aby celková šířka $D = (N-1)d \doteq Nd$ zůstávala konstantní. Pro provedení limity vztah (8.9) rozšíříme

$$I(Q) = \lim_{N\to\infty} \frac{a^2 E_0^2}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}kD\sin\vartheta\right)\frac{1}{2}k\frac{D}{N}\sin\vartheta}{\sin\left(\frac{1}{2}k\frac{D}{N}\sin\vartheta\right)\frac{1}{2}k\frac{D}{N}\sin\vartheta} \right)^2$$

a využijeme toho, že

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}k\frac{D}{N}\sin\vartheta\right)}{\frac{1}{2}k\frac{D}{N}\sin\vartheta} = 1.$$

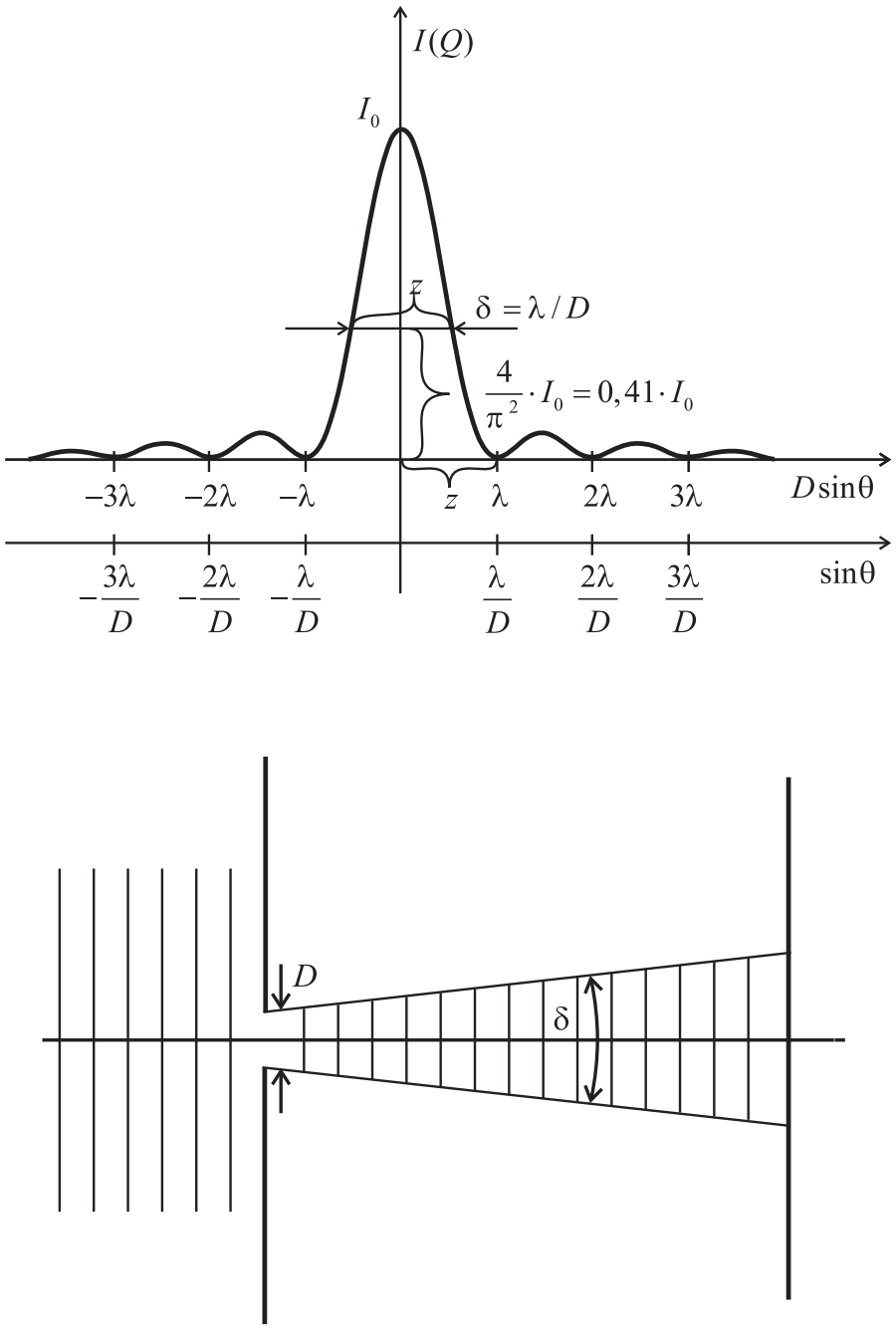
Aby při $N \to \infty$ vyšla konečná výsledná intenzita, musí ještě $E_0 \to 0$, aby veličina

$$I_0 = \frac{1}{2}a^2 E_0^2 N^2$$

zůstala konstantní. Výsledek limity je pak

$$\boxed{I(Q) = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}kD\sin\vartheta\right)}{\frac{1}{2}kD\sin\vartheta} \right)^2 .} \tag{8.11}$$

Je zřejmé, že intenzita $I(Q)$ již není periodickou funkcí $\sin\vartheta$, jako byla u mřížky (vztah (8.9)). Na rozdíl od obr. 8.10 na pozorovacím stínítku zůstane pouze centrální maximum se středem $\vartheta = 0$ a s prakticky stejným průběhem jako u mřížky s velkým počtem vrypů. Za míru δ úhlové šířky interferenčního maxima bereme úhel od středu maxima



Obrázek 8.13: Fraunhoferova difrakce na štěrbině šířky D. Převážná část intenzity je vyzařována do oblasti o úhlové šířce $\delta \approx \lambda/D$.

po první nulovou hodnotu intenzity při $\frac{1}{2}kD\sin\delta = \pi$, tj. $\sin\delta = \lambda/D$. Pří $\lambda \ll D$ píšeme

$$\boxed{\delta \approx \frac{\lambda}{D}.} \tag{8.12}$$

Na obr. 8.13 je vyšrafována oblast této úhlové šířky, kam dopadá převážná část intenzity.

Získané výsledky, které jsou přímým důsledkem vlnové povahy světla, mají zásadní význam pro konstrukci optických přístrojů a posouzení oblasti jejich použitelnosti. Zjistili jsme, že prostorové omezení svazku světla má za následek jeho **difrakční rozbíhavost**: vlnový vektor $\boldsymbol{k}$ již nemá stálý směr jako před štěrbinou – světlo za štěrbinou obsahuje směry $\boldsymbol{k}$ převážně v oblasti o úhlové šířce $\delta \approx \lambda/D$ (velikost $|\boldsymbol{k}| = 2\pi/\lambda$ je dána vlnovou délkou). Pro *difrakci světla na kruhovém otvoru*[6] se uvádí difrakční rozbíhavost (úhlový rozměr centrálního maxima)

$$\boxed{\delta \approx 1,22\frac{\lambda}{D}.} \tag{8.13}$$

V optických přístrojích je šíření světla omezeno do tubusů, jejichž rozměry jsou dány velikostí optických elementů – čoček, zrcadel, kolimátorů. Světlo se proto uvnitř nešíří přesně ve směrech paprsků určených pravidly geometrické optiky (viz kap. 9). Vykazuje vždy jistou **úhlovou rozbíhavost**, která posléze způsobuje nepřesnost ideálního geometrického zobrazení. Každý optický přístroj lze pak charakterizovat jeho **rozlišovací schopností**, tj. schopností rozlišit jemné detaily struktury pozorovaného předmětu.

Důležitým příkladem optického přístroje je **lidské oko**. Každý, kdo navštvil očního lékaře, zažil určení úhlové rozlišovací schopnosti svých očí. Pozorujeme–li milimetrové měřítko na vzdálenost $2\,m$, zjistíme, že již sotva rozlišíme sousední čárky. Ve větší vzdálenosti vám tyto čárky úplně splynou. Jako maximální ostrost zraku normálního lidského oka při vidění uprostřed zorného pole se uvádí schopnost rozlišit dvě značky $3\,mm$ od sebe na vzdálenost $10\,m$. To odpovídá úhlovému rozlišení jedné obloukové minuty

$$\delta \approx \frac{3.10^{-3}}{10} \approx 3.10^{-4}\,rad \approx 1'$$

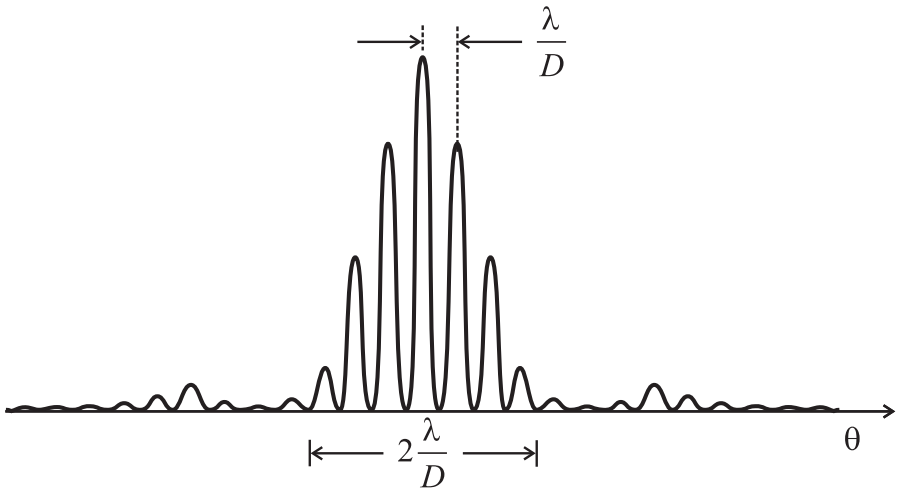
(encyklopedie [11] uvádí 1'—3'). Porovnejme tuto skutečnost s teoretickým výpočtem podle vztahu (8.13). Je-li $\lambda \approx 6.10^{-7}\,m$ (světlo žluté barvy) a průměr panenky $D \approx 2\,mm$, vychází

$$\delta \approx \frac{6.10^{-7}}{2.10^{-3}} \approx 3.10^{-4}\,rad,$$

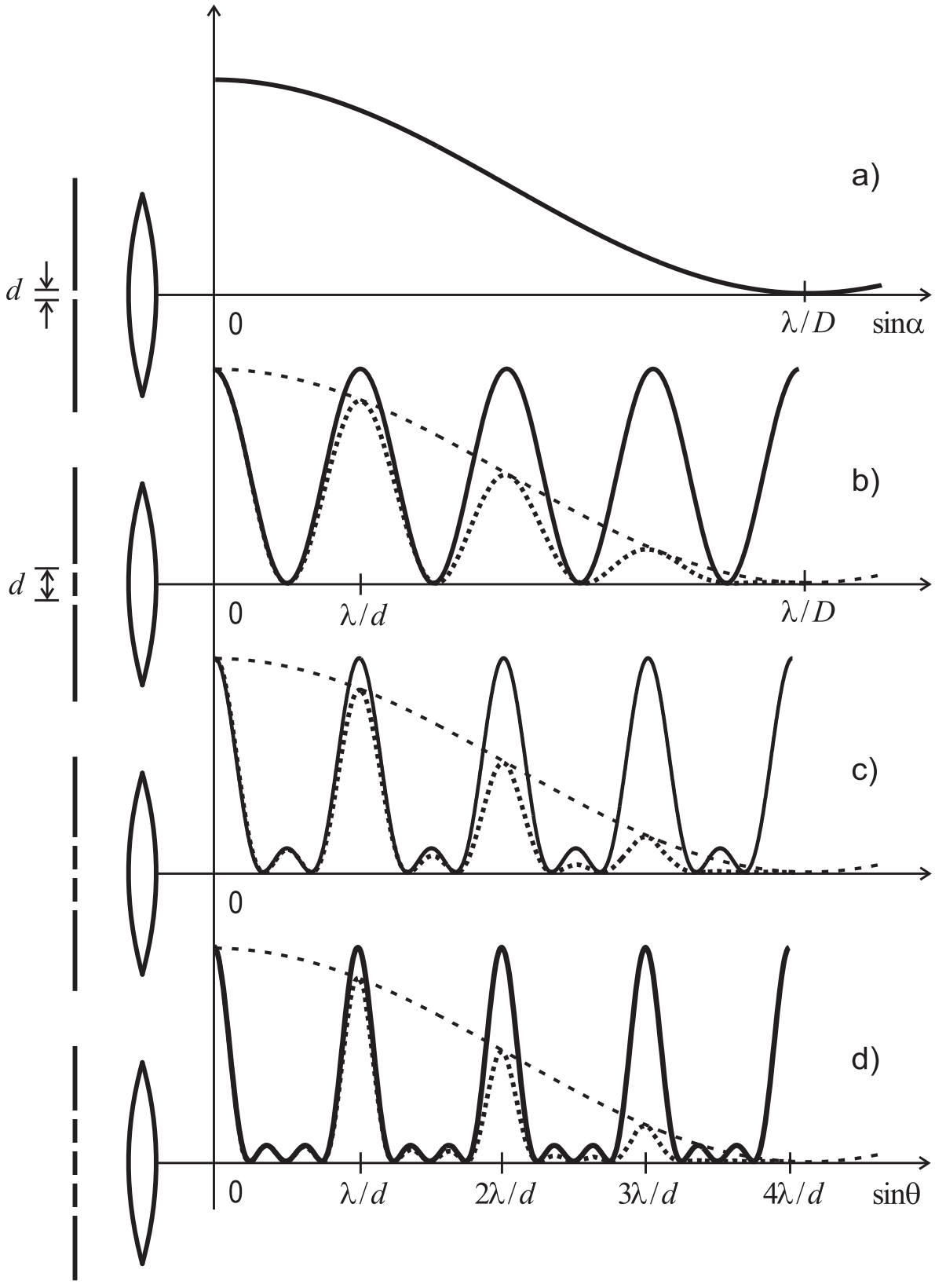
což je na dolní mezi udaných experimentálních hodnot.

Cvičení 7. Pro Youngův pokus se dvěma štěrbinami konečné šířky $D < d$ odvoďte interferenční obrazec modulovaný ohybem, obr. 8.14. Uvažte, že každá ze štěrbin osvětluje stínítko podle obr. 8.13 (viz [1], př. 7.7).

[6] Při cylindrické symetrii je funkce $\sin(\frac{1}{2}kD\sin\vartheta)$ nahrazena cylindrickou (Besselovou) funkcí $J_1(\frac{1}{2}kD\sin\vartheta)$, která po prvé prochází nulou při $J_1(1,22\pi) = 0$. Centrální kroužek je světlý, první, druhý a třetí tmavý kroužek se dostanou pro $\sin\vartheta_1 = 1,220\ \lambda/D$, $\sin\vartheta_2 = 2,232\ \lambda/D$, $\sin\vartheta_3 = 3,238\ \lambda/D$.



Obrázek 8.14: Průběh intenzity pro Youngův pokus se štěrbinami konečné šířky $D < d$ (vzdálenost maxim je správně λ/d).



Obrázek 8.15: Grafy intenzity $I(Q)$ jako funkce $\sin\vartheta$ pro $N = 1, 2, 3, 4$ štěrbin konečné šířky $D < d$.

Kapitola 9

Geometrická optika

9.1 Přechod od optiky vlnové ke geometrické

Limitní přechod ke geometrické optice; vlna s hladkými vlnoplochami, rovnice eikonálu, pojem paprsku, analogie s klasickou mechanikou.

Rovinná vlna se vyznačuje tím, že směr jejího šíření je všude stejný a amplituda je konstantní na rovinách konstantní fáze. To je ovšem velká idealizace — reálné elektromagnetické vlny ve skutečnosti takové vlastnosti vesměs nemají. Často se však elektromagnetické vlny v malých oblastech přibližně podobají rovinným vlnám. Přesněji to můžeme vyjádřit požadavkem, aby se jejich *amplituda a směr šíření velmi nepatrně měnily na vzdálenostech řádu* λ. Za těchto podmínek budou vlny mít *hladké vlnoplochy*[1]. V dalším uvidíme, že u těchto velmi speciálních vln lze mluvit o lokálních směrech šíření, které jsou kolmé k vlnoplochám a posléze zavést pojem **paprsků** — křivek, jejichž tečna v každém bodě udává směr šíření vlny.

Geometrická optika studuje šíření elektromagnetických vln za uvedených předpokladů. Popisuje je jako šíření světla podél paprsků, přičemž úplně abstrahuje od vlnové podstaty světla.

Šíření světla přesně podél paprsků je zajisté v rozporu s difrakční rozbíhavostí omezených svazků světla popsanou v oddíle 8.5 a charakterizovanou směry šíření v oblasti úhlů šířky $\delta \approx \lambda/D$. Geometrická optika zcela zanedbává difrakční rozbíhavost. Odpovídá proto limitě $\lambda \to 0$, jež je ve skutečných fyzikálních situacích tím lepší aproximací, čím je podíl λ/D menší.

Základní rovnicí optiky je vlnová rovnice pro elektromagnetické pole; v homogenním izotropním prostředí ji zapíšeme ve tvaru

$$\Delta f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \tag{9.1}$$

kde $v = c/n$ a f je kterákoli ze složek vektorů $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$. Jak jsme naznačili, limitní přechod ke geometrické optice lze provést pro vlny $f(\boldsymbol{r}, t)$ s hladkými vlnoplochami. V komplexním zápisu to znamená

$$f(\boldsymbol{r}, t) = a(\boldsymbol{r}, t)e^{i\psi(\boldsymbol{r},t)}, \tag{9.2}$$

[1] Vlnoplochy jsou množiny bodů, v nichž fáze vlny (v daném čase t) nabývá konstantní hodnoty.

kde $a(\boldsymbol{r},t)$ je pomalu se měnící amplituda. Fázová funkce $\psi(\boldsymbol{r},t)$, H. Brunsem nazvaná **eikonál**, se však mění velice rychle: na vzdálenosti λ ve směru šíření se změní o 2π ! Soustava vlnoploch v čase t_0 je určena rovnicemi

$$\psi(\boldsymbol{r},t_0)=C, \qquad C\in<0,2\pi).$$

Zvolíme-li bod $\boldsymbol{r}_0$ a konstantu C, pak v okolí $(\boldsymbol{r}_0,t_0)$ můžeme eikonál rozvinout do 1. řádu:

$$\psi(\boldsymbol{r},t)\doteq\psi(\boldsymbol{r}_0,t_0)+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}(\boldsymbol{r}_0,t_0)(x_j-x_{0j})+\frac{\partial\psi}{\partial t}(\boldsymbol{r}_0,t_0)(t-t_0). \tag{9.3}$$

Tato aproximace odpovídá nahrazení hladké vlnoplochy v malém okolí $\boldsymbol{r}_0,t_0$ tečnou rovinnou vlnoplochou s fází

$$\psi_{rov}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}-\omega t+\alpha. \tag{9.4}$$

Porovnáním výrazů (9.3), (9.4) získáme v libovolném bodě $\boldsymbol{r}_0$ a čase t_0 vztahy pro lokální vlnový vektor $\boldsymbol{k}$ a lokální úhlovou frekvenci ω:

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{k} &= \operatorname{grad}\psi,\\ \omega &= -\frac{\partial\psi}{\partial t}.\end{aligned}} \tag{9.5}$$

Paprsky jsou nyní definovány jako křivky, které jsou v každém bodě tečné k lokálním vektorům $\boldsymbol{k}$ a tedy podle (9.5) kolmé k vlnoplochám. Podle (9.2) — (9.5) se přibližně rovinný lokální úsek vlnoplochy $\psi(\boldsymbol{r},t)=C$ šíří podél paprsku s fázovou rychlostí $v=\omega/k$.

Základní rovnici geometrické optiky nyní odvodíme jako aproximaci vlnové rovnice (9.1). Derivováním vlny (9.2) dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= \left(\frac{\partial a}{\partial t}+ia\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)e^{i\psi},\\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \left[\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}+2i\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t}+ia\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-a\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\right]e^{i\psi},\\ \Delta f &= \sum_{j=1}^{3}\left[\frac{\partial^2 a}{\partial x_j^2}+2i\frac{\partial a}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}+ia\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j^2}-a\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)^2\right]e^{i\psi}.\end{aligned}$$

Ve výrazech Δf a $\partial^2 f/\partial t^2$ převažují v limitě $\lambda\to 0$ (neboli $k\to\infty$, $\omega\to\infty$) zdaleka nejvíce poslední členy, jež jsou řádu k^2 a ω^2. Ostatní členy jsou podle předpokladů o vlnách (9.2) s hladkými vlnoplochami vesměs nižších řádů k^0, k^1 a ω^0, ω^1 a proto je zanedbáme. Výsledná **rovnice eikonálu**

$$\boxed{\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)^2-\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2=0} \tag{9.6}$$

popisuje systém hladkých vlnoploch, jejichž ortogonálními trajektoriemi jsou paprsky geometrické optiky. Vztahy (9.5) dosazeny do (9.6) dávají $\boldsymbol{k}^2 - (\omega^2/v^2) = 0$ v souladu s disperzním vztahem $\omega = v|\boldsymbol{k}|$, $v = c/n$.

V případě *monochromatického světla* je funkce $\omega(\boldsymbol{r}, t) = -\partial\psi/\partial t$ konstantou ω_0, takže integrací podle času

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = \psi_0(\boldsymbol{r}) - \omega_0 t, \tag{9.7}$$

kde integrační konstanta $\psi_0(\boldsymbol{r})$ obecně závisí na $\boldsymbol{r}$. Rovnici eikonálu (9.6) lze nyní psát

$$\sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial\psi_0}{\partial x_j}\right)^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2} n(\boldsymbol{r})^2.$$

Vlnoplochy jsou určeny rovnicemi

$$\psi_0(\boldsymbol{r}) = C$$

a směr paprsků $\boldsymbol{k} = \operatorname{grad}\psi_0$.

Rovnice eikonálu (9.6) v homogenním prostředí má matematicky přesně stejný tvar jako Hamiltonova–Jacobiho rovnice pro relativistickou částici s nulovou hmotností a ve vakuu jsou tyto rovnice přesně identické ! Z toho vychází pozoruhodná *analogie mezi geometrickou optikou a klasickou mechanikou* ([9], kap. 5), kterou v r. 1825 objevil W. R. Hamilton. Tuto analogii podrobněji vyjadřuje tabulka odpovídajících si veličin a vztahů v geometrické optice a klasické mechanice relativistické částice s klidovou hmotností m_0 ([9], kap. 7).

Poznámka. Na tomto místě je třeba připomenout, že hluboký vztah obou teorií vedl v r. 1925 Louise de Broglie k formulaci základů **vlnové mechaniky** a Erwina Schrödingera k objevu **Schrödingerovy rovnice**.

Tabulka 9.1 Analogie mezi geometrickou optikou a klasickou mechanikou relativistické částice.

Geometrická optika	**Klasická mechanika**
$\psi(\boldsymbol{r}, t)$ =eikonál	$S(\boldsymbol{r}, t)$ =hlavní funkce Hamiltonova
$\boldsymbol{k} = \operatorname{grad}\psi$	$\boldsymbol{p} = \operatorname{grad} S$ =hybnost
$\omega = -\dfrac{\partial\psi}{\partial t}$	$E = -\dfrac{\partial S}{\partial t}$ = energie
Pro monochromatické světlo:	Pro konservativní síly:
$\psi = -\omega_0 t + \psi_0(\boldsymbol{r})$	$S = -E_0 t + S_0(\boldsymbol{r})$
Disperzní vztah:	Vztah energie a hybnosti:
	$E = c\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m_0^2 c^2}$
$\omega = \dfrac{c}{n}\|\boldsymbol{k}\|$	$E = c\|\boldsymbol{p}\|$ pro $m_0 = 0$
Rovnice eikonálu:	Hamiltonova-Jacobiho rovnice:
$\sum_{j=1}^{3}\left(\dfrac{\partial\psi_0}{\partial x_j}\right)^2 = \dfrac{\omega_0^2}{c^2} n^2$	$\sum_{j=1}^{3}\left(\dfrac{\partial S_0}{\partial x_j}\right)^2 = \dfrac{E_0^2}{c^2}$

9.2 Fermatův princip

Nehomogenní prostředí. Fermatův princip jako základní zákon geometrické optiky; analogie s variačním principem Jacobiho v klasické mechanice. 5 základních pravidel chodu paprsků.

V oddíle 9.1 stejně jako v předcházejících kapitolách jsme předpokládali, že se elektromagnetické vlny šíří v homogenním prostředí s konstantním indexem lomu $n \doteq \sqrt{\varepsilon_r}$. Nyní ukážeme, že základní rovnice geometrické optiky (9.6) platí ve stejném tvaru i *v nehomogenním prostředí* $n(\boldsymbol{r}) \doteq \sqrt{\varepsilon_r(\boldsymbol{r})}$ *s prostorově proměnnou permitivitou* (v oblasti optického záření s dobrou přesností platí, jak víme, $\mu \doteq \mu_0$). Výchozí rovnice pro odvození (9.6) byla vlnová rovnice (9.1). Vraťme se proto do oddílu 6.1, kde byla odvozena z Maxwellových rovnic. V prostředí s nehomogenní permitivitou $\varepsilon = \varepsilon(\boldsymbol{r})$ a v nepřítomnosti nábojů již neplatí $div\boldsymbol{E} = 0$, nýbrž

$$div\boldsymbol{D} = div(\varepsilon\boldsymbol{E}) = \varepsilon div\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}.\text{grad}\ \varepsilon = 0.$$

Proto v odvození vlnové rovnice pro $\boldsymbol{E}$ nevymizí člen grad div$\boldsymbol{E}$, který nyní modifikuje výslednou vlnovou rovnici:

$$\Delta\boldsymbol{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \text{grad}\left(\boldsymbol{E}.\frac{\text{grad}\ \varepsilon}{\varepsilon}\right).$$

V prostředí s velmi pomalu proměnnou permitivitou se obvykle zanedbává. Rovněž při aproximaci vlnové rovnice podle oddílu 9.1 tento člen vede na výraz s nejvýše první derivací fáze ψ, tj. řádu k^1, který lze zanedbat vzhledem k převažujícím členům řádu k^2. Rovnice eikonálu (9.6) i všechny následující vztahy zůstávají proto v platnosti pouze s tou změnou, že index lomu je prostorově proměnný $n = n(\boldsymbol{r})$ a tedy disperzní vztah obsahuje závislost na $\boldsymbol{r}$:

$$\omega = \omega(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{c}{n(\boldsymbol{r})}|\boldsymbol{k}|. \tag{9.8}$$

Viděli jsme, že geometrická optika nepřihlíží k difrakčním jevům a pracuje s idealizovaným pojmem světelného paprsku. Pro určení chodu paprsků nejen v homogenním ale i v nehomogenním prostředí se můžeme obrátit k analogii s trajektoriemi částice v klasické mechanice a na základě Tab. 9.1 pokusit se najít diferenciální rovnice paprsků. Použijeme-li formu Hamiltonových rovnic ([9], kap. 5), pak za Hamiltonovu funkci (vyjadřující v mechanice energii soustavy jako funkci souřadnic a hybností) je třeba v optice vzít disperzní funkci (9.8):

$$\dot{x}_j = \frac{\partial\omega}{\partial k_j}, \quad \dot{k}_j = -\frac{\partial\omega}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

(Jeden příklad řešení těchto rovnic je uveden v [9], př. 5.11). Lagrangeovy rovnice II. druhu bohužel nelze použít, neboť funkce analogická Lagrangeově funkci $L = \sum_j p_j(\partial H/\partial q_j) - H$ je identicky rovna nule,

$$\sum_{j=1}^{3} k_j\frac{\partial\omega}{\partial k_j} - \omega = \sum_j k_j v\frac{k_j}{|\boldsymbol{k}|} - v|\boldsymbol{k}| = 0.$$

Nezajímá-li nás v mechanice časový průběh pohybu podél trajektorie, ale pouze tvar trajektorie, můžeme se obrátit na *Jacobiho variační princip* ([9], kap. 4). Platí pro soustavy, u nichž se zachovává energie ($E = konst.$). Potřebujeme ho ve speciální formě pro částici pohybující se v konservativním silovém poli

$$\delta \int_1^2 p \; dl = 0,$$

kde p je velikost hybnosti nerelativistické či relativistické částice a dl je element délky křivky spojující dané body 1, 2. Křivka, po níž se nerelativistická částice pohybuje z bodu 1 do bodu 2 je podle Jacobiho principu extremálou funkcionálu

$$\int_1^2 p \; dl = \int_1^2 \sqrt{2m(E-U)}\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}, \tag{9.9}$$

jenž závisí na křivce, podél níž se integruje od bodu 1 do bodu 2.

Odpovídajícím variačním principem je v geometrické optice **Fermatův princip**

$$\delta \int_1^2 k \; dl = 0.$$

Určuje *tvar paprsku* spojujícího dané body 1, 2. Platí *pro monochromatické světlo* s danou úhlovou frekvencí ω. V nehomogenním prostředí, kde $k = n(\boldsymbol{r})\omega/c$, lze Fermatův princip zapsat ve tvaru

$$\boxed{\delta \int_1^2 n \; dl = 0.} \tag{9.10}$$

Paprsek spojující body 1, 2 v prostředí s indexem lomu $n(\boldsymbol{r})$ je podle Fermatova principu extremálou funkcionálu $\int_1^2 n \; dl$ představujícího **optickou dráhu paprsku.**

> **Světlo se z 1 do 2 šíří podél takového paprsku, pro který optická dráha nabývá extremální hodnoty.**

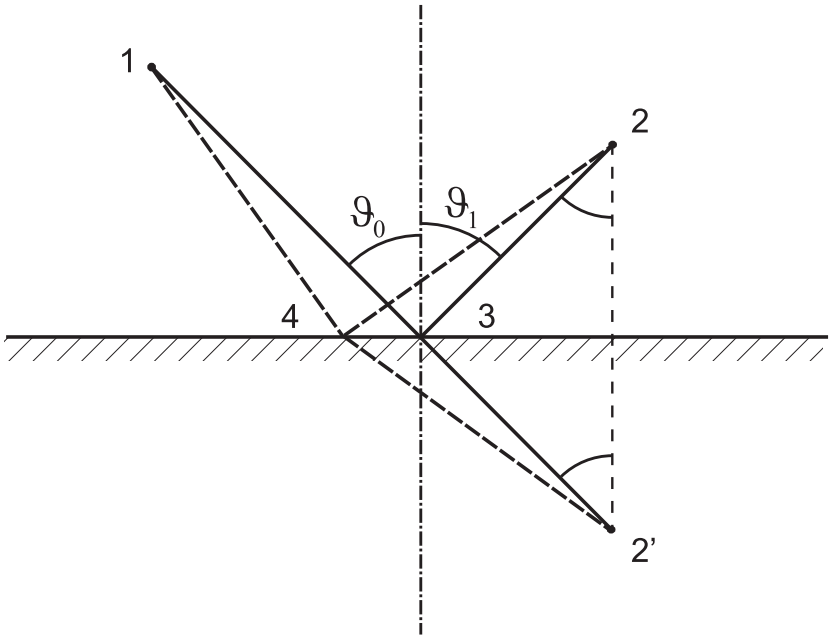
Optická dráha dělená c

$$\frac{1}{c}\int_1^2 n \; dl = \int_1^2 \frac{dl}{v} = t_{12}$$

udává čas t_{12}, za který se světlo po dané křivce šíří fázovou rychlostí v z bodu 1 do bodu 2. Optická dráha je proto rovna vzdálenosti, kterou proběhne světlo ve vakuu za stejnou dobu, kterou potřebuje k proběhnutí skutečné geometrické dráhy v látce. Fermatův princip je tedy též **principem extremálního času** t_{12}. Fermatem byl původně vysloven jako princip nejkratšího času.

Fermatův princip extremální optické dráhy (9.10) lze považovat za základní zákon geometrické optiky. Pro obvyklé optické soustavy sestávající z optických elementů, v nichž je index lomu konstantní, z něho plyne **5 základních pravidel chodu paprsků**:

1. Zákon přímočarého šíření světla v homogenním prostředí.
2. Zákon nezávislosti paprsků.
3. Zákon záměnnosti chodu paprsků.



Obrázek 9.1: K odvození zákona odrazu z Fermatova principu.

4. Zákon odrazu.

5. Snellův zákon lomu.

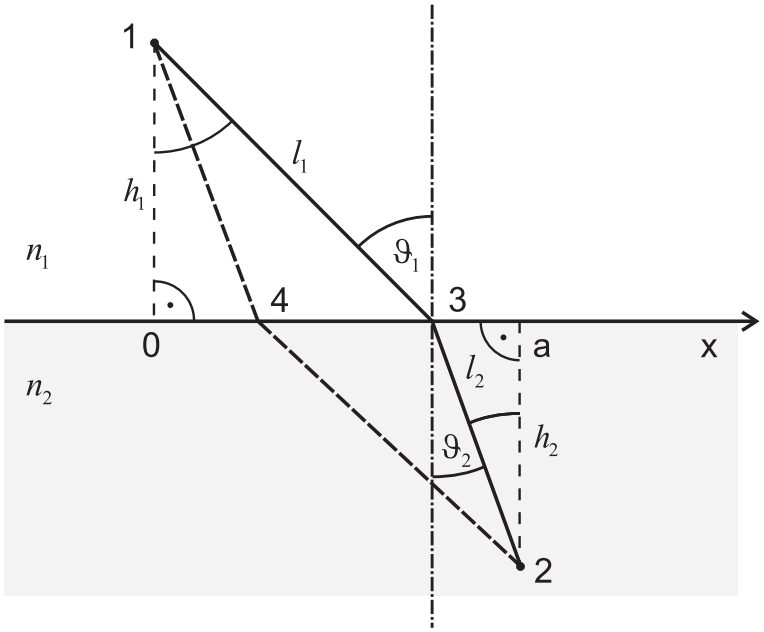
Pravidlo 1. se dostane z (9.10) okamžitě, když uvážíme, že pro konstantní index lomu křivkový integrál $\int_1^2 dl$ představuje délku křivky spojující body 1, 2. Křivkou s extremální (minimální) délkou je úsečka. V homogenním prostředí se tedy světlo šíří přímočaře.

Pravidlo 2. říká, že když je dán paprsek pro dvojici bodů 1, 2, pak tvar paprsku pro každou jinou dvojici bodů 3, 4 nezávisí na paprsku 12. To je jasné z toho, že tvar každého paprsku je podle (9.10) určen jeho koncovými body a průběhem indexu lomu, nikoliv však tvarem jiného paprsku.

Podle pravidla 3. se světlo šíří z bodu 1 do bodu 2 po stejné křivce jako z bodu 2 do bodu 1. Křivkový integrál $\int_1^2 n\, dl$ má totiž v obou případech stejnou kladnou hodnotu. (Uvažte, že $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} > 0$.)

Pravidlo 4. — zákon odrazu na zrcadle — plyne z jednoduché geometrické úvahy. Podle obr. 9.1 hledáme křivku spojující body 1, 2, která prochází některým bodem zrcadla. V homogenním prostředí bude paprsek tvořen dvěma úsečkami. Konstrukce na obr. 9.1 ukazuje, že délky spojnic 142, 142′ jsou stejné a nejkratší mezi nimi je přímá spojnice 132′. Pro nejkratší paprsek 132 se pak úhel odrazu ϑ_1 rovná úhlu dopadu ϑ_0.

Pravidlo 5. — **Snellův zákon lomu** — stanoví, jak se lomí paprsek, který přechází z prostředí s indexem lomu n_1 do prostředí s jiným indexem lomu n_2. Hledáme tedy tvar paprsku, který spojuje bod 1 v prvním prostředí s bodem 2 v druhém prostředí.



Obrázek 9.2: K odvození Snellova zákona lomu z Fermatova principu.

V homogenním prostředí je paprsek 142 na obr. 9.2 tvořen dvěma úsečkami. Určíme paprsek 132, podél něhož optická dráha $n_1 l_1 + n_2 l_2$ je extremální.

Optická dráha závisí na souřadnici x průsečíku 4 paprsku s rozhraním, je tedy funkcí

$$f(x) = n_1 l_1 + n_2 l_2 = n_1 \sqrt{x^2 + h_1^2} + n_2 \sqrt{(a-x)^2 + h_2^2}.$$

Bod x, pro který $f(x)$ nabývá extremální (minimální) hodnoty, se určí z rovnice

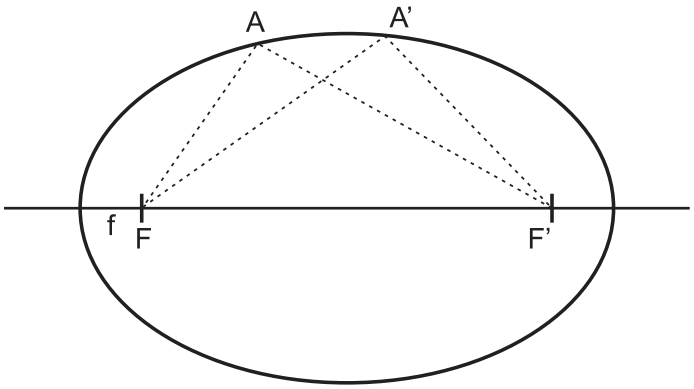
$$f'(x) = n_1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} - n_2 \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + h_2^2}} = 0.$$

Protože zlomky v této rovnici představují $\sin\vartheta_1$ a $\sin\vartheta_2$, odvodili jsme Snelliův zákon lomu

$$\boxed{n_1 \sin\vartheta_1 = n_2 \sin\vartheta_2}.$$

Tím jsme dokázali všech 5 pravidel chodu paprsků. Fermatův princip je však daleko obecnější: dovoluje určit chod paprsků nehomogenním prostředím, např. v zemské atmosféře.

Principiálně nový pohled na geometrickou optiku přinesl R.P. Feynman [3]. Paprsky geometrické optiky podle něho představují místa, kde dochází k nejsilnější konstruktivní interferenci. Vychází-li monochromatické světlo z bodového zdroje 1 na obr. 9.2, pak paprsek 132 je výsledkem konstruktivní interference vln vyslaných z bodu 1, které pozorujeme v bodě 2. Interferenční jev bude tím silnější, čím více optických drah bude přispívat. Proto k maximální interferenci dojde v okolí paprsku, na němž přírůstek fáze



Obrázek 9.3: Elipsoidální zrcadlo s ohnisky F, F'.

nabývá extremální hodnoty (k interferenčnímu maximu přispívají pouze zcela blízké paprsky, pokud jejich fázové rozdíly jsou velmi malé vzhledem k 2π). Přírůstek fáze je dán součtem příspěvků $k\ dl$ podél křivky spojující body 1, 2. Pokud integrál spočteme podél paprsku, pak platí $\boldsymbol{k} = \operatorname{grad}\psi_0$ a vidíme, že

$$\int_1^2 k\ dl = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{k}.d\boldsymbol{l} = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \operatorname{grad}\psi_0.d\boldsymbol{l} = \psi_0(\boldsymbol{r}_2) - \psi_0(\boldsymbol{r}_1),$$

tj. extremální přírůstek fáze je roven změně eikonálu. Feynman tak dospěl jinou cestou k Fermatovu principu, který určuje paprsek mezi křivkami spojujícími body 1, 2 jako extremálu funkcionálu

$$\int_1^2 k\ dl = \frac{\omega}{c}\int_1^2 n\ dl.$$

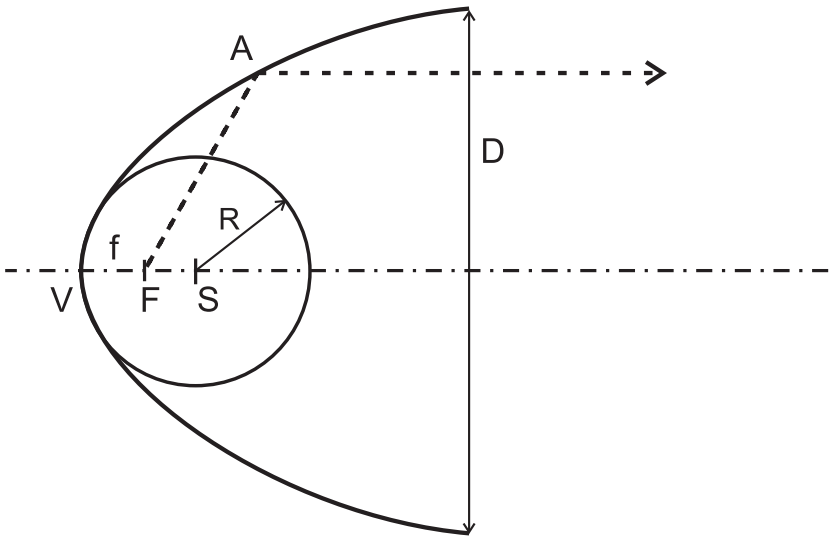
9.3 Zrcadla, čočky

Zrcadlo elipsoidální, parabolické, sférické; tenký klín a tenká čočka. Paraxiální paprsky; zrcadlová a čočková rovnice. Čočkařská rovnice, tlustá čočka.

Pro doplnění výkladu geometrické optiky podáme v tomto výkladu teorii paraxiálního zobrazení sférickými zrcadly a tenkými čočkami. V oddíle 9.4 bude pak vyložena obecná teorie lineárních zobrazovacích soustav včetně maticové metody výpočtu zobrazení.

Nejčastějšími prvky optických zobrazovacích soustav jsou čočky a zrcadla. Víme, že zobrazení rovinným zrcadlem je určeno zákonem odrazu. Úvaha o konstruktivní interferenci uvedená na konci oddílu 9.2 dovoluje určit chod paprsku i v jiných geometriích.

Uvažujme například **elipsoidální zrcadlo** tvořené rotačním elipsoidem se zrcadlovým vnitřním povrchem, obr. 9.3. Umístíme–li bodový zdroj světla do ohniska F, pak podle definice elipsy délka FAF' je stejná pro všechny body A ležící na elipse a v



Obrázek 9.4: Parabolické zrcadlo s kruhovou aperturou průměru D. Oskulační kružnice paraboly ve vrcholu V má střed S a poloměr $R = 2f$.

každém bodě A je pro FAF' splněn zákon odrazu. V ohnisku F' proto dochází ke konstruktivní interferenci světla z F. Říkáme, že bod F' je **skutečným obrazem bodu** F.[2]

Vzdálíme–li nyní obrazové ohnisko F' do nekonečna při konstantní vzdálenosti $f = |FV|$, dostaneme rotační paraboloid, obr. 9.4. Paprsky vycházející z ohniska F pak utvoří rovnoběžný svazek ve směru osy paraboloidu. Má-li **parabolické zrcadlo** kruhovou **aperturu** (vstupní otvor) o průměru D, pak ovšem podle oddílu 8.5 ze zrcadla bude vycházet prostorově omezený svazek s difrakční rozbíhavostí $\delta \approx 1,22\lambda/D$. Naopak dopadající rovnoběžný svazek (rovinná vlna) se takovým způsobem zobrazí do okolí ohniska f o rozměru $\approx f\delta = 1,22f\lambda/D$.

Požadavek věrnosti zobrazení složitějších předmětů optickými soustavami s reálnými optickými elementy lze uspokojivě splnit s použitím **paraxiálních paprsků**, tj. když se světlo šíří podél paprsků jen v těsné blízkosti osy soustavy.[3] V této situaci můžeme malý vrchlík paraboly přibližně nahradit **kulovým zrcadlem** o stejném poloměru křivosti R jako má rotační paraboloid ve vrcholu V.[4]

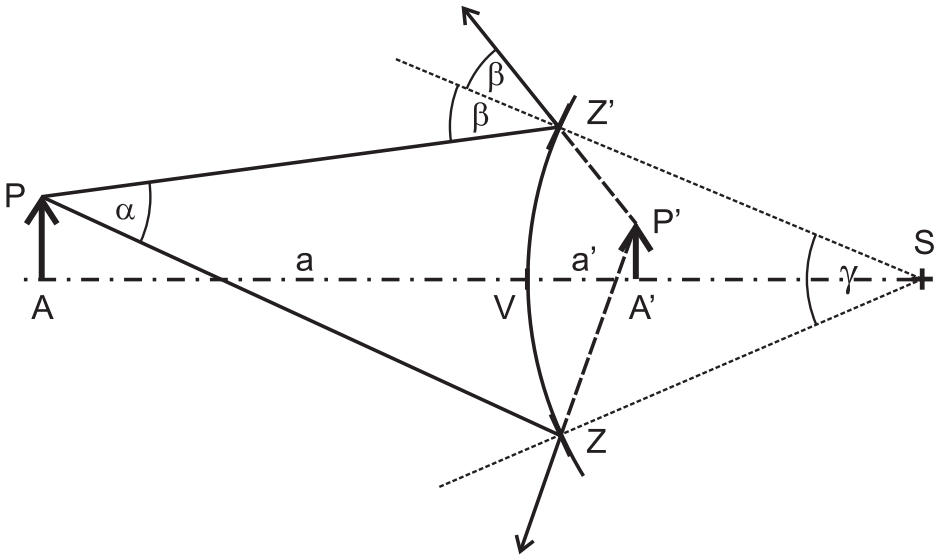
Cvičení 1. Pomocí Taylorova rozvoje v okolí V do 2. řádu odvoďte vztah $R = 2f$ pro poloměr oskulační kružnice paraboly v jejím vrcholu V.

Jsou-li paraxiální paprsky omezeny aperturou s velmi malým průměrem $D \ll 2R$,

[2]Obraz F' má ve skutečnosti tvar koule, uvnitř které se fáze liší nejvýše zhruba o $\pi/2$ od fáze v F', tj. má poloměr $\approx \lambda/4$.

[3]Paraxiálními nazýváme paprsky, které s osou svírají tak malé úhly, že lze jejich siny a tangenty nahradit úhly. Prakticky jde o úhly menší než $2°$.

[4]Kulové zrcadlo je vrchlíkem oskulační sféry paraboloidu ve vrcholu V. **Oskulační kružnice** v rovině nákresu na obr. 9.4 je kružnicí s dotykem 2. řádu k parabole. Její poloměr R se nazývá **poloměr křivosti** paraboly a v bodě V je roven $2f$.



Obrázek 9.5: K odvození zrcadlové rovnice pro paraxiální zobrazení bodu P kulovým zrcadlem ZZ' se středem S. Úhly α, β, γ mají být velmi malé, ale jsou zvětšeny, aby nákres byl zřetelnější.

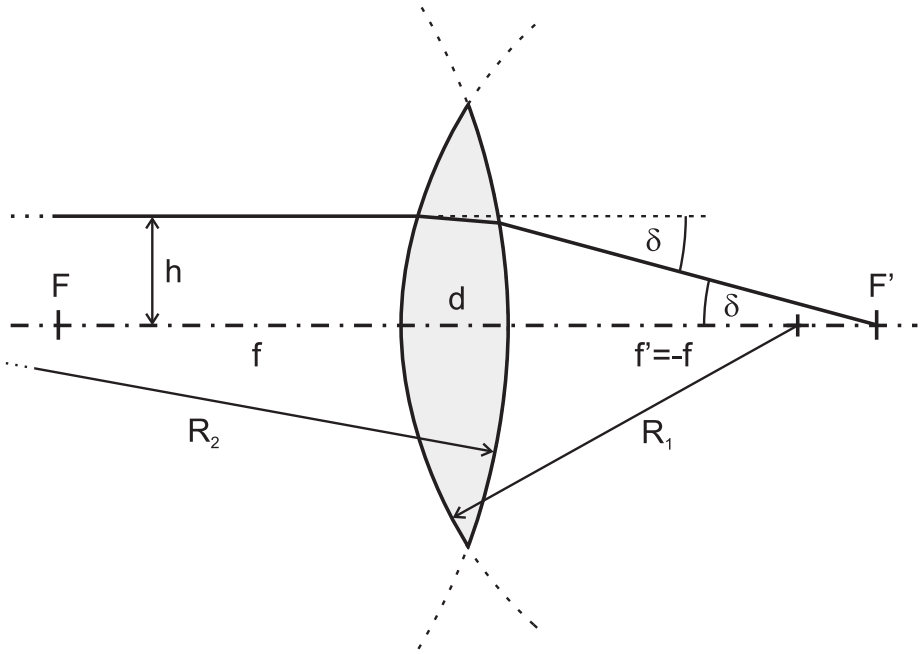
pak kulové zrcadlo bude velmi přesnou náhradou parabolického a paraxiální paprsky z ohniska F vytvoří téměř rovnoběžný svazek. Při větších aperturách je odchylka sféry od paraboloidu větší, což vede ke **sférické aberaci** (kulové vadě) zobrazení kulovým zrcadlem.

Zrcadlová rovnice. Obr. 9.5 nám nyní pomůže odvodit zrcadlovou rovnici, která popisuje paraxiální zobrazení **vypuklým kulovým zrcadlem** ZZ' se středem křivosti S a poloměrem R. **Předmět** P ve vzdálenosti a od zrcadla zde vytvoří **zdánlivý obraz** P' ve vzdálenosti a'. Pro všechny vzdálenosti budeme zde i v dalším používat znaménkovou konvenci jenské školy, jež bude podrobně popsána v oddíle 9.6: pro vypuklé zrcadlo např. platí $a < 0$, $a' > 0$, $R > 0$, $f = -R/2$. V paraxiální aproximaci lze úhly vyjádřit vztahy

$$\alpha \doteq \frac{|ZZ'|}{|a|}, \beta \doteq \frac{|ZZ'|}{a'}, \gamma = \frac{|ZZ'|}{R}.$$

Představme si nyní, že v bodě Z je paprsek odrážen malým tečným rovinným zrcátkem. Když toto zrcátko otočíme kolem středu S do bodu Z' o úhel γ, odražený paprsek se odrazí o dvojnásobný úhel 2γ, takže

$$\beta = \alpha + 2\gamma, \quad \text{neboli} \quad \frac{1}{a'} = \frac{1}{|a|} + \frac{2}{R}.$$



Obrázek 9.6: Tenká spojná čočka.

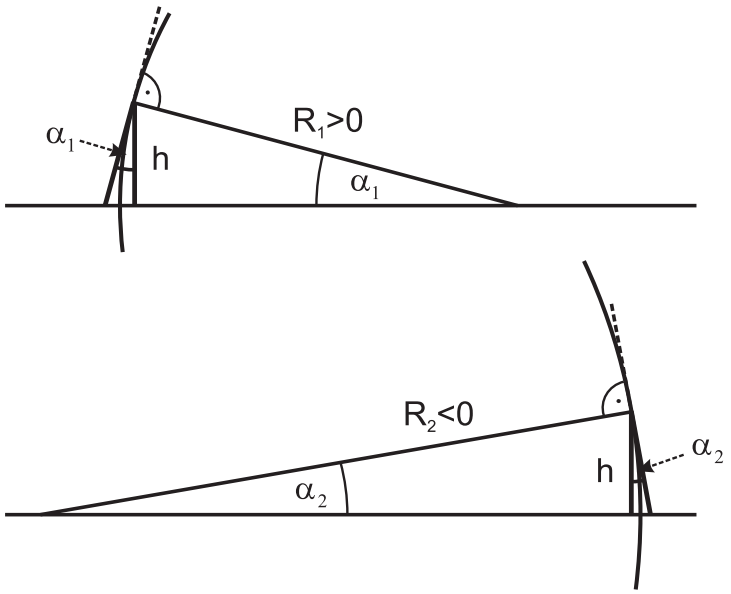
Poněvadž v jenské konvenci $f = -R/2 < 0$, dostáváme **zrcadlovou rovnici** ve tvaru

$$\boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} + \frac{1}{f} = 0.} \tag{9.11}$$

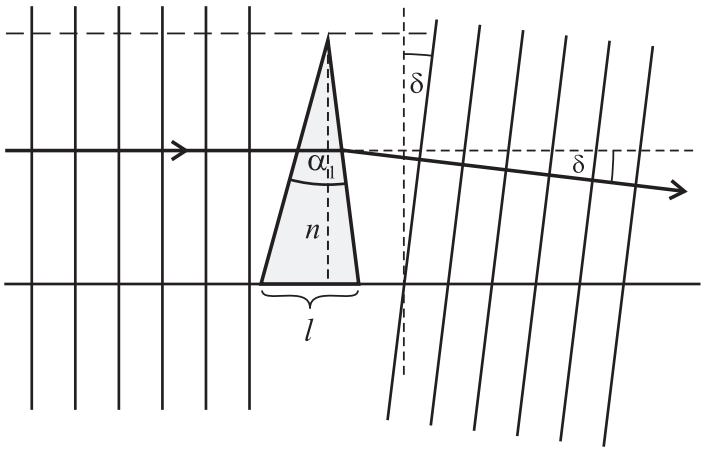
Cvičení 2. Ukažte, že rovnice (9.11) platí i pro **duté kulové zrcadlo** , když zvolíme znaménka $a < 0$, $a' < 0$, $R < 0$, $f = -R/2 > 0$.

Podívejme se dále na paraxiální zobrazení čočkami. Uvažujme **tenkou spojnou čočku** podle obr. 9.6 z homogenního materiálu s indexem lomu n, ohraničenou kulovými plochami o poloměrech $R_1 > 0$, $R_2 < 0$. Lom paraxiálního paprsku přicházejícího zleva rovnoběžně s osou definuje **obrazové ohnisko** F'. O tenké čočce mluvíme, když vzdálenost h se při průchodu paprsku čočkou prakticky nemění a tloušťka čočky d je malá vzhledem k ohniskové vzdálenosti f. Pro paraxiální paprsky požadujeme $h \ll R_1, |R_2|$. Odchylku δ lomeného paprsku vypočteme pomocí náhrady kulových ploch R_1, R_2 ve vzdálenosti h rovinnými povrchy klínů s malými vrcholovými úhly α_1, α_2. Podle obr. 9.7 platí $\alpha_1 = h/R_1$, $\alpha_2 = h/|R_2|$. Dopadá–li paprsek téměř kolmo na klín s velmi malým vrcholovým úhlem α, pak podle obr. 9.8 lze odchylku δ snadno určit z šíření rovinné vlny: vlnoplocha u základny klínu projde vzdálenost l rychlostí c/n; u vrcholu je rychlost c, takže táž vlnoplocha urazí vzdálenost nl. Protože rozdíl drah mezi vrcholem a základnou je $(n-1)l$, dostáváme odchylku

$$\boxed{\delta = \frac{(n-1)l}{L} \doteq (n-1)\alpha.}$$



Obrázek 9.7: Náhrada lámavých ploch tenké čočky ve vzdálenosti h tenkými klíny. Jejich vrcholové uhly jsou $\alpha_1 = h/R_1$, $\alpha_2 = h/\left|R_2\right|$.



Obrázek 9.8: Lom rovinné vlny tenkým klínem. Odchylka $\delta = (n-1)l/L = (n-1)\alpha$.

Vidíme, že nezávisí na úhlu dopadu, pokud je velmi malý.

Odchylka δ paprsku procházejícího tenkou čočkou ve vzdálenosti h od osy je pak podle obr. 9.6 a 9.7 rovna součtu

$$\delta = (n-1)(\alpha_1 + \alpha_2) = (n-1)(\frac{h}{R_1} + \frac{h}{|R_2|}).$$

Protože současně platí $\delta = h/f$, dostáváme **čočkařskou rovnici**

$$\boxed{D = \frac{1}{f} = (n-1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}).} \tag{9.12}$$

Veličina D je **optická mohutnost** čočky v dioptriích $[m^{-1}]$. Všimněte si, že pro paraxiální paprsky optická mohutnost nezávisí na h. Pro úplnost uvádíme čočkařskou rovnici pro tlustou čočku s tloušťkou $d > 0$ mezi vrcholy ([1], př. 8.5):

$$D = \frac{1}{f} = (n-1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) + \frac{(n-1)^2 d}{n R_1 R_2}.$$

Čočková rovnice. Připomeňme, že stejně jako u klínu, tak též u tenké čočky odchylka δ nezávisí na úhlu dopadu, je-li velmi malý. Proto se rovnoběžné paraxiální paprsky svírající úhel u s osou zobrazí do bodu ležícího v ohniskové rovině φ' (rovině kolmé k ose a procházející ohniskem F') ve vzdálenosti fu od osy, obr. 9.9. Pro odvození zobrazovací rovnice stačí proto sledovat paraxiální zobrazení **předmětového bodu** P do **obrazového bodu** P', jež oba leží na ose. Pro tenkou spojnou čočku na obr. 9.10 máme $a < 0$, $a' > 0$, $f > 0$. Poněvadž součet úhlů u, u', $\pi - \delta$ v trojúhelníku PQP' je roven $u + u' + (\pi - \delta) = \pi$, tj. $u + u' = \delta$ a platí $u \doteq h/|a|$, $u' \doteq h/a'$, $\delta \doteq h/f$, dostáváme **čočkovou rovnici**

$$\boxed{\frac{1}{a} - \frac{1}{a'} + \frac{1}{f} = 0.} \tag{9.13}$$

Posuneme-li předmět P v předmětové rovině kolmé k ose o malou vzdálenost Δy, pak z obr. 9.10 vidíme, že úhel u se zmenší o $\Delta u \doteq \Delta y/a < 0$. Protože odchylka δ zůstává stejná, úhel $|u'|$ se zvětší o $|\Delta u|$. Obraz P' se tedy v obrazové rovině posune o

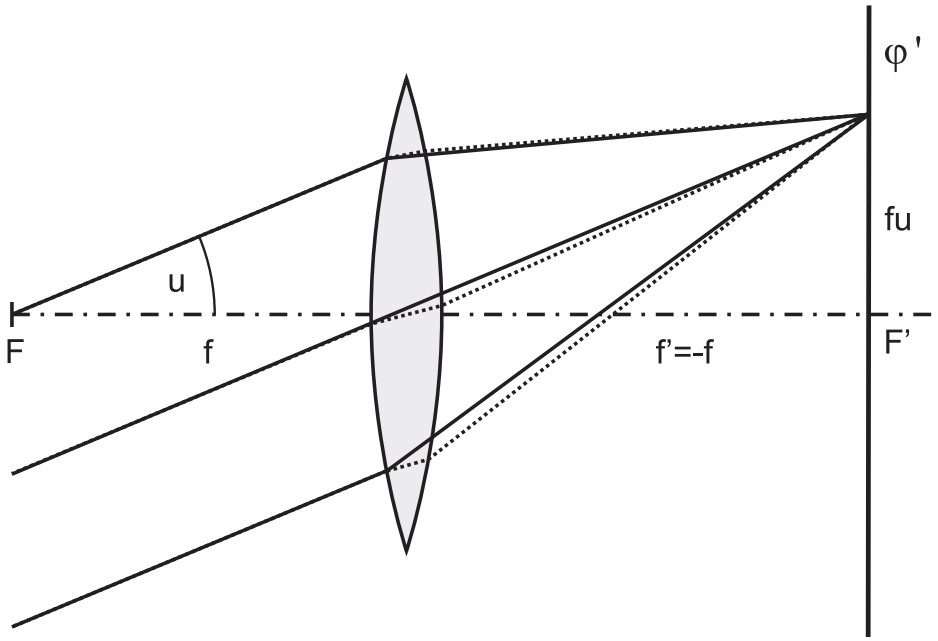
$$\Delta y' = a' \Delta u = a' \frac{\Delta y}{a}.$$

Koeficient úměrnosti mezi $\Delta y'$ a Δy se nazývá **boční zvětšení**

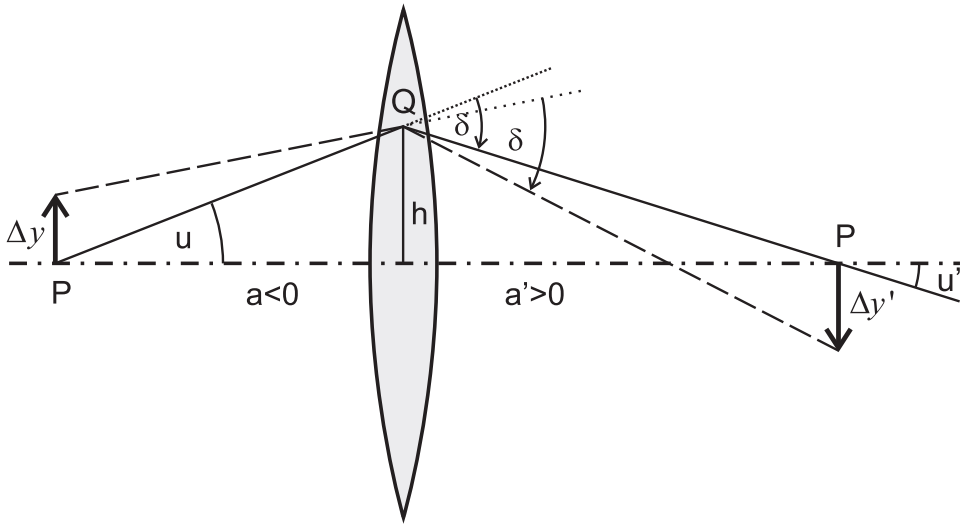
$$\boxed{Z_{\text{boční}} = \frac{\Delta y'}{\Delta y} = \frac{a'}{a} < 0.}$$

Posun obrazu P' v důsledku posunu předmětu P podél osy x lze odvodit z čočkové rovnice (9.13). Posuneme-li P o da, P' se posune v témže směru o da'. Derivováním čočkové rovnice podle a najdeme podíl da'/da, který definuje **podélné zvětšení**:

$$-\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a'^2}\frac{da'}{da} = 0 \Rightarrow \boxed{Z_{\text{podélné}} = \frac{da'}{da} = \frac{a'^2}{a^2} = Z^2_{\text{boční}}.}$$



Obrázek 9.9: Zobrazení rovnoběžného svazku tenkou spojnou čočkou do bodu v ohniskové rovině φ'.



Obrázek 9.10: K odvození čočkové rovnice a bočního zvětšení.

Cvičení 3. Na základě čočkové rovnice (9.13) pro tenkou spojnou čočku ($a < 0$, $f > 0$) diskutujte případy $a < -f \Rightarrow a' > 0$ (skutečný obraz), $0 > a > -f \Rightarrow a' < 0$ (zdánlivý obraz), $a \longrightarrow -f \mp 0 \Rightarrow a' \longrightarrow \pm\infty$.

Cvičení 4. Diskutujte podobně jako v cvičení 3. zobrazení tenkou rozptylkou ($a < 0$, $f < 0$).

9.4 Lineární zobrazovací soustavy

Principy výpočtu lineárních zobrazovacích soustav: projektivní transformace v trojrozměrném prostoru, kardinální elementy, výpočet pomocí matice přenosu.

Optické zobrazovací soustavy sestávají z optických elementů — čoček, zrcadel — a jistým způsobem každý vstupující paprsek transformují v paprsek vystupující. V tomto oddíle vyložíme teorii **lineárních zobrazovacích soustav**, která je matematickým vyjádřením ideálního paraxiálního zobrazení z oddílu 9.3. Ideální optické zobrazení zde bude geometricky popsáno transformací vstupních paprsků — přímek v předmětovém prostoru R^3 ve výstupní paprsky — přímky v obrazovém prostoru $R^{3'}$.

Matematické řešení požadavku věrnosti zobrazení představují **projektivní transformace** (**kolineace**), jež jsou základem projektivní geometrie v trojrozměrném prostoru. Jsou definovány jako nejobecnější vzájemně jednoznačná zobrazení, která převádějí lineární útvary v lineární útvary téže dimenze (tj. bod na bod, přímku na přímku a rovinu na rovinu).[5]

Projektivní transformace sestávají z translací, rotací a změn měřítka. Lze je zkonstruovat z *regulárních* lineárních transformací $R^4 \longrightarrow R^{4'}$

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ W' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a & b & c & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$$

zavedením **homogenních souřadnic**

$$x' = \frac{X'}{W'},\ y' = \frac{Y'}{W'},\ z' = \frac{Z'}{W'}; \quad x = \frac{X}{W},\ y = \frac{Y}{W},\ z = \frac{Z}{W}.$$

Transformační vztahy pro homogennní souřadnice jsou hledané projektivnítransformace:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{W'/W} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \tag{9.14}$$

kde

$$\frac{W'}{W} = \frac{aX + bY + cZ + dW}{W} = ax + by + cz + d.$$

[5]Projektivní transformace zachovávají relace incidence mezi lineárními útvary, např. průsečík dvou přímek převádějí v průsečík jejich obrazů.

Analogický tvar lineární lomenné transformace má i příslušná inverzní transformace, kterou budeme zapisovat s čárkovanými koeficienty. Ze vztahu (9.14) plyne, že pro každou projektivní transformaci existuje v R^3 rovina $ax+by+cz+d=0$, jejímž obrazem v $R^{3'}$ je "rovina v nekonečnu". Projektivní prostor $P^{3'}$ je $R^{3'}$ rozšířený o tuto jedinou **nevlastní (úběžnou) rovinu** obsahující nevlastní přímky a nevlastní body. Inverzní transformace podobně definují P^3. Pro účely optického zobrazení budeme projektivní transformaci (9.14) chápat jako zobrazení $\mathcal{T} : P^3 \longrightarrow P^{3'}$ předmětového prostoru P^3 na obrazový prostor $P^{3'}$.

Každá lineární optická zobrazovací soustava je tedy určena jistou projektivní transformací. Předpokládáme, že vztahy (9.14) je dána taková transformace $\mathcal{T}$. Pro účely optiky ji budeme blíže specifikovat ohniskovými rovinami, hlavními osami a dalšími praktickými požadavky, kterými se vztahy (9.14) podstatně zjednoduší.

1. *Předmětová ohnisková rovina* $\varphi \subset P^3$ se transformací $\mathcal{T}$ zobrazuje na nevlastní rovinu v $P^{3'}$. Je určena rovnicí
$$ax + by + cz + d = 0.$$

2. *Obrazová ohnisková rovina* $\varphi' \subset P^{3'}$ je obrazem nevlastní roviny v P^3. Je určena rovnicí
$$a'x' + b'y' + c'z' + d' = 0.$$

3. *Předmětová hlavní osa* je kolmá k φ. Volíme ji jako osu x a pro její průsečík s φ — **předmětové ohnisko** F — volíme souřadnici $x = 0$. Rovnice roviny φ je pak
$$ax = 0.$$

4. *Obrazová hlavní osa* je kolmá k φ'. Volíme ji jako osu x' a pro její průsečík s φ' — **obrazové ohnisko** F' — volíme souřadnici $x' = 0$. Rovnice roviny φ' je pak
$$a'x' = 0.$$

5. Požadavek, aby osa x' byla obrazem osy x znamená, že body s $y = z = 0$ se vztahy (9.14) transformují v body $y' = z' = 0$. Odtud $a_2 = d_2 = a_3 = d_3 = 0$. Pro inverzní transformaci platí analogicky $a'_2 = d'_2 = a'_3 = d'_3 = 0$.

6. Z požadavku, aby roviny kolmé k ose x (rovnoběžné s φ) se zobrazovaly na roviny kolmé k x' (rovnoběžné s φ'), plyne, že x' je pouze funkcí x, tj. $b_1 = c_1 = 0$. Pro inverzní transformaci $b'_1 = c'_1 = 0$.

7. Důležité je omezení na **osově symetrické zobrazení**. Takové zobrazení stačí popsat transformacemi z roviny xy na rovinu $x'y'$, odkud $c_1 = c_2 = 0$. Pro inverzní transformaci $c'_1 = c'_2 = 0$.

Definice a požadavky 1. — 7. vedou na zobrazení

$$\mathcal{T} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1x+d_1}{ax} \\ \frac{b_2y}{ax} \end{pmatrix}$$

resp.

$$\mathcal{T}^{-1} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1'x'+d_1'}{a'x'} \\ \frac{b_2'y'}{a'x'} \end{pmatrix}.$$

Transformační vztahy se ještě zjednoduší, uvážíme-li, že ohniska F, F' leží na hlavních osách a požadujeme–li, aby ohnisko F' (F) bylo při transformaci $\mathcal{T}$ ($\mathcal{T}^{-1}$) obrazem nevlastního bodu $(\infty, 0)$ ležícího na ose x (x'):

$$\lim_{x\to\infty} x' = \lim_{x\to\infty} \frac{a_1x + d_1}{ax} = \frac{a_1}{a} = 0 \Rightarrow a_1 = 0,$$

$$\lim_{x'\to\infty} x = \lim_{x'\to\infty} \frac{a_1'x' + d_1'}{a'x'} = \frac{a_1'}{a'} = 0 \Rightarrow a_1' = 0.$$

Výsledkem jsou **zobrazovací rovnice v Newtonově (ohniskovém) tvaru**

$$x' = \frac{d_1}{ax}, \quad y' = \frac{b_2y}{ax}, \quad a \neq 0.$$

Zobrazení ovšem závisí pouze na dvou nezávislých konstantách, jimiž je plně určeno:

$$\boxed{x'x = C, \quad y' = \frac{By}{x}.} \tag{9.15}$$

Klasifikace optických zobrazovacích soustav podle znamení konstant B, C si ukážeme až na konci tohoto oddílu. Ve zbývající části se omezíme na **centrované soustavy**, u nichž optické elementy jsou rozloženy osově symetricky podél společné osy. Osy x, x' zde splývají s touto osou symetrie a osy y', z' volíme rovnoběžné s osami y, z. Ohniska F, F' leží v počátcích obou soustav. Kladný směr os x, x' volíme souhlasně se směrem vstupu světla do optické soustavy. **Znaménková konvence jenské školy** požaduje, aby délky měřené podél osy x x' měly znamení podle orientace vzhledem k těmto osám [13].

Maticová metoda v optice [14]. Centrovanými optickými soustavami lze (v mono chromatickém světle) dosáhnout ideálně věrného zobrazení (9.15), uskutečňuje–li se toto zobrazení paraxiálními paprsky. V **paraxiálním přiblížení** je paprsek procházející bodem $A = (x_A, y_A)$ určen vzdáleností y_A od osy x v místě x_A a úhlem u_A, který svírá s osou x (obr. 9.11):

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_A = \tan u_A \doteq u_A.$$

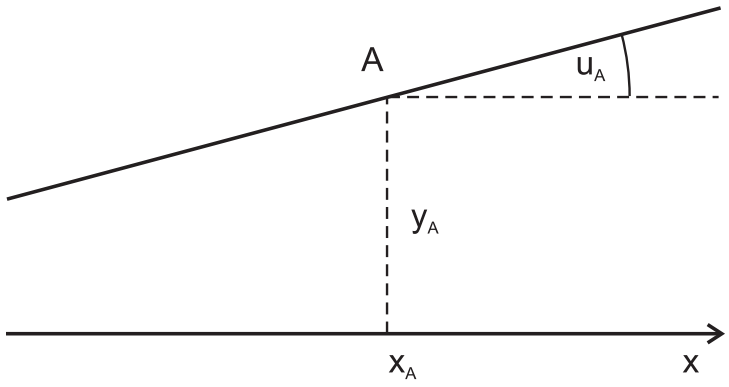
Ukážeme, že zobrazení (9.15) lze ekvivalentně vyjádřit pomocí regulární lineární transformace

$$\begin{pmatrix} y' \\ u' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}, \tag{9.16}$$

kde T se nazývá **matice přenosu soustavy**.

Matice přenosu má jednoduchý tvar pro **prázdný prostor** délky s, kde paprsek se šíří přímočaře, takže úhel u se nezmění a y se zvětší o us:

$$\begin{pmatrix} y' \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + us \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.17}$$



Obrázek 9.11: Paprsek procházející bodem A je určen parametry x_A, y_A, u_A.

Při průchodu **tenkou čočkou** se paprsek lomí podle obr. 9.10: y se nemění, ale úhel se změní o $\delta = -y/f$, takže

$$\begin{pmatrix} y' \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ u - \frac{y}{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.18}$$

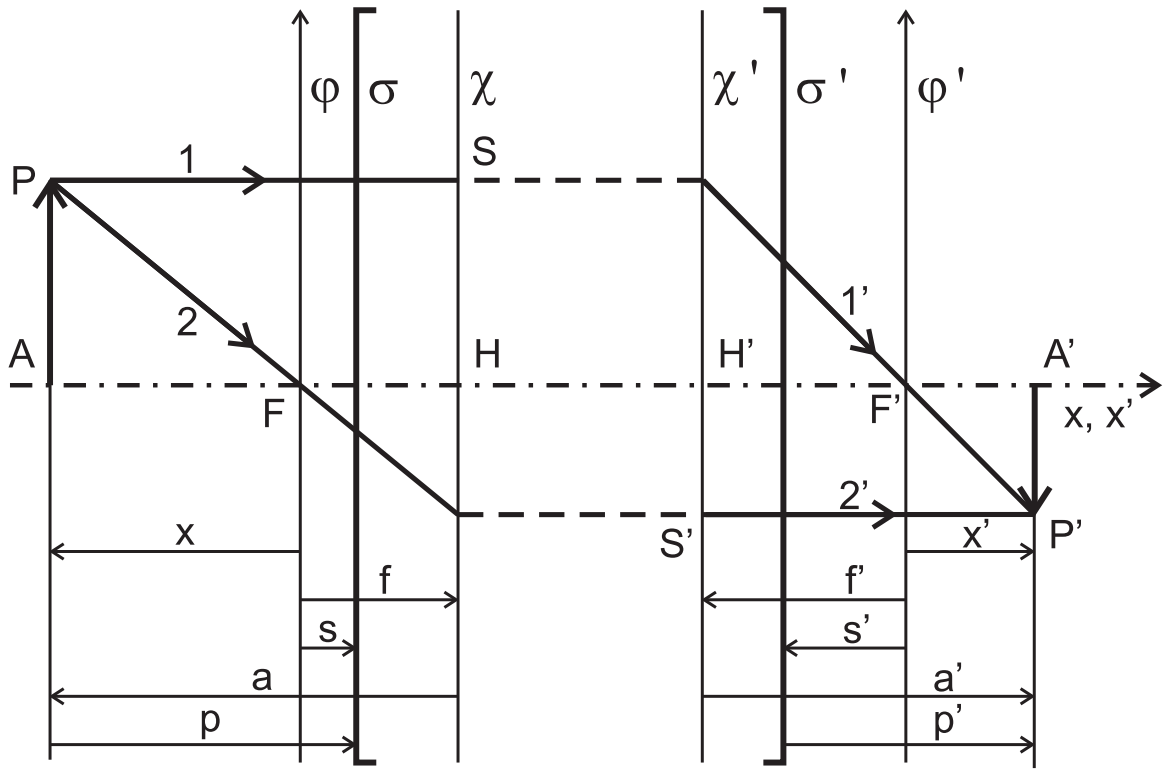
Jsou-li optické elementy (a prázdné prostory) řazeny za sebou podél osy x s maticemi přenosu $T_1, \ldots, T_n$, výslednou matici přenosu lze snadno vypočítat jako součin matic (v opačném pořadí)

$$T = T_n \cdots T_1.$$

Abychom dospěli k významu konstant B, C, budeme předpokládat, že daná složená optická soustava má matici přenosu T a odvodíme její ohniskové zobrazovací rovnice (9.15). Transformace (9.16) popisuje transformaci vstupních paprsků na výstupní. Proto konvenčně volíme ohraničení soustavy *vstupní rovinou* σ a *výstupní rovinou* σ' (obr. 9.12). Transformaci paprsků ze vstupní roviny na výstupní budeme charakterizovat pomocí **kardinálních elementů**, které plně určují zobrazení:

1. **Ohniska** F, F' jsou takové body na hlavní ose, že paprsek procházející F (F') bude (byl) rovnoběžný s osou $x \equiv x'$. Pro paprsky 1, 1′ a 2, 2′ platí

$$\begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}_{F'} = \begin{pmatrix} 1 & -s' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} (T_{11} - T_{21}s')y_S \\ T_{21}y_S \end{pmatrix},$$



Obrázek 9.12: Optická zobrazovací soustava: kardinální elementy, geometrická konstrukce zobrazení.

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}_{S'} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}_F = \begin{pmatrix} (T_{11}s + T_{12}u_F) \\ (T_{21}s + T_{22}u_F) \end{pmatrix}.$$

Nuly nalevo dávají vztahy $T_{11} - T_{21}s' = 0, T_{21}s + T_{22=0}$, odkud při $T_{21} \neq 0$ máme

$$\boxed{s = -\frac{T_{22}}{T_{21}}, s' = \frac{T_{11}}{T_{21}}.}$$

2. **Hlavní roviny** χ, χ' jsou dvě sdružené roviny (body χ' jsou obrazy bodů χ), jejichž body se navzájem zobrazují s bočním zvětšením rovným jedné. Na obr. 9.12 tomu odpovídají čárkované úseky paprsků 1, 2, které se však ve složené soustavě mohou šířit komplikovaným způsobem. Podle definice hlavních rovin a ohniskových vzdáleností f, f' jsou určeny předchozími transformačními rovnicemi

$$u_{F'} = T_{21}y_S, \quad y_{S'} = (T_{11}s + T_{12})u_F$$

a podmínkami plynoucími z chodu paprsků na obr. 9.12

$$y_S = f'u_{F'}, \quad y_{S'} = fu_F.$$

Dostáváme z nich

$$\boxed{f' = \frac{1}{T_{21}}}$$

a pomocí již vypočítaného s

$$f = T_{11}s + T_{12} = \frac{-T_{11}T_{22} + T_{12}T_{21}}{T_{21}},$$

tedy

$$\boxed{f = -\frac{|T|}{T_{21}}.}$$

Obráceně lze matici přenosu T vyjádřit pomocí f, f', s, s':

$$T = \begin{pmatrix} \frac{s'}{f'} & f - \frac{ss'}{f'} \\ \frac{1}{f'} & -\frac{s}{f'} \end{pmatrix} \tag{9.19}$$

Ověřte!

Newtonovu první zobrazovací rovnici (9.15) nyní odvodíme z podmínky, aby bod A' na hlavní ose byl obrazem bodu A paprsku s libovolnými úhly u_A:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}_{A'} &= \begin{pmatrix} 1 & p' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}_A \\ &= \begin{pmatrix} T_{11} + T_{21}p' & (T_{11} + T_{21}p')p + T_{12} + T_{22}p' \\ T_{21} & T_{21}p + T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}_A. \end{aligned} \tag{9.20}$$

Nula na levé straně dává podmínku nulovosti prvku 12,

$$0 = pp'T_{21} + pT_{11} + p'T_{22} + T_{12}.$$

Dosadíme-li sem prvky (9.19) matice T

$$0 = pp' + ps' - p's + ff' - ss'$$

a podle obr. 9.12 zavedeme proměnné x, x' rovnicemi

$$x = -p + s,\ x' = p' + s',$$

obdržíme první zobrazovací rovnici

$$\boxed{xx' = ff'.} \tag{9.21}$$

Druhá zobrazovací rovnice (9.15) popisuje boční zvětšení y'/y, když při vychýlení bodu A do P se obraz A' posune do P':

$$\begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}_{P'} = \begin{pmatrix} T_{11} + T_{21}p' & 0 \\ T_{21} & T_{21}p + T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}_{P}.$$

Protože prvek 12 matice v rovnici (9.20) je podle předchozího odvození roven nule, je boční zvětšení dáno prvkem 11,

$$Z_{bocni} = \frac{y'_P}{y_P} = T_{11} + T_{21}p' = \frac{s' + p'}{f'} = \frac{x'}{f'}$$

a podle (9.21)

$$\boxed{y' = \frac{f}{x}y.} \tag{9.22}$$

Poznamenejme, že prvek T_{22} určuje **úhlové zvětšení** k (konvergenční poměr) pro zobrazení bodu A na hlavní ose. Podle (9.20)

$$k = \frac{u_{A'}}{u_A} = T_{21}p + T_{22} = \frac{p - s}{f'} = -\frac{x}{f'} = -\frac{f}{x'}.$$

Uzlové body U, U' jsou definovány jako sdružené body na hlavní ose, které mají tu vlastnost, že prvky jimi procházející se zobrazují s úhlovým zvětšením rovným jedné:

$$x_u = -f', \quad x'_{u'} = -f.$$

Vraťme se ke zobrazovacím rovnicím (9.21), (9.22). Vidíme, že konstanty C, B v (9.15) jsou rovny

$$\boxed{c = ff', \qquad B = f.} \tag{9.23}$$

Podle jejich znamének rozlišujeme 4 typy optických soustav[6]

[6]V literatuře se používají termíny: soustava dioptrická (typu čočky), katoptrická (typu zrcadla), dispansivní (rozptylná), kolektivní (spojná).

C	B	f	f'	Soustava	
-	-	-	+	typu čočky	rozptylná
-	+	+	-	typu čočky	spojná
+	-	-	-	typu zrcadla	rozptylná
+	+	+	+	typu zrcadla	spojná

Jaká soustava je zobrazena na obr. 9.12 ?

Cvičení 5. Ukažte, že při znaménkách $C < 0$ resp. $C > 0$ platí: postupuje-li předmět po ose v kladném směru, postupuje jeho obraz týmž resp. opačným směrem, tj. jako u čočky resp. zrcadla.

Cvičení 6. Ukažte, že při znaménkách $B < 0$ resp. $B > 0$ platí: pro $x < 0$ mají y, y' stejná, resp. opačná znaménka. Příkladem je rozptylná resp. spojná čočka.

Zobrazovací rovnice vztažené k hlavním rovinám χ, χ' obdržíme dosazením

$$x = f + a, \quad x' = f' + a'$$

podle obr. 9.12 do (9.21), (9.22):

$$\boxed{\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} + 1 = 0, \quad y' = f\frac{y}{f+a}.} \tag{9.24}$$

Speciální případy jsme již odvodili v oddíle 9.3: jedná se o zrcadlovou rovnici (9.11) a čočkovou rovnici (9.13), které odpovídají $f = f'$ resp. $f = -f'$.

Cvičení 7. Odvoďte matici přenosu pro zobrazení předmětu P tenkou čočkou. V obecné situaci obr. 9.12 zvolte $p = p' = 0$, tj. vstupní rovina prochází předmětem P, výstupní obrazem P'. Obě hlavní roviny splývají s rovinou čočky. Uvažte, že výsledná matice přenosu vznikne složením matice (9.17) pro prázdný prostor délky $-a$, matice (9.18) pro tenkou čočku a matice (9.17) pro prázdný prostor délky a',

$$T = \begin{pmatrix} 1 - \frac{a'}{f} & -a + a' + \frac{aa'}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 + \frac{a}{f} \end{pmatrix}.$$

Vysvětlete, proč $T_{12} = 0$ je ekvivalentní čočkové rovnici (9.13).

Podrobný výklad dalších témat geometrické optiky včetně vad zobrazení najde čtenář v citované literatuře [13], [1].

Literatura

[1] J. Tolar, J. Koníček: *Sbírka řešených příkladů z fyziky (Vlnění),* Vydavatelství ČVUT, Praha 2005.

[2] F.S. Crawford, Jr.: *Berkeley Physics Course 3. Waves,* McGraw-Hill Book Co., New York 1968 (rusky Nauka, Moskva 1974).

[3] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: *Feynmanovy přednášky o fyzice 1,* Fragment 2002.

[4] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko: *Classical Mechanics,* 3. vyd. Addison-Wesley, New York 2000 (rusky 1. vyd. Klassičeskaja mechanika, GIFML, Moskva 1957).

[5] J. Pytlíček: *Lineární algebra a geometrie,* 1. vyd., Vydavatelství ČVUT, Praha 1997.

[6] J. Pytlíček: *Cvičení z algebry a geometrie,* 4. vyd., ČVUT, Praha 2008.

[7] I. Štoll: *Mechanika,* Vydavatelství ČVUT, Praha 2003.

[8] I. Štoll: *Svět očima fyziky,* Prometheus, Praha 1996.

[9] I. Štoll, J. Tolar: *Teoretická fyzika,* Vydavatelství ČVUT, Praha 2008.

[10] I. Štoll, J. Tolar, I. Jex: *Klasická teoretická fyzika,* Karolinum, Praha 2017.

[11] M. Vrbová a kolektiv: *Lasery a moderní optika,* Prometheus, Praha 1994.

[12] P. Fiala: *Základy fyzikální optiky,* Vydavatelství ČVUT, Praha 1999.

[13] E. Klier: *Úvod do fysiky, IV. část (Optika),* Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1965.

[14] A. Gerrard, M. Burch: *Introduction to Matrix Methods in Optics,* J. Wiley & Sons, New York 1975 (rusky Mir, Moskva 1978).

[15] J.A. Adam: *The mathematical physics of rainbows and glories*, Physics Reports **356** (2002), 229-365 [FJFI: C 1955]

[16] G.R. Bird, M. Parrish, Jr., J. Opt. Soc. Am. **50**, 886 (1960).

[17] P.N. Lebedev, Ann. Phys. (Leipzig) **6**, 433 (1901), **32**, 411 (1910).

[18] E.F. Nichols, G.F. Hull, Phys. Rev. **13**, 307 (1901).

[19] L. Brillouin: *Wave propagation and group velocity,* Academic Press, New York 1960.

[20] A. Sommerfeld: *Vorlesungen über Theoretische Physik IV. Optik,* 2. vyd., Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.–G., Leipzig 1959.

[21] M. Uhlíř: *Úvod do atomové fyziky,* Vydavatelství ČVUT, Praha 1979.

[22] E.V. Špolskij: *Atomová fyzika, I. Úvod do atomové fyziky,* Technicko-vědecké vydavatelství, Praha 1952.

[23] E.V. Špolskij: *Atomová fyzika, II. Elektronový obal atomu a atomové jádro,* SNTL, Praha 1954.

[24] A. Beiser: *Úvod do moderní fyziky,* Academia, Praha 1975.

[25] I.G. Main: *Kmity a vlny ve fyzice,* Academia, Praha 1990.