

OSTRAVSKÁ UNIVERZITA V OSTRAVĚ

**SPECIÁLNÍ TEORIE
RELATIVITY**



**UNIVERSITAS
OSTRAVIENSIS**

DALIBOR DVOŘÁK

OSTRAVA 2012

Obsah

1 Úvod do problematiky	4
1.1 Historické poznámky.....	4
1.2 Vývoj fyziky v 19. století.....	4
1.3 Aberace stálic.....	5
1.4 Strhávání světla.....	6
2 Lorentzova transformace	7
2.1 Michelson – Morleyův pokus.....	7
2.2 Einsteinovy postuláty.....	8
2.3 Lorentzova transformace.....	9
2.4 Vztah mezi Einsteinovým a Galileiho principem relativity.....	11
3 Důsledky Lorentzovy transformace	12
3.1 Relativnost současnosti událostí.....	12
3.2 Princip kauzality, maximální rychlost signálu.....	12
3.3 Skládání rychlostí.....	13
3.4 Dilatace času.....	14
3.5 Kontrakce délek.....	14
3.6 Relativistický výklad aberace světla hvězd.....	15
3.7 Relativistický výklad Fizeauova pokusu.....	15
3.8 Relativistický výklad Michelson – Morleyova pokusu.....	16
4 Minkowského prostoročas	16
4.1 Prostorčasový interval.....	17
4.2 Čtyřvektory.....	18
4.3 Čtyřvektor rychlosti, vlastní čas.....	19
4.4 Geometrické znázornění Minkowského prostoročasu.....	20
5 Relativistická dynamika	21
5.1 Invariance fyzikálních zákonů.....	21
5.2 Relativistická pohybová rovnice.....	21
5.3 Čtyřsíla.....	22
5.4 Transformace síly.....	23
5.5 Ekvivalence hmotnosti a energie.....	24
5.6 Relativistická hmotnost.....	25
5.7 Čtyřvektor energie – hybnost.....	26
5.8 Transformace energie.....	27
6 Srážky částic	28
6.1 Dokonale nepružná srážka částic.....	28
6.2 Rozpad částice.....	29
6.3 Dokonale pružná srážka částic.....	30
6.4 Comptonův rozptyl.....	31
6.5 Čerenkovovo záření.....	32
7 Některé důsledky speciální teorie relativity	34
7.1 Dopplerův jev.....	34
7.1.1 Klasický Dopplerův jev.....	34
7.1.2 Relativistický Dopplerův jev.....	36
7.2 Rovnoměrně zrychlený pohyb.....	37
7.3 Pohyb nabitě částice v homogenním magnetickém poli.....	38

8 Relativistická elektrodynamika	39
8.1 Relativistické rovnice elektromagnetického pole.....	39
8.2 Fyzikální důsledky transformačních vzorců	41
8.3 Tenzor energie a hybnosti elektromagnetického pole.....	42
9 Relativistická termodynamika	44
9.1 Teplo.....	44
9.2 Entropie a teplota	45
9.3 Relativistická termodynamika elektromagnetického pole	45
10 Pozorovaný tvar těles ve speciální teorii relativity.....	46
10.1 Pozorování tyče	46
10.2 Pozorování tělesa.....	48
11 Úvod do obecné teorie relativity	50
11.1 Princip ekvivalence	50
11.2 Einsteinova teorie gravitace obecný princip relativity.....	52
12 Černé díry.....	53
12.1 Historie.....	53
12.2 Horizont událostí	54
12.3 Rotující černá díra	54
12.4 Fyzikální vlastnosti černé díry	55
12.5 Hawkingovo záření	57
12.6 Existence černých děr.....	58
12.7 Pozorování černých děr.....	59
12.8 Alternativní modely.....	60
13 Vznik a vývoj vesmíru	61
13.1 Postavení Země ve vesmíru.....	61
13.2 Vznik a vývoj vesmíru	62
13.3 Standardní model.....	62
13.4 Temná hmota.....	65
13.5 Temná energie	66

1 Úvod do problematiky

1.1 Historické poznámky

Vznik speciální a posléze i obecné teorie relativity byl podmíněn historickou situací, k níž došlo ve fyzice ve druhé polovině 19. století. Tyto teorie znamenaly pro fyziku nejen východisko ze slepé uličky, ale jsou také příkladem toho, jak je lidské poznání za dané situace schopno setřást a zavrhnout dogmata, s nimiž žilo a z nichž a to nikoliv neúspěšně, vycházelo stovky let.

Formulace principu obecně platnějšího než Galileiho princip relativity pro inerciální vztažné soustavy byla na přelomu 19. a 20. století již jen otázkou času. Je nesporné, že řada vynikajících fyziků – jmenujme zde především HENRIHO JULESE POINCARÉHO a HENDRIKA ANTOONA LORENZE, tušila neudržitelnost postulátů o absolutním čase a prostoru. Obava z veřejného vyslovení těchto, v té době „kacířských“ myšlenek, je však zastavila na samotném prahu nové fyzikální epochy.

Tak se stalo, že roku 1905 se v sedmnáctém svazku odborného periodika „Annalen der Physik“ objevil třicetistránkový článek pod názvem „K elektrodynamice pohybujících se těles“, jehož autorem byl do té doby téměř neznámý fyzik ALBERT EINSTEIN. Článek byl pozoruhodný nejen svým obsahem, ale i tím, že v něm nebyly citovány žádné prameny a že se jeho pisatel neodvolával na žádné autority a zdroje. Styl článku byl velmi prostý a jeho značná část byla pochopitelná i bez náročnější matematické průpravy.

Uveřejnění tohoto článku znamenalo definitivní rozhodnutí o dalším vývoji fyziky. Ve spojení se souběžně se rozvíjející kvantovou teorií umožnilo průlom i v rozvoji poznání o mikroskopické hmoty.

1.2 Vývoj fyziky v 19. století

Dominující fyzikální disciplinou v průběhu celého tohoto období byla Newtonova mechanika zdokonalená EULEREM, LAPLACEM, LAGRANGEEM, BERNOULLIM, HAMILTONEM. Axiomy mechaniky a její matematický formalismus, byly kritériem pro správnost a platnost nových „nemechanických“ fyzikálních hypotéz a teorií v optice, elektřině, molekulové fyzice, termodynamice apod. Mechanika, považovaná za dokonalou formu fyziky a popisu světa jak po stránce obsahové, tak i formální, ovlivnila také filosofii – převládajícím světovým názorem byl v tomto období mechanistický výklad světa.

Tato hegemonie mechaniky začala být vážně narušována koncem 19. století zejména výsledky experimentů v optice a elektřině.

Již Newtonův současník, holandský fyzik CHRISTIAN HUYGENS, vyslovil domněnku, že světlo je vlněním nevažitelné a blíže nedefinované substance – éteru. Díky Newtonově autoritě však na dlouhou dobu převládla jeho emanační (výronová, korpuskulární, částicová) teorie světla nad undulační (vlnovou) teorií Huygensovou. Nové experimenty prokazující ohyb, interferenci a polarizaci světla (YOUNG, FRAUNHOFER, FRESNEL aj.) – tj. jevy typické pro vlnění – však stále více narušovaly představou o tom, že světlo je jen pohybem částic.

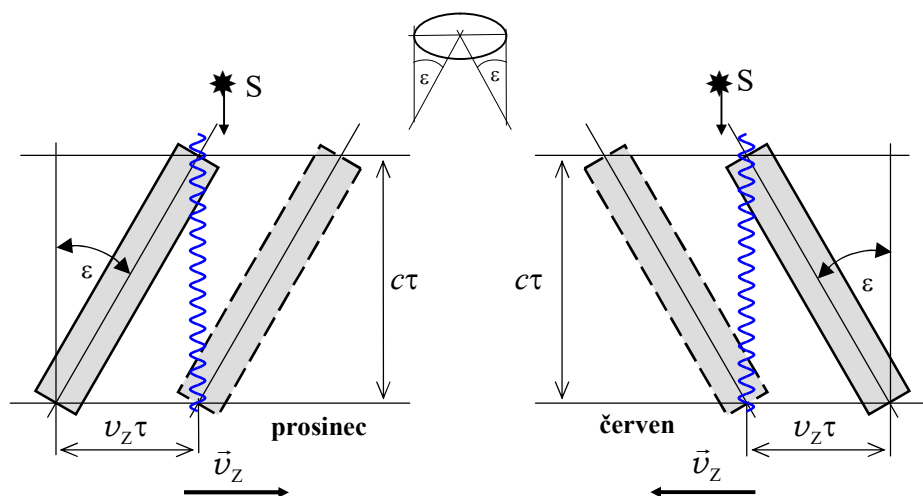
V polovině 19. století již nebylo pochybností o tom, že se světlo chová jako příčné vlnění. V zajetí mechanických představ si však fyzikové nedovedli představit šíření světla ve vakuu bez „nosiče“. Proto byl po staletích „oprášen“ Huygensův pojem éteru. Představa klidného, nevažitelného a celý vesmír vyplňujícího éteru byla velmi lákavá – mohl být totiž ztotožněn

s Newtonovým absolutním prostorem. Fyzikům se tak zdánlivě otevřela možnost určení absolutního pohybu těles vůči nehybnému éteru.

Hypotéza o existenci éteru tak postavila před fyziky důležitý úkol – určit pohyb Země, především pak rychlost jejího translačního pohybu vůči éteru. Podstata všech experimentů, které byly k tomuto účelu konány, spočívala v použití klasického předpokladu o skládání rychlosti pohybu světla s rychlostí pohybu jeho zdroje nebo pozorovatele.

1.3 Aberace stálic

Vliv pohybu Země na směr, v němž registrujeme zdroj světla, objevil r. 1728 anglický astronom J. BRADLEY v jevu označovaném **aberace stálic**. Bradley zjistil, že stálice opisují na obloze během roku malé elipsy, jejichž velké osy jsou rovnoběžné s ekliptikou a mají nezávisle na vzdálenosti jednotlivých hvězd stejnou úhlovou velikost $2\varepsilon = 41''$.



Obr. 1.1: Sklon dalekohledu při pohybu po ekliptice

Uvedený jev lze jednoduše vysvětlit za předpokladu konečné hodnoty rychlosti světla. Pro sklon tubusu dalekohledu ε platí, viz obr. 1.1,

$$\operatorname{tg} \varepsilon \approx \varepsilon = \frac{v_Z}{c}, \quad (1.1)$$

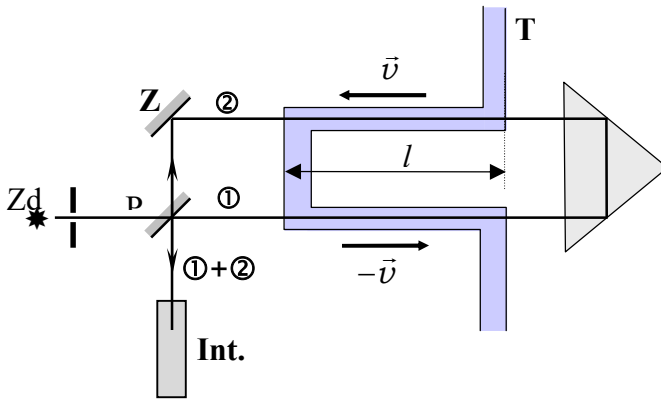
kde byl použit z hlediska toho, že $\varepsilon \ll 1$ přibližný vztah $\operatorname{tg} \varepsilon \approx \varepsilon$.

Dosadíme-li hodnotu rychlosti světla ve vakuu $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ a hodnotu rychlosti Země vzhledem k Slunci $v_Z \doteq 3 \cdot 10^4 \text{ m.s}^{-1}$, dostaneme $\varepsilon \approx 20,5''$. Tato hodnota je ve velmi dobrém souladu s experimentálně zjištěnou hodnotou aberace.

Zdálo by se, že jev aberace stálic dokazuje pohyb Země vůči éteru. Je nutné však vzít do úvahy, že uvedený výsledek byl získán použitím hodnoty rychlosti Země vůči Slunci, tzn. za předpokladu, že Slunce je vůči éteru v klidu. Tento předpoklad však není přesný – i Slunce je vůči soustavě spojené se stálicemi v pohybu ($v_S \approx 30 \text{ km.s}^{-1}$). Detailní rozbor ukazuje, že vztah (1.1) je pouze přibližný a popisuje pouze tzv. aberaci 1. řádu. Přesnost měření, která činí u aberace stálic přibližně $0,2''$ je však pro přesnější měření, které by zachytilo i vliv pohybu Slunce nedostatečná.

1.4 Strhávání světla

Tento pokus navrhnul francouzský fyzik FIZEAU (1851). Vychází z představy, že rychlost světla v pohybujícím se látkovém prostředí se sčítá s rychlostí pohybu tohoto prostředí v důsledku strhávání éteru. Princip pokusu je na obr. 1.2.



Obr. 1.2: Fizeauův pokus

Jako pohybující se látkové prostředí použil Fizeau vodu proudící trubicí T , rychlostí $v \doteq 5 \text{ m.s}^{-1}$.

Paprsek světla ① po průchodu polopropustnou destičkou P prochází trubicí T před i po odraze na stěnách hranolu H souhlasným směrem jako voda. Rychlost paprsku ② má naopak v trubicí T vůči rychlosti proudící vody \vec{v} směr opačný.

Rychlost světla u_0 v klidné vodě je

určena hodnotou indexu lomu

$$n = \frac{c}{u_0} \doteq \frac{4}{3} \Rightarrow u_0 \doteq 225\,000 \text{ km.s}^{-1}.$$

Podle Fizeauových předpokladů se v proudící vodě měla rychlost světla zvětšit nebo zmenšit v závislosti na rychlosti proudění vody v , a tedy

$$\textcircled{1} : u_1 = u_0 + kv; \quad \textcircled{2} : u_2 = u_0 - kv; \quad 0 < k \leq 1,$$

kde k je tzv. **strhávací koeficient**, charakterizující velikost strhávání éteru proudící vodou.

Rozdílná rychlost obou paprsků v trubicí měla vést k jejich časovému posunutí Δt v zorném poli interferometru Int.

$$\Delta t = \frac{2l}{u_0 - kv} - \frac{2l}{u_0 + kv} \doteq \frac{4klv}{u_0^2} = \frac{4kl}{c^2} \frac{c^2}{u_0^2} v = \frac{4kl}{c^2} n^2 v,$$

kde byl ve jmenovateli zanedbán, vzhledem k tomu, že $(kv)^2 \ll u_0^2$, výraz $(kv)^2$. Na základě předpokládaného fázového posunu byla očekávána interference paprsků ① a ②, pozorovatelná interferometrem. Interferenční proužky byly skutečně zjištěny a zpětným výpočtem byl pro strhovací koeficient k odvozen výraz

$$k = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Pro rychlost světla v proudící vodě získáme vztah

$$u = u_0 \pm kv = \frac{c}{n} \pm \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v. \quad (1.2)$$

strhovací koeficient k , by měl tedy záviset na indexu lomu a index lomu přitom závisí na frekvenci světla (disperze). Při přijetí tohoto faktu bychom museli přijmout hypotézu o existenci nikoliv jediného, ale nekonečně mnoha éterů – pro každou frekvenci světla jiného. Vzhledem k této skutečnosti byl předpoklad o skládání rychlostí a částečném strhávání éteru

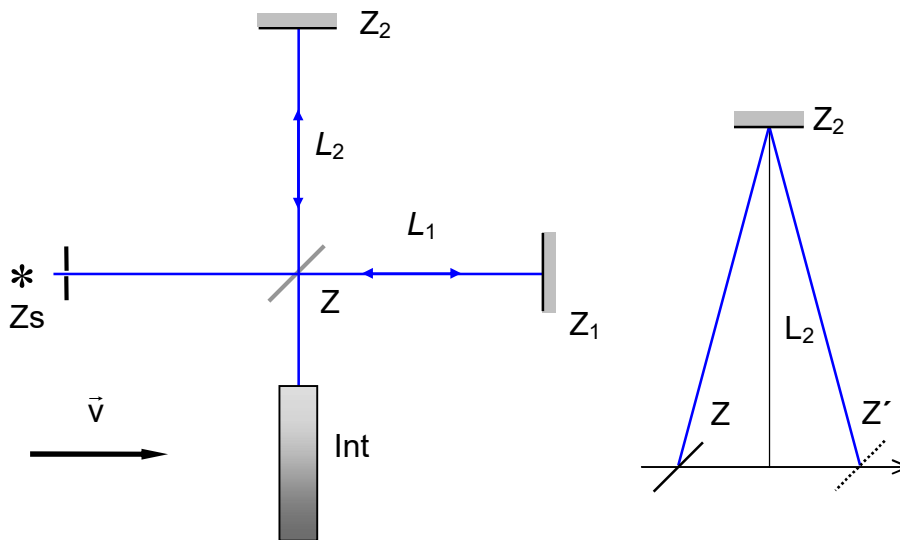
zpochybněn. Výklad výsledku Fizeauova pokusu na základě speciální teorie relativity je uveden v kap. 3.

2 Lorentzova transformace

2.1 Michelson – Morleyův pokus

Klíčovým pro potvrzení existence éteru se ukázal být experiment, který navrhl americký fyzik ALBERT ABRAHAM MICHELSON (1852–1931). Při svém návrhu vycházel z předpokladu, že rychlost světla šířícího se klidným éterem je závislá na rychlosti a směru pohybu pozorovatele. O svém pohybovém stavu vůči klidnému éteru by tedy pozorovatel mohl rozhodnout podle jím naměřené rychlosti světla. Navrhnul proto pokus, při kterém se porovnávaly časové intervaly, během nichž světlo proběhne dvě stejné dráhy různě orientované vzhledem k Zemi, pohybující se s pozorovatelem vůči klidnému éteru. Schéma experimentálního uspořádání je uvedeno na obr. 2.1.

Světelný paprsek vychází ze zdroje Z_s a polopropustným zrcadlem Z je rozdělen na dva navzájem kolmé paprsky, které po odrazu na zrcadlech Z_1 , Z_2 spolu interferují v interferometru Int . Necht' rameno $L_1 = \overline{ZZ_1}$ leží ve směru pohybu Země. Čas, za který světelný paprsek urazí dráhu $\overline{ZZ_1Z}$, je potom roven



Obr. 2.1: Schéma Michelson – Morleyůva pokusu

$$t_1 = \frac{L_1}{c - v_Z} + \frac{L_1}{c + v_Z} = \frac{2L_1}{c} \frac{1}{1 - \left(\frac{v_Z}{c}\right)^2} = \frac{2L_1}{c(1 - \beta^2)}. \quad (2.1)$$

Protože se celé zařízení pohybuje spolu se Zemí, pohybuje se druhý paprsek po dráze $\overline{ZZ_2Z'}$. Čas k tomu potřebný dostaneme použitím Pythagorovy věty ve tvaru

$$L_2^2 + \left(\frac{v_Z t_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{c t_2}{2}\right)^2 \Rightarrow t_2 = \frac{2L_2}{c\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2.2)$$

Časový rozdíl mezi dráhami obou paprsků pak bude

$$\Delta t_1 = t_2 - t_1 = \frac{2}{c} \left(\frac{L_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{L_1}{1-\beta^2} \right).$$

Otočíme-li celé zařízení o 90° , bude ve směru pohybu Země rameno L_2 a analogickou úvahou získáme časový rozdíl pro oba paprsky ve tvaru

$$\Delta t_2 = \frac{2}{c} \left(\frac{L_2}{1-\beta^2} - \frac{L_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right).$$

Při otočení celého zařízení by tedy mělo dojít k posunutí interferenčních proužků, které odpovídá časovému rozdílu

$$\Delta t = \Delta t_2 - \Delta t_1 = \frac{2}{c} (L_1 + L_2) \left(\frac{1}{1-\beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \approx \frac{L_1 + L_2}{c} \beta^2. \quad (2.3)$$

Z optiky bylo známo, že k posunutí o jeden interferometrický proužek dojde tehdy, je-li časový rozdíl $\Delta t \approx \lambda/c$ a tedy musí platit $L_1 + L_2 \approx \lambda/\beta^2$, což při hodnotách $\beta \approx 10^{-4}$; $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ vyžaduje aby $L_1 + L_2 \approx 50 \text{ m}$. Tuto podmínku je možno splnit vícenásobnými odrazy paprsků na zrcadlech.

První série pokusů konaných Michelsonem v r. 1881 v Postupimi byla nepoužitelná, neboť předpokládaný interferenční posun byl v mezích chyby měření. Dostatečnou přesnost měla až druhá série pokusů, konaných společně s americkým chemikem E. Morleyem v Clevelandu v roce 1887. K překvapení experimentátorů i napjaté fyzikální veřejnosti však ani při opakování pokusu nedošlo k žádnému posunutí interferenčních proužků.

Pro vysvětlení negativního výsledku Michelson – Morleyova pokusu (i dalších důmyslných experimentů podobného typu) byla vymyšlena a „zkonstruována“ řada hypotéz. Vysvětlení negativního výsledku Michelson – Morleyova pokusu byly velmi blízko zejména holandský fyzik Lorentz a Francouz Poincaré. Nejen oni, ale i řada dalších fyziků tušila podstatu problému, žádný z nich se však neodhodlal naplno ji vyslovit.

Řešení i vysvětlení problému podal ve fyzikálních kruzích téměř neznámý zaměstnanec patentního úřadu v Bernu Albert Einstein v r. 1905. Jeho teorie založená na dvou základních postulátech byla nazvána *speciální teorie relativity*.

2.2 Einsteinovy postuláty

Hluboká analýza tehdejších představ o prostoru a čase, která přivedla Einsteina k jeho výsledkům, vyvolala obrovský ohlas nejen ve fyzice, ale i ve filosofii. Einstein navždy „pohřbil“ pojem absolutního času a prostoru a dospěl k závěru, že *principiálně* není možné fyzikálně od sebe odlišit žádné dvě různé inerciální soustavy.

I. postulát speciální teorie relativity – princip relativity

Pro formulaci všech fyzikálních zákonů jsou všechny inerciální soustavy rovnocenné.

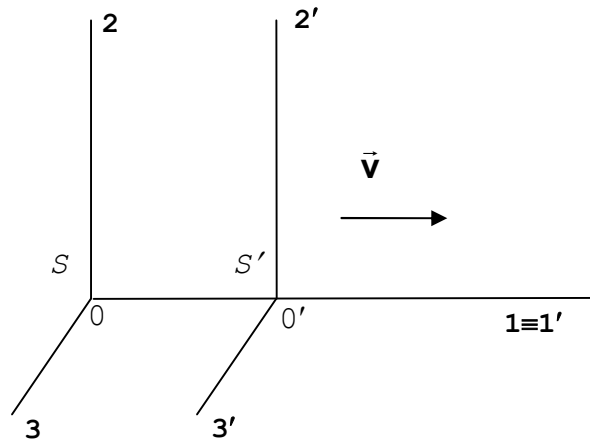
II. postulát speciální teorie relativity – princip konstantní rychlosti světla

Světelné signály se šíří ve všech inerciálních soustavách konstantní rychlostí (pro vakuum $c = 299\,792\,458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$).

2.3 Lorentzova transformace

Odvození Lorentzovy transformace ze základních postulátů

Pro konkrétní aplikace obou výše uvedených postulátů je nutná znalost transformace prostorových souřadnic x_i , $i=1, 2, 3$ a času t při přechodu z inerciální soustavy S do inerciální soustavy S' , která se vůči soustavě S pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí \vec{v} , viz obr. 2.2.



Obr. 2.2: Schéma pro odvození Lorentzovy transformace

Protože i sama transformace představuje fyzikální zákon, musí splňovat oba uvedené postuláty. Vyloučíme-li singularity, musí být hledaná transformace lineární v proměnných x_i, t . Nejobecnější lineární vztah mezi proměnnými x_i, t a x'_i, t' vyjádříme ve tvaru

$$\begin{aligned}x'_i &= \alpha_{ij}x_j + \alpha_{i0}t + \alpha_i, \\t' &= \alpha_{0j}x_j + \alpha_{00}t + \alpha_0.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Při odvozování vyjdeme z nejjednodušší konfigurace, kdy osy 1 a $1'$ splývají a leží ve směru rychlosti \vec{v} , osy 2 a $2'$ a 3 a $3'$ jsou rovnoběžné a téhož smyslu. Necht' v čase $t = t' = 0$ počátky obou soustav splývají, potom musí konstantní členy v rovnicích (2.4) vymizet $\alpha_i = \alpha_0 = 0$; $i = 1, 2, 3$.

Protože dále při $x_2 = x_3 = 0$ musí být rovněž $x'_2 = x'_3 = 0$, je $\alpha_{21} = \alpha_{31} = 0$, resp. $\alpha_{20} = \alpha_{30} = 0$. Pro $x_2 = 0$ musí být $x'_2 = 0$ a obdobně pro $x_3 = 0$ musí být $x'_3 = 0$ a tedy $\alpha_{23} = \alpha_{32} = 0$. Výrazy pro x'_2 a x'_3 se tak zjednoduší na tvar

$$\begin{aligned}x'_2 &= \alpha_{22}x_2, \\x'_3 &= \alpha_{33}x_3.\end{aligned}$$

Z rovnocennosti všech směrů kolmých na osu osy 1 a $1'$ že vyplývá, $\alpha_{22} = \alpha_{33} = \alpha$. Z principu relativity, tj. rovnocennosti obou systémů pak plyne $\alpha = 1$ a tedy

$$\begin{aligned}x'_2 &= x_2, \\x'_3 &= x_3.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Zbývá určit transformační vztahy pro x'_1 a t' . Nejprve opět z rovnocennosti všech směrů kolmých na osy I a I' vyplývá, že transformační vztahy pro x'_1 a t' nemohou záviset na x'_2 a x'_3 . Transformační vztahy mají tedy tvar

$$\begin{aligned}x'_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{10}t, \\t' &= \alpha_{01}x_1 + \alpha_{00}t.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Konstanty α_{11} a α_{00} jsou určitě nenulové. Zavedeme nové konstanty $\alpha_{11} = \gamma$, $\alpha_{10} = -\gamma v$ a první ze vztahů (2.6) upravíme na tvar

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt),\tag{2.7}$$

z něhož je patrné, že každý bod soustavy S' se pohybuje vůči soustavě S ve směru osy I konstantní rychlostí $v = -\alpha_{10}/\alpha_{11}$. Za předpokladu, že osy I a I' mají stejnou orientaci, je konstanta γ kladná. Princip relativity vyžaduje, aby pro inverzní transformaci současně platil vztah

$$x_1 = \gamma(x'_1 + vt'),\tag{2.7a}$$

který se liší od vztahu (2.7) znaménkem rychlosti v . Pomocí vztahů (2.7) a (2.7a) dostaneme pro čas t' vztah

$$t' = \frac{(1 - \gamma^2)}{\gamma v} x_1 + \gamma t,\tag{2.8}$$

a pomocí vztahů (2.6) a (2.8) dostáváme pro konstanty α_{01} a α_{00} vyjádření

$$\alpha_{01} = \frac{(1 - \gamma^2)}{\gamma v}; \quad \alpha_{00} = \gamma t.$$

Hodnotu koeficientu γ určíme pomocí postulátu o konstantní rychlosti světla. Světelný signál vyslaný v čase $t = t' = 0$ urazí v obou soustavách S a S' dráhu $x_1 = ct$, resp. $x'_1 = ct'$. Dosazením vztahů (2.7) a (2.8) a následnou úpravou dostaneme pro koeficient γ vyjádření

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

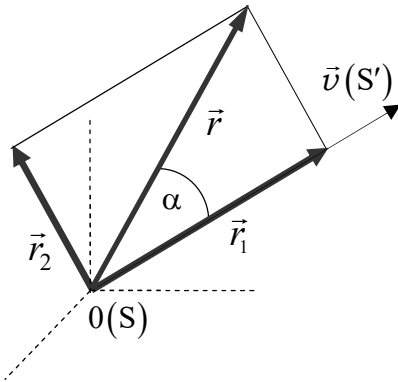
Transformační vztahy (2.4) lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned}x'_1 = \gamma(x_1 - vt) &= \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \\t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x_1\right) &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{t - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Pro inverzní transformaci platí stejní vztahy jen rychlost \vec{v} má opačnou orientaci, tedy $-\vec{v}$. Uvedená transformace nese označení **Lorenzova transformace**.

V obecném případě, kdy se inerciální soustava S' pohybuje vzhledem k soustavě S obecně orientovanou rychlostí $\vec{v} = \text{const.}$, rozložíme polohový vektor \vec{r} libovolného bodu na složku

\vec{r}_1 kolmou k vektoru rychlosti \vec{v} a na složku \vec{r}_2 , která je s vektorem \vec{v} rovnoběžná, viz obr. 2.3. Platí



Obr. 2.3: Obecný případ

$$\vec{r}_1 = \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v}}{v^2},$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{r}_1 = \vec{r} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v}}{v^2},$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v}}{v^2} + \left[\vec{r} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v}}{v^2} \right].$$

Při přechodu do soustavy S' se složka \vec{r}_2 nemění a složka \vec{r}_1 se transformuje podle vztahu (2.9), takže

$$\vec{r}' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left[\frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v}}{v^2} - \vec{v}t \right] + \left[\vec{r} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v}}{v^2} \right],$$

$$\vec{r}' = \vec{r} + (\gamma - 1) \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v}}{v^2} - \gamma \vec{v}t; \quad t' = \gamma \left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2} \right).$$

2.4 Vztah mezi Einsteinovým a Galileiho principem relativity

Při posuzování vztahu mezi Galileiho principem relativity a Einsteinovým principem relativity je dobré si uvědomit, že Galileiho princip je vlastně důsledkem Newtonových pohybových rovnic, z kterých přímo vyplývá, že rovnoměrný přímočarý pohyb neovlivňuje pohybový stav systému a dále, že čas plyne nezávisle na pohybovém stavu systému tedy, že čas je **absolutní**. Uvedené skutečnosti vyjadřuje **Galileiho transformace** udávající změnu prostorových souřadnic $x_i, i = 1, 2, 3$ a času t při přechodu od jedné inerciální soustavy do druhé, tj. při přechodu od soustavy S do soustavy S' , která se vůči soustavě S pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí \vec{v}

$$x'_i = x_i - v_i t, \quad t' = t; \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.10)$$

Z uvedeného výkladu je zřejmé, že rozšíření platnosti Galileiho principu relativity na jiné jevy než mechanické je diskutabilní. Je historickým paradoxem, že i Lorenzova transformace byla původně odvozena z Maxwellových rovnic a tedy např. i fakt, že světlo se šíří konstantní rychlostí ve všech soustavách, pro které platí Lorenzovy transformace, se jevil jako důsledek struktury Maxwellových rovnic.

Teprve Einstein na základě experimentálních výsledků a hluboké analýzy Newtonova pojetí času a prostoru zformuloval dva základní obecné postuláty a pomocí těchto obecných postulátů odvodil potřebné transformační vztahy. Ukázalo se, že tato transformace je totožná s transformací Lorenzovou. A protože Maxwellovy rovnice jsou vůči Lorenzově transformaci invariantní, a tedy jsou v souladu se základními postuláty, vyslovil Einstein zcela evidentní požadavek na přeformulování vztahů platných dosud pro mechaniku tak, aby rovněž byly v souladu se základními postuláty.

Jistou heuristickou podporou na uvedený Einsteinův požadavek je i splnění **principu korespondence**, podle kterého každá nová, obecnější teorie musí zahrnovat teorii starší, pokud se tato osvědčila, jako speciální případ. Pro $v \ll c$ platí pro poměr $v/c \rightarrow 0$ a vztahy

(2.9) přejdou ve vztahy (2.10). To je také důvodem, proč lze pro běžné situace, kdy je uvedená podmínka splněna, použít pro praktické aplikace Newtonovy pohybové rovnice.

Vyslovením dvou základních postulátů Einstein s konečnou platností zamítl koncepci Newtonova absolutního prostoru a absolutního času. Jak vyplývá ze vztahů (2.9) i čas je závislý na pohybovém stavu systému, i čas je **relativní**.

3 Důsledky Lorentzovy transformace

3.1 Relativnost současnosti událostí

Ztráta absolutnosti času vede k vážným důsledkům. Jedním z nejdůležitějších je pojem **současnosti dvou událostí** z hlediska speciální teorie relativity. Necht' soustava S' se pohybuje vůči soustavě S rovnoměrně přímočaře rychlostí v . Jsou-li A, B dvě bodové události, které mají v soustavě S časoprostorové souřadnice $A \equiv (x_A, 0, 0, t_A)$ a $B \equiv (x_B, 0, 0, t_B)$, potom se časový interval $\Delta t = t_B - t_A$, který proběhne mezi těmito událostmi v soustavě S , přetransformuje v soustavě S' pomocí vztahu pro transformaci času

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx_1}{c^2} \right)$$

následujícím způsobem

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \gamma \left[(t_B - t_A) - \frac{v}{c^2} (x_B - x_A) \right] = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right). \quad (3.1)$$

Necht' uvažované události A, B proběhnou v soustavě S současně, tj. $t_A = t_B \Rightarrow \Delta t = 0$. Ze vztahu (3.1) je zřejmé, že pozorovateli v soustavě S' se události A, B nejeví jako současné ($\Delta t' = t'_B - t'_A \neq 0$), je-li $x_A \neq x_B$. Pojem současnosti je tedy **relativní**. Z uvedeného vztahu dále vyplývá $|t'_B - t'_A| < |x'_B - x'_A|/c$. To znamená, že jsou-li dvě události A, B v inerciální soustavě S současné, pak v žádné inerciální soustavě S' nemůže být jejich časový rozdíl větší než doba, kterou potřebuje světlo, aby dospělo z místa jedné události do místa druhé události.

3.2 Princip kauzality, maximální rychlost signálu

Současnost událostí je v Newtonově mechanice pojem absolutní. Je to dáno absolutním plynutím času. Ve speciální teorii relativity je však čas závislý na pohybovém stavu soustavy, ke které posuzovanou událost vztahujeme. Protože však podle Einsteinova principu relativity jsou všechny inerciální soustavy fyzikálně zcela rovnocenné, musíme současnost událostí zjištěnou měřením v soustavě S pokládat za stejně pravdivou, skutečnou a objektivní, jako jejich různý časový průběh v soustavě S' .

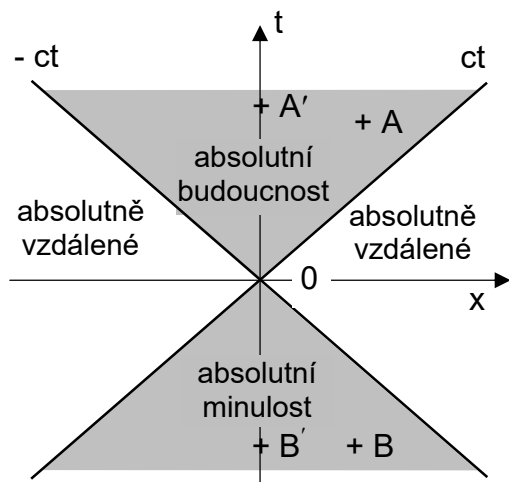
Je jasné, že vztahy $t_A = t_B; t'_A > t'_B; t''_A < t''_B$ neodporují obecné logice, neboť to jsou vztahy mezi údaji různých hodin, i když se ve všech třech případech týkají téže dvojice událostí. Není však již tak zřejmé, zda logická rovnocennost těchto vztahů neodporuje jiným, obecně uznávaným fyzikálním principům. Jedním z těchto principů je **princip kauzality (příčinnosti)**. Tento princip má přímý vztah k časovému sledu událostí a vyžaduje, aby příčina vždy předcházela následek. Tento princip je základem všeho našeho poznání a jeho porušení by zrelativizovalo veškeré naše dosud získané poznatky o vnějším světě.

Jako příčina a následek spolu mohou souviset pouze následné události A a B , jejichž prostorové a časové souřadnice splňují ve všech inerciálních soustavách nerovnost

$$|t_B - t_A| \geq |x'_B - x'_A|/c. \quad (3.2)$$

Z nerovnosti (3.2) vyplývá pro zachování principu kauzality požadavek na rychlost šíření fyzikálních signálů $v \leq c$. Rychlost světla ve vakuu představuje tedy **maximální rychlost šíření signálů**.

Časové pořadí následných událostí splňujících podmínku (3.2) je absolutní (stejně ve všech inerciálních soustavách). Platí-li pro tyto události navíc také podmínka $t_B < t_A$, je A vůči B událostí absolutně budoucí a B vůči A událostí absolutně minulou.



Obr. 3.1: Struktura časoprostoru z hlediska průběh událostí

Prostoročas v okolí daného prostoročasového bodu 0 lze rozdělit na tři oblasti znázorněné na obr. 3.1.

Fyzické těleso nebo signál v oblasti **absolutní minulosti** se může dostat z libovolného bodu B rychlostí menší než je rychlost světla do bodu 0 a ovlivnit zde probíhající události. Události proběhlé v minulosti v bodě B' , který leží ve stejném bodu prostoru jako bod 0 , ovlivňují proto události probíhající v bodě 0 nyní. Události probíhající v bodě 0 nyní, ovlivní běh událostí v bodě A' v budoucnu a mohou ovlivnit události v libovolném bodě A v oblasti **absolutní budoucnosti**. Body nebo události ležící v oblastech **absolutně vzdálených** nemají k událostem probíhajícím v bodě 0 žádný kauzální vztah.

3.3 Skládání rychlostí

Negativní výsledek Michelson – Morleyova pokusu a princip konstantní rychlosti světla dává tušit, že pro skládání rychlostí musí ve speciální teorii relativity platit jiná pravidla než v Newtonově mechanice. Nechť se daný bod pohybuje v soustavě S' obecně rychlostí \vec{u}' o složkách $\vec{u}' \equiv (u'_1, u'_2, u'_3)$. Pro jednotlivé souřadnice v soustavě S' potom platí $x'_1 = u'_1 t'$, $x'_2 = u'_2 t'$, $x'_3 = u'_3 t'$. Po dosazení transformačních vztahů vyplývajících z Lorenzovy transformace, jejich derivací a následném vydělení dostaneme

$$u_1 = \frac{u'_1 + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_1}; \quad u_2 = u'_2 \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_1}; \quad u_3 = u'_3 \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_1}. \quad (3.3)$$

To jsou hledaná pravidla pro skládání rychlostí. Jejich správnost ověříme následujícím příkladem:

Nechť se v soustavě S' pohybující se rychlostí $v = c$, pohybuje bod rovněž rychlostí $u'_1 = c$. Podle pravidel klasické mechaniky by měla výsledná rychlost bodu v systému S být rovna $u_1 = 2c$. Po dosazení do vztahu (3.3) dostaneme $u_1 = c$, tedy výsledek, který je v souladu s principem konstantní rychlosti světla.

3.4 Dilatace času

S relativností současnosti úzce souvisí další relativistický jev, tzv. *dilatace času* neboli zpomalení chodu hodin, které jsou v pohybu vůči zvolenému systému. Porovnání chodu hodin provedeme tak, že porovnáme časový interval Δt na hodinách v soustavě S , která je v klidu, s časovým intervalem $\Delta t'$ v soustavě S' , která se vůči soustavě S pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí \vec{v} . Časový interval Δt určíme tak, že na hodinách, které jsou vůči soustavě S v klidu, odečteme čas v okamžicích t_1 a t_2 , přičemž $t_2 > t_1$, a určíme jejich rozdíl

$$\left. \begin{aligned} t'_1 &= \gamma \left(t_1 - \frac{vx_0}{c^2} \right) \\ t'_2 &= \gamma \left(t_2 - \frac{vx_0}{c^2} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1),$$

a tedy

$$\Delta t' = \Delta \tau = \gamma \Delta t. \quad (3.4)$$

Z uvedeného vztahu vyplývá, že časová jednotka $\Delta t'$ je v soustavě S' γ -krát delší než soustavě S a tedy hodiny systému S' jdou γ^{-1} -krát pomaleji než hodiny v systému S .

Čas tedy plyne nejpomaleji v soustavě, vůči které jsou hodiny v klidu. Tento čas označujeme jako *vlastní čas*.

Dilataci času lze potvrdit experimentálně názorně na rozpadu mionů. Jsou to elementární částice, které vznikají jako druhotné produkty při srážkách částic primárního kosmického záření s molekulami plynů atmosféry. Miony se rozpadají na elektron a dvě neutrina. Z pozorování vyplývá, že miony vznikají zhruba ve výšce 30 km se pohybují rychlostí $0,9c$. Z této výšky pak dopadají na zemský povrch. Měření ukazují, že v klidu se miony rozpadají s charakteristickou dobou života $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6} s$. Z uvedených údajů tak vyplývá, že při průletu 30 km zemskou atmosférou, mají dobu života podstatně delší $\Delta t \geq 10^{-4} s \approx 50\tau_0$. Vysvětlení dává vztah (3.4), který byl i na základě experimentálních výsledků potvrzen.

Pozn.:

V souvislosti s dilatací času se zmíňme o tzv. paradoxu dvojčat. Jedná se o následující problém: Dva kosmonauti – dvojčata A, B, se rozhodnou, že jeden z nich – kosmonaut A, zůstane na Zemi a druhý, kosmonaut B, odletí do vesmíru, kde se pohybuje velkou rychlostí. Vzhledem k dilataci času by měl být po návratu kosmonaut B mladší než kosmonaut A. Ovšem tuto úvahu lze obrátit – z hlediska kosmonauta B se pohyboval kosmonaut A a mladší by měl být kosmonaut A. Pro objasnění uvedeného paradoxu je nutné podrobněji analyzovat podmínky pro aplikaci principu relativity. Aby se kosmonaut B mohl vrátit, musel obrátit raketu zpět k Zemi a jeho pohyb byl alespoň po určité době zrychlený a toto zrychlení musel kosmonaut B „pocítit.“ Tím je dán mezi oběma kosmonauty rozdíl v „absolutním“ smyslu. Problém není symetrický. Mladší může být pouze kosmonaut B.

3.5 Kontrakce délek

Dalším relativistickým efektem je tzv. kontrakce délek neboli zkracování délky ve směru pohybu. Mějme opět dvě inerciální soustavy S a S' , které se vůči sobě pohybují rovnoměrně přímočaře rychlostí \vec{v} . Naším úkolem bude porovnat „délku měřicí tyče“ ve směru pohybu v těchto soustavách. Necht' měřicí tyč délky l' je vůči soustavě S' v klidu. Chce-li pozorovatel, který je v klidu vůči soustavě S , změřit délku měřicí tyče, může to např. udělat tak, že v okamžiku $t = 0$, kdy ho míjí počátek měřicí tyče zmačkne stopky a zastaví

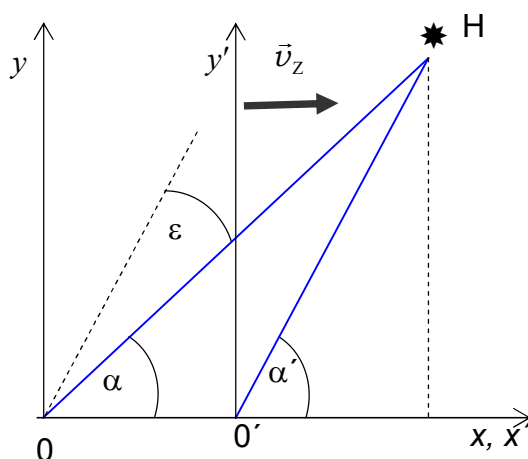
v okamžiku, kdy ho mĳí konec tyče. Potom pro délku měřicí tyče v soustavě S platí $l = v\Delta t$. Pozorovatel v soustavě S' zmačkne stopky v okamžiku $t' = 0$, kdy např. počátek soustavy S mĳí počátek měřicí tyče a zastaví je v okamžiku, kdy počátek soustavy S mĳí konec měřicí tyče. Potom v soustavě S' platí $l' = v\Delta t'$, a tedy $\Delta t' = l'/v$. Vezmeme-li v úvahu dilataci času, vztah (3.4), pak platí

$$l = v\Delta t = v\frac{\Delta t'}{\gamma} = \frac{l'}{\gamma} \Rightarrow l = l'\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}. \quad (3.5)$$

Pozorovateli, který je v klidu vůči soustavě S , se měřicí tyč jeví kratší, dochází ke kontrakci délky ve směru pohybu.

3.6 Relativistický výklad aberace světla hvězd

Nechť S je soustava spojená s hvězdou a S' soustava spojená se Zemí, která se vzhledem k soustavě S pohybuje rychlostí \vec{v}_z , viz obr. 3.2.



Obr. 3.2: Aberace hvězd

Svírá-li směr světelného paprsku v rovině $x'y'$ v soustavě S' s osou x' , tj. se směrem rychlosti pohybu \vec{v}_z úhel α' , jsou složky jeho rychlosti $v'_x = -c \cos \alpha'$, $v'_y = c \sin \alpha'$. Pro úhel α světelného paprsku v soustavě S ($v_x = c \cos \alpha$, $v_y = c \sin \alpha$) plyne ze vztahů pro skládání rychlostí (3.3)

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha' + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha'} ; \quad \sin \alpha = \sin \alpha' \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha'}. \quad (3.6)$$

Ze vztahu (3.6) plyne pro úhel aberace světla $\varepsilon = \Delta\alpha = \alpha - \alpha'$ pro $\varepsilon \ll 1$ ($\sin \varepsilon \approx \varepsilon$, $\cos \varepsilon \approx 1$) a pro $\vec{v}_z \ll c$ a $\sin \alpha \approx 1$ s přesností do členů prvního řádu v proměnné \vec{v}_z/c klasický vztah $\varepsilon = v_z/c$.

3.7 Relativistický výklad Fizeauova pokusu

Nechť soustava S je v klidu vůči laboratoři a soustava S' , spojená s izotropním průhledným prostředím o indexu $n > 1$ (voda), se vůči soustavě S pohybuje rovnoměrně přímočaře

rychlostí ve směru osy (1) $v = \beta c$. V uvedeném prostředí se tedy šíří světlo všemi směry rychlostí $u_0 = c/n$. Světelná vlna postupující ve směru osy (1) pak bude postupovat vůči soustavě S rychlostí

$$u = \frac{u_0 + v}{1 + \frac{vu_0}{c^2}} = u_0 \frac{1 + \beta n}{1 + \frac{\beta}{n}}.$$

To je přesný vztah pro „strhávání světla.“ Pro $\beta \ll 1$ dostaneme přibližný Fizeauův vztah, viz (1.2) kap. 1,

$$u = u_0 (1 + \beta n) \left(1 - \frac{\beta}{n} \right) \approx u_0 + v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right),$$

ktejř potvrdil experimentálně Fizeau již v roce 1851! „Strhávání světla“ zjištěné Fizeau je tedy důsledkem relativistického skládání rychlostí.

3.8 Relativistický výklad Michelson – Morleyova pokusu

Kontrakce délky ve směru pohybu vysvětluje negativní výsledek Michelson – Morleyova pokusu. Negativní výsledek Michelsonova pokusu lze objasnit mylným předpokladem, že délky L_1 a L_2 jsou skutečné délky ramen. Pozorovatel měřil délku ramen interferometru ovšem měřítkem, jehož délka závisí na jeho orientaci vůči směru rychlosti pohybu. V základním postavení (1) interferometru měřením zjistil délky ramen $L_{11} = L_1$ a $L_{12} = L_2$ nezávisle na orientaci interferometru. Protože se domníval, že má „dobré měřítko,“ položil při otočení interferometru o $\pi/2$, případ (2), $L_{21} = L_2$ a $L_{22} = L_1$ a očekával nenulový výsledek podle (2.3). Správně měl však v základním postavení interferometru položit $L_{11} = L_1 \gamma^{-1}$ a $L_{21} = L_2$, neboť délku L_1 měřil zkráceným měřítkem a na základě vztahu (2.1) očekávat časový interval

$$\Delta t_1 = \frac{2(L_2 - L_1)}{c \sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Po otočení interferometru o $\pi/2$ měl položit $L_{21} = L_2 \gamma^{-1}$ a $L_{22} = L_1$ a podle (2.2) očekávat časový interval

$$\Delta t_2 = \frac{2(L_2 - L_1)}{c \sqrt{1 - \beta^2}},$$

tj. stejný jako v případě základního postavení přístroje a ve shodě s výsledkem experimentu dostaneme nulové posunutí proužků.

4 Minkowského prostoročas

V roce 1907, dva roky po publikování základů speciální teorie relativity, zavedl německý matematický fyzik HERMANN MINKOWSKI (1864 – 1909) pojem čtyřrozměrného časoprostorového kontinua umožňující novou formu zápisu veličin a fyzikálních zákonů ve čtyřsložkovém tvaru.

Minkowského prostoročas umožnil zajímavou geometrickou interpretaci Lorentzovy transformace a vybudování matematického aparátu, díky němuž se speciální teorie relativity stala velmi přehlednou. Minkowski poukázal na to, že prostorové a časové údaje jsou

vzájemně neoddělitelné a provázané. Každá událost musí tedy být popsána třemi prostorovými a jednou časovou souřadnicí. Těmito čtyřmi souřadnicemi (x_1, x_2, x_3, x_4) je jednoznačně určen bod (bodová událost) v abstraktním čtyřrozměrném prostoru – tzv. **Minkowského prostoročase** M_4 .

Pro zachování stejného rozměru všech čtyř souřadnic (x_1, x_2, x_3, x_4) má časová souřadnice tvar $x_4 = ict$, kde i je imaginární jednotka, a c je rychlost světla ve vakuu.

Podle Minkowského je svět čtyřrozměrným souborem bodových událostí o prostoročasových souřadnicích

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict. \quad (4.1)$$

Formální analogie s třírozměrnou euklidovskou geometrií je důvodem, proč označujeme Minkowského prostoročas za **pseudoeuklidovský**.

4.1 Prostoročasový interval

Uvažujme dvě bodové události o prostoročasových souřadnicích $(1) \equiv (x_1, y_1, z_1, ict_1)$ a $(2) \equiv (x_2, y_2, z_2, ict_2)$. Analogicky s třírozměrnou euklidovskou geometrií zavedeme metriku čtyřrozměrného prostoročasu vztahem

$$s_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2 \quad (4.2)$$

$$s_{12}^2 = \left(x_\mu^{(2)} - x_\mu^{(1)} \right) \left(x_\mu^{(2)} - x_\mu^{(1)} \right); \quad \mu = 1, 2, 3, 4,$$

definujícím tzv. prostoročasový interval s_{12} mezi bodovými událostmi (1) a (2).

Pro formální odlišení třírozměrného euklidovského prostoru od čtyřrozměrného prostoročasu při použití Einsteinova sčítacího pravidla používáme pro sčítací index probíhající hodnoty 1, 2, 3, 4 malá písmena řecké abecedy.

Při Lorentzově transformaci vztahu (4.2) dostaneme

$$s_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2 =$$

$$= (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2 (t'_2 - t'_1)^2 = s_{12}'^2.$$

Prostoročasový interval

$$s_{12}^2 = \left(x_\mu^{(2)} - x_\mu^{(1)} \right) \left(x_\mu^{(2)} - x_\mu^{(1)} \right); \quad \mu = 1, 2, 3, 4$$

dvou bodových událostí ve čtyřrozměrném prostoročase je **invariantem** Lorentzovy transformace.

Invariantem je tedy i elementární posunutí

$$ds^2 = dx_\mu dx_\mu; \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (4.3)$$

V klasické fyzice jsou výrazy $dx^2 + dy^2 + dz^2$ a dt^2 invarianty Galileiho transformace. Ve speciální teorii relativity tyto výrazy invariantnost, tj. neměnnost vůči Lorentzově transformaci ztrácejí a invariantem vůči Lorentzově transformaci je teprve jejich spojení do jediného výrazu ve tvaru $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$.

4.2 Čtyřvektory

Dosadíme-li prostoročasové souřadnice (4.1) do Lorentzovy transformace dostaneme

$$x'_1 = \frac{x_1 + i\beta x_4}{\sqrt{1-\beta^2}}; x'_2 = x_2; x'_3 = x_3; x'_4 = \frac{x_4 - i\beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Zavedme úhel φ vztahy

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad ; \quad \sin \varphi = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Lorentzovu transformaci pak přepíšeme na tvar

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \varphi + x_4 \sin \varphi, \\ x'_2 &= x_2, \\ x'_3 &= x_3, \\ x'_4 &= -x_1 \sin \varphi + x_4 \cos \varphi. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Výrazy (4.4) jsou transformačními vztahy pro otočení soustavy souřadnic v rovině x_1x_4 o úhel φ . Přejít z inerciální soustavy S do inerciální soustavy S' , která se vůči soustavě S pohybuje rychlostí $\vec{v} = \text{const.}$ ve směru osy x_1 odpovídá otočení soustavy souřadnic o úhel φ v rovině x_1x_4 . Pro úhel φ platí $\text{tg } \varphi = i\beta$.

Odvodíme pro příklad pomocí uvedené interpretace vztah pro relativistické skládání rychlostí.

Nechť se soustava S' pohybuje vůči klidné soustavě S rychlostí $\vec{v} = \text{const.}$ a daný bod má vůči soustavě S' rychlost \vec{u}' . Transformaci z S do S' přiřadíme úhel $\text{tg } \varphi_1 = iv/c$. Rychlosti \vec{u}' přiřadíme úhel $\text{tg } \varphi_2 = iu'/c$.

Pro transformaci ze soustavy S do soustavy S' , které přiřadíme úhel $\text{tg } \varphi = iu/c$, potom platí $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ a tedy

$$\begin{aligned} \text{tg } \varphi &= \text{tg}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\text{tg } \varphi_1 + \text{tg } \varphi_2}{1 - \text{tg } \varphi_1 \text{tg } \varphi_2}, \\ \frac{i}{c} u &= \frac{i}{c} \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}. \end{aligned}$$

Transformaci kartézských tenzorů můžeme ve čtyřrozměrném prostoročase vyjádřit maticí, jejímiž prvky jsou směrové kosiny úhlů os obou soustav souřadnic. Lorentzově transformaci (4.4) odpovídá matice

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Prvky matice (4.5) splňují relace ortonormality $a_{\mu\nu}a_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda}$.

Čtyřvektor polohy x_μ charakterizuje polohu bodové události v časoprostoru M_4 .

Pohybuje-li se částice v E_3 po reálné trajektorii, pohybuje se v M_4 po tzv. **světočáře**. Světočárou částice, která je vzhledem k dané inerciální soustavě v E_3 v klidu je v M_4 přímka rovnoběžná s časovou osou.

Analogie s euklidovským prostorem umožňuje pomocí Minkowského formalismu rozšířit definici tenzorů i do čtyřrozměrného prostoročasu.

Čtyřvektor A_μ je veličina, která se transformují podle zákona $A'_\mu = a_{\mu\nu} A_\nu$, kde $a_{\mu\nu}$ jsou kosiny úhlů os obou soustav. Rozepíšeme-li tento vztah pomocí transformačních vztahů (4.4), dostaneme

$$A'_1 = \gamma(A_1 + i\beta A_4); A'_2 = A_2; A'_3 = A_3; A'_4 = \gamma(-i\beta A_1 + A_4).$$

Definice tenzorů vyšších řádů v M_4 je analogická definici kartézských tenzorů v E_3 .

4.3 Čtyřvektor rychlosti, vlastní čas

Rychlost částice v M_4 získáme jako první derivaci čtyřvektoru elementárního posunutí ds částice v soustavě S podle invariantu, který je relativistickou analogií času v klasické fyzice. V klasické kinematice je čas t invariantem Galileiho transformace. Derivací libovolného tenzoru podle invariantu se řád tenzoru nemění.

V relativistické kinematice přestal být čas invariantní. Derivace podle času je derivací podle souřadnice, a proto při ní dochází ke zvýšení řádu derivovaného tenzoru o jednotku. K tomu, aby bylo možno definovat veličinu (čtyřrychlost), která by přešla v limitním přechodu ($\beta \rightarrow 0$) ve vektor rychlosti klasické mechaniky, je nutné pro derivování „zkonstruovat“ invariant, který má rozměr času. Tomuto požadavku vyhovuje výraz $d\tau$ definovaný vztahem

$$d\tau^2 = -\frac{1}{c^2} dx_\mu dx_\mu,$$

který je vzhledem k platnosti (4.3) invariantem Lorentzovy transformace. Ve vlastní soustavě částice – tj. v soustavě S' , v níž je částice v klidu platí

$$d\tau^2 = -\frac{1}{c^2} dx'_\mu dx'_\mu = -\frac{1}{c^2} (ic dt')^2 = dt'^2.$$

Invariant $d\tau$ má tedy význam časového intervalu, měřeného hodinami pevně spojenými s uvažovanou částicí – τ je tzv. **vlastní čas** částice.

V obecném případě, kdy se částice pohybuje vůči soustavě S rychlostí $\vec{u} = du_i/dt$, $i = 1, 2, 3$ dostaneme

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= -\frac{1}{c^2} dx_\mu dx_\mu = -\frac{1}{c^2} [dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2] = \\ &= dt^2 \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \right\} = \left(1 - \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{c^2} \right) dt^2 \\ d\tau &= \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} dt, \end{aligned} \quad (4.6)$$

tedy výraz odpovídající dilataci času v pohybující se soustavě, registrovanou pozorovatelem v soustavě S , vůči které je v klidu.

Čtyřrychlost u_μ je definována vztahem

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}; \mu = 1, 2, 3, 4.$$

Dosažením vztahů (4.3) a (4.6) dostaneme

$$u_1 = \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \frac{dx_1}{dt} = \frac{u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}; u_2 = \dots; u_4 = \frac{ic}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$u_1 = \frac{u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}; u_2 = \frac{u_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}; u_3 = \frac{u_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}; u_4 = \frac{ic}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Velikost čtyřrychlosti je invariantem Lorentzovy transformace, neboť platí

$$u_\mu u_\mu = -c^2. \quad (4.7)$$

Tato vlastnost – zachování velikosti vůči Lorentzově transformaci je obecnou vlastností čtyřvektorů. Je to analogie se situací v E_3 , v němž se při otočení soustavy souřadnic velikost vektorů nemění.

Derivací vztahu (4.7) podle $d\tau$ dostaneme důležitý vztah

$$u_\mu \frac{du_\mu}{d\tau} = 0.$$

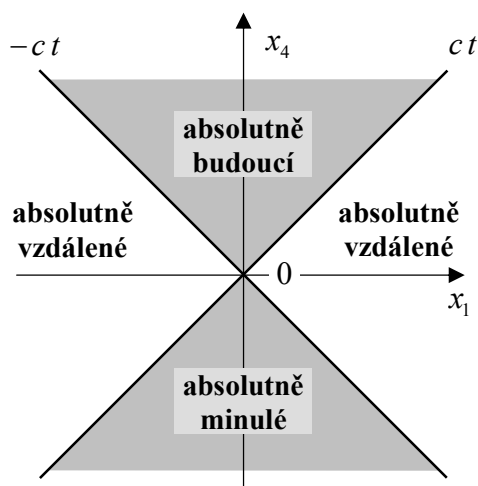
kde

$$w_\mu = \frac{du_\mu}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \frac{du_\mu}{dt}.$$

je čtyřzrychlení w_μ .

4.4 Geometrické znázornění Minkowského prostoročasu

Normální euklidovský prostor E_3 je podprostorem v Minkowského prostoru, a proto pro znázornění časoprostorových vazeb vyplývajících ze speciální teorie relativity zvolíme rovinu



$x_1 x_4$ s počátkem v bodové události o souřadnicích $x_1 = x_4 = 0$, viz obr. 4.1

Světelný kužel vycházející z dané bodové události, na obr. 4.1 počátek, rozděluje prostoročas na oblasti **absolutní minulosti** a **absolutní budoucnosti** a na oblast událostí **absolutně vzdálených**.

Prostoročasový interval mezi kteroukoliv bodovou událostí a danou bodovou událostí v oblasti absolutní minulosti a absolutní budoucnosti je vždy imaginární $s^2 < 0$, což znamená, že intervaly mezi těmito událostmi jsou **časupodobné** a tyto události samy následné.

Obr. 4.1: Struktura prostoročasu

Ke kterékoliv události v uvedené oblasti lze nalézt soustavu S' , v níž tyto události proběhnou v témže bodě. Naopak nelze najít inerciální soustavu, v níž by tyto události proběhly v témže okamžiku.

Pro události v oblasti absolutní budoucnosti je $t > 0$, takže tyto události proběhnou až po události v počátku.

Oblast absolutní minulosti představuje naopak vzhledem k události v počátku události absolutně minulé.

Prostoročasový interval mimo oblast absolutní minulosti a absolutní budoucnosti je vždy **prostorupodobný** $s^2 > 0$ a události probíhající v této oblasti a bodovou událostí v počátku jsou proto **kvazisoučasné**. V různých inerciálních soustavách proběhnou s různou následností. Proto jsou pojmy jako „současné, dříve, později, budoucnost, minulost“ ve vztahu těchto událostí a události v počátku pouze relativní.

V žádné inerciální soustavě však nemohou tyto události proběhnout v témže místě jako bodová událost v počátku. Proto tyto oblasti označujeme jako události **absolutně vzdálené** od bodové události v počátku.

5 Relativistická dynamika

5.1 Invariance fyzikálních zákonů

Podle speciální teorie relativity jsou všechny inerciální vztažné soustavy ekvivalentní pro popis fyzikálních dějů. Matematický zápis těchto dějů musí mít tedy ve všech inerciálních soustavách stejný tvar – musí být **invariantní** vůči Lorentzově transformaci.

Rovnici, jejímiž stranami jsou tenzory stejného řádu, označujeme jako **kovariantní**. Fyzikální zákon je invariantní, je-li vyjádřen kovariantní rovnicí.

Klasická Newtonova pohybová rovnice částice

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

není z hlediska speciální teorie relativity kovariantní, neboť na obou stranách této rovnice jsou tenzory různých řádů. Je tomu tak proto, že čas – podle Newtona invariant, není ve speciální teorii relativity invariantní, je souřadnicí a derivace tenzoru podle souřadnice zvyšuje jeho řád o jednu.

Newtonova pohybová rovnice tedy není kovariantní (na její levé straně je tenzor druhého a na pravé straně tenzor prvního řádu), a proto nemůže být invariantem Lorentzovy transformace. Je proto nutné najít novou pohybovou rovnici, která

je kovariantní a tedy i invariantní vůči Lorentzově transformaci,

splňuje princip korespondence, tj. v limitním přiblížení $c \rightarrow \infty$ přejde do klasického Newtonova tvaru.

5.2 Relativistická pohybová rovnice

Při relativistickém zobecnění Newtonovy pohybové rovnice

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} m\vec{v} = \vec{F} \quad (5.1)$$

vyjdeme z Minkowského formalizmu a přejdeme do čtyřrozměrného časoprostoru. Abychom zachovali kovarianci rovnice (5.1) musíme derivovat podle invariantu času $dt = d\tau \left(\sqrt{1 - (u/c)^2} \right)$ tedy podle vlastního času částice pohybující se vůči klidné inerciální soustavě S rychlostí $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$. Potom

$$\frac{d}{d\tau} m_0 u_\mu = K_\mu; \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \quad (5.2)$$

kde K_μ je čtyřsíla a u_μ čtyřrychlost o složkách

$$u_1 = \frac{u_x}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}; \quad u_2 = \frac{u_y}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}; \quad u_3 = \frac{u_z}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}; \quad u_4 = \frac{ic}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}. \quad (5.3)$$

Skalár m_0 označuje hodnotu skalární veličiny, která je analogická konstantní setrvačné hmotnosti m částice v Newtonově rovnici; index „nula“ vyjadřuje předpoklad invariance m_0 vůči Lorentzově transformaci.

5.3 Čtyřsíla

Čtyřvektor K_μ na pravé straně rovnice (5.2) je časoprostorovým analogem vektoru síly $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$, tedy čtyřvektor síly neboli **čtyřsíla**. Musí mít takový tvar, aby při limitním přechodu do nerelativistické fyziky ($u^2/c^2 \rightarrow 0$) platilo

$$K_1 \rightarrow F_x, \quad K_2 \rightarrow F_y, \quad K_3 \rightarrow F_z, \quad (5.4)$$

Položme $\mu = 1$, potom platí

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 u_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = \frac{d}{dt} (m u_1) = K_1 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \rightarrow F_x, \quad (5.5)$$

kde

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (5.6)$$

Vztah (5.5) splňuje podmínku (5.4). Pro určení čtvrté složky čtyřsíly K_4 vynásobíme rovnici (5.2) skalárně čtyřrychlostí u_μ

$$u_\mu \frac{d}{d\tau} m_0 u_\mu = \frac{1}{2} m_0 \frac{d}{d\tau} u_\mu u_\mu = K_\mu u_\mu = 0$$

a tedy

$$K_\mu u_\mu = \frac{F_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{u_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + \dots + \frac{F_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{u_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + K_4 \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 0$$

$$K_4 = \frac{i}{c} \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Složky čtyřsíly K_μ jsou tedy určeny vztahy

$$K_1 = \frac{F_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, K_2 = \frac{F_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, K_3 = \frac{F_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, K_4 = \frac{i}{c} \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (5.7)$$

Poznámka:

Pod názvem Minkowského síla je v literatuře často uváděn vektor $\vec{F}_M = \vec{F} / \sqrt{1 - (u^2/c^2)}$, jehož složkami jsou první tři složky čtyřsíly K_μ .

5.4 Transformace síly

Pro přechod z inerciální soustavy S do inerciální soustavy S' , která se vůči soustavě S pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí \vec{v} platí obecné transformační vztahy

$$A'_1 = \frac{A_1 + i\beta A_4}{\sqrt{1 - \beta^2}}; A'_2 = A_2; A'_3 = A_3; A'_4 = \frac{A_4 - i\beta A_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (5.8)$$

Pohybuje-li se daná částice vůči soustavě S rychlostí \vec{u} a vůči soustavě S' rychlostí \vec{u}' , platí pro čtyřsílu K_μ působící na částici v soustavě S vztahy (5.7) a pro její čtyřrychlost u_μ vztahy (5.3). Obdobné vztahy platí pro čtyřsílu K'_μ působící na částici v soustavě S' a pro její čtyřrychlost u'_μ .

Aplikací transformačních vztahů (5.8) na čtyřsílu K_μ , dostaneme pro složku K'_1

$$K'_1 = \frac{F'_x}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{F_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \frac{v}{c^2} \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right). \quad (5.9)$$

Z transformačních vztahů (5.8) aplikovaných na složku čtyřrychlosti u_1 vyplývá

$$u'_1 = \frac{u'_x}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{u_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right). \quad (5.10)$$

Po dosazení vztahu pro skládání rychlostí

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}},$$

do vztahu (5.10), dostaneme po jednoduchých úpravách

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{1-\frac{u_x v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \quad (5.11)$$

Dosazením (5.11) do (5.9) dostaneme

$$K'_1 = F'_x \frac{1-\frac{u_x v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{F_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - \frac{v}{c^2} \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \right).$$

Z uvedeného vztahu vyplývá pro složku síly F'_x vztah

$$F'_x = F_x - \frac{F_y u_y + F_z u_z}{c^2 - u_x v} v.$$

Stejným postupem odvodíme výrazy pro zbylé složky síly. Transformace síly \vec{F} při přechodu z inerciální soustavy S , která je klidná vůči pozorovateli do inerciální soustavy S' , která se vůči soustavě S pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí \vec{v} je pak určena vztahy

$$F'_x = F_x - \frac{F_y u_y + F_z u_z}{c^2 - u_x v} v; \quad F'_y = \frac{c^2 \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{c^2 - u_x v} F_y; \quad F'_z = \frac{c^2 \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{c^2 - u_x v} F_z.$$

5.5 Ekvivalence hmotnosti a energie

Časovou složku pohybové rovnice (5.2) upravíme na tvar

$$K_4 = \frac{d(m_0 u_4)}{d\tau} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \right) = \vec{F} \cdot \vec{u}. \quad (5.12)$$

V klasické mechanice ($m = const.$) lze pohybovou rovnici částice upravit následujícím způsobem

$$\frac{d(m\vec{u})}{dt} \cdot \vec{u} = \vec{F} \cdot \vec{u} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m u^2 \right) = \frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u}. \quad (5.13)$$

Skalární součin vtištěné síly a okamžité rychlosti částice je v klasické mechanice roven okamžité časové změně energie E částice.

Použijeme-li na vztah (5.12) v duchu principu korespondence analogii ke vztahu (5.13) dostaneme

$$\frac{dE}{dt} \approx \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \right) \Rightarrow E \approx \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

Rozvineme-li odmocninu ve jmenovateli do binomické řady a omezíme-li se pouze na její první dva členy, dostaneme

$$E \approx \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \doteq m_0 c^2 \left(1 + \frac{u^2}{2c^2} + \dots \right) \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 u^2. \quad (5.14)$$

Ve výrazu pro energii se objevuje nový člen $m_0 c^2$, který popisuje tzv. **klidovou energii** E_0 částice, tj. tu část celkové energie, kterou má částice v soustavě, ve které je v klidu.

Výraz (5.14) tedy vyjadřuje celkovou energii volné částice E a platí

$$E = E_0 + T = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 u^2 \approx m c^2. \quad (5.15)$$

Vztah (5.15) vyjadřuje vztah ekvivalence mezi hmotností a energií volné částice

Pro celkovou energii volné částice platí $E = mc^2$.

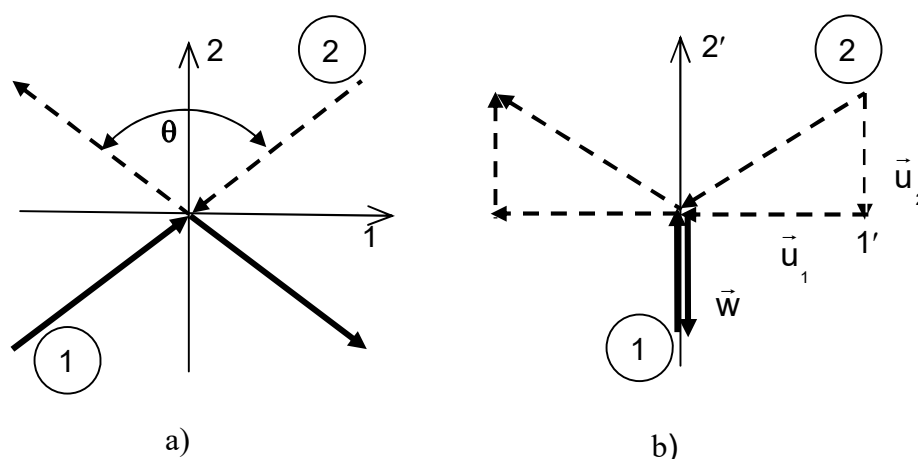
5.6 Relativistická hmotnost

Rozebereme nyní podrobněji problém hmotnosti v speciální teorii relativity, viz vztah (5.6). V důsledku principu relativity není hmotnost konstantní, jak je tomu v Newtonově mechanice, ale závisí na rychlosti vztažné soustavy. Uvedenou skutečnost budeme demonstrovat na příkladu srážky dvou hmotných částic.

Nechť částice 1 a 2 jsou dvě totožné částice, které se pohybují proti sobě stejnou rychlostí. Za uvedených podmínek se zachovává celková energie a hybnost. O hybnosti samotné budeme předpokládat, že ji lze zapsat jako součin hmotnosti, která může být funkcí rychlosti a rychlosti samé

$$\vec{p} = m_v(v) \vec{v}.$$

Celková hybnost uvažované soustavy je rovna nule. V důsledku zachování celkové hybnosti musí být po srážce směry pohybu obou částic přesně opačné. Navíc musí mít v důsledku zachování energie i stejné rychlosti, viz obr. 5.1a.



Obr. 5.1: Srážka dvou totožných částic v soustavě, ve které mají obě částice stejnou, ale opačnou rychlost (a), částice 1 je vůči ose (1) v klidu (b)

Úhel θ je roven odchylce částice. Vztažná soustava je zvolena tak, že osa 2 půlí úhel θ . Na obr. 5.1b je tato srážka zachycena ve vztažné soustavě, která se pohybuje spolu s částicí 1 ve směru osy 1. Změna hybnosti částice 1 je v této soustavě rovna

$$\Delta p_1 = -2m_w(w)w.$$

V uvedené soustavě se složka u_1 rychlosti částice 2 ve směru osy $1'$ nemění. Změnu rychlosti částice 2 ve směru osy $2'$ určíme nejnázorněji tak, když tutéž situaci posoudíme v soustavě, která se pohybuje s částicí 2 ve směru osy $1'$ rychlostí $(-u_1)$. Použitím vztahu pro skládání rychlostí

$$u_2 = w \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u_1'},$$

kde položíme $v = -u_1$, $u_1' = 0$, dostaneme pro změnu hybnosti částice 2 vztah

$$\Delta p_2 = 2m_u(u)u_2 = 2m_u(u)\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}w.$$

Protože celková hybnost se nemění a platí princip relativity $\Delta p_1 + \Delta p_2 = 0$ a tedy

$$\frac{m_w(w)}{m_u(u)} = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}$$

a pro $w \rightarrow 0 \Rightarrow m(w) \rightarrow m_0$. Konečný výsledek je

$$m_u(u) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}. \quad (5.16)$$

Pro $u=0$ je $m(0) = m_0$. Konstanta m_0 je tedy rovna hmotnosti uvažované soustavy v případě, že tato soustava je jako celek v klidu. Proto ji označujeme jako **klidovou hmotnost**.

Setrvačná hmotnost částice je ve speciální teorii relativity funkcí rychlosti částice

$$m = m_0 / \sqrt{1 - (v^2/c^2)}.$$

5.7 Čtyřvektor energie – hybnost

Časoprostorovým zobecněním hybnosti je čtyřvektor hybnosti (**čtyřhybnost**) $p_\mu = m_0 u_\mu$ o složkách

$$p_1 = m_0 u_1 = \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; \quad p_2 = m_0 u_2 = \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; \quad p_3 = m_0 u_3 = \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}};$$

$$p_4 = \frac{m_0 ic}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = imc = \frac{i}{c} mc^2 = \frac{i}{c} E.$$

Pomocí čtyřhybnosti p_μ můžeme relativistickou pohybovou rovnicí částice zapsat ve tvaru

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = K_\mu$$

Ve výrazu pro čtvrtou složku čtyřhybnosti p_4 vystupuje celková energie částice E , a proto se čtyřhybnost často nazývá čtyřvektor **energie – hybnost** částice. Kvadrát čtyřhybnosti je invariantem a platí

$$p_\mu p_\mu = -m_0^2 c^2.$$

Dále platí

$$p_\mu p_\mu = p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2. \quad (5.17)$$

a tedy

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}.$$

Prodiskutujeme nyní možné fyzikální důsledky vztahu (5.17).

$p^2 - \frac{E^2}{c^2} < 0 \Rightarrow m_0 > 0$ a $E > c p$. Pomocí vztahu (5.15) dostaneme $u < c$. Rychlost u částice je menší, než rychlost světla ve vakuu. Současně musí být také $m_0 \neq 0$. Rychlost částice s **nenulovou klidovou hmotností je vždy menší než rychlosti světla ve vakuu**.

$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = 0 \Rightarrow m_0 = 0$ a $E = c p$. V tomto případě $u = c$. Částice s **nulovou klidovou hmotností má rychlost rovnu rychlosti světla ve vakuu**.

$p^2 - \frac{E^2}{c^2} > 0$. V tomto případě je m_0 imaginární číslo a částice s touto nenulovou klidovou hmotností by se pohybovala rychlostí $u > c$. Existenci takovýchto hypotetických částic, jež byly nazvány **tachyony** a předpovídaly některé teorie a od začátku 60. let 20. století jsou prováděny pokusy, které by měly potvrdit jejich existenci.

Poznámka:

Předpoklad o existenci částic (tachyony), které se pohybují v inerciálních soustavách rychleji, než světlo ve vakuu $u > c$ by měla velmi vážné důsledky – vedla by k porušení platnosti principu kauzality.

5.8 Transformace energie

Aplikujeme-li transformační vztahy na čtyřvektor energie – hybnost dostaneme pro transformaci čtvrté složky výraz pro transformaci celkové energie při přechodu mezi soustavami S a S'

$$E' = \frac{E - u p_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (5.18)$$

6 Srážky částic

6.1 Dokonale nepružná srážka částic

Uvažujme dvě částice A a B , které mají shodné klidové hmotnosti m_0 . Při jejich dokonale nepružné srážce vznikne částice $C = A+B$ o klidové hmotnosti M_0 .

Nechť S_0 je vztažná soustava hmotného středu soustavy, kterou tvoří částice A , B , v níž mají tyto částice před srážkou rychlosti $\vec{u}_A^0(u; 0; 0)$ a $\vec{u}_B^0(-u; 0; 0)$. Podle zákona zachování hybnosti platí v soustavě S_0

$$\vec{p}_{A,0} + \vec{p}_{B,0} = \vec{p}_{C,0} = 0.$$

Po dokonale nepružné srážce je tedy částice C v soustavě S_0 v klidu.

Nechť se soustava pozorovatele S pevně spojená s částicí A pohybuje vůči soustavě S_0 v kladném směru osy x_1 konstantní rychlostí u .

V soustavě S mají tedy částice A a C rychlosti $\vec{u}_A \equiv (0; 0; 0)$ a $\vec{u}_C \equiv (-u; 0; 0)$. Soustava S_0 se vůči soustavě S pohybuje rychlostí $\vec{u} \equiv (-u; 0; 0)$. Ze vztahu pro relativistické skládání rychlostí má částice B vzhledem k soustavě S rychlost

$$u_{B,1} = \frac{-u + (-u)}{1 + \frac{(-u)(-u)}{c^2}} = -\frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}}. \quad (6.1)$$

V soustavě S platí

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}_C \Rightarrow \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u_B^2}{c^2}}} \vec{u}_B = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{u_C^2}{c^2}}} \vec{u}_C.$$

Dosazením vztahu (6.1) a po jednoduchých úpravách dostaneme

$$2m_0 = M_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \Rightarrow M_0 > 2m_0. \quad (6.2)$$

Klidová hmotnost částice, vzniklé spojením dvou částic, není rovna prostému součtu jejich klidových hmotností. Co je příčinou této skutečnosti odhalíme rozбором transformace kinetické energie částic při dokonale nepružné srážce. Pro kinetickou energii platí

$$T = E - E_0 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad (6.3)$$

Pomocí vztahů (6.2) a (6.3) dostaneme

$$M_0 - 2m_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 2m_0 = 2m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right) = \frac{2}{c^2} T.$$

Zavedeme-li označení $M_0 - 2m_0 = 2\Delta m_0$ a $T = \Delta E_0$, můžeme poslední výraz upravit na tvar

$$\Delta m_0 = \frac{\Delta E_0}{c^2}.$$

Kinetická energie T částic při dokonale nepružné srážce se projeví jako **změna klidové hmotnosti** vzniklé částice.

6.2 Rozpad částice

Rozebereme případ samovolného rozpadu částice (např. jádro atomu). Předpokládejme, že do okamžiku rozpadu je částice vůči soustavě S_0 v klidu a její klidová hmotnost je M_0 . Celková energie částice je tedy $E_0 = M_0 c^2$.

Nechť se částice rozpadne na dvě částice o klidových hmotnostech m_{01} , m_{02} , pro něž je soustava S' soustavou, která je spojena s jejich hmotným středem. V této soustavě mají pohybující se částice nenulové hybnosti \vec{p}_{01} , \vec{p}_{02} pro něž platí $\vec{p}_{01} + \vec{p}_{02} = 0$ a jejich celkové energie v soustavě S' jsou

$$E_{01} = m_{10} c^2 + T_1^0 > m_{10} c^2, \quad E_{02} = m_{20} c^2 + T_2^0 > m_{20} c^2.$$

Z principu zachování energie plyne

$$E_0 = M_0 c^2 = E_{01} + E_{02} = m_{01} c^2 + T_{01} + m_{02} c^2 + T_{02} = (m_{10} + m_{20}) c^2 + T_{01} + T_{02}$$

$$E_0 = M_0 c^2 > (m_{01} + m_{02}) c^2$$

a podmínkou pro samovolný rozpad částice je tedy

$$M_0 > m_{01} + m_{02}.$$

V případě, že $M_0 < m_{01} + m_{02}$, je původní částice stabilní a k jejímu rozpadu je nutné dodat zvenčí energii pro překonání tzv. vazební energie o velikosti

$$\Delta E_V \geq (m_{01} + m_{02}) c^2 - M_0 c^2. \quad (6.4)$$

Veličinu

$$\frac{\Delta E_V}{c^2} = m_{01} + m_{02} - M_0 = \Delta M_0$$

nazýváme **hmotnostní defekt** daného rozpadu. Z podmínky (6.4) plyne, že pro samovolný rozpad částice (atomového jádra) musí být hmotnostní defekt záporný.

Pomocí zákona zachování hybnosti, který má v soustavě S_0 tvar $\vec{p}_{01} + \vec{p}_{02} = 0$, principu zachování energie $M_0 c^2 = E_{01} + E_{02}$ a vztahu pro celkovou energii $E = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}$, dostaneme pro energii částic, které vznikly při rozpadu vztahy

$$E_{01} = \frac{M_0^2 + m_{01}^2 - m_{02}^2}{2M_0} c^2,$$

$$E_{02} = \frac{M_0^2 - m_{01}^2 + m_{02}^2}{2M_0} c^2.$$

Dále uvedeme dva příklady posouzení stability atomového jádra berylia ${}^8_4\text{Be}$.

1. Klidová hmotnost jádra izotopu berylia ${}^8_4\text{Be}$ je $M_0 = 8,00785 \text{ u}$. Součet klidových hmotností nukleonů v jádře tohoto izotopu, ($m_{n_0} = 1,00893 \text{ u}$, $m_{p_0} = 1,008123 \text{ u}$) má hodnotu

$$\sum_j m_{0j} = 4 \cdot 1,00893 + 4 \cdot 1,008123 = 8,068212 \text{ u}.$$

Hmotnostní defekt jádra berylia ${}^8_4\text{Be}$ je tedy

$$\Delta M_0 = \sum_j m_{0j} - M_0 = 8,068212 - 8,00785 = 0,66036 \text{ u} > 0.$$

Jádro izotopu berylia ${}^8_4\text{Be}$ je stabilní vůči samovolnému rozpadu.

2. Klidová hmotnost částice α má hodnotu $m_{0\alpha} = 4,00390 \text{ u}$. Klidová hmotnost dvou částic α , na něž by se jádro ${}^8_4\text{Be}$ mohlo rozpadnout, je $2m_{0\alpha} = 8,00780 \text{ u}$. Hmotnostní defekt tohoto rozpadu je tedy roven

$$\Delta M'_0 = 2m_{0\alpha} - M_0 = 8,00780 - 8,00785 = -0,00005 \text{ u} < 0.$$

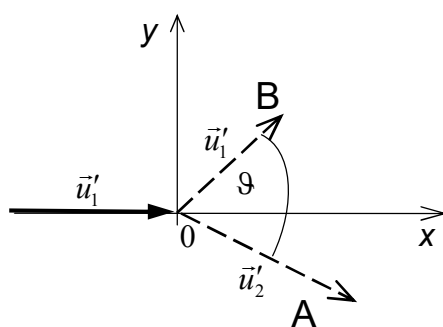
Vůči radioaktivnímu rozpadu α je tedy jádro ${}^8_4\text{Be}$ nestabilní.

Kladný hmotnostní defekt ΔM_0 atomového jádra vůči určitému typu rozpadu je tedy postačující podmínkou jeho stability pouze pro tento typ rozpadu.

6.3 Dokonale pružná srážka částic

O dokonale pružné srážce částic hovoříme tehdy, jestliže klidové hmotnosti částic zůstanou po srážce zachovány. Uvažujme pružnou srážku částic A a B o klidové hmotnosti m_0 .

Zvolme soustavu S tak, že částice B je vůči této soustavě před srážkou v klidu $u_2 = 0$ a nachází se v jejím počátku. Částice A se před srážkou pohybuje vzhledem k soustavě S rychlostí \vec{u}_1 . Souřadnicové osy x a y soustavy S nechť leží v rovině určené rychlostmi, které získaly částice po pružné srážce \vec{u}'_1 a \vec{u}'_2 , viz obr. 6.1. Ze zákona zachování hybnosti vyplývá



Obr. 6.1: Pružná srážka

$$\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2.$$

Po umocnění tohoto výrazu na druhou dostaneme

$$2p'_1 p'_2 \cos \vartheta = p_1^2 - p_1'^2 - p_2'^2. \quad (6.5)$$

Z principu zachování energie vyplývá

$$m_1 + m_0 = m'_1 + m'_2. \quad (6.6)$$

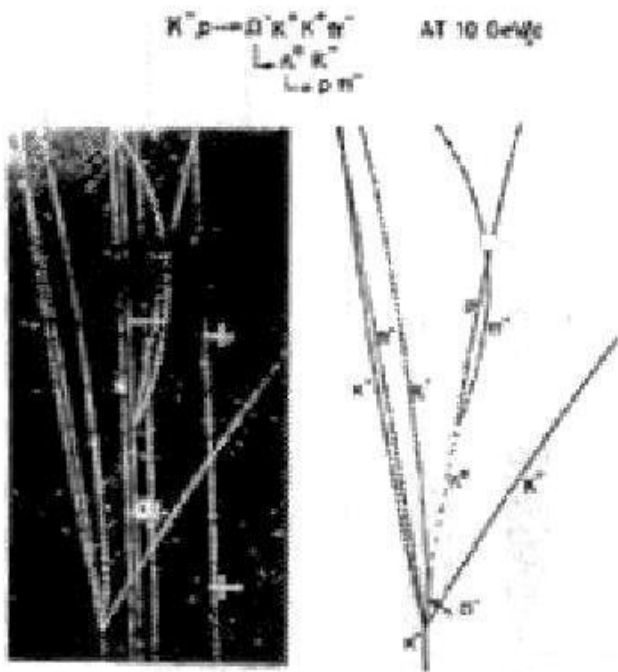
Pomocí vztahu

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2$$

odvodíme

$$p^2 = c^2 (m^2 - m_0^2) \quad (6.7)$$

a dosazením (6.6) spolu se vztahem (6.7) do vztahu (6.5) dostaneme pro úhel θ konečný výraz



Obr. 6.2: Trajektorie elementárních částic při srážkách

rozptylu elektromagnetického záření na kovových terčích, přičemž u rozptýleného záření dochází ke změně frekvence. Fyzikální podstatou tohoto jevu je pružná srážka fotonu s volným elektronem.

Protože při Comptonově rozptylu dochází k rozptylu fotonů, které se pohybují rychlostí c , je nutné použít při popisu tohoto jevu vztahy vyplývající ze speciální teorie relativity.

Z kvantové mechaniky vyplývá pro energii fotonu vztah $h\nu$, kde h je Planckova konstanta a ν frekvence a pro jeho hybnost, vzhledem k tomu, že jeho klidová hmotnost $m_0 = 0$ tak $p = h\nu/c$. Vztahem $k = \omega/c$ zavedeme **vlnový vektor** a energii a hybnost fotonu upravíme na tvar $\hbar\omega$ a $\hbar\vec{k}$.

Zavedeme soustavu S a její počátek ztotožníme s polohou elektronu před srážkou. Elektron je v soustavě S před srážkou v klidu a jeho hybnost je $\vec{p}_0 = 0$ a energie m_0c^2 . Hybnost a energie dopadajícího fotonu je $\hbar\vec{k}_0$ a $\hbar\omega_0$. Hybnost a energie elektronu po srážce v soustavě S je \vec{p} a energie $E = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}$, hybnost a energie rozptýleného fotonu $\hbar\vec{k}$ a $\hbar\omega$, viz obr. 6.3.

Z principu zachování energie a zákona zachování hybnosti vyplývá

$$\begin{aligned} \hbar\vec{k}_0 &= \vec{p} + \hbar\vec{k}, \\ m_0c^2 + \hbar\omega_0 &= \hbar\omega + c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Umocníme první z rovnic (6.8) na druhou

$$(\vec{k} - \vec{k}_0)^2 = k_0^2 + k^2 - 2kk_0 \cos \vartheta$$

a dosazením do druhé rovnice (6.8) odvodíme pro závislost frekvence rozptýleného záření ω na frekvenci dopadajícího záření ω_0 a úhlu rozptylu ϑ výraz

$$\cos \vartheta = \sqrt{\frac{(m'_1 - m_0)(m'_2 - m_0)}{(m'_1 + m_0)(m'_2 + m_0)}}$$

Pro $p'_1 p'_2 \neq 0$ je $m'_1 > m_0$, $m'_2 > m_0$ a tedy

$$(m'_1 - m_0)(m'_2 - m_0) > 0, \text{ takže}$$

$$\cos \vartheta < 1 \Rightarrow 0 < \vartheta < \pi/2.$$

V relativistické dynamice trajektorie částic po dokonale pružné srážce spolu svírají ostrý úhel na rozdíl od klasické mechaniky kde pro $m'_1 = m'_2 = m_0$ a $p'_1 p'_2 \neq 0$ $\cos \vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta = \pi/2$; trajektorie částic po dokonale pružné srážce jsou navzájem kolmé, viz obr. 6.2.

6.4 Comptonův rozptyl

Při Comptonově rozptylu dochází k

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\hbar \omega_0}{m_0 c^2} (1 - \cos \vartheta)}$$

Uvedený vztah se zpravidla vyjadřuje pomocí vlnových délek ve tvaru

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 2\Lambda \sin^2 \frac{\vartheta}{2} ; \quad \Lambda = \frac{h}{m_0 c},$$

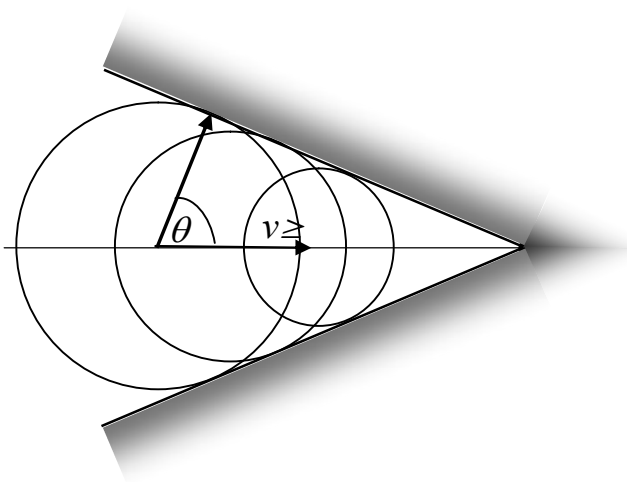
kde Λ je tzv. **Comptonova vlnová délka**. Při srážce dojde ke zvětšení vlnové délky fotonu a tím ke zmenšení jeho energie. Tento jev, rozptyl rentgenovských fotonů na volných elektronech, pozoroval poprvé A. H. COMPTON v r. 1922.

Veličina $\Lambda = h/m_0 c$ se nazývá **comptonovská vlnová délka** rozptylující částice a pro elektron má hodnotu 0,00242 nm. K největší změně vlnové délky dochází při úhlu rozptylu fotonů $\vartheta = \pi$. Při srážce fotonu s elektronem je $\Delta\lambda = 0,00482$ nm.

Změny vlnové délky jsou dobře pozorovatelné u RTG záření, kdy činí několik procent původní vlnové délky záření. Pro viditelné světlo jsou tyto změny podstatně obtížněji pozorovatelné, neboť nedosahují ani 0,01% jeho původní vlnové délky.

6.5 Čerenkovovo záření

Při průchodu elektricky nabitě částice opticky průzračným prostředím dochází vlivem elektrického pole částice k lokální polarizaci částic prostředí podél její dráhy. Po průchodu částice se částice prostředí depolarizují, přičemž získanou energii vyzáří ve formě elektromagnetického vlnění. Toto elektromagnetické vlnění emitované podél dráhy částice interferuje a výsledný efekt závisí na rychlosti částice. Je-li rychlost pohybu nabitě částice větší než je fázová rychlost světla v daném prostředí c/n , mohou se světelné vlny, vznikající v různých místech dráhy, dostat do fáze a při určité velikosti úhlu θ , viz obr. 6.4, dochází ke konstruktivní interferenci a vzniku pozorovatelného **Čerenkovovo záření**.



Obr. 6.4: Vznik rázové vlny

Toto záření jako první pozoroval v r. 1934 sovětský fyzik P.A.ČERENKOV ve vodě vystavené ionizujícímu záření. Spolu s S. I. VAVILOVEM provedli řadu pokusů pro objasnění vlastností tohoto záření, přičemž dospěli k částečnému vysvětlení, že pozorované záření je způsobeno elektrony. Definitivní objasnění mechanismu tohoto jevu na základě zákonitostí elektrodynamiky látkového prostředí podali v r. 1937 sovětské fyzici I. M. FRANK a I. J. TAMM.

Čerenkovovo záření je zajímavé i tím, že je vyvoláno nabitou částicí, která se pohybuje rovnoměrným pohybem.

Nechť nabitá částice, která se pohybuje průzračným prostředím (dielektrikem), má klidovou hmotnost m_0 a hybnost \vec{p} . Energie fotonu o energii $h\nu$, vyzářeného při depolarizaci dielektrika, je rovna úbytku počáteční energie nabitě částice. Je-li celková počáteční energie

nabité částice $E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$ a její energie po interakci s dielektrikem při průletu $E' = \sqrt{p'^2 c^2 + m_0^2 c^4}$, platí

$$E' = \sqrt{p'^2 c^2 + m_0^2 c^4} = E - h\nu = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - h\nu \quad (6.9)$$

Označíme-li hybnost nabité částice před a po emisi fotonu \vec{p} a \vec{p}' a hybnost fotonu \vec{p}_f , vyplývá ze zákona zachování hybnosti v soustavě klidné vůči látkovému prostředí vztah

$$\vec{p}' = \vec{p} - \vec{p}_f \Rightarrow p'^2 = p^2 + p_f^2 - 2pp_f \cos \vartheta, \quad (6.10)$$

kde ϑ je úhel svíraný vektory \vec{p} a \vec{p}_f . Z rovnice (6.9) vyplývá pro \vec{p}'

$$p'^2 = \frac{E^2}{c^2} - \frac{2Eh\nu}{c^2} + \frac{(h\nu)^2}{c^2} - m_0^2 c^2.$$

Dosazením tohoto vztahu do (6.10) dostáváme

$$2pp_f c^2 \cos \vartheta = p_f^2 c^2 - (h\nu)^2 + 2Eh\nu. \quad (6.11)$$

Dosadíme-li do rovnice (6.11) vztahy

$$p = mu = \frac{E}{c^2} u; \quad p_f = \frac{h}{\lambda}; \quad \lambda = \frac{c}{n\nu} \Rightarrow \nu = \frac{c}{n\lambda},$$

můžeme rovnici (6.11) upravit na tvar

$$2 \frac{E}{c^2} u \frac{h}{\lambda} c^2 \cos \vartheta = \frac{h^2}{\lambda^2} c^2 - \frac{h^2 c^2}{n^2 \lambda^2} + \frac{2hc}{n\lambda} E.$$

a tedy

$$\cos \vartheta = \frac{c}{nu} + \frac{hc^2}{2E\lambda u} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

Druhý člen na pravé straně uvedené rovnice můžeme zanedbat, neboť pro viditelné světlo je jeho hodnota $hc^2/2E\lambda u \approx 10^{-5}$ a tedy platí

$$\cos \vartheta = \frac{c}{nu}.$$

Tato rovnice má reálné řešení pro $c/nu < 1 \Rightarrow u > c/n$. Podmínkou pro vznik Čerenkovova záření je, aby se částice v průzračném dielektriku pohybovala rychlostí nejméně $u_{\min} = c/n$.

Celková intenzita záření je pak dána **Frank-Tammovým vztahem**

$$W = \frac{q^2}{c^2} \int \left[1 - \left(\frac{c}{vn(\omega)} \right)^2 \right] \omega d\omega,$$

kde integrujeme přes všechny frekvence, pro které je dané prostředí průzračné a výraz za integrálem popisuje spektrum Čerenkovova záření. Toto záření je zkoncentrováno do úhlu

$$\theta = \int \frac{c}{vn^2 \sin \vartheta} \left(\frac{dn}{d\omega} \right) d\omega.$$

Počet fotonů N s energií $\hbar\omega$ je potom určen vztahem

$$N = \frac{W\lambda}{hc} = \frac{4\pi^2 q^2}{hc} \int \left[1 - \left(\frac{c}{vn} \right)^2 \right] \frac{d\lambda}{\lambda^2}. \quad (6.12)$$

Ze vztahu (6.12) je zřejmé, že spektrum Čerenkovova záření je spojité. Počet fotonů klesá s druhou mocninou vlnové délky λ a intenzita záření roste s indexem lomu n látkového prostředí.

Je třeba zdůraznit, že Čerenkovovo záření je generováno optickým prostředím a ne pohybující se částicí.

7 Některé důsledky speciální teorie relativity

7.1 Dopplerův jev

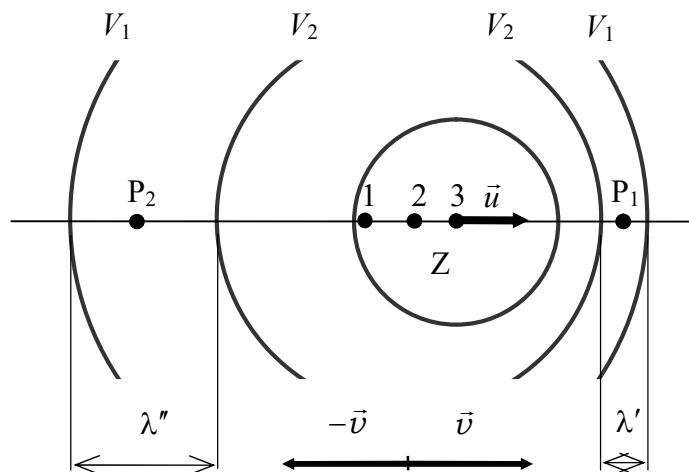
7.1.1 Klasický Dopplerův jev

Při vzájemném pohybu vysílače a přijímače vlnění registruje přijímač při vzájemném přibližování vlnění o vyšší a při vzájemném vzdalování naopak o nižší frekvenci, než je frekvence vysílače. Tato změna registrované frekvence vlnění se nazývá **Dopplerův jev**.

JOHANN CHRISTIAN DOPPLER (1803 - 1853). Rakouský fyzik, matematik a astronom. Profesor techniky v Praze a ve Vídni. Zabýval se zejména optikou a akustikou (aberrace hvězd, teorie barev). Jevo po něm pojmenovaný popsal poprvé v r. 1842.

Provedeme rozbor Dopplerova jevu pro vlnění, které se šíří homogenním a izotropním prostředím pro případ pohybu vysílače a pro případ pohybu přijímače.

1. Přijímač je v klidu a vysílač vlnění o frekvenci f_0 , fázové rychlosti v a vlnové délce $\lambda = v/f_0$ se pohybuje konstantní rychlostí $u < v$ po přímce k přijímači v bodě P_1 , viz obr. 7.1.



Obr. 7.1: Poloha vlnoploch při pohybu vysílače

Pohyb zdroje Z vyvolá změnu vlnové délky vlnění registrovaného přijímačem, neboť vlnoplochy nejsou již soustředné. Jestliže se zdroj pohybuje směrem k přijímači P_1 , registruje přijímač vlnění o kratší vlnové délce, viz obr. 7.1,

$$\lambda' = \lambda - u \frac{\lambda}{v} = \frac{v-u}{v} \lambda = \frac{v-u}{f_0}. \quad (7.1)$$

a o frekvenci

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{v-u} f_0 \Rightarrow f' > f_0.$$

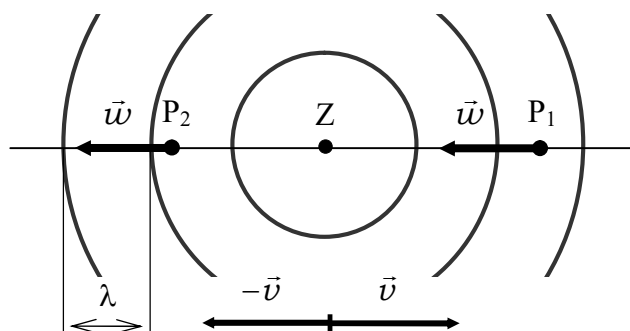
Při pohybu směrem od pozorovatele P_2 , je nutné ve vztahu (7.1) dosadit rychlost $-u$ a pro vlnovou délku vlnění registrovaného přijímačem dostaneme

$$\lambda'' = \lambda + u \frac{\lambda}{v} = \frac{v+u}{f}$$

a pro jeho frekvenci

$$f'' = \frac{v}{v+u} f \Rightarrow f'' < f.$$

2. Přijímač v bodě P_2 se pohybuje konstantní rychlostí w po přímce, na níž leží vysílač vlnění o frekvenci f_0 a fázové rychlosti $v > w$, viz obr. 7.2.



Obr. 7.2: Poloha vlnoploch při pohybu přijímače

Při pohybu přijímače směrem k vysílači je velikost jeho relativní rychlosti vůči vlnění rovna $|\vec{v} - \vec{w}| = v + w$. Počet vlnoploch vzdálených od sebe o $\lambda = v/f$, které registruje přijímač P_1 za jednotku času je roven frekvenci

$$f' = \frac{v+w}{\lambda} = \frac{v+w}{v} f_0 \Rightarrow f' > f_0.$$

Velikost relativní rychlosti přijímače P_2 , který se pohybuje směrem od vysílače je $v - w$ a registrovaná frekvence je rovna

$$f'' = \frac{v-w}{\lambda} = \frac{v-w}{v} f \Rightarrow f'' < f_0.$$

Při současném pohybu vysílače i přijímače pak platí pro frekvenci registrovanou přijímačem vztah

$$f' = f_0 \left| \frac{\vec{v} - \vec{w}}{\vec{v} - \vec{u}} \right|.$$

Při pohybu těles rychlostí vyšší, než je fázová rychlost šíření vlnění v daném prostředí $u, w > v$, vzniká tzv. **rázová vlna** ve tvaru kuželové plochy, v jejímž vrcholu se nachází pohybující se těleso, viz Čerenkovovo záření. Na rozhraní rázové vlny okolního prostředí dochází ke skokové změně parametrů vlnění.

7.1.2 Relativistický Dopplerův jev

Invariantní zákony elektrodynamiky umožňují podat popis rovinné elektromagnetické vlny z hlediska různých inerciálních systémů a odvodit přesné relativistické vztahy pro Dopplerův jev.

Mějme rovinnou harmonickou monochromatickou elektromagnetickou vlnu, která v inerciální soustavě S spojené s vysílačem, postupuje rychlostí c ve směru jednotkového vektoru \vec{N} s frekvencí f_0 a vlnovou délkou $\lambda = c/f_0$. Intenzity elektromagnetického pole jsou popsány vztahy

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 \sin 2\pi f_0 \left(t - \frac{\vec{N} \cdot \vec{r}}{c} \right), \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{H}_0 \sin 2\pi f_0 \left(t - \frac{\vec{N} \cdot \vec{r}}{c} \right).\end{aligned}\tag{7.2}$$

Vzhledem k invariantnosti zákonů elektrodynamiky vůči Lorentzově transformaci přejdou vztahy (7.2) při přechodu do inerciální soustavy S' , spojené s přijímačem, která vůči soustavě pohybuje rychlostí $\vec{u} \equiv (u, 0, 0)$ na tvar

$$\begin{aligned}\vec{E}'(\vec{r}', t') &= \vec{E}'_0 \sin 2\pi f' \left(t' - \frac{\vec{N}' \cdot \vec{r}'}{c} \right), \\ \vec{H}'(\vec{r}', t') &= \vec{H}'_0 \sin 2\pi f' \left(t' - \frac{\vec{N}' \cdot \vec{r}'}{c} \right).\end{aligned}\tag{7.3}$$

Formální shoda rovnic (7.2) a (7.3) vyplývá z postulátu o fyzikální ekvivalentnosti inerciálních soustav. Z postulátu o konstantní rychlosti světla vyplývá $c = c'$. Protože fáze vystupující ve vztazích (7.2) a (7.3) je skalárem, je vůči Lorentzově transformaci invariantní a platí

$$2\pi f \left(t - \frac{\vec{N} \cdot \vec{r}}{c} \right) = 2\pi f' \left(t' - \frac{\vec{N}' \cdot \vec{r}'}{c} \right).$$

Uvedený vztah přepíšeme do tvaru

$$k_\alpha x_\alpha = k'_\alpha x'_\alpha,$$

kde vztahy

$$k_\alpha \equiv \left(\frac{\omega}{c} N_j, \frac{\omega}{c} i \right) ; \quad \omega = 2\pi f$$

je zaveden **vlnový čtyřvektor** nulové velikosti $k_\alpha k_\alpha = 0$. Použijeme-li na vlnový čtyřvektor \vec{k} Lorentzovu transformaci dostaneme z výrazu pro transformaci složky k_4 po jednoduchých úpravách relativistický vztah pro změnu frekvence pro tzv. **podélný Dopplerův jev**

$$f' = f_0 \gamma (1 - \beta N_1) = f_0 \frac{\left(1 - N_1 \frac{v}{c} \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}}.\tag{7.4}$$

Pro $N_1 = 0$, tj. $\vec{N} \perp \vec{u}$, se vlna šíří kolmo na směr pohybu soustavy S' , a ze vztahu (7.4) vyplývá $f' = \gamma f$. Tento jev, vliv pohybu přijímače na frekvenci, označujeme jako **příčný**

Dopplerův jev. Tento jev je způsoben dilatací času v soustavě S' a v klasické fyzice je neznámý.

7.2 Rovnoměrně zrychlený pohyb

Vzhledem k závislosti setrvačné hmotnosti m částice na rychlosti \vec{u} jejího pohybu, musíme sílu \vec{F} , působící na částici, zapsat jako

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{u}) = \frac{dm}{dt}\vec{u} + m\frac{d\vec{u}}{dt}. \quad (7.5)$$

Protože

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{c^2}\vec{F} \cdot \vec{u},$$

upravíme vztah (7.5) na tvar

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F} - \frac{1}{mc^2}\vec{u}(\vec{F} \cdot \vec{u}).$$

Ve speciální teorii relativity jsou tedy zrychlení \vec{a} a síla \vec{F} rovnoběžné pouze tehdy, má-li síla směr rychlosti. Částice se v soustavě S pohybuje po přímce nebo je-li síla k vektoru rychlosti kolmá.

Rozebereme možnost, kdy síla je trvale rovnoběžná s vektorem rychlosti částice.

Nechť v čase $t=0$ soustava S splývá s okamžitou klidovou soustavou S_0 , vůči které je daná částice v klidu a vůči soustavě S má rychlost $u=0$. Dále, necht' na tuto částici působí ve směru osy (1) konstantní síla \vec{F} .

Vyjádříme konstantní sílu ve tvaru $\vec{F} = m_0\vec{a} = \text{const}$. Pohybová rovnice částice má potom tvar

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \right) = \vec{F} = m_0\vec{a},$$

který upravíme na tvar

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \right) = a. \quad (7.6)$$

Integrací vztahu (7.6) dostaneme

$$\frac{u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = at,$$

ze kterého vyplývá pro rychlost částice u vztah

$$u = \frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}}. \quad (7.7)$$

Pro $g^2t^2 \ll c^2$ přechází vztah (7.7) ve vyjádření rychlosti klasické fyziky

$$u = at. \quad (7.8)$$

Zásadní rozdíl mezi relativistickým vztahem (7.7) a klasickým vztahem (7.8) dostaneme při $t \rightarrow \infty$. Podle klasického vztahu (7.8) $u \rightarrow \infty$, ale podle relativistického vztahu (7.7) $\lim_{t \rightarrow \infty} u = c$.

Tedy ani trvalým působením konstantní síly nemůžeme částici s nenulovou klidovou hmotností urychlit na rychlost c .

Další integrací vztahu (7.7) dostaneme

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} \Rightarrow x = \frac{c^2}{a} \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} + \text{const.}; \text{const.} = -\frac{c^2}{a}$$

$$x = \frac{c^2}{a} \left[\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right]. \quad (7.9)$$

Výraz (7.9) upravíme následujícím způsobem

$$\left(x + \frac{c^2}{a} \right)^2 - c^2 t^2 = \frac{c^4}{a^2}.$$

Trajektorií relativistického rovnoměrně zrychleného pohybu je tedy na rozdíl od klasické paraboly hyperbola; proto se ve speciální teorii relativity o rovnoměrně zrychleném pohybu hovoří jako o pohybu hyperbolickém.

7.3 Pohyb nabité částice v homogenním magnetickém poli

Zvolme souřadnicovou soustavu tak, že konstantní vektor \vec{B} intenzity magnetického pole má směr i orientaci osy (3) $\vec{B} \equiv (0, 0, B)$. Na pohybující se nabitou částici s počáteční hmotností m_p a nábojem q , působí v tomto poli Lorentzova síla

$$\vec{F} = q(\vec{u} \times \vec{B}) \Rightarrow \vec{F} \equiv q(u_2 B; -u_1 B; 0). \quad (7.10)$$

Okamžitý výkon Lorentzovy síly je roven okamžité změně celkové energie elektronu

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u} = q(\vec{u} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} = 0.$$

Energie částice zůstává tedy konstantní E_p . Ze vztahu (7.10) vyplývají pohybové rovnice nabitě částice ve tvaru

$$\frac{dp_1}{dt} = q u_2 B \quad ; \quad \frac{dp_2}{dt} = -q u_1 B \quad ; \quad \frac{dp_z}{dt} = 0.$$

Pro hybnost \vec{p} platí

$$\vec{p} = m\vec{u} = E\vec{u}/c^2 = E_p \vec{u}/c^2$$

a tedy

$$\frac{du_1}{dt} = u_2 \frac{q c^2 B}{E_p} \quad ; \quad \frac{du_2}{dt} = -u_1 \frac{q c^2 B}{E_p}. \quad (7.11)$$

Řešení soustavy (7.11) mají tvar

$$u_1 = A \cos(\omega t + \varphi); u_2 = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (7.12)$$

kde

$$\omega = \frac{q c^2 B}{E_p} = \frac{q B}{m_p}. \quad (7.13)$$

Pro závislosti (7.12) platí

$$u_1^2 + u_2^2 = A^2 = \text{const.} = (u_{\perp})_p^2,$$

kde $(u_{\perp})_p$ je velikost složky počáteční rychlosti nabitě částice kolmé k indukci magnetického pole \vec{B} . Další integrací vztahů (7.11) obdržíme

$$x_1 = \frac{(u_{\perp})_p}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) + x_{01},$$

$$x_2 = \frac{(u_{\perp})_p}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) + x_{02}.$$

Za předpokladu, že částice vlétne do magnetického pole kolmo na směr vektoru jeho indukce \vec{B} , pak $(u_{\perp})_p = u_p$. Trajektorií částice v daném magnetickém poli je kružnice s poloměrem

$$R = \frac{u_p}{\omega} = \frac{E_p u_p}{q c^2 B} = \frac{p_p}{q B}, \quad (7.14)$$

kde p_p je velikost počáteční hybnosti elektronu.

Vztahy (7.13) a (7.14) mají zásadní význam pro fyziku vysokých energií (jadernou fyziku a fyziku elementárních částic). Pomocí vztahů (7.13) a (7.14) lze určit hybnost nabitě částice a její klidovou hmotnost.

Vztah (7.14) má zásadní důležitost při konstrukci a provozu urychlovačů nabitých (relativistických) částic (cyklotron, synchrotron, synchrotrón, betatron aj.). Fakt, že tato zařízení, konstruovaná v souladu s teoretickými poznatky speciální teorie relativity, spolehlivě fungují, je dalším z řady experimentálních důkazů platnosti Einsteinovy teorie.

8 Relativistická elektrodynamika

8.1 Relativistické rovnice elektromagnetického pole

Jak již bylo uvedeno v úvodu kurzu, invarianci rovnic elektromagnetického pole již prokázal Lorentz, když dokázal, že rovnice elektromagnetického pole

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad ; \quad \text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}, \quad (8.1)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad ; \quad \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (8.2)$$

nejsou invariantní vůči Galileově transformaci

$$x'_i = x_i - v t',$$

$$t = t',$$

ale jsou invariantní vůči transformaci

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad ,$$

$$t' = \frac{t - \frac{v x_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

kteřá nese Lorenzovo jméno. Pomocí rovnic (8.2) lze vyjádřit intenzity \vec{E} a \vec{H} pomocí vektorového \vec{A} a skalárního φ potenciálu ve tvaru

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{B} = \text{rot} \vec{A}. \quad (8.3)$$

Potenciály lze zvolit tak, aby splňovaly kalibrační podmínku

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (8.4)$$

Rovnice (8.1) a (8.2) pak nabývají tvar tzv. vlnových rovnic

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \vec{j}, \quad (8.5)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Z nich lze potenciály vypočítat při daném rozdělení hustoty náboje ρ a hustoty proudu $\vec{j} = \rho \vec{u}$. Rovnice (8.1) je nutné doplnit o vztah, který popisuje interakci elektromagnetického pole s nábojem. Tímto vztahem je výraz pro tzv. Lorenzovu sílu

$$\vec{f} = \rho \left[\vec{E} + (\vec{u} \times \vec{B}) \right], \quad (8.6)$$

kde \vec{f} je silová hustota.

Provedeme přepis rovnic (8.1) a (8.2) do tenzorového tvaru v Minkowského časoprostoru a tím zároveň dokážeme jejich invarianci. Zatím účelem zkonstruujeme pomocí veličin, které vystupují v rovnicích (8.1) a (8.2) jisté tenzory v Minkowského časoprostoru.

Pomocí potenciálů \vec{A} a φ zkonstruujeme čtyřpotenciál následujícím přiřazením

$$\varphi_j \equiv c A_j, \quad \varphi_4 \equiv i\varphi \quad j = 1, 2, 3. \quad (8.7)$$

Kalibrační rovnici (8.3) můžeme potom zapsat ve tvaru

$$\partial_\mu \varphi_\mu = 0.$$

Protože uvedený vztah vede na skalár velikosti nula a tento skalár vznikl zúžením ve dvou indexech, představuje veličina φ_μ čtyřvektor. Vlnové rovnice (8.5) můžeme nyní zapsat ve tvaru

$$\square \varphi_\mu = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j_\mu \quad (8.8)$$

kde $j_\mu \equiv (\rho\vec{u}, ic\rho)$ je čtyřproud. Jeho první tři složky tvoří složky hustoty proudu $\vec{j} = \rho\vec{u}$ a čtvrtá složka $j_4 = ic\rho$ je ic -násobkem hustoty náboje. Vzhledem k tomu, že na levé straně rovnice (8.8) vystupuje čtyřvektor, musí být, vzhledem k požadavku invariance, čtyřproud j_μ čtyřvektorem.

Pomocí čtyřproudu můžeme zapsat zákon zachování náboje, tzv. rovnici kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

ve tvaru

$$\partial_\mu j_\mu = 0.$$

Pro přepis rovnic (8.1) a (8.2) do kovariantního tenzorového časoprostorového tvaru zavedeme antisymetrický tenzor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu \quad (8.9)$$

Pomocí definičního vztahu (8.9) snadno zjistíme fyzikální význam nenulových složek tenzoru $F_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} F_{jk} &= -F_{kj} = \varepsilon_{jkl} cB_l, \\ F_{4j} &= -F_{j4} = iE_j. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Rovnice (8.9) představují invariantní zápis rovnic (8.3). Na základě vztahů (8.10) lze rovnice (8.1) zapsat ve tvaru

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = \frac{1}{c\varepsilon_0} j_\mu$$

a rovnice (8.2) ve tvaru

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0.$$

Tenzor $A_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu F_{\nu\rho}$ je tzv. úplně antisymetrický, tj. platí $A_{\mu\nu\rho} = -A_{\nu\mu\rho} = -A_{\mu\rho\nu} = -A_{\rho\mu\nu}$ a v případě, že libovolné dva indexy jsou si rovné je $A_{\nu\mu\rho} = 0$.

Vztah pro Lorenzovu sílu (8.6) lze zapsat pomocí složek tenzoru $F_{\mu\nu}$ a čtyřproudu j_μ ve tvaru

$$f_\mu = \frac{1}{c} F_{\mu\nu} j_\nu.$$

Pro složku f_4 pak platí

$$f_4 = \frac{1}{c} F_{4\nu} j_\nu = \frac{1}{c} F_{4i} j_i = \frac{i}{c} \vec{E} \cdot \vec{j} = \frac{i}{c} \vec{f} \cdot \vec{u}.$$

Složka f_4 je i/c násobek hustoty výkonu $\vec{f} \cdot \vec{u}$.

8.2 Fyzikální důsledky transformačních vzorců

Přepis rovnic (8.1) až (8.5) do formy kovariantních tenzorových vztahů zaručuje, že v Minkowského časoprostoru se při přechodu z inerciální soustavy S do soustavy S' , která se vůči soustavě S pohybuje konstantní rychlostí u ve směru osy (1) se tenzory transformují dle vztahů

$$A_\alpha = a_{\alpha\beta} A_\beta \quad ; \quad A_{\alpha\beta} = a_{\alpha\mu} a_{\beta\nu} A_\mu A_\nu \quad (8.11)$$

kde $a_{\alpha\beta}$ jsou prvky matice Lorentzovy transformace

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

které splňují relace ortonormality $a_{\mu\nu}a_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda}$. Transformace (8.11) zaručuje invarianci rovnic v Minkowského časoprostoru.

Použijeme-li transformační vztahy (8.11) na tenzor $F_{\mu\nu}$ a za jednotlivé složky dosadíme z definičních vztahů (8.10), dostaneme pro intenzity elektrického \vec{E} a magnetického \vec{H} pole vztahy

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1 & ; & & E'_2 &= \gamma(E_2 - \beta c B_3) & ; & & E'_3 &= \gamma(E_3 + \beta c B_2), \\ B'_1 &= B_1 & ; & & B'_2 &= \gamma\left(B_2 + \frac{\beta}{c} E_3\right) & ; & & B'_3 &= \gamma\left(B_3 - \frac{\beta}{c} E_2\right). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Ze vztahů (8.12) je zřejmé, že pojmy elektrické nebo magnetické pole mají ve speciální teorii relativity pouze relativní význam. Jeví-li se v jednom inerciálním systému dané pole jako čistě elektrické ($\vec{E} \neq 0$ a $\vec{B} = 0$), jeví se z hlediska jiného inerciálního systému jako pole elektromagnetické ($\vec{E} \neq 0$ a $\vec{B} \neq 0$). Protože oba systémy jsou fyzikálně rovnocenné, jsou obě zjištění stejně oprávněná.

Odvodíme nyní transformační vztahy hustoty náboje ρ . Pro čtyřproud o složkách $j_\mu \equiv (\rho u_j, ic\rho)$ platí $j_\mu j_\mu = -\rho^2 c^2$. Protože čtyřproud je čtyřvektor, musí být hustota náboje invariant vůči Lorentzově transformaci. Použijeme-li analogii čtyřproudu s výrazem pro element časoprostorového intervalu $dx_\mu \equiv (dx_j, icdt)$ platí pro **klidovou hustotu elektrického náboje** v analogii s výrazem pro vlastní čas τ transformační vztah

$$\rho_0 = \gamma^{-1} \rho, \quad (8.13)$$

což je zřejmé i z výrazu

$$\rho_0 = -c^2 j_\mu u_\mu = \frac{1}{c} (-j_\mu j_\mu)^{\frac{1}{2}}.$$

8.3 Tenzor energie a hybnosti elektromagnetického pole

Pomocí rovnic (8.1) a (8.2) odvodíme zákon zachování energie elektromagnetického pole ve tvaru

$$\frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \text{div} \vec{S} = -\vec{E} \cdot \vec{j} = \vec{f} \cdot \vec{u}. \quad (8.14)$$

kde $\rho_E = 1/2(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$ je hustota energie a $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ Pointingův vektor hustoty toku energie a pro zákon zachování hybnosti elektromagnetického pole ve tvaru

$$\frac{\partial w_j}{\partial t} - \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_k} = f_j. \quad (8.15)$$

kde

$$\vec{w} = 1/4\pi c (\vec{E} \times \vec{H})$$

je hustota hybnosti a

$$T_{jk} = 1/2 (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \delta_{jk} - (E_j D_k + H_j B_k) \quad (8.16)$$

je tzv. *Maxwellův – Minkowského tenzor napětí*.

Rovnice (8.14) a (8.15) vyjadřující zákony zachování energie a hybnosti elektromagnetického pole, můžeme při přechodu do Minkowského časoprostoru přepsat do tvaru

$$\partial_k \left(\frac{i}{c} S_k \right) + \partial_4 (-\rho_E) = -\frac{i}{c} \vec{f} \cdot \vec{u},$$

$$\partial_k T_{jk} + \partial_4 (icw_j) = -f_j.$$

Uvedené rovnice lze zapsat jednoduše ve tvaru

$$\partial_\nu T_{\mu\nu}^E = -f_\mu,$$

kde tenzor $T_{\mu\nu}^E$ označujeme jako *tenzor energie - hustoty* definovaný vztahy

$$T_{ij}^E = T_{ij} \quad ; \quad T_{j4}^E = icw_j \quad ; \quad T_{4j}^E = \frac{i}{c} S_j \quad ; \quad T_{44}^E = ic\rho_E. \quad (8.17)$$

a ve všech inerciálních systémech tedy platí

$$w_j = \frac{1}{c^2} S_j.$$

Nedostatkem tenzoru $T_{\mu\nu}^E$ je porušení jeho symetrie v látkovém prostředí protože

$$T_{j4}^E = \varepsilon\mu T_{4j}^E \neq T_{4j}^E,$$

neboť

$$w_j = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} S_j \neq \frac{1}{c^2} S_j$$

a dochází k porušení zákona o ekvivalenci hmoty a energie.

Protože tenzor $T_{\mu\nu}^E$ není definován jednoznačně, lze místo $T_{\mu\nu}^E$ zavést nový tenzor

$$T_{\mu\nu}^{E*} = T_{\mu\nu}^E + \partial_\lambda h_{\mu\nu\lambda}, \quad (8.18)$$

kde $h_{\mu\nu\lambda}$ je tenzor třetího řádu antisymetrický v posledních dvou indexech $h_{\mu\nu\lambda} = -h_{\mu\lambda\nu}$.

Položíme-li $h_{\mu\nu\lambda} = \varepsilon_0 F_{\lambda\nu} A_\mu$ lze pomocí vztahu (8.18) symetrizovat tenzor $T_{\mu\nu}^{E*}$ následujícím způsobem

$$T_{\mu\nu}^{E*} = \varepsilon_0 \left(F_{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right), \quad (8.19)$$

kde $T_{\mu\nu}^{E*}$ je tzv. *Abrahamův tenzor*, který je z definice symetrický, má nulovou stopu $T_{\mu\mu}^{E*} = 0$ a splňuje vztahy (8.17) i pro anizotropní látkové prostředí.

9 Relativistická termodynamika

Podle prvního Einsteinova postulátu jsou všechny inerciální soustavy pro popis fyzikálních procesů ekvivalentní. Tzn., že matematický zápis termodynamických principů pomocí kovariantních tenzorových rovnic má ve všech inerciálních soustavách stejný tvar.

V Minkowského časoprostoru musí být tedy termodynamické principy zapsány ve tvaru, který je invariantní vůči Lorenzově transformaci. Bude-li daný systém vůči soustavě S_0 v klidu a soustava S' se bude vůči soustavě S_0 pohybovat konstantní rychlostí \vec{u} ve směru osy (1), musí platit pro I. termodynamický princip

$$\begin{aligned} dE_0 &= dQ_0 - dW_0, \\ dE' &= dQ' - dW', \end{aligned} \quad (9.1)$$

kde dE je změna vnitřní energie, dQ elementární množství tepla a dW elementární práce, přičemž proměnné s indexem „0“ se vztahují k soustavě S_0 a čárkované k soustavě S' .

Pro II. termodynamický princip pak musí platit

$$\begin{aligned} dS_0 &= \frac{dQ_0}{T_0}, \\ dS' &= \frac{dQ'}{T'}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

V dalším odvodíme z podmínky invariance potřebné transformační vztahy.

9.1 Teplo

Nechť vůči soustavě S_0 má daný systém rychlost $u = 0$. Jeho hmotnost je tedy rovna klidové hmotnosti m_0 . Dodáme-li tomuto systému teplo dQ_0 platí podle I. termodynamického principu

$$dQ_0 = dE_0 + dW_0, \quad (9.3)$$

kde dE_0 je přírůstek vnitřní energie a $dW_0 = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ práce, kterou systém vykonal na úkor dodaného tepla. Přejdeme do Minkowského časoprostoru a rovnici (9.3) přepíšeme do tvaru

$$dQ = dE_0 + dW = c^2 dm_0 + K_\alpha dx_\alpha, \quad (9.4)$$

kde je K_α je čtyřsila a dx_α je čtyřvektor elementárního posunutí. Skalární výraz $K_\alpha dx_\alpha$ elementární práce v časoprostoru je invariant o velikosti $K_\alpha dx_\alpha = 0$. Ze vztahu (9.4) potom vyplývá pro teplo vztah

$$dQ = c^2 dm_0, \quad (9.5)$$

Teplo, nemechanická forma energie, mění hodnotu klidové hmotnosti soustavy m_0 v souladu se vztahem $E_0 = m_0 c^2$.

Při odvozování transformačního vztahu pro teplo dQ vyjdeme z požadavku invariance principu zachování energie, který je v soustavě S_0 vyjádřen vztahem (9.1). Při přechodu do inerciální soustavy S' , která se pohybuje vůči soustavě S_0 konstantní rychlostí \vec{u} ve směru osy (1) přejde vztah (9.1) na tvar

$$dQ = dE_0 = \gamma (dE' + u dp'_1) = \gamma \left(dE' + u \frac{dp'_1}{dt'} dt' \right) = \gamma (dE' + K'_1 u dt'), \quad (9.6)$$

kde K'_1 je složka čtyřsily K'_α a $u dt' = dx'_1$ složka elementárního posunutí dx'_α . Výraz $K'_1 dx'_1 = dW'$ představuje práci, která je spojena se změnou klidové hmotnosti. Výraz (9.6) pak upravíme na tvar

$$dQ = \gamma(dE' + K'_1 dx'_1) = \gamma(dE' + dW') = \gamma dQ', \quad (9.7)$$

a tedy konečný výraz pro transformaci tepla je

$$dQ' = \gamma^{-1} dQ. \quad (9.8)$$

9.2 Entropie a teplota

Ve statistické fyzice je entropie definována Boltzmannovým vztahem

$$S = k \ln \Gamma,$$

kde k je Boltzmannova konstanta a Γ počet způsobů realizace daného makrostavu tedy celé číslo, které je při Lorentzově transformaci *invariantem* a platí

$$S_0 = S',$$

kde S_0 je entropie v soustavě S_0 a S' je entropie v soustavě S' , která se pohybuje vůči soustavě S rovnoměrně přímočaře rychlostí u .

Ve fenomenologické termodynamice je při vratném přechodu soustavy z počátečního do konečného stavu změna entropie určena vztahem

$$dS = \frac{dQ}{T},$$

kde dS je úplný diferenciál stavové funkce entropie.

Při přechodu z inerciální soustavy S_0 , vůči které je daný systém v klidu, do soustavy S' , která se pohybuje vůči soustavě S rovnoměrně přímočaře rychlostí u platí, vzhledem k tomu, že entropie S je vůči Lorentzově transformaci invariantní

$$S_0 = S \Rightarrow \frac{dQ_0}{T_0} = \frac{dQ'}{T'}$$

a ze vztahu (9.8) pak plyne pro teplotu transformační vztah

$$dT' = \gamma^{-1} dT_0.$$

Teplota systému je tedy nejvyšší v soustavě, vůči které je systém v klidu.

Úpravou vztahu (9.7) dostaneme

$$dE' = dQ' - dW',$$

a tedy podmínka (9.1) je splněna.

9.3 Relativistická termodynamika elektromagnetického pole

Rozebereme blíže vlastnosti tenzoru energie - hustoty definovaného vztahem

$$T_{\mu\nu}^{E*} = \varepsilon_0 \left(F_{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right). \quad (9.9)$$

Budeme-li na tenzor $T_{\mu\nu}^{E*}$ aplikovat operátor divergence dostaneme

$$\partial_\nu T_{\mu\nu}^{E*} = -f_\mu.$$

První tři složky tvoří vektor silové hustoty Lorenzovy síly

$$\vec{f} = \rho \left[\vec{E} + (\vec{u} \times \vec{B}) \right]$$

a čtvrtá složka udává veličinu

$$f_4 = \frac{i}{c} \vec{E} \cdot \vec{j} = \frac{i}{c} \vec{f} \cdot \vec{u}. \quad (9.10)$$

K objasnění fyzikálního významu vztahu (9.10) budeme nejprve analyzovat tento vztah v inerciální soustavě S_0 , vůči které je daný systém v klidu. V tomto případě jsou intenzita pole \vec{E} a hustota proudu \vec{j} svázány Ohmovým zákonem $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ a tedy

$$f_4 = \frac{i}{c} \vec{E} \cdot \vec{j} = \frac{i}{c} \sigma E^2 = \frac{i}{c} q_0.$$

Složka f_4 je tedy úměrná Joulovu teplu q_0 , které se vyvinulo v jednotce objemu za jednotku (vlastního) času. Protože $u_\mu \equiv (0, 0, 0, ic)$ platí rovněž

$$u_\mu f_\mu = ic f_4 = -\vec{E} \cdot \vec{j} = -q_0. \quad (9.11)$$

Výraz (9.11) je v Minkowského časoprostoru invariant, a proto v libovolném inerciálním systému platí $u_\mu f_\mu = -q_0$. V soustavě S' , která se vůči S_0 pohybuje konstantní rychlostí \vec{v} a tedy $u_\mu \equiv \gamma(\vec{v}, ic)$ platí

$$f'_4 = \frac{1}{ic\gamma} (-\gamma \vec{v} \cdot \vec{f}' - q_0) = \frac{i}{c} (\vec{v} \cdot \vec{f}' + q).$$

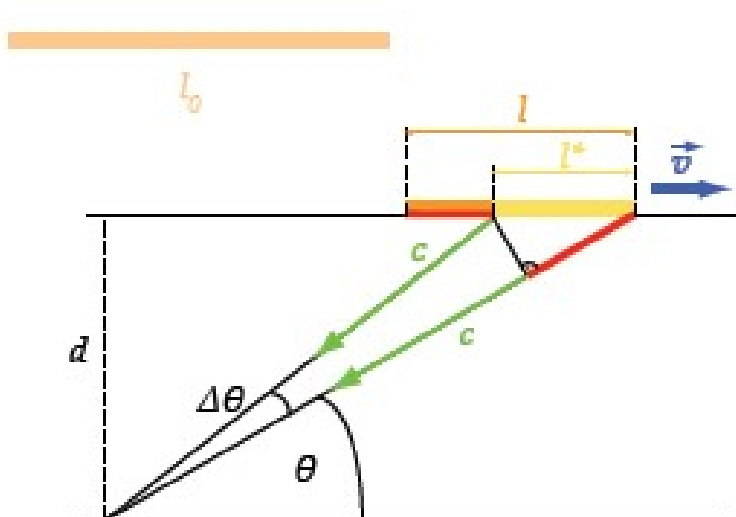
Velichina $q = \gamma^{-1} q_0$, viz (9.8), je Joulovo teplo, které se vyvinulo v S' v jednotce objemu za jednotku času a $\vec{v} \cdot \vec{f}'$ je hustota výkonu elektromagnetické síly v pohybujícím se prostředí. Vývin Joulova tepla ve vodivém prostředí podle vztahu (9.5) vede k přírůstku klidové energie a Lorentzova čtyřsila f_μ náleží k silám, které mění klidovou hmotu látkového prostředí.

10 Pozorovaný tvar těles ve speciální teorii relativity

10.1 Pozorování tyče

Při pozorování předmětů, které jsou spojeny se soustavou, která se pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí \vec{v} , dochází ke kontrakci délek ve směru pohybu. Je možné tuto kontrakci pozorovat? Odpověď na tuto zdánlivě jednoduchou otázku není jednoznačná. Teprve roku 1957 TERRELL a PENROSE našli řešení tohoto problému.

Uvažujme nejprve o podélném pohybu tenké tyče o klidové délce l_0 , kterou pozorovatel v daném okamžiku vidí pod úhlem \mathcal{G} , viz obr. 11.1.



Obr. 11.1: Tyč pohybující se ve směru své délky

Pohybuje-li se tyč rychlostí \vec{v} , dochází ke kontrakci její délky a pro její skutečnou délku platí

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Pozorovatel však nevidí tyč této délky, protože pozoruje její přední a zadní konec v různých časech. Předpokládejme, že délka tyče je velmi malá ve srovnání s její vzdáleností od pozorovatele. Z obr. 11.1 plyne, že podmínkou setkání paprsků od obou konců tyče v místě pozorování je rovnost časů

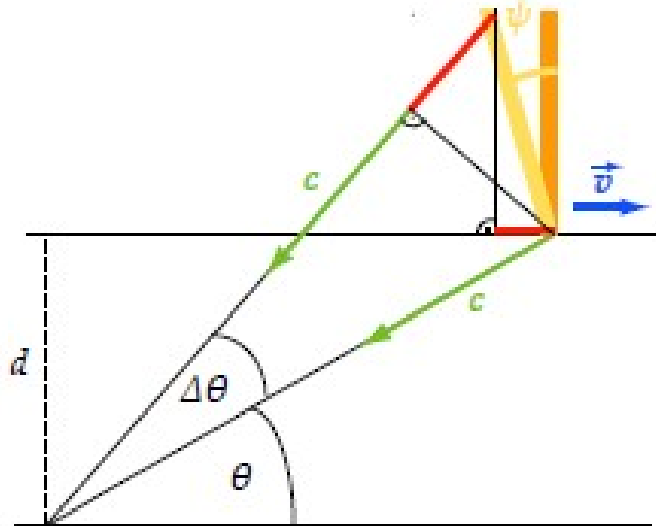
$$\frac{l - l^*}{v} = \frac{l^* \cos \vartheta}{c},$$

kde l^* je pozorovaná délka tyče. Pozorovaná délka tyče je tedy spojena s její klidovou délkou vztahem

$$l^* = \frac{l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta}. \quad (11.1)$$

Z uvedeného vztahu je zřejmé, že v dané vztažné soustavě je pozorovaná délka přibližující se tyče větší než její skutečná délka, zatímco délka vzdalující se tyče je menší než délka skutečná. Skutečnou délku pohybující se tyče ve vztažné soustavě pozorovatele můžeme pozorovat pouze v okamžiku, kdy vidíme oba její konce ze stejných vzdáleností, tj. když nás právě mívá její střed ($\theta = \pi/2$). Pro dostatečně vzdálenou tyč je vliv konečné rychlosti světla na její pozorovanou délku vždy významnější než Lorentzova kontrakce.

Dále rozebereme případ tenké tyče, která se pohybuje rychlostí \vec{v} kolmo ke své délce tak, že leží v rovině pozorování. V tomto případě se délka tyče l rovná její klidové délce l_0 , viz obr. 11.2.



Obr. 11.2: Tyč pohybující se kolmo ke své délce

Protože pozorovatel nevidí oba konce tyče ve stejném čase, jeví se mu tyč sklopená pod úhlem ψ . Je-li opět délka tyče malá ve srovnání s její vzdáleností od pozorovatele, setkají se paprsky od obou konců v místě pozorování při rovnosti časů

$$\frac{l_0 \sin \psi}{v} = \frac{l_0}{c} (\cos \psi \sin \vartheta - \sin \psi \cos \vartheta).$$

Pro úhel sklopení tyče ψ pak platí

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\frac{v}{c} \sin \vartheta}{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta}. \quad (11.2)$$

Tyč kolmou na směr pohybu pozorujeme v okamžiku, když nás právě mívá ($\vartheta = \pi/2$) v její skutečné velikosti l_0 .

10.2 Pozorování tělesa

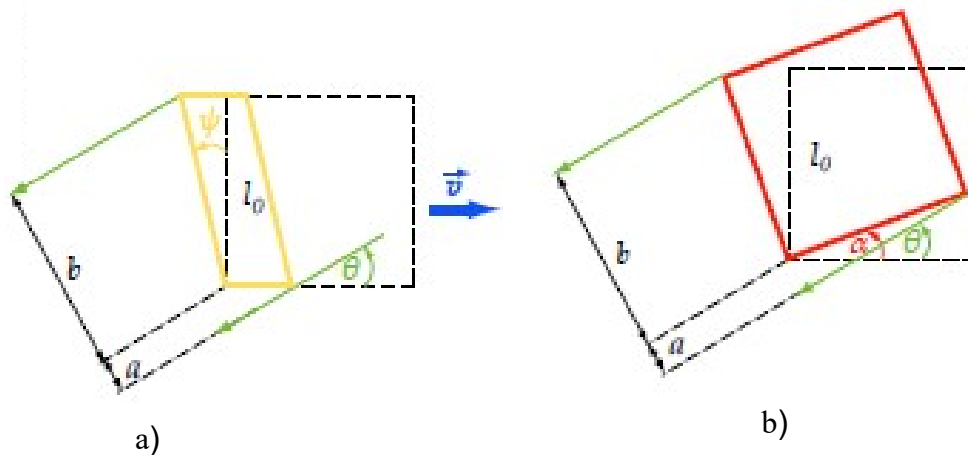
Těleso libovolného tvaru můžeme pokrýt krychlovou sítí a analyzovat pouze pozorovaný tvar krychle. Omezíme se na průmět krychle do roviny pozorování, tj. čtverec, viz obr. 11.3.

Ukážeme, že pozorovaný čtverec, viz obr. 11.3a), se jeví stejně jako čtverec otočený o jistý úhel α , viz obr. 11.3b).

Pomocí vztahů (11.1) a (11.2) pro průměty a , b délek stran pozorovaného čtverce do roviny kolmé na paprsek k pozorovateli odvodíme

$$a = \frac{l \sin \vartheta}{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta} = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \frac{\sin \vartheta}{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta},$$

$$b = l_0 \cos(\vartheta - \psi) = l_0 \frac{\frac{v}{c} + \cos \vartheta}{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta}$$



Obr. 11.3: Pozorovaný a otočený tvar čtverce

$$b = l_0 \cos(\vartheta - \psi) = l_0 \frac{\frac{v}{c} + \cos \vartheta}{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta}.$$

Průměty a , b splňují rovnici

$$a^2 + b^2 = l_0^2.$$

Pro stejné průměty při otočení čtverce o úhel α , viz obr. 3b), platí

$$a = l_0 \sin(\vartheta - \alpha),$$

$$b = l_0 \cos(\vartheta - \alpha) \quad (11.3)$$

a tedy

$$a^2 + b^2 = l_0^2.$$

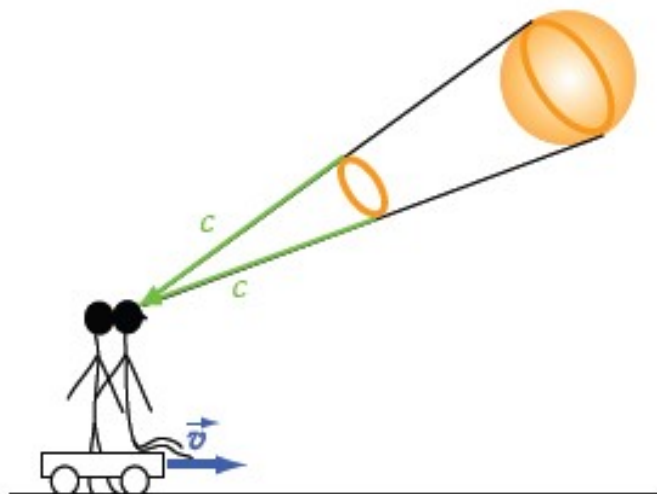
Zkreslení při pozorování čtverce je tedy ekvivalentní jeho otočení o úhel α . Ze vztahu $\operatorname{tg}(\vartheta - \alpha) = a/b$, viz (11.3), vyjádříme α pomocí úhlu pozorování ϑ a rychlosti v

$$\cos \alpha = 1 - \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta} \sin^2 \vartheta.$$

Pohybující se dostatečně vzdálené těleso se nám tedy jeví, jako pootočené. Pro $\vartheta = \pi/2$ je $\cos \alpha = \sqrt{1 - (v/c)^2}$, což znamená, že zkrácení strany čtverce ve směru pohybu se nám jeví stejně, jako při otočení čtverce okolo osy kolmé na rovinu pozorování o úhel α .

Zatímco pootočenou kružnici vidíme jako elipsu, pootočením koule se její kruhový obrys nezmění a nezmění se ani při jejím pohybu vůči pozorovateli. Tento závěr platí bez ohledu na vzdálenost pozorovatele od pohybující se koule.

Uvažujme o dvou pozorovatelích, kteří se ze stejného místa dívají na kouli, jeden je však vůči ní v klidu a druhý v pohybu, viz obr. 11.4.



Obr. 11.4: Koule pozorovaná v klidu a při pohybu

Pozorovateli, který je v klidu, se protínají v oku paprsky světla vyslané z kruhového obrysu koule. Tento obrys se kryje s kruhovým obvodem podstavy kužele s vrcholem v oku pozorovatele, který tvoří zmíněné paprsky. Pozorovaný obrys je tedy určen průsečnicí kulové plochy se středem v místě pozorování a roviny podstavy kužele, která je kolmá na osu kužele. Složky vektoru rychlosti $\vec{c} \equiv (c_1, c_2, c_3)$ světla z obrysu koule, se středem v oku pozorovatele, splňují tedy rovnice

$$c^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \quad ; \quad const. = \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 .$$

Ke zjištění, jak se jeví obrys koule pohybujícímu se pozorovateli, je třeba podrobit složky rychlosti světla v obou rovnicích Lorentzově transformaci. Z postulátu o konstantní rychlosti světla v první rovnici nahradíme pouze nečárkované veličiny za čárkované. Protože Lorentzova transformace je lineární, změni se v druhé rovnici pouze hodnoty koeficientů α, β, γ . Rovnice budou tedy dále popisovat kulovou plochu a rovinu. Průsečnicí kulové plochy a roviny je opět kružnice, a protože místo pozorování je ve středu kulové plochy, pozorujeme i v případě pohybuující se koule kruhový obrys.

11 Úvod do obecné teorie relativity

11.1 Princip ekvivalence

Ve speciální teorii relativity jsou brány do úvahy výhradně inerciální soustavy a pouze síly vzájemného působení, „šířícími se od tělesa k tělesu“ konečnou rychlostí nepřevyšující rychlost c . Z úvah jsou tedy vyloučeny setrvačné síly. Ve shodě s Einsteinovým principem relativity mají v těchto soustavách všechny fyzikální zákony též tvar nebo jinak, tyto zákony jsou invariantní vůči Lorentzově transformaci.

Podle Einsteinova principu relativity nelze od sebe odlišit inerciální soustavy žádným fyzikálním experimentem. Proto z hlediska inerciálních soustav ztrácí jakýkoliv smysl úvaha o absolutním prostoru a času.

Zcela jiná je situace z hlediska setrvačných sil. Již rovnoměrná rotace vyvolává pole setrvačných odstředivých sil, přičemž jednou z možných příčin tohoto jevu by mohla být právě absolutnost prostoru.

Vysvětlení původu setrvačných odstředivých sil na základě absolutnosti prostoru není z hlediska speciální teorie relativity přijatelné. Podnětným při řešení tohoto problému byl názor vyslovený Machem, profesorem německé části Karlovy univerzity koncem 19. století, že příčinou setrvačných sil je veškerá hmota vesmíru. Při tomto přístupu jsou setrvačné síly pojímány jako síly vzájemného působení těles.

Již od časů Galilea je známo, že gravitační pole se shoduje s polem setrvačných sil právě v tom, že uděluje všem tělesům totéž zrychlení (bez ohledu na jejich hmotnost). Hmotnost tělesa v gravitačním poli jiných těles (tzv. **gravitační** nebo také „**těžká**“ **hmotnost**) je kvantitativní charakteristikou gravitační síly, kterou je těleso přitahováno k ostatním tělesům ve svém okolí.

Naopak při pohybu tělesa pod vlivem jiné než gravitační síly se hmotnost jeví jako kvantitativní charakteristika jeho setrvačnosti – „odporu“ tělesa vůči změně dosavadního stavu. V tomto případě hovoříme o tzv. **setrvačné hmotnosti** tělesa.

Zdálo by se, že setrvačná a těžká hmotnost spolu nemají nic společného, neboť první z nich souvisí s pohybem v libovolném silovém poli a druhá pouze s pohybem v poli gravitačním.

Podle Newtona působí gravitační pole Země na částici gravitační silou

$$F = \kappa \frac{m_g M_Z}{r^2}, \quad (10.1)$$

kde M_Z je hmotnost Země, κ gravitační konstanta a m_g je gravitační hmotnost částice. Gravitační síla uděluje částici zrychlení a_g a platí

$$F = m_s a_g,$$

kde m_s je setrvačná hmotnost částice. Srovnáním obou vztahů dostaneme

$$\frac{m_g}{m_s} = \frac{r^2}{\kappa M_Z} a_g.$$

Výraz $r^2/(\kappa M_Z)$ je pro všechny částice ve vzdálenosti r stejný. Proto je jasné, že poměr m_g/m_s je určen pouze gravitačním zrychlením a_g . Nebude-li toto zrychlení záviset na tvaru částice ani na jejím chemickém složení, bude gravitační hmotnost částice rovna její hmotnosti setrvačné. Jestliže experiment potvrdí $m_g = m_s$, můžeme hovořit o ekvivalenci gravitační a setrvačné hmotnosti.

Newton použil k měření vzájemného poměru obou hmotností kyvadla. Stejnou metodou později F. W. BESSEL určil, že poměr m_g/m_s se neliší od jedné více než o 10^{-5} . L. V. EÖTVÖS spolu s D. PEKAREM a E. FEKETEM pomocí torzních vah dosáhli přesnosti 10^{-9} . Na stejném zařízení ale při značně vylepšeném uspořádání, dosáhli R. H. DICKE, P. L. ROLL a R. KROTKOV kolem roku 1964 přesnosti 10^{-11} . V roce 1971 dosáhli V. B. BRAGINSKIJ a V. I. PANOV přesnost 10^{-12} .

V rámci Newtonovské fyziky je fakt, že $m_g = m_s$ pozoruhodný ale zároveň principiálně nepochopitelným faktem. Einstein vyřešil tento problém tím, že postuloval (1907)

Princip ekvivalence gravitační a setrvačné hmotnosti

a s ním související (1915)

Princip lokální ekvivalence pole gravitačních a setrvačných sil.

Podle tohoto principu jsou neinerciální vztažné soustavy lokálně ekvivalentní homogennímu gravitačnímu poli přítomnému v inerciální soustavě. Uvedené tvrzení objasníme na následujícím příkladu:

Předpokládejme, že v kabině výtahu padá volně těleso. Je-li kabina vůči Zemi v klidu, pohybuje se těleso v lokálně homogenním gravitačním poli s konstantním zrychlením a_g . Necht' nyní současně s tělesem volně padá i kabina výtahu. Při jinak stejných počátečních podmínkách se v tomto případě těleso nachází vůči kabině v klidu. Ve zrychleně se pohybující neinerciální soustavě spojené s kabinou na těleso spolu s gravitační silou působí právě opačná setrvačná síla a jejich vektorový součet je roven nule – těleso je vzhledem k působení těchto sil v rovnováze.

Uvedený příklad ukazuje, že uvnitř padající kabiny (neinerciální soustavy) nelze její zrychlený pohyb pozorovat – jinými slovy – volně padající kabina výtahu se chová jako inerciální soustava, a proto v ní platí všechny vztahy a zákony speciální teorie relativity.

Je třeba zdůraznit, že právě popsany jev má pouze **lokální charakter**. Ekvivalence gravitační a setrvačné síly je vzhledem k požadavku **homogenosti gravitačního pole** pouze lokální, tzn., že je omezená jen na „malé“ oblasti prostoročasového kontinua.

Gravitační pole je lokálně ekvivalentní poli setrvačných (inerciálních) sil, vznikajících při pohybu se zrychlením. Tato dvě pole nelze lokálně od sebe odlišit žádným fyzikálním experimentem.

11.2 Einsteinova teorie gravitace obecný princip relativity

Z hlediska speciální teorie relativity Newtonův gravitační zákon nespĺňuje princip relativity (není invariantní vůči Lorentzově transformaci). Navíc z něho vyplývá okamžité působení na dálku a tedy, šíření signálu nekonečnou rychlostí. Tyto principiální nedostatky řešil Einstein formulací nové teorie gravitačního pole.

Uvažujme lokálně inerciální vztažnou soustavu spojenou s pohybující se soustavou, např. již zmíněnou kabinu výtahu volně padající v malé oblasti prostoročasového kontinua. V této lokálně inerciální soustavě S' můžeme v souladu se speciální teorií relativity vyjádřit kvadrát nekonečně malého prostoročasového intervalu ds^2 ve tvaru

$$ds^2 = dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 - c^2 dt'^2 = dx_\mu' dx_\mu'.$$

Přejdeme nyní do inerciální soustavy S . Při přechodu se prostoročasové souřadnice přetransformují pomocí transformačních vztahů

$$x_\mu' = x_\mu'(x_\alpha).$$

Invariant ds^2 lze při této transformaci vyjádřit jako

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta \quad (10.2)$$

kde $g_{\alpha\beta}$ je tzv. **metrický tenzor**, pro nějž platí

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\delta'}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\delta'}{\partial x_\beta} = g_{\beta\alpha}.$$

Složky metrického tenzoru $g_{\alpha\beta}$ jsou obecně funkcemi souřadnic x_α . Tenzor sám charakterizuje **geometrické vlastnosti prostoru**. Vnitřní geometrie prostoru, určená vztahem

(10.2) se nazývá **Riemannovou geometrií**. Pro $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ je geometrie prostoru geometrií euklidovskou, resp. pseudoeuklidovskou.

Posuzujeme-li vztažné soustavy z hlediska jejich vnitřní geometrie, můžeme říci, že inerciální vztažné soustavy jsou charakterizovány pseudoeuklidovskou geometrií.

Einsteinova základní myšlenka spočívá ve spojení gravitace, jako obecně působící interakce, s vnitřní geometrií prostoru. Vnitřní geometrie prostoru, popsána metrickým tenzorem $g_{\alpha\beta}$ je tedy funkcí gravitačního pole. Princip lokální ekvivalence gravitačních a setrvačných sil pak jenom znamená, že lokálně lze obecnou Riemannovu geometrii gravitačního pole převést na geometrii euklidovskou.

Jestliže při tomto přechodu **tenzor křivosti** $R_{\alpha\beta\gamma} (g_{\alpha\beta})$, tenzor definovaný pomocí složek metrického tenzoru $g_{\alpha\beta}$, vymizí ($R_{\alpha\beta\gamma} = 0$), pak v oblasti prostoročasového kontinua, do níž přecházíme, působí speciální (odstranitelné) „gravitační“ pole, nazývané **polem setrvačných sil**.

V případě nenulového tenzoru křivosti působí v dané oblasti prostoročasového kontinua neodstranitelné gravitační pole, jehož zdrojem jsou hmotná tělesa, která se nacházejí v dané oblasti; v okolí těchto těles je **prostor obecně zakřivený**.

Gravitační pole nelze žádnými transformacemi „odstranit“ v celém prostoru. Právě v tom spočívá jeho zásadní odlišnost od polí setrvačných sil. Tato pole jsou lokálně ekvivalentní gravitačnímu poli.

Na základě uvedených úvah, závěrů speciální teorie relativity a Riemannovy geometrie sestavil v roce 1915 Einstein **Einsteinovu rovnici gravitačního pole**, která odstranila uvedené nedostatky Newtonova gravitačního zákona

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta} = -\alpha T_{\alpha\beta},$$

kde $R_{\alpha\beta}$ je Ricciho tenzor křivosti, $T_{\alpha\beta}$ tenzor energie a hybnosti, R skalární křivost, λ tzv. **kosmologická konstanta**, jejíž hodnotu je nutné určit z rozložení hmoty a $\alpha = 8\pi\kappa/c^4$. Pro statické pole a nulovou křivost přechází Einsteinův gravitační zákon v zákon Newtonův, viz (10.1).

Dále zformuloval obecný princip relativity:

Všechny přírodní zákony mají stejný tvar ve všech ekvivalentních vztažných soustavách

Za ekvivalentní přitom považujeme ty vztažné soustavy, které mají stejný metrický tenzor. Einsteinova teorie gravitace je z historických důvodů známa pod názvem **obecná teorie relativity**.

12 Černé díry

12.1 Historie

Představu tělesa tak masivního, že z něho nedokáže uniknout dokonce ani světlo, navrhl anglický geolog JOHN MICHELL již v roce 1783. Michell vypočítal, na základě Newtonovy teorie gravitace, že těleso o stejné hustotě jako Slunce a o poloměru 500-krát větším, by mělo na povrchu únikovou rychlost rovnou rychlosti světla, a proto by bylo neviditelné.

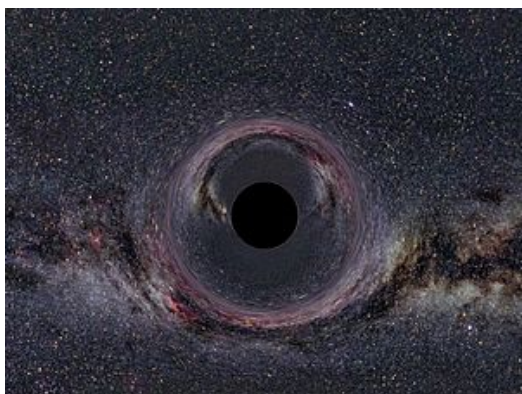
V roce 1915 zveřejnil Albert Einstein obecnou teorii relativity. O několik měsíců později německý matematik KARL SCHWARZSCHILD našel řešení uvedených rovnic pro gravitační pole rotačně symetrického nerotujícího tělesa a ukázal, že objekt, označovaný v současné době jako černá díra, může teoreticky existovat. Kritická je velikost *Schwarzschildovy sféry* – kulové plochy o poloměru

$$r_s = \frac{2Gm}{c^2},$$

kde G je gravitační konstanta a c rychlost světla. Na této ploše se stává gravitační síla nekonečně velkou. Na symetrické těleso, které dosáhne velikosti odpovídající *Schwarzschildově poloměru*, působí nekonečně velká gravitační síla. Je to poloměr, do kterého musí být veškerá hmota o dané hmotnosti stlačena, aby již žádná síla nemohla odvrátit její zhroucení do *gravitační singularity*. Objekt menší než Schwarzschildův poloměr je označován jako *černá díra*. Pro objekt hmotnosti Slunce vychází poloměr přibližně 3 km, pro Zemi by tento poloměr byl necelých 9 mm.

Z výpočtů, provedených na základě obecné teorie relativity pak vyplývá, že každé těleso, jehož hmotnost překročí tzv. *Tolmanovu-Oppenheimerovu-Volkoffovu mez*, se zhroutí do černé díry.

12.2 Horizont událostí



Obr. 12.1: Simulace černé díry

Je plocha v prostoročase, která pro vnějšího pozorovatele vymezuje oblast, ze které nemůže zaregistrovat žádné elektromagnetické záření (světlo), viz obr. 12.1 a vymezuje hranice černé díry. Úniková rychlost je na ní rovna rychlosti světla. Pod horizontem všechny světelné světočáry zůstávají v černé díře (eventuálně směřují do singularity) a nemohou ovlivnit pozorovatele vně černé díry.

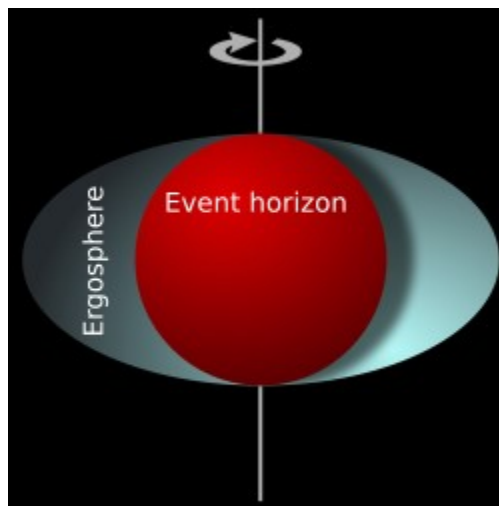
Ve Schwarzschildově řešení, které popisuje nerotující nenabitou černou díru, má horizont tvar koule o Schwarzschildově poloměru.

12.3 Rotující černá díra

Ergosféra

Horizont událostí nerotující černé díry je kulová plocha a její singularita je bodová. V případě, kdy černá díra rotuje, dochází k radikálním změnám v okolním prostoročase. Rotující černá díra má dva horizonty. Původní, Schwarzschildův, se zachovává, přibývá však ještě jeden vnější, tzv. *Cauchyho horizont*. Mezi Schwarzschildovým a Cauchyho horizontem jsou všechna tělesa strhována vírovým polem do rotačního pohybu vzhledem k černé díře. Přitom se však nemusí pohybovat jen směrem ke středu, mohou se k černé díře jak přibližovat, tak se od ní i vzdalovat, mohou překročit hranici ergosféry směrem dovnitř i ven. Pod Schwarzschildovým horizontem pak nastává neodvratný pád do černé díry.

Z fyzikálního hlediska dochází v okolí černé díry v důsledku rotace ke změnám prostoročasu. Ten je díky zachování nenulového momentu hybnosti centrálního tělesa, strháván ve směru rotace. Prostoročas je strháván rotací jakéhokoliv hmotného tělesa, např. i Země, avšak v



Obr. 12.2: Ergosféra

rotující černé díry

případě černých děr jde o tak silný efekt, že od určité vzdálenosti je pro objekty nemožné setrvávat v klidu, i kdyby se lokálně pohybovaly proti směru rotace rychlostí světla. Plocha, na které roste intenzita gravitačního pole k nekonečnu, a pod kterou je setrvávání v klidu nemožné, se u rotujících černých děr nazývá *ergosféra*. Ergosféra má elipsoidní tvar a na ose rotace se dotýká horizontu událostí, viz obr. 12.2. Rychlost rotace černé díry je omezena podmínkou, že bod na rovníku černé díry se může pohybovat nejvýše rychlostí světla.

Objekty pohybující se v ergosféře, se nacházejí nad horizontem událostí, a mohou nejen uniknout z vlivu gravitace černé díry, ale za jistých okolností mohou být dokonce vymrštěny ven z ergosféry velmi vysokou rychlostí díky energii a momentu hybnosti černé díry. Proto i její název ergosféra (pracující sféra), protože je schopná vykonávat práci na úkor rotační energie černé díry.

12.4 Fyzikální vlastnosti černé díry

Fyzikální pole černé díry

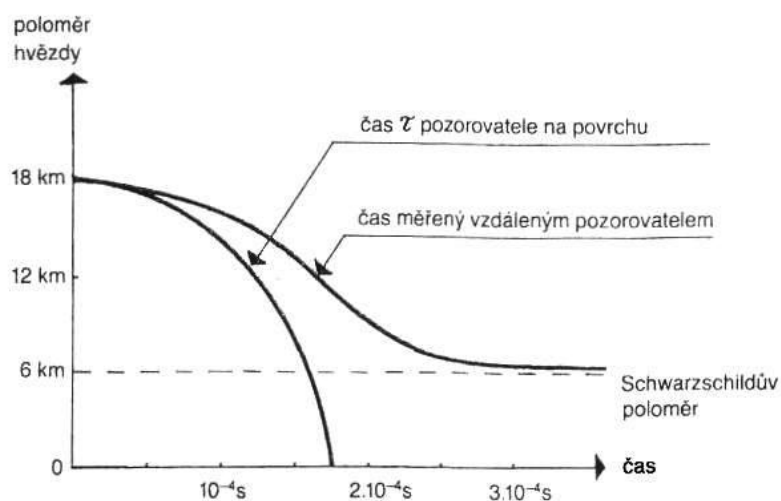
Z dobře odůvodněných předpokladů vyplývá, že černé díry nemají žádné pozorovatelné vlastnosti, které by byly použitelné k objasnění jejich „vnitřní struktury“. Podle obecné teorie relativity se během relativistického kolapsu téměř všechny charakteristiky fyzikálních polí vyzáří, resp. zůstanou pohřbeny v černé díře. Výjimkou je elektrostatické pole elektrického náboje a u rotující černé díry moment hybnosti. Černou díru tedy úplně charakterizují tři parametry: hmotnost, moment hybnosti a elektrický náboj.

Tento fakt shrnuje fráze „černé díry nemají vlasy“, kterou vyslovil JOHN WHEELER. Toto tvrzení vyplývá z klasické teorie - kvantová teorie připouští i jiné náboje jako např. podivnost, za normálních okolností charakterizující elementární částice. Ty se však mohou projevit až v dostatečné blízkosti horizontu událostí a nemají astrofyzikální význam.

Zpomalování času

Existence černé díry způsobuje zakřivení časoprostoru v jejím okolí a tak vlivem gravitačního pole dochází k výraznému zpomalování času. Z hlediska vnějšího pozorovatele dosáhne těleso směřující k černé díře horizont událostí za nekonečně dlouhou dobu. U světla, které registruje vnější pozorovatel a jež vysílá padající objekt, dochází ke zvětšujícímu se rudému posuvu, který dosahuje na horizontu událostí nekonečné hodnoty – světlo zmizí.

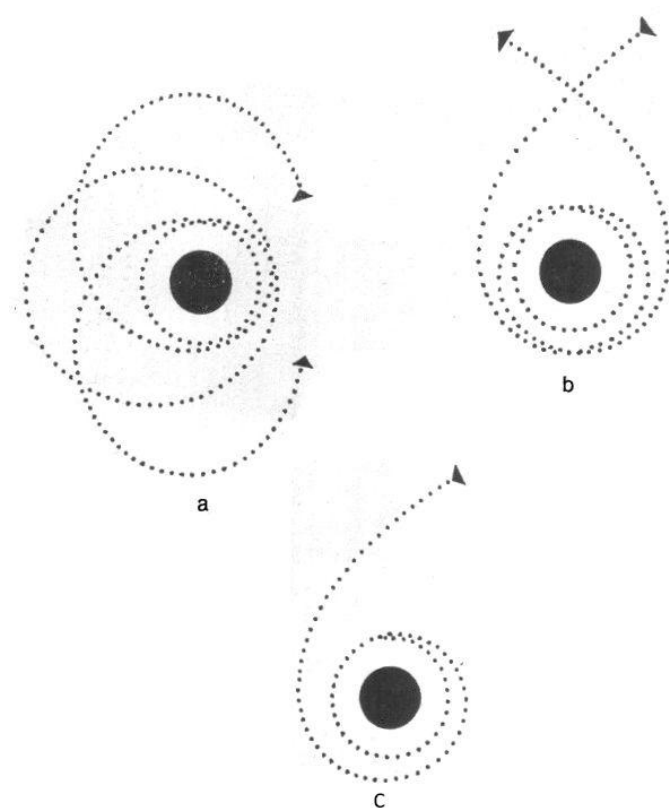
Z hlediska pozorovatele, který je spojen s padajícím tělesem, však dosáhne horizont událostí za konečný časový interval, viz obr. 12.3.



Obr. 12.3: Průběh času v blízkosti černé díry

Mechanika černých děr

Pohyb těles v blízkosti černých děr má několik odlišností od pohybu, které vyplývají z Newtonovy gravitační teorie, i když trajektorie těles zůstávají rovinné. Pro tělesa dostatečně vzdálená od černé díry, jejichž rychlost má hodnotu menší než je úniková rychlost, se podle



Newtonovy teorie pohybují po uzavřené trajektorii ve tvaru elipsy. V blízkosti černé díry se těleso rovněž periodicky přibližuje a vzdaluje, ale trajektorie není uzavřená., viz obr. 12.4a), jeho drahou je elipsa, která se pomalu otáčí v rovině, kterou určuje. Právě takové pomalé stáčení eliptické dráhy Merkura bylo prvním experimentálním ověřením obecné teorie relativity.

K rozdílu mezi předpovědí Newtonovy a Einsteinovy teorie gravitace dochází u pohybu tělesa po kruhové dráze. Podle Newtonovy teorie je tento pohyb možný v libovolné vzdálenosti od středu. Podle Einsteinovy teorie gravitace je však tento pohyb možný pouze do vzdálenosti rovné 1,5 násobku Schwarzschildova poloměru. Tato speciální oběžná dráha je známá jako **sféra fotonů**, viz obr. 12.4 b), kdy pohybující těleso dosahuje rychlosti světla. Proto se na této dráze, ani na dráze o menším poloměru už nemůže pohybovat.

Obr. 12.4: Trajektorie těles v blízkosti černé

Avšak již pohyb po dráze, která je menší než tři Schwarzschildovy poloměry je nestabilní. Sebemensi porucha, která vychyli těleso z přesně kruhové dráhy, způsobí, že těleso buď spadne do černé díry, nebo odletí do prostoru.

Na rozdíl od Newtonovy mechaniky, dochází u černé díry u těles, které se přiblíží k černé díře z „nekonečna.“ dostatečně blízko, přibližně na vzdálenost dvou Schwarzschildových poloměrů, ke gravitačnímu zachycení. Těleso se bude pohybovat po dráze blízké kružnici, na kterou se bude „navíjet“ a nikdy neodletí do prostoru, viz obr. 12.4 c).

Singularita

Obecná relativita předpovídá, že v centru černé díry, pod horizontem událostí, existuje *singularita*, místo, kde je zakřivení prostoročasu nekonečné a i gravitační síly jsou nekonečně velké. Prostoročas pod horizontem událostí je specifický tím, že v singularitě skončí každý objekt, který projde horizontem událostí, a tedy, že se vše uvnitř horizontu událostí pohybuje směrem k ní. Jakmile objekt překročí horizont událostí, jeho časová osa obsahuje konec samotného času a není možný návrat světočary ven přes horizont událostí.

Očekává se, že budoucí zpřesnění anebo zobecnění obecné relativity, především kvantové gravitace, změní pohled na podstatu nitra černé díry. Většina teoretiků interpretuje matematické rovnice popisující singularitu tak, že naznačují nekompletnost současné teorie a že k plnému pochopení singularity musí do hry vstoupit nové jevy.

Pád dovnitř černé díry

Čím blíže se objekt padající do černé díry dostane k horizontu událostí, tím déle trvá fotonům, které vyzařuje, uniknout z gravitačního pole černé díry. Vnější pozorovatel zaregistruje zpomalující se pád objektu při přibližování se k horizontu událostí, který zdánlivě nikdy nedosáhne.

Během pádu objektu do singularity černé díry, dochází k značnému nárůstu gradientu gravitačního pole směrem k singularitě. Objekt se začne prodlužovat ve směru singularity a nakonec ho slapové síly roztrhají. V blízkosti singularity pak dosáhne hodnota gradientu gravitačního pole hodnotu dostatečnou k roztržení samotných atomů. Tento bod závisí na hmotnosti černé díry. U velkých černých děr, např. v centrech galaxií, leží tento bod pod horizontem událostí. Naopak u malých děr mohou slapové síly dosáhnout kritické hodnoty již před dosažením horizontu událostí.

12.5 Hawkingovo záření

Černá díra je z pohledu klasické fyziky objekt, který nemůže zaniknout vlivem ztráty své hmotnosti a jedinou cestou zániku černé díry se tak jeví její pohlcení jinou černou dírou tzv. *gravitační srážka*.

Z pohledu kvantové fyziky existuje však další možnost, jak černá díra může zaniknout - pomocí tzv. *Hawkingova záření*.

Podle klasické fyziky černá díra absorbuje všechno dopadající záření, avšak žádné záření nevyzařuje. Teplota na horizontu záření by tedy měla být rovna absolutní nule, což znemožňuje černé díře dosáhnout termodynamický stav rovnováhy s okolím. STEPHEN HAWKING vyslovil hypotézu o kvantovém vypařování černých děr, podle které je každá černá díra schopna spontánně emitovat záření přesně takové, jako kdyby byla obyčejným černým tělesem zahřátým na teplotu $T_H = G / 2\pi$. Z kvantové fyziky vyplývá, že na horizontu událostí neustále vznikají nové částice, které odnášejí část energie černé díry, čímž zmenšují hmotnost díry a umožňují pozorování černé díry v určitém spektru. Únik částic je z počátku jen velmi pozvolný, ale ke konci získává proces na dynamičnosti, až na konci dojde k explozi černé

díry. Z výpočtů vyplývá, že černá díra o hmotnosti Slunce se vypaří přibližně za 10^{67} let, což je doba několikrát převyšující současný odhad stáří vesmíru – $1,37 \cdot 10^{10}$ roků.

Příčinou kvantového vyzařování je proces kreace páru částice-antičástice, ke kterému dochází v blízkosti horizontu událostí, kde se mohou vytvářet elementární částice na základě **fluktuace vakua**. Ve vakuu dochází k neustálému vzniku a zániku párů částice-antičástice (fluktuace počtu částic musí být kvůli relacím neurčitosti nenulové, což se projevuje právě tvorbou těchto párů). V okolí horizontu událostí může nastat situace, kdy z páru vzniklých částic zůstane jedna částice nad horizontem, zatímco druhá vznikne pod horizontem a musí tedy nevyhnutelně spadnout do singularity. Pokud první částice unikne mimo dosah gravitace černé díry, pozorovateli v okolí horizontu se jeví, že částice vzniká jakoby z ničeho v blízkosti horizontu. Energie potřebná na vytvoření částice ubude z hmoty černé díry. Ztráta hmotnosti černé díry je způsobena tím, že antičástice pohlcená černou dírou nese záporný náboj. Z Einsteinova vztahu $E = mc^2$ pak vyplývá, že antičástice způsobí v černé díře pokles energie a tím i hmotnosti.

Hawkingovo záření má formu gama a X paprsků, ale je příliš slabé. Abychom ho byli schopni zachytit, musela by být vyzařující černá díra vzdálená od nás asi jen půl miliardy km (vzdálenost Pluta).

12.6 Existence černých děr

Vznik černých děr

Existuje několik modelů vzniku černé díry:

Gravitační kolaps

Nejznámější z těchto procesů jsou některá konečná stadia evoluce hvězd, kdy poklesne tlakový gradient záření hvězdy a hvězda se neudrží v hydrostatické rovnováze. Zároveň musí být splněna podmínka dostatečného množství hmoty, aby následný kolaps nebyl zadržen například ve fázi neutronové hvězdy. Kolaps takové hvězdy pak není možno zastavit, povrch hvězdy se zhroutí pod horizont událostí a nevyhnutelně skončí v singularitě.

Akumulace hmoty

Dochází-li v určité části prostoru v důsledku gravitačních sil k seskupování hmoty, gravitační pole takové oblasti sílí a zakřivení prostoru v okolí se zvětšuje. Dosáhne-li úniková rychlost v určité vzdálenosti od gravitačního centra rychlosti světla, vytvoří se horizont událostí, uvnitř kterého musí hmota nevyhnutelně skončit v singularitě. Černé díry tohoto typu existují jako dva typy modelů:

- **Primordiální černé díry**, které mohly vzniknout v období velmi raných fází vývoje vesmíru. Prozatím však nebyly observačně potvrzeny a to i přes to, že by se jich mělo ve vesmíru vyskytovat velké množství.
- **Supermasivní černé díry** černé díry, které se nalézají v centru galaxií včetně naší Mléčné dráhy, a pravděpodobně také v centrech kulových hvězdokup. Vznikají prostřednictvím vytvoření horizontu událostí v důsledku nakupení velkého množství hmoty na relativně malém prostoru. V tomto případě se hmotou myslí i hvězdný materiál, tedy hvězdy případně i již existující menší černé díry.

Miniaturní a mikroskopické černé díry

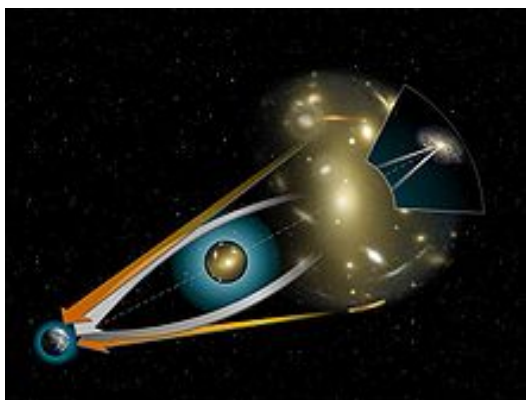
Proces vzniku miniaturních černých děr je na hranici hypotézy a fikce. Přesto existují určité náznaky, že v případě urychlovače s energií řádově TeV by mohla mikroskopická černá díra vzniknout. Urychlovač LHC, který byl v CERNu uveden do provozu v roce 2008, by měl tyto hodnoty energie dosáhnout. V důsledku srážky těžkých atomových jader za vysokých energií tak existuje možnost, že hmota v oblasti srážky se obklopí horizontem událostí. Takováto černá díra, pokud by vznikla, se však obratem vypaří. Vytvoření černých děr v urychlovačích by mohlo rozřešit tzv. paradox unitarity černých děr, který představuje problém, zda se pádem do černé díry ztrácí kvantová informace.

12.7 Pozorování černých děr

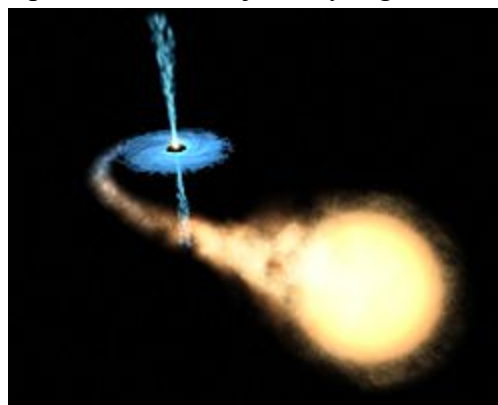
Černé díry nemůžeme objevit podle světla vyzařovaného nebo odraženého od hmoty v jejich nitru. Tyto objekty však lze identifikovat pozorováním jevů v jejich blízkosti, například **gravitační čočky**, nebo hvězd, které zdánlivě obíhají kolem prostoru, kde není žádná viditelná hmota.

Gravitační čočka

Je astronomický pojem pro objekt s intenzivním gravitačním polem, který se nachází mezi pozorovatelem a zdrojem světla nebo jiného záření, přičemž tento objekt svým gravitačním



Obr. 12.5: Gravitační čočka



Obr. 12.6: Akreční disk

polem zakřivuje paprsky vycházející ze zdroje podobně, jak tomu je u spojné čočky. Jev se nazývá v případě černé díry gravitační mikročočkový efekt, protože, obraz zakřivuje pouze jeden objekt – černá díra, kdežto běžná gravitační čočka je způsobena více galaxiemi, viz obr. 12.5.

Akreční disk

Za efekty, které lze nejlépe registrovat jsou efekty, které pocházejí z hmoty padající do černé díry. Tato hmota se dle předpovědí, podobně jako voda tekoucí do odtoku, soustřeďuje do rychle se otáčejících **akrečních disků** do té doby, než je černou dírou pohlcena. Vnitřní tření disk extrémně zahřívá a způsobuje vyzařování velkého množství rentgenového a ultrafialového záření. Tento proces je neobyčejně účinný a může přeměnit až 50 % zbytkové hmoty na záření. Další pozorovatelné efekty jsou úzké výtrysky částic, které se pohybují v ose akrečního disku relativistickými rychlostmi, viz obr. 12.6.

Identifikovat takový objekt jako černou díru je možné pouze tehdy, pokud se prokáže, že se nemůže jednat o jiné dostatečně hmotné a kompaktní těleso nebo provázaný systém těles.

Pozorovatelný rozdíl mezi černými děrami a jinými kompaktními objekty vzniká tím, že jakákoli kolabující hmota, která narazí na kompaktní hmotný objekt relativistickou rychlostí, vyvolá nepravidelná vzplanutí rentgenového záření nebo jiného tvrdého záření. Nedostatek vzplanutí tohoto typu kolem kompaktní koncentrace hmoty se považuje za důkaz, že objekt je černá díra bez povrchu, na který by mohla hmota náhle narazit.

Objevy černých děr

V roce 2004 byly objeveny objekty, které byly identifikovány jako černé díry, což vedlo k vypracování nové teorie rozšíření černých děr ve vesmíru, podle které existuje téměř pětkrát více černých děr, než se do té doby předpokládalo.

- v červenci 2004 astronomové identifikovali obří černou díru Q0906+6930 v centru galaxie v souhvězdí Velké medvědice. Odhad věku a hmotnosti takových černých může pomoci určit věk vesmíru.
- v listopadu 2004 tým astronomů oznámil identifikaci první černé díry střední hmotnosti v naší galaxii, která obíhá přibližně tři světelné roky od Střelce A*. Tato střední černá díra o hmotnosti asi 1300 Sluncí se nachází uvnitř shluku sedmi hvězd, pravděpodobně jako pozůstatek masivního shluku hvězd roztrženého srážkou galaxií. Tento objev podporuje názor, že supermasivní černé díry se zvětšují pohlcováním blízkých menších černých děr a hvězd.
- v únoru 2005 byl objeven modrý obr SDSS J090745.0+24507 opouštějící Mléčnou dráhu dvojnásobnou únikovou rychlostí (0,0022 rychlosti světla). Trajektorii hvězdy je možné dohledat až zpět ke galaktickému jádru. Vysoká rychlost této hvězdy podporuje hypotézu existence supermasivní černé díry ve středu naší galaxie.
- v červnu 2007 identifikoval mezinárodní tým astronomů z Kanady, Francie a USA doposud neznámou černou díru ve vzdálenosti 13 miliard světelných let od Země. Jedná se o nejvzdálenější černou díru, která byla zatím nalezena. Tato černá díra se nalézá ve středu kvasaru.
- v říjnu 2007 byl publikován objev patrně největšího binárního systému hvězdy a černé díry, viz obr. 12.5.

12.8 Alternativní modely

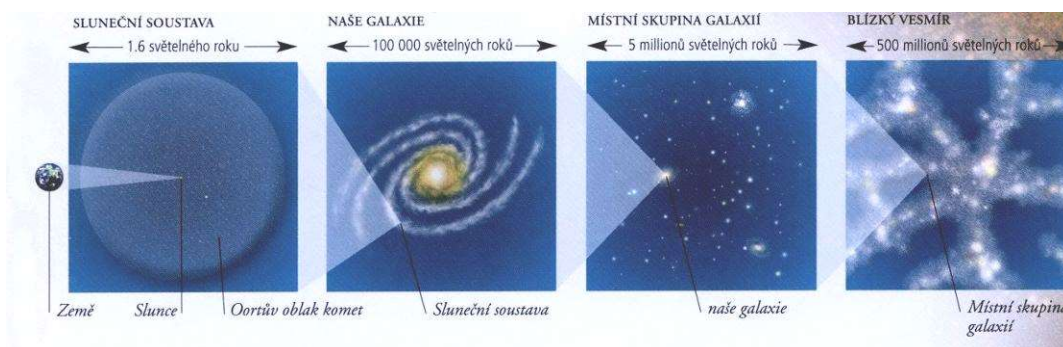
V současné době existuje několik alternativních modelů, které vykazují chování jako černé díry, ale fungují bez singularity. Většina vědců však považuje tyto koncepty za mnohem složitější a nepřinášející žádné pozorovatelné rozdíly od koncepce černých děr. Nejvýznamnější z těchto teorií je teorie tzv. gravahvězdy.

Americký fyzik GEORGE CHAPLINE z Národní laboratoře Lawrencea Livermora v Kalifornii pak předložil hypotézu, že černé díry neexistují a objekty v současnosti považované za černé díry jsou ve skutečnosti hvězdy tvořené z *temné hmoty*. Svoje závěry opírá o výsledky některých kvantově-mechanických analýz. I když má jeho návrh v současnosti mezi fyziky jen malou podporu je značně citovaný v médiích.

13 Vznik a vývoj vesmíru

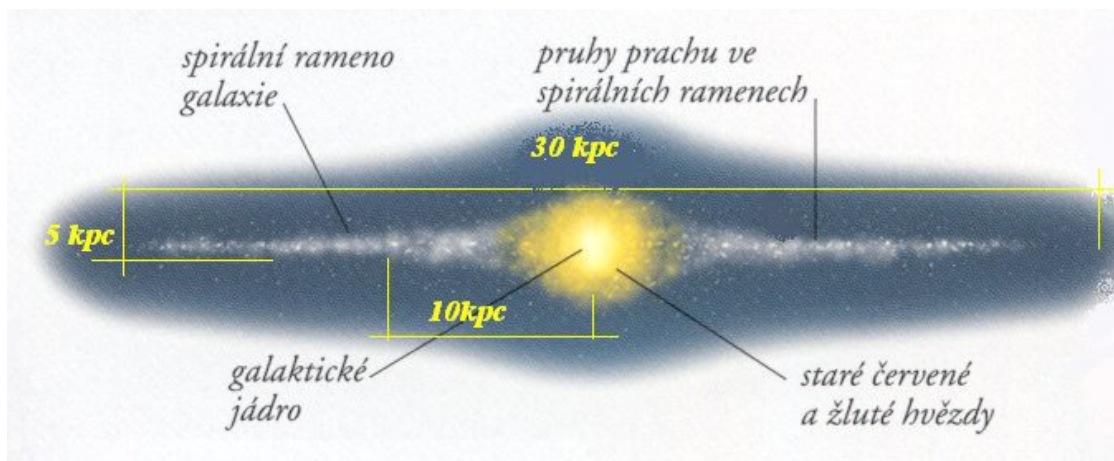
13.1 Postavení Země ve vesmíru

Dříve než se budeme věnovat výkladu současných názorů na vznik a vývoj vesmíru, upřesníme postavení Země v kosmickém prostoru, tak jak vyplývá z výsledků astronomických pozorování, viz obr. 13.1. Na tomto obrázku je postupně, zleva doprava, upřesňováno postavení naší Země v kosmickém prostoru. Na každém obrázku je zároveň uvedena rozměrová škála (ve světelných rocích) zobrazené prostorové struktury.



Obr. 13.1: Kosmické struktury upřesňující postavení Země ve vesmíru

Země, jako součást **Sluneční soustavy**, náleží k obrovskému hvězdnému seskupení označovanému jako naše **Galaxie**, nebo **Mléčná dráha**, v jejímž středu se nachází masivní černá díra. Naši galaxii řadíme mezi tzv. *spirální galaxie*. Má tvar plochého disku, viz obr. 13.2, z kterého vybíhá několik spirálních ramen. Slunce je umístěno excentricky ve vzdálenosti přibližně 10 kpc od středu Mléčné dráhy. V důsledku rotace celé galaxie se Slunce pohybuje rychlostí asi 250 km.s^{-1} . Hvězda nejbližší Slunci – Proxima Centauri je od Slunce vzdálena přibližně 4 světelné roky.



Obr. 13.2: Boční pohled na Mléčnou dráhu

Za hranicemi naší Galaxie se nacházejí další galaxie, které se shlukují do tzv. **galaktických kup**. Naše Galaxie patří do tzv. **místní skupiny galaxií**. Galaxie a skupiny galaxií pak vytvářejí buněčnou strukturu, kde se nachází v buněčných stěnách, zatímco vnitřek těchto buněk je prázdný. Větší struktury nebyly ve vesmíru pozorovány. Vesmír, pozorovaný v těch největších měřítkách, pomíneme-li nepravidelnosti v řádu 300 milionů světelných let a menší, se jeví jako homogenní. Homogennost vesmíru se podařilo ověřit pozorováním do vzdálenosti 10 miliard světelných let.

13.2 Vznik a vývoj vesmíru

Vznikem a vývojem vesmíru se zabývá *kosmologie*. Během staletí lidského poznání se pohled na vesmír a jeho vývoj neustále měnil a je tomu tak stále. Dnes nejuznávanější teorie, jejíž důsledky jsou nejvíce ve shodě s výsledky pozorování je tzv. *standardní model*.

13.3 Standardní model

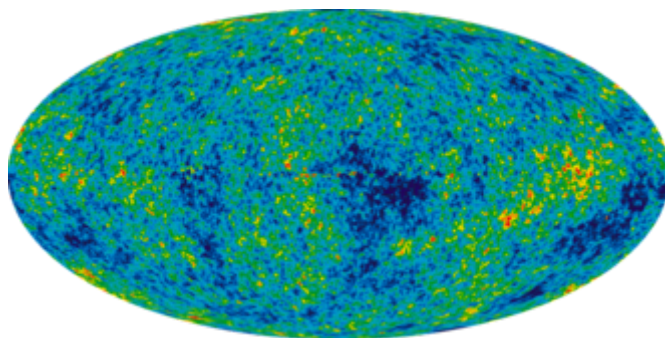
Standardní model kombinuje teorii obecné relativity a kvantové fyziky a popisuje hmotu a gravitaci za velmi extrémních podmínek. Detailní teorie velkého třesku a vývoje vesmíru v jeho prvních třech minutách vychází především z tohoto modelu.

Velký třesk

Podle teorie velkého třesku (anglicky *Big Bang*) vznikl vesmír z bodové singularity o velké hustotě. Tato singularita byla jak počátkem hmoty a prostoru tak i počátkem času.

Vesmír se začal rozpínat v tzv. *Planckově čase*, $t_p = \sqrt{\hbar G/c^5} \approx 5,391 \cdot 10^{-44} s$, což je podle současných poznatků nejmenší kvantum času, z extrémně horké a husté bodové singularity, v níž byla soustředěna veškerá hmota a energie pozorovatelného vesmíru. Od Planckova času se vesmír exponenciálně rozpínal v důsledku velmi rychlé metrické expanze, označované jako *inflace* do dnešní podoby za méně než 10^{-32} sekundy.

Inflační teorie vysvětluje mnoho zásadních kosmologických otázek – proč je vesmír na velkých měřítkách s velkou přesností homogenní, izotropní a plochý, když na základě fyziky velkého třesku bychom očekávali spíše opak nebo proč ve vesmíru nepozorujeme topologické defekty a magnetické monopóly. Inflační kosmologie rovněž vysvětluje původ struktury vesmíru na velkých měřítkách – ta pochází z drobných nehomogenit majících původ v kvantových fluktuacích v počáteční oblasti prostoru, která je dnes námi viditelným vesmírem, viz obr. 13.3.



Obr. 13.3: Detailní mapa nehomogenit $\pm 200 \mu K$ mikrovlnného kosmického záření pozadí.

Protože se vesmír může zvětšovat metrickou expanzí rychlostí větší než je rychlost světla, můžeme pozorovat jen část vesmíru odpovídající vzdálenosti, kterou světlo uletělo od okamžiku velkého třesku, tzv. *horizont viditelnosti*. To znamená, že principiálně můžeme ve vesmíru vidět jenom konečný počet hvězd a galaxií.

Až do objevu rozpínání vesmíru narážela představa nekonečného vesmíru s rovnoměrně vyplněným hvězdami na zajímavý paradox. V nekonečném vesmíru rovnoměrně vyplněném hvězdami musí paprsek narazit dříve či později na svítící povrch hvězdy. Noční nebe by tedy mělo zářit stejně jako povrch Slunce a hvězd. Tento jev se označuje jako *fotometrický paradox*.

V rozpínajícím se vesmíru existuje však pro každého pozorovatele horizont viditelnosti, a proto každý pozorovatel vidí jen konečný počet hvězd řídce rozložených v prostoru. Náš pohled projde většinou mimo, aniž narazí na jedinou hvězdu. Noční nebe se nám jeví proto jako temné.

Existence horizontu viditelnosti nám neumožňuje rozhodnout, zda je vesmír uzavřený nebo otevřený. V obou případech můžeme vidět jen ohraničenou část vesmíru. Proto nelze posoudit, zda vesmír je konečný nebo nekonečný.

Podle současných interpretací astronomických pozorování je stáří vesmíru $13,75 \pm 0,17$ miliardy let a velikost pozorovatelného vesmíru minimálně 93 miliard světelných let čili $8,80 \cdot 10^{26}$ metrů.

Měření, získaná pomocí kosmických sond podporují předpoklad inflace i teorii velkého třesku.

Vznik hmoty

Počáteční bodovou singularitu tvořila velmi hustá a žhavá látka. Standardní model popisuje dost přesně, co se dělo v prvních třech minutách po vzniku vesmíru.

Z výsledků pozorování vyplývá, že se během expanze vesmíru vystřídalo několik fází, které můžeme vysvětlit na základě jaderné a atomové fyziky.

V počáteční fázi expanze vesmíru, hustota energie elektromagnetického záření klesala rychleji než hustota hmoty, protože energie fotonu se snižuje s jeho vlnovou délkou. A tak, i když hustota energie vakua v současné době ve vesmíru dominuje, v počáteční fázi dominovalo záření. V důsledku neustálé expanze, hustota energie vesmíru klesala, a vesmír se stával chladnějším a elementární částice, kvarky, elektrony a neutrina včetně jim odpovídajících antičástic, se mohly postupně spojovat do stále složitějších objektů. Tak se v rané fázi vesmíru mohly vytvořit stabilní protony a neutrony, které se pak spojovaly do atomových jader.

V této fázi vývoje byl vesmír velmi horkou a hustou plazmou záporných elektronů, neutrálních neutrin a kladných jader prvků. Jaderné reakce mezi jádry vedly k současné tvorbě lehčích jader prvků, a to zejména *vodíku*, *deuteria* a *helia*. Nakonec se elektrony a jádra spojily do stabilních atomů a vesmír se stal průhledným pro většinu vlnových délek záření. V tomto okamžiku se záření oddělilo od hmoty a vytvořilo všudypřítomné, izotropní mikrovlnné záření kosmického pozadí, které dnes pozorujeme jako *reliktní záření*. Vznik prvků o větší atomové hmotnosti pak probíhal v pozdější fázi vesmíru při explozi supernov.

Některá fakta však standardní model nedokáže dosud uspokojivě vysvětlit. Tak existující převaha hmoty nad antihmotou. Podle některých teorií je důsledkem mírné převahy hmoty už při vzniku nebo velice krátce po velkém třesku, možná díky narušení CP invariance, jež bylo pozorováno v částicové fyzice. Když anihilace hmoty a antihmoty většinu hmoty zničila a vyprodukovala fotony, malý zbytek hmoty existuje do dnešní doby a tvoří dnešní vesmír. Rovněž dosud neexistuje fyzikálně korektní objasnění inflace vesmíru. Nedávná pozorování pak ukazují, že kosmologická konstanta Λ , vystupující v Einsteinově gravitačním zákonu, není nulová. V souhrnné hmotnosti a energii ve vesmíru totiž dominují *temná energie* a *temná hmota*, které dosud nebyly vědecky popsány.

Rozpínání vesmíru

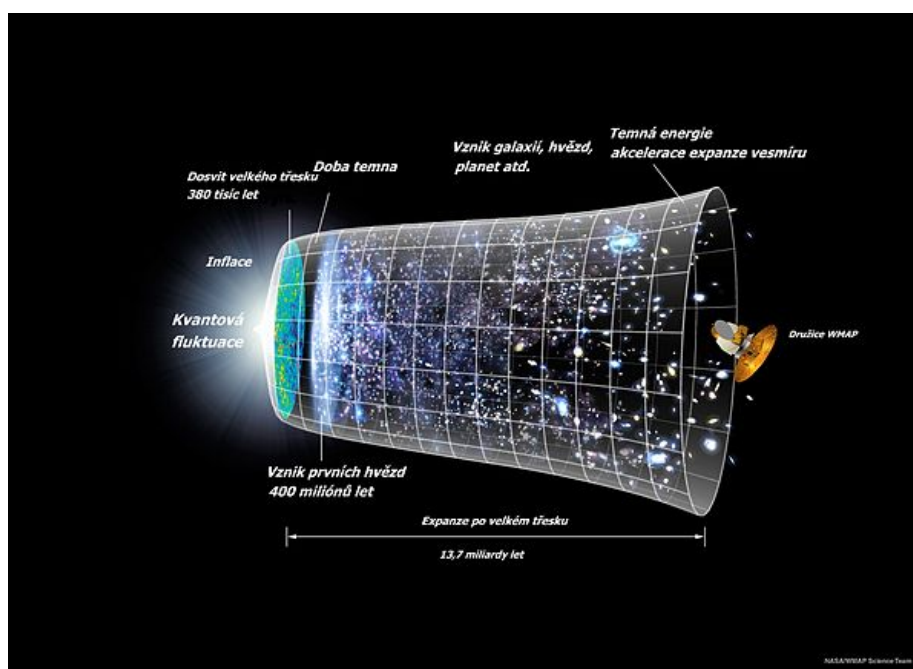
Teoreticky rozpracoval rozpínání vesmíru ALEXANDR FRIDMAN při rozboru Einsteinových rovnic obecné teorie relativity. Zda vesmír bude stacionární nebo dynamický závisí na několika parametrech – kosmologické konstantě Λ , průměrné hustotě látky ρ , tlaku záření p ,

gravitační konstantě G a křivosti k časoprostoru. Podle hodnot těchto parametrů vychází z rovnic několik scénářů pro vývoj vesmíru.

Statický vesmír, vznikne pouze v případě, že má vesmír kladnou křivost $k=1$ a přesně nastavené hodnoty hustoty ρ a kosmologické konstanty Λ . Tato rovnováha je však nestabilní a drobné odchylky od počáteční izotropie a homogenity ji musí dříve či později narušit, a proto v principu není možné, aby vesmír byl stacionární.

Pro **dynamický vesmír** obsahující baryonovou hmotu a záření vyplývá z Fridmanových rovnic v různých fázích dominance různých členů. V raném vesmíru hraje nejvýznamnější roli hustota a tlak záření. V pozdější fázi je to hustota hmoty a později parametr křivosti k a kosmologická konstanta Λ .

Konečný osud vesmíru je stále nejasný, protože kriticky závisí na zakřivení k a kosmologické konstantě Λ . Vesmír se zápornou kosmologickou konstantou vždy skončí **velkým krachem**, tato možnost se však zdá být vyloučena na základě výsledků dosavadních pozorování. Stejný osud čeká i dostatečně hustý vesmír, kdy $k=1$ a jeho průměrné zakřivení je kladné. Takový vesmír je **uzavřený**. Naopak není-li vesmír dostatečně hustý, $k=0$ – **plochý vesmír**, nebo $k=-1$ – **otevřený vesmír**, bude se rozšiřovat donekonečna, zchladne a nakonec skončí v tzv. **tepelné smrti**. Stejně skončí i uzavřený vesmír, je-li kosmologická konstanta dostatečně velká. Poslední výsledky získané z měření naznačují, že rozpínání vesmíru oproti očekávání zrychluje, což pravděpodobně ukazuje na vesmír s kladnou kosmologickou konstantou Λ , který se bude rozpínat do nekonečna, viz obr. 13.4.



Obr. 13.4: Standardní model vzniku a expanze časoprostoru

Toto rozpínání lze pozorovat nepřímo na velmi vzdálených objektech (kvasary) a jejich světelných spektrech jako tzv. **rudý posuv**. Čím jsou galaxie vzdálenější, tím větší je jejich rudý posuv a tím rychleji se od nás také vzdalují. Tato závislost je vyjádřena vztahem

$$v = Hr,$$

kde H je **Hubbleova konstanta**, r vzdálenost galaxie a v rychlost vzdalování. Z nejnovějších měření vyplývá pro Hubbleovu konstantu hodnota $H = (74,2 \pm 3,6) \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}$.

Reliktní záření

Bylo předpovězeno teoreticky jako důsledek kosmologické rekombinace v počátcích vývoje vesmíru a později bylo i pozorováno.

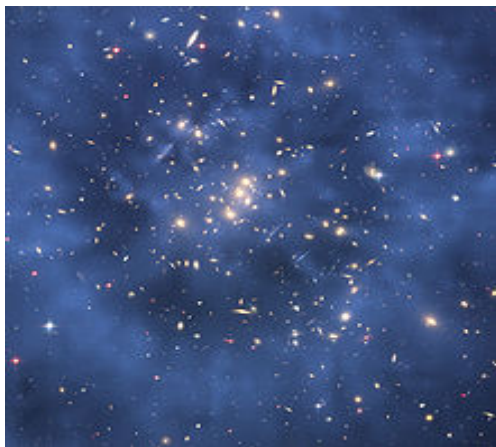
Podle standardního modelu je reliktní záření elektromagnetické záření, které přichází z vesmíru ze všech směrů a je pozůstatkem z období nedlouho po velkém třesku. Podle tohoto modelu se 379 tisíc let po velkém třesku vytvořily stabilní atomy vodíku a helia. Vesmír se tak stal pro záření průhledný a záření se oddělilo od hmoty s počáteční teplotou okolo 3000 K, které by mělo mít v současné době teplotu 5 až 10 K.

V roce 1965 bylo A. PENZIASEM a R. WILSONEM objeveno izotropní elektromagnetické záření o teplotě okolo 2,73 K s největší intenzitou při vlnové délce 2-3 milimetrů, které odpovídá teoretickým předpovědím a je interpretováno jako důkaz podporující správnost standardního modelu.

V současné době je reliktní záření nejvýznamnějším zdrojem poznatků o raném vesmíru a předmětem intenzivního výzkumu.

13.4 Temná hmota

Při pozorování gravitačního chování velkých objektů typu galaxií, nebo jejich kup, bylo zjištěno, že musí existovat hmota, kterou nepozorujeme, tzv. **temná (skytá) hmota**. Existenci temné hmoty jako první zavedl astronom FRITZ-ZWICKY při pozorování kupy galaxií ve vlasech Bereniky. Její existence umožňuje vysvětlit nesrovnalosti mezi některými pozorovanými a vypočítanými hodnotami. O povaze temné hmoty existuje několik teorií,



Obr. 13.5: Rozložení temné hmoty kolem středu kupy galaxií CL0024+17

většina z nich se ale shoduje na faktu, že temnou hmotu lze ve vesmíru pozorovat jen díky jejímu gravitačnímu vlivu na okolní objekty tvořené běžnou „svítící“ hmotou.

Temná hmota není rozložena v prostoru rovnoměrně. Díky přitažlivé gravitaci tvoří shluky podobně jako viditelná hmota, která je k těmto shlukům také přitahována, viz obr. 13.5, na kterém je přes snímek z Hubblova dalekohledu vložen modrý obraz naměřeného prstencového rozložení temné hmoty kolem středu kupy galaxií CL0024+17.

Některé novější výzkumy ukazují, že by temná hmota mohla mít vliv na elektromagnetické záření přítomné ve vesmíru - na polarizaci mikrovlnného pozadí.

Podle posledních měření je ve vesmíru temné hmoty kolem 22 %, zatímco běžná baryonová hmota, z níž

je složena většina objektů, které můžeme přímo či nepřímo pozorovat, tvoří jen 4 %. Zbytek vesmíru 74 %, tedy největší část, tvoří takzvaná **temná energie**.

Malou částí temné hmoty může být i baryonová temná hmota tvořená částicemi s poločíselným spinem, která je složena ze tří kvarků. Tato hmota by měla vyzařovat nepatrné množství elektromagnetické energie. Mezi tyto objekty patří např. hnědí trpaslíci, nebo masivní halo objekty (MACHO). Tento typ hmoty ale přispívá jen nepatrným množstvím do celkové hmotnosti předpokládané temné hmoty. Předpokládá se, že většinu temné hmoty tvoří nebaryonová temná hmota, která není složena z atomů.

Nebaryonovou temnou hmotu tvoří horká temná hmota, předpokládá se, že tento typ hmoty by mohla zprostředkovávat *neutrino* a chladná temná hmota, tuto hmotu by měly zprostředkovávat částice typu *folina*, *neutralina*, *těžká neutralina*, nebo *axiony*.

Je-li temná hmota tvořena slabě interagujícími hmotnými částicemi, pak podle současných představ, by tyto částice neměly mít klidovou hmotnost menší než $20 \text{ GeV}/c^2$. Rovněž z pozorování vesmírného synchrotronového záření vyplývá, že temná hmota je tvořena velmi hmotnými částicemi, které s ostatní hmotou neinteragují a jejichž vzájemné interakce jsou ve většině oblastí vesmíru velmi řídké.

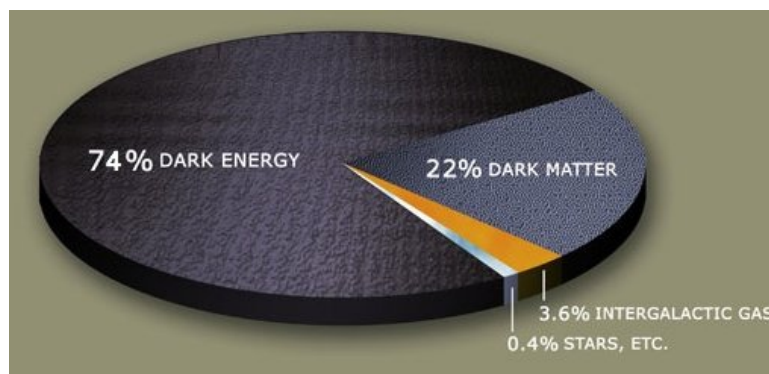
13.5 Temná energie

Temná energie nebo také *skrytá energie* je energie rovnoměrně rozložená v prostoru, zavedená jako teoretický koncept pro vysvětlení současného zrychlování rozpínání vesmíru. Toto zrychlování bylo objeveno při proměření vlastností reliktního záření.

Podstata temné energie je zatím neznámá. Bylo navrženo několik fyzikálních interpretací temné energie, některá vysvětlení pozorovaného zrychlení rozpínání vesmíru však dokonce existenci temné energie vylučují.

Velkým kandidátem na zdroj temné energie by mohla být *energie vakua*. Ovšem její hodnota, naměřená při mikroskopických experimentech i vypočtená z kvantové teorie pole je o 120 řádů větší, než je potřeba pro vysvětlení projevů temné energie naměřených z velkoškálových experimentů.

Temná hmota a temná energie se liší svými gravitační účinky. Temná hmota se projevuje gravitací a zpomaluje expanzi vesmíru, a naopak temná energie expanzi vesmíru urychluje. Zastoupení jednotlivých druhů hmoty ve vesmíru je zobrazeno na obr. 13.6.



Obr. 13.6: Rozložení hmoty ve vesmíru