PAS, šk. r. 2023/24, 1. test, 15. 12. 2023

Pokyny pro vypracování: Řešení všech úloh napište do jednoho "Maple" souboru. Jednotlivé úlohy číslujte a v řešení oddělujte od sebe. Výsledný soubor (.mw/.mws) pošlete do dvou hodin jako přílohu na email: milan.sinor@fjfi.cvut.cz. Každá úloha bude ohodnocena $0-6$ body. Úspěšné absolvování testu: 26 bodů (70%).

1. Určete takové nejmenší n, pro které platí, že

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > 6\,.$$

(4 body)

2. Nalezněte a ověřte správnost řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= -1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= -40 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 98 \end{aligned}$$

(4 body)

3. Spočítejte vlastní čísla, vlastní vektory a determinant matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

a ověřte, zda platí pro každé vlastní číslo λ a odpovídající vlastní vektor $\vec{v}$: $\mathbb{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

(6 bodů)

4. Definujte funkci $f(x) = 5\log(x)\cos(x)$ a nakreslete ji v intervalu $x \in (1, 6\pi)$. Do stejného grafu a ve stejném intervalu nakreslete první a druhou derivaci $f(x)$. Pro jednoznačnou identifikaci křivek doplňte legendu.

(4 body)

5. Nakreslete funkci definovanou nasledujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{pro} \quad 0 \le x < 1 \\ 2x - 1 & \text{pro} \quad 1 \le x \end{cases}$$

(4 body)

6. Definujte proměnnou x (seznam, pole, vektor...) obsahující násobky 5 od 0 do 100, tj. 0, 5, 10, 15, ...100. Spočítejte druhou odmocninu z hodnot pole x a získané hodnoty nakreslete jako jednotlivé body do grafu.

(5 bodů)

7. Řešte obyčejnou diferenciální rovnici $y''(x) + y(x) = \sin(x)$ s počátečními podmínkami $y(0) = 0$ a $y'(0) = 1$. Řešení vykreslete na intervalu $\langle 0, 4\pi \rangle$.

(5 bodů)

8. Vypočítejte plochu ohraničenou křivkami
$f(x) = 1{,}5x^2 - 9x + 11{,}5$ a $g(x) = -0{,}2x^2 - 0{,}4x + 2{,}8\,.$

(5 bodů)