4
Dvojrozměrný a trojrozměrný pohyb

Cirkusové umění odjakživa přitahovalo pozornost diváků. Proto také bylo ve své době velmi rozšířené po celém světě a ve známých artistických rodinách se dědilo z generace na generaci. V roce 1922 užaslo obecenstvo nad číslem rodiny Zacchiniových, při kterém se jeden z nich nechal vystřelit z děla. Přeletěl celou cirkusovou arénu a dopadl do záchranné sítě. Divácky úspěšný kousek se v průběhu dalších let postupně zdokonaloval. Až nakonec, někdy kolem roku 1939 nebo 1940, se podařilo Emanuelu Zacchiniovi překonat vzdálenost 68,6 m a přeletět tři ruská kola v zábavním parku. Jak ale mohl vědět, kam je třeba umístit záchrannou síť? Kde získal jistotu, že dosáhne takové výšky, aby obrovská kola bez úhony přeletěl?

4.1 DVOJROZMĚRNÝ A TROJROZMĚRNÝ POHYB

V této kapitole rozšíříme dosavadní úvahy na případ pohybu, který již nebude omezen pouze na přímku. Budeme sledovat pohyb částice v rovině i v prostoru. Nejdůležitější pojmy týkající se popisu pohybu (poloha, rychlost, zrychlení) převezmeme z kap. 2. Vícerozměrné definice a vztahy budou sice poněkud složitější než u přímočarého pohybu, avšak pomocí vektorové algebry z kap. 3 bude možné je vyjádřit velmi přehledně. Při studiu této kapitoly se občas vraťte ke kapitolám předchozím a osvěžte si potřebné znalosti.

4.2 POLOHA A POSUNUTÍ

Polohu částice nejčastěji popisujeme jejím **polohovým vektorem** $\boldsymbol{r}$, který spojuje předem zvolený vztažný bod (obvykle počátek soustavy souřadnic) s touto částicí. V kartézské soustavě souřadnic zapisujeme vektor $\boldsymbol{r}$ ve tvaru

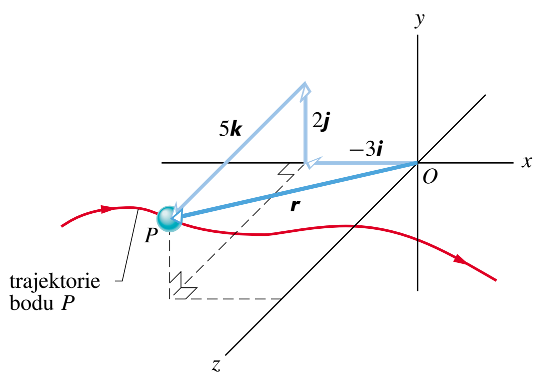
$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \tag{4.1}$$

kde $x\boldsymbol{i}$, $y\boldsymbol{j}$ a $z\boldsymbol{k}$ jsou jeho průměty do souřadnicových os a x, y a z jsou jeho složky. (Nové značení se poněkud liší od zápisů v kap. 3. Snadno se však můžete přesvědčit, že oba způsoby jsou ekvivalentní.)

Koeficienty x, y a z udávají polohu částice vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic, zadané osami a počátkem. Říkáme, že částice má **kartézské souřadnice** (x, y, z). Poloha malého tělíska P na obr. 4.1 je zadána polohovým vektorem

$$\boldsymbol{r} = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}.$$

Jeho kartézské souřadnice jsou $(-3, 2, 5)$. Znamená to, že tělísko P najdeme ve vzdálenosti tří jednotek od počátku proti směru osy x, tj. ve směru vektoru $-\boldsymbol{i}$, dvou jednotek



Obr. 4.1 Polohový vektor částice P je vektorovým součtem svých průmětů do souřadnicových os.

ve směru osy y (ve směru vektoru $+\boldsymbol{j}$) a pěti jednotek ve směru osy z (ve směru vektoru $+\boldsymbol{k}$).

Při pohybu částice se mění i její polohový vektor. Jeho koncový bod se pohybuje spolu s částicí a počáteční bod trvale splývá s počátkem soustavy souřadnic. Složky polohového vektoru $x(t)$, $y(t)$ a $z(t)$ jsou tedy funkcemi času, polohový vektor $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ je *vektorovou funkcí času*. Je-li poloha částice v okamžiku t_1 určena vektorem $\boldsymbol{r}_1$ a v následujícím okamžiku $t_1 + \Delta t$ vektorem $\boldsymbol{r}_2$, je *posunutí* $\Delta\boldsymbol{r}$ částice v časovém intervalu Δt dáno rozdílem

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1. \tag{4.2}$$

Pomocí vztahu (4.1) lze posunutí zapsat také ve tvaru

$$\Delta\boldsymbol{r} = (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) - (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}),$$

tj.

$$\Delta\boldsymbol{r} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}. \tag{4.3}$$

Souřadnice (x_1, y_1, z_1) určují polohový vektor $\boldsymbol{r}_1$ a souřadnice (x_2, y_2, z_2) polohový vektor $\boldsymbol{r}_2$. Ve vztahu pro posunutí často označujeme $\Delta x = (x_2 - x_1)$, $\Delta y = (y_2 - y_1)$ a $\Delta z = (z_2 - z_1)$.

PŘÍKLAD 4.1

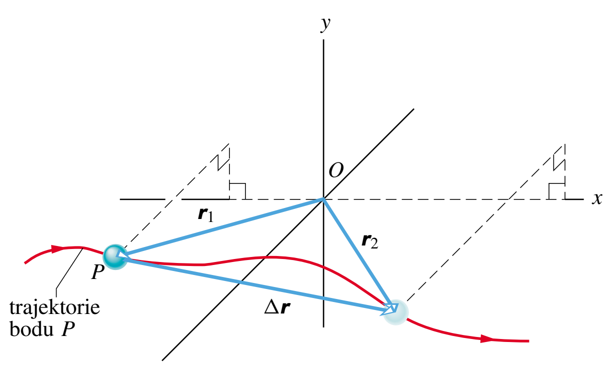
Počáteční poloha částice je dána polohovým vektorem

$$\boldsymbol{r}_1 = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k},$$

koncová poloha je určena vektorem

$$\boldsymbol{r}_2 = 9\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$$

(obr. 4.2). Určete posunutí částice.



Obr. 4.2 Příklad 4.1. Posunutí $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ spojuje koncové body vektorů $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$.

ŘEŠENÍ: Vektory sčítáme (nebo odečítáme) po složkách, přesně podle pravidel uvedených v kap. 3. Užitím vztahu (4.2) dostaneme

$$\Delta\boldsymbol{r} = (9\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}) - (-3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}) = $$
$$= 12\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vektor posunutí je rovnoběžný se souřadnicovou rovinou xz, neboť jeho y-ová složka je nulová. Uvědomme si, že z číselného zápisu vektoru posunutí je tato skutečnost patrná mnohem lépe než z grafického znázornění situace na obr. 4.2.

KONTROLA 1: (a) Netopýr vyletěl z místa o souřadnicích $(-2\,\mathrm{m}, 4\,\mathrm{m}, -3\,\mathrm{m})$ a po chvíli opět usedl, tentokrát v místě $(6\,\mathrm{m}, -2\,\mathrm{m}, -3\,\mathrm{m})$. Určete jeho vektor posunutí $\Delta\boldsymbol{r}$ a vyjádřete jej pomocí jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$. (Údaje jsou vztaženy ke kartézské soustavě souřadnic.) (b) Zjistěte, zda je vektor $\Delta\boldsymbol{r}$ rovnoběžný s některou souřadnicovou rovinou či osou.

4.3 PRŮMĚRNÁ A OKAMŽITÁ RYCHLOST

Průměrná rychlost částice v časovém intervalu Δt měřeném od okamžiku t do okamžiku $t + \Delta t$ je definována jako podíl odpovídajícího vektoru posunutí $\Delta\boldsymbol{r}$ a délky časového intervalu Δt:

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}. \tag{4.4}$$

Po rozepsání pomocí složek dostaneme

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k}}{\Delta t} = $$
$$= \frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{k}. \tag{4.5}$$

Okamžitá rychlost (zkráceně rychlost) $\boldsymbol{v}$ je limitou průměrné rychlosti $\overline{\boldsymbol{v}}$ pro $\Delta t \to 0$, tj. derivací polohového vektoru $\boldsymbol{r}$ podle času

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{4.6}$$

Dosazením polohového vektoru $\boldsymbol{r}$ z rovnice (4.1) dostaneme

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

a přepíšeme ve tvaru

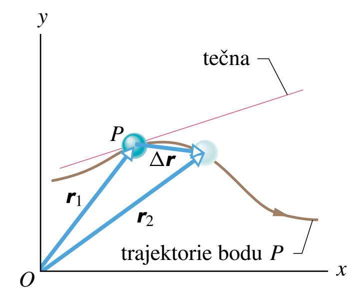
$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}, \tag{4.7}$$

kde

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \quad \text{a} \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{4.8}$$

jsou složky rychlosti $\boldsymbol{v}$.

Na obr. 4.3 je zakreslena trajektorie částice P, jejíž pohyb je omezen na souřadnicovou rovinu xy. Při pohybu částice po křivce směrem vpravo se v tomtéž směru odklání i její polohový vektor. V okamžiku t_1 je její poloha určena polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_1$ a v okamžiku $t_1 + \Delta t$ polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_2$. Vektor $\Delta\boldsymbol{r}$ představuje *posunutí částice* v časovém intervalu Δt. Průměrná rychlost $\overline{\boldsymbol{v}}$ v intervalu od t_1 do $t_1 + \Delta t$ je dána rovnicí (4.4) a má stejný směr jako posunutí $\Delta\boldsymbol{r}$.



Obr. 4.3 Trajektorie částice P s vyznačením její polohy v okamžicích t_1 a $t_1 + \Delta t$. Vektor $\Delta\boldsymbol{r}$ představuje posunutí částice v tomto časovém intervalu. Červeně je znázorněna tečna k trajektorii v okamžiku t_1.

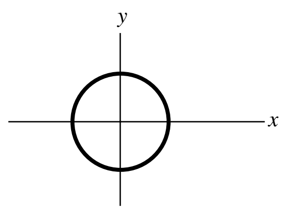
Při poklesu délky časového intervalu Δt k nule si můžeme všimnout následujícího chování vektorů charakterizujících pohyb částice: (1) vektor $\boldsymbol{r}_2$ se přibližuje vektoru $\boldsymbol{r}_1$ a $\Delta\boldsymbol{r}$ vektoru nulovému, (2) směr vektoru $\Delta\boldsymbol{r}$ a s ním i směr průměrné rychlosti $\overline{\boldsymbol{v}}$ se sklánějí ke směru tečny k trajektorii v bodě $\boldsymbol{r}_1$ a konečně (3) průměrná rychlost $\overline{\boldsymbol{v}}$ se blíží k okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$.

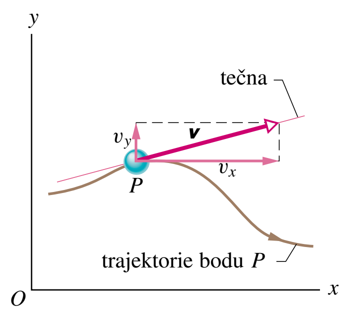
Pro $\Delta t \to 0$ je $\overline{\boldsymbol{v}} \to \boldsymbol{v}$. Vektor okamžité rychlosti je tedy tečný k trajektorii v bodě $\boldsymbol{r}_1$.

Okamžitá rychlost částice $\boldsymbol{v}$ má vždy směr tečny k trajektorii.

V obr. 4.4 je zakreslen vektor okamžité rychlosti částice P a jeho rozklad do složek. Úvahy o rychlosti lze zobecnit i na případ pohybu částice v trojrozměrném prostoru, bez jakýchkoli omezení: Vektor okamžité rychlosti částice $\boldsymbol{v}$ je vždy tečný k její trajektorii.

KONTROLA 2: Částice se pohybuje po kružnici (viz obrázek) a v jistém okamžiku má rychlost $\boldsymbol{v} = (2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} - (2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j}$. Určete, ve kterém kvadrantu částici v tomto okamžiku najdeme, pohybuje-li se (a) ve směru otáčení hodinových ručiček, (b) proti směru otáčení hodinových ručiček.





Obr. 4.4 Rychlost částice P a její rozklad do složek. Rychlost má směr tečny k trajektorii.

4.4 PRŮMĚRNÉ A OKAMŽITÉ ZRYCHLENÍ

Předpokládejme, že v průběhu časového intervalu od t_1 do $t_1 + \Delta t$ dojde ke změně rychlosti částice z $\boldsymbol{v}_1$ na $\boldsymbol{v}_2$. Podíl

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{4.9}$$

nazýváme **průměrným zrychlením** v tomto časovém intervalu. Při přechodu $\Delta t \rightarrow 0$ se průměrné zrychlení blíží svému limitnímu případu, takzvanému **okamžitému zrychlení $\boldsymbol{a}$** (zkráceně *zrychlení*):

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}. \tag{4.10}$$

Nenulové zrychlení signalizuje, že se mění velikost nebo směr rychlosti částice. (Obě změny mohou samozřejmě probíhat současně.) Dosazením rychlosti $\boldsymbol{v}$ ze vztahu (4.7) do (4.10) dostaneme

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k},$$

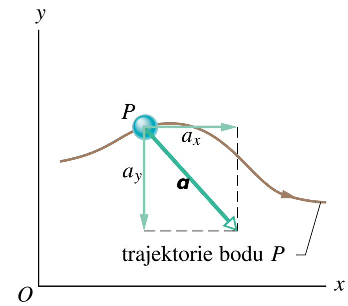
tj.

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \tag{4.11}$$

kde

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \quad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \quad \text{a} \quad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \tag{4.12}$$

jsou složky zrychlení $\boldsymbol{a}$. Pohyb částice P na obr. 4.5 je omezen na rovinu xy. V obrázku je zakreslen vektor zrychlení částice a jeho rozklad do složek.



Obr. 4.5 Rozklad zrychlení částice do složek

PŘÍKLAD 4.2

Králík vběhl na parkoviště, kde si předtím hrály děti a nakreslily tam křídou dvě kolmé přímky. Můžeme je považovat za osy x a y soustavy souřadnic. Okamžitá poloha králíka vzhledem k této soustavě je popsána funkcemi

$$x = -0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28,$$
$$y = 0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30.$$

Čas t je měřen v sekundách a souřadnice x a y v metrech. Polohový vektor $\boldsymbol{r}$ je tedy tvaru

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}.$$

(a) Určete velikost a směr polohového vektoru v okamžiku $t = 15\,\mathrm{s}$.

ŘEŠENÍ: V okamžiku $t = 15\,\mathrm{s}$ má polohový vektor $\boldsymbol{r}$ složky

$$x = (-0{,}31)(15)^2 + (7{,}2)(15) + 28 = 66$$

a

$$y = (0{,}22)(15)^2 - (9{,}1)(15) + 30 = -57.$$

Polohový vektor $\boldsymbol{r}$ a jeho rozklad do složek znázorňuje obr. 4.6a. Vektor $\boldsymbol{r}$ má velikost

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(66\,\mathrm{m})^2 + (-57\,\mathrm{m})^2} = $$
$$= 87\,\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Pro úhel vektoru $\boldsymbol{r}$ s kladným směrem osy x platí

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \left(\frac{-57\,\mathrm{m}}{66\,\mathrm{m}}\right) = -0{,}864,$$
$$\theta = -41^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(Stejnou hodnotu tangenty má i úhel $\theta = 139°$, který však neodpovídá znaménkům složek vektoru $\boldsymbol{r}$.)

(b) Určete polohu králíka v okamžicích $t = 0\,\mathrm{s}$, $5\,\mathrm{s}$, $10\,\mathrm{s}$, $20\,\mathrm{s}$ a $25\,\mathrm{s}$ a schematicky nakreslete jeho trajektorii.

ŘEŠENÍ: Pro každý ze zadaných okamžiků zopakujeme výpočet podle (a) a získáme následující hodnoty x, y, r a θ:

t/s	x/m	y/m	r/m	θ
0	28	30	41	$+47°$
5	56	-10	57	$-10°$
10	69	-39	79	$-29°$
15	66	-57	87	$-41°$
20	48	-64	80	$-53°$
25	14	-60	62	$-77°$

Trajektorie králíka je znázorněna na obr. 4.6b.

PŘÍKLAD 4.3

Určete velikost a směr rychlosti králíka z příkladu 4.2 v okamžiku $t = 15\,\mathrm{s}$.

ŘEŠENÍ: Podle vztahu (4.8) je x-ová složka vektoru rychlosti

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28) = -0{,}62t + 7{,}2.$$

Pro $t = 15\,\mathrm{s}$ dostaneme

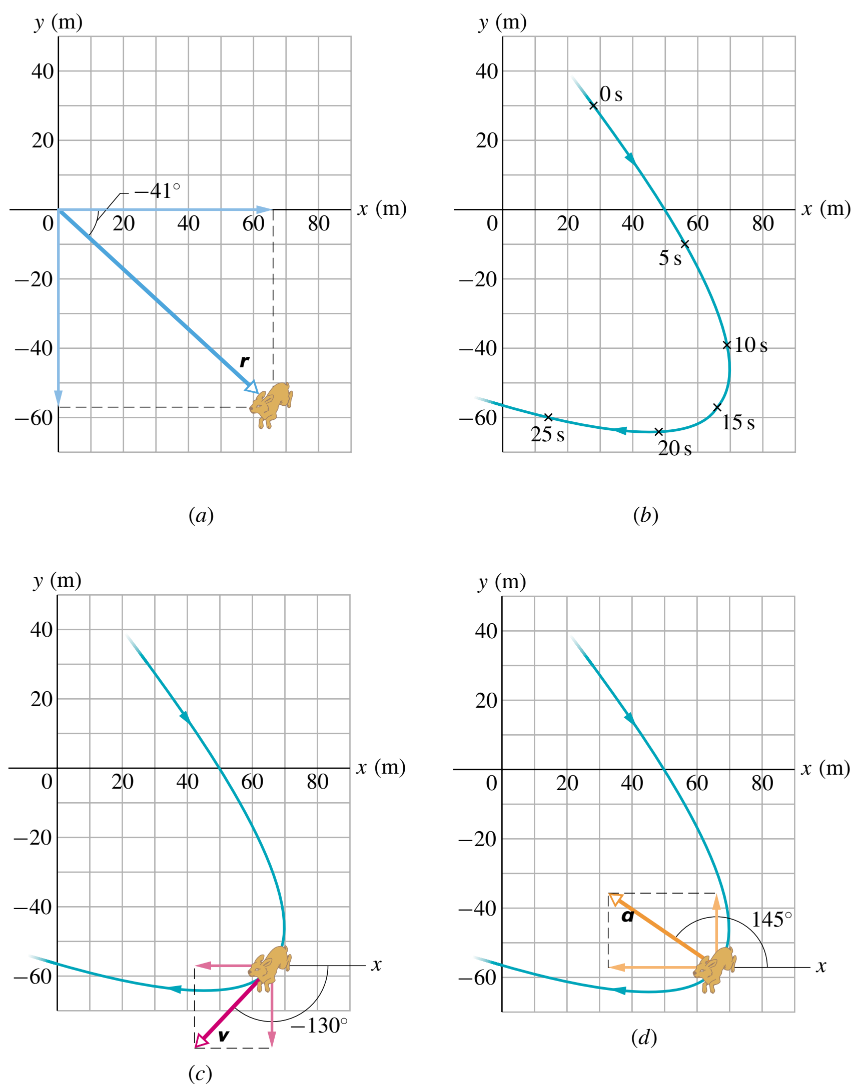
$$v_x = (-0{,}62)(15) + 7{,}2 = -2{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Obdobně je

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30) = 0{,}44t - 9{,}1$$

a pro $t = 15\,\mathrm{s}$

$$v_y = (0{,}44)(15) - 9{,}1 = -2{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$



Obr. 4.6 Příklady 4.2, 4.3 a 4.4.
(a) Vektor $\boldsymbol{r}$ a jeho složky v okamžiku $t = 15\,\mathrm{s}$. Velikost vektoru $\boldsymbol{r}$ je 87 m. (b) Trajektorie pohybu králíka po parkovišti s vyznačením poloh v okamžicích uvedených v zadání úlohy. (c) Rychlost $\boldsymbol{v}$ králíka v okamžiku $t = 15\,\mathrm{s}$ má směr tečný k trajektorii v bodě určujícím polohu králíka v okamžiku $t = 15\,\mathrm{s}$. (d) Zrychlení $\boldsymbol{a}$ v okamžiku $t = 15\,\mathrm{s}$. Zrychlení je konstantní, tj. stejné ve všech bodech trajektorie.

Vektor rychlosti a jeho složky jsou zakresleny v obr. 4.6c.

Pro velikost vektoru $\boldsymbol{v}$ a úhel θ určující jeho směr platí

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-2{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 + (-2{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2} = \\ = 3{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \qquad \text{(Odpověď)}$$

a

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_y}{v_x} = \left(\frac{-2{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{-2{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}\right) = 1{,}19,$$

tj.

$$\theta = -130^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(Stejná hodnota tangenty odpovídá i úhlu 50°. V souhlasu se znaménky složek rychlosti však správný úhel θ leží ve třetím kvadrantu, tj. $\theta = 50^\circ - 180^\circ = -130^\circ$.) Rychlost je tečným vektorem k trajektorii a určuje směr, kterým králík běží v okamžiku $t = 15\,\mathrm{s}$ (obr. 4.6c).

PŘÍKLAD 4.4

Určete velikost a směr zrychlení $\boldsymbol{a}$ králíka z příkladu 4.2 v okamžiku $t = 15\,\mathrm{s}$.

ŘEŠENÍ: Složky zrychlení jsou dány vztahem (4.12):

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-0{,}62t + 7{,}2) = -0{,}62$$

a

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0{,}44t + 30) = 0{,}44.$$

Vidíme, že zrychlení nezávisí na čase, je konstantní. Dvojím derivováním časová proměnná zmizela. Zrychlení a jeho složky jsou vyznačeny v obr. 4.6d pro okamžik $t = 15\,\mathrm{s}$. Jeho velikost a směr jsou určeny vztahy

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0{,}62\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})^2 + (0{,}44\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})^2} = \\ = 0{,}76\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \qquad \text{(Odpověď)}$$

a

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a_y}{a_x} = \left(\frac{0{,}44\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}{-0{,}62\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}\right) = -0{,}710,$$

tj.

$$\theta = 145^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Velikost ani směr vektoru zrychlení se podél trajektorie králíka nemění. Těžko říci, co bylo příčinou toho, že králík neustále „urychloval“ svůj běh severozápadním směrem. Můžeme si myslet, že třeba vál silný jihovýchodní vítr.

KONTROLA 3: Následující vztahy popisují čtyři možnosti pohybu hokejového kotouče po ledové ploše, ležící v souřadnicové rovině xy (poloha je zadána v metrech):
(1) $x = -3t^2 + 4t - 2$ a $y = 6t^2 - 4t$,
(2) $x = -3t^3 - 4t$ a $y = -5t^2 + 6$,
(3) $\boldsymbol{r} = 2t^2\boldsymbol{i} - (4t + 3)\boldsymbol{j}$,
(4) $\boldsymbol{r} = (4t^3 - 2t)\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$.
V jednotlivých případech rozhodněte, zda je některá ze složek vektoru zrychlení konstantní. Je v některém z nich konstantní vektor zrychlení $\boldsymbol{a}$?

PŘÍKLAD 4.5

Částice se pohybuje v souřadnicové rovině xy s konstantním zrychlením $\boldsymbol{a}$. Vektor zrychlení má velikost $a = 3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ a s kladným směrem osy x svírá úhel $\theta = 130^\circ$. V okamžiku $t = 0$ se částice pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_0 = -2{,}0\boldsymbol{i} + 4{,}0\boldsymbol{j}$ (v metrech za sekundu). Určete její rychlost v okamžiku $t = 2\,\mathrm{s}$ a vyjádřete ji pomocí jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{j}$. Určete i její velikost a směr.

ŘEŠENÍ: Při řešení této úlohy si připomeneme výsledky odvozené v kap. 2 pro přímočarý pohyb s konstantním zrychlením. Opravdu jich budeme moci využít? V našem případě je sice zrychlení stálé, pohyb částice však není přímočarý (počáteční rychlost má jiný směr než zrychlení). Díky pravidlům vektorové algebry můžeme úlohu řešit „po složkách“ a vztah (2.11) ($v_x = v_{0x} + a_x t$), platný pro rychlost přímočarého pohybu se stálým zrychlením, použít pro každou ze složek v_x a v_y vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}$. Lze tedy psát

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad \text{a} \quad v_y = v_{0y} + a_y t,$$

kde v_{0x} $(= -2{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})$ a $v_{0y}(= 4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})$ jsou složky počáteční rychlosti $\boldsymbol{v}_0$. Složky vektoru zrychlení $\boldsymbol{a}$, a_x a a_y, určíme užitím vztahů (3.5):

$$a_x = a\cos\theta = (3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})\cos 130^\circ = -1{,}93\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}},$$
$$a_y = a\sin\theta = (3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})\sin 130^\circ = +2{,}30\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

Dosazením těchto hodnot do rovnic pro složky rychlosti v_x a v_y dostaneme

$$v_x = -2{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} + (-1{,}93\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(2{,}0\,\mathrm{s}) = -5{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}},$$
$$v_y = 4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} + (+2{,}30\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(2{,}0\,\mathrm{s}) = 8{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Zapíšeme-li výsledky pomocí rozkladu (4.7), dostáváme rychlost částice v okamžiku $t = 2\,\mathrm{s}$ ve tvaru

$$\boldsymbol{v} = (-5{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} + (8{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Pro velikost a směr rychlosti platí

$$v = \sqrt{(-5{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 + (8{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2} = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}},$$

$$\operatorname{tg}\theta = \left(\frac{8{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{-5{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}\right) = -1{,}458,$$

tj.

$$\theta = 124^\circ \doteq 120^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Poslední výsledek přepočtěte na kalkulačce. Co myslíte? Zobrazí se na displeji hodnota 124° nebo −55,5°? Nakreslete vektor $\boldsymbol{v}$ a jeho složky a rozhodněte, která z obou hodnot představuje správné řešení úlohy. Proč někdy získáme na kalkulačce matematicky správný, ale fyzikálně nepřijatelný výsledek? Vysvětlení viz bod 3.3.

RADY A NÁMĚTY

Bod 4.1: *Goniometrické funkce a úhly*

V příkladu 4.3 bylo třeba určit úhel θ z rovnice $\operatorname{tg}\theta = 1{,}19$. Zopakujme si použitý postup: Při výpočtu pomocí kalkulačky se na jejím displeji téměř jistě zobrazí hodnota $\theta = 50^\circ$. V grafu na obr. 3.13c si můžeme všimnout, že stejnou hodnotu tangenty má i úhel $\theta = 230^\circ$ $(= 50^\circ + 180^\circ)$. Pomocí znamének složek vektoru rychlosti v_x a v_y (obr. 4.6c) dokážeme rozhodnout, že správným řešením úlohy je druhá z obou hodnot úhlu θ. (Některé dokonalejší kalkulačky umožňují rovnou získat správný výsledek.)

Nakonec je třeba zvolit pro zápis výsledku jednu ze dvou možností, 230° nebo −130°. Obě hodnoty představují týž směr (bod 3.1). Výběr zápisu záleží na tom, pracujeme-li raději s úhly v intervalu od 0° do 360° nebo v intervalu od −180° do +180°. V příkladu 4.3 jsme si vybrali druhou možnost, tj. $\theta = -130^\circ$.

Bod 4.2: *Grafický záznam vektorů*

Při kreslení vektorů můžeme užít následujícího postupu (např. obr. 4.6): (1) Určíme počáteční bod vektoru. (2) Vedeme jím přímku souhlasně rovnoběžnou s osou x. (3) Od jejího kladného směru odměříme úhloměrem zadaný úhel θ. Je-li úhel θ kladný, měříme jej proti směru otáčení hodinových ručiček a naopak.

Vektor $\boldsymbol{r}$ v obr. 4.6a je zakreslen přesně v měřítku použitém pro popis souřadnicových os. Délka šipky znázorňující tento vektor tak skutečně odpovídá jeho velikosti. Pro grafické znázornění rychlosti (obr. 4.6c) ani zrychlení (obr. 4.6d) jsme žádnou stupnici nezvolili, a tak je můžeme kreslit libovolně dlouhé.

Nemá smysl přemýšlet o tom, zda má být například vektor rychlosti delší či kratší než vektor posunutí. Jde o různé fyzikální veličiny s odlišnými jednotkami. Volba společného měřítka pro jejich grafický záznam by neměla žádné fyzikální opodstatnění.

KONTROLA 4: Poloha kuličky je dána vektorem $\boldsymbol{r} = (4t^3 - 2t)\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ (poloha je zadána v metrech a čas v sekundách). V jakých jednotkách jsou zadány koeficienty 4, −2 a 3?

4.5 ŠIKMÝ VRH

V čl. 2.8 jsme se poměrně podrobně zabývali zvláštním případem pohybu částice s konstantním zrychlením, tzv. *svislým vrhem*. Pozornost věnovaná této speciální situaci nebyla přehnaná. Odpovídající experimenty totiž můžeme velmi pohodlně realizovat v „pozemských podmínkách“ s minimálním přístrojovým vybavením. Připomeňme si jen stručně hlavní výsledky, k nimž jsme v článku 2.8 dospěli: těleso volně vypuštěné v blízkosti povrchu Země padá se stálým zrychlením, podaří-li se v dostatečné míře omezit vliv odporu prostředí. Toto *tíhové* zrychlení $\boldsymbol{g}$ je pro všechna tělesa stejné. Trajektorií padajícího tělesa je přímka definující *svislý směr*. Udělíme-li tělesu na počátku experimentu nenulovou rychlost ve svislém směru (vzhůru či dolů), pohybuje se opět se zrychlením $\boldsymbol{g}$ a jeho pohyb je také opět přímočarý.

Experimenty ukazují víc. Ať je totiž při vrhu udělena tělesu počáteční rychlost *v jakémkoliv směru* — nejen svislém — letí těleso vždy se stejným zrychlením $\boldsymbol{g}$. Jeho trajek-

Obr. 4.7 Stroboskopický záznam pohybu golfového míčku při odrazech na tvrdém podkladu. Mezi jednotlivými odrazy se pohyb blíží šikmému vrhu. Odchylky jsou způsobeny vlivem odporu prostředí, který v reálných situacích pochopitelně nelze odstranit.

torie nyní leží ve svislé rovině určené vektorem tíhového zrychlení a směrem počáteční rychlosti tělesa. Tento pohyb nazýváme **šikmý vrh**. Jeho příkladem je let golfového míčku (obr. 4.7), tenisového či fotbalového míče, dělové střely apod. V dalších úvahách se budeme zabývat podrobným rozborem tohoto pohybu. Pro úplnost dodejme, že zanedbáváme odpor vzduchu, vlastní rotaci Země a předpokládáme, že změny výšky tělesa nad povrchem Země jsou zanedbatelné vůči jejím rozměrům.

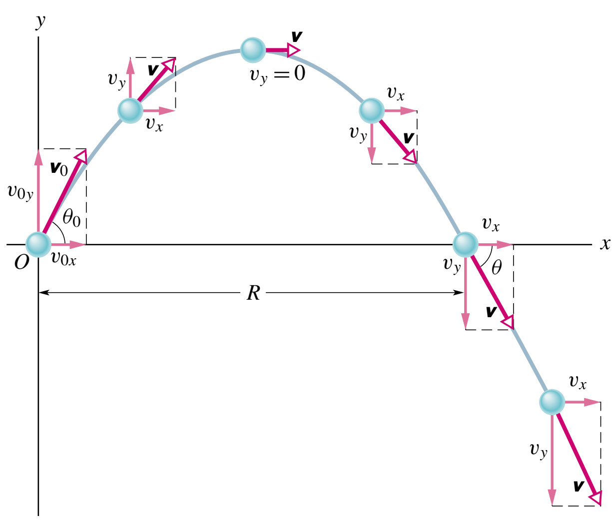
Řekněme, že sledovaným tělesem je podle obr. 4.8 kulka vystřelená počáteční rychlostí

$$\boldsymbol{v}_0 = v_{0x}\boldsymbol{i} + v_{0y}\boldsymbol{j}. \tag{4.13}$$

Složky v_{0x} a v_{0y} této rychlosti lze zapsat pomocí její velikosti v_0 a úhlu θ_0 (tzv. elevační úhel), který svírá vektor $\boldsymbol{v}_0$ s kladným směrem osy x:

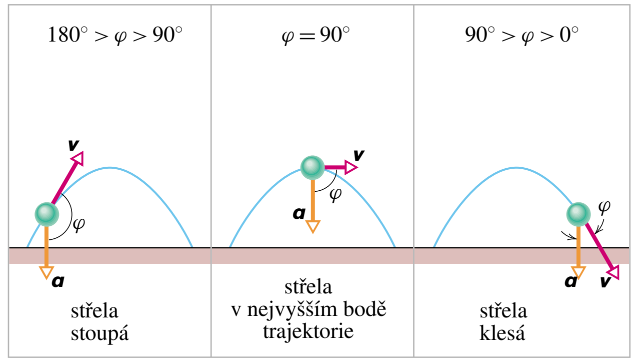
$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \quad \text{a} \quad v_{0y} = v_0 \sin\theta_0. \tag{4.14}$$

Polohový vektor $\boldsymbol{r}$ i rychlost střely $\boldsymbol{v}$ se při jejím pohybu ve svislé rovině neustále mění. Její zrychlení $\boldsymbol{a}$ je však stálé a *vždy* míří svisle dolů. (Vodorovná složka zrychlení je nulová.) Na obr. 4.9 je vidět, jak se mění i úhel mezi zrychlením a rychlostí.



Obr. 4.8 Střela vyletí z počátku soustavy souřadnic v okamžiku $t = 0$ rychlostí $\boldsymbol{v}_0$. V jednotlivých bodech trajektorie jsou zakresleny vektory rychlosti a jejich rozklad do složek. Všimněte si, že vodorovná složka rychlosti se v průběhu pohybu nemění, na rozdíl od složky svislé. *Doletem R* rozumíme vodorovnou vzdálenost střely od místa výstřelu měřenou v okamžiku, kdy střela projde bodem ležícím *v téže výšce nad povrchem Země* jako ústí hlavně.

I když pohyb těles na obr. 4.7 až 4.9 může někomu připadat docela složitý, bude jeho matematický popis velmi prostý. Zjednodušení je dáno jednak vektorovým charakterem veličin popisujících pohyb (poloha, rychlost a zrychlení), s nimiž tak lze nakládat podle pravidel vektorové algebry, jednak neměnností zrychlení při pohybu těles. Obojí souhlasí s výsledky experimentů.



Obr. 4.9 Rychlost a zrychlení střely v různých fázích jejího pohybu. Úhel mezi rychlostí a zrychlením může být v daném okamžiku libovolný.

Vodorovné a svislé složky veličin popisujících vrh jsou na sobě nezávislé. Neovlivňují se navzájem.

Pohyb částice v rovině můžeme tedy získat složením dvou pohybů přímočarých, vodorovného a svislého.

Nezávislost vodorovných a svislých složek veličin popisujících šikmý vrh nyní doložíme ukázkou dvou jednoduchých experimentů.

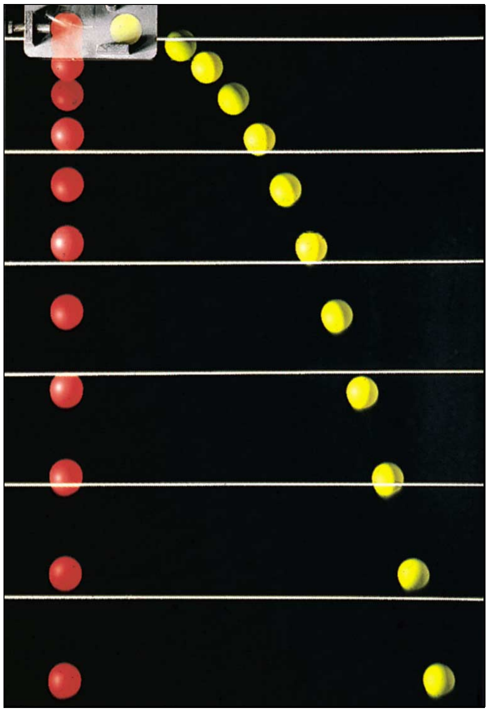
Dva golfové míčky

Sledujme stroboskopický záznam pohybu dvou golfových míčků na obr. 4.10. Jeden z nich vypustili experimentátoři volně, druhý vystřelili ve vodorovném směru pomocí pružiny. Všímáme-li si pohybu míčků pouze ve svislém směru, vidíme, že se oba záznamy shodují. Ve stejných časových intervalech urazily míčky stejnou svislou vzdálenost.

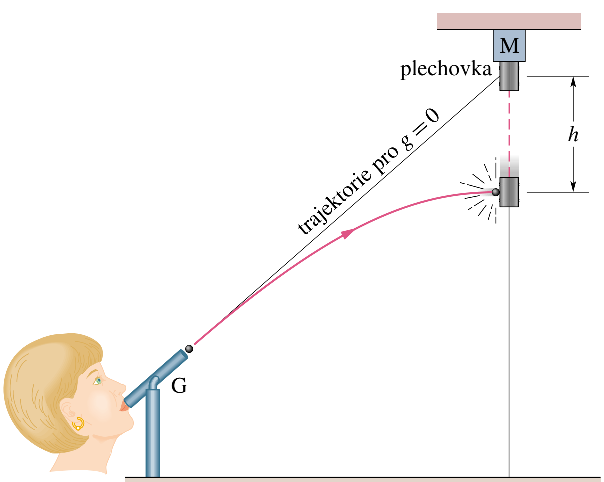
Skutečnost, že se jeden z míčků současně pohybuje i ve vodorovném směru, nijak neovlivňuje průmět jeho pohybu do svislého směru. Experiment můžeme domýšlet až k extrémním situacím: střela z pušky, vystřelená vodorovně vysokou rychlostí, dopadne (při zanedbatelném odporu vzduchu) na zem *současně* s kuličkou, kterou jsme ve stejném okamžiku volně vypustili z dlaně ve stejné výšce.

Přesný zásah

Pokus na obr. 4.11 už jistě napomohl oživit řadu fyzikálních přednášek. Vyzkoušejme si jej také. Potřebujeme foukačku G s malými kuličkami jako střelivem. Terčem může být plechovka zavěšená na magnetu M. Trubici foukačky namíříme přesně na plechovku. Ještě je třeba zařídit, aby magnet uvolnil plechovku přesně v okamžiku, kdy střela vyletí z trubičky a můžeme střílet.



Obr. 4.10 Jeden z míčků je volně vypuštěn, druhý je vystřelen vodorovným směrem. Průměty jejich pohybu do svislého směru jsou totožné.



Obr. 4.11 Kulička vždy zasáhne padající plechovku. V časovém intervalu mezi výstřelem a zásahem obě klesnou o stejnou svislou vzdálenost h měřenou od místa, ve kterém by došlo k jejich srážce v tzv. beztížném stavu ($\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$).

Při nulovém tíhovém zrychlení (tzv. stav beztíže) by střela letěla po přímce (obr. 4.11). Plechovka by se vznášela stále na místě i po uvolnění od magnetu a kulička by ji zcela jistě neminula.

Při skutečném experimentu je ovšem tíhové zrychlení *nenulové*. *A přesto* kulička cíl zasáhne! V obr. 4.11 je vyznačena svislá vzdálenost h, o kterou kulička i plechovka při pokusu poklesnou vzhledem k místu pomyslné srážky při $g = 0$. K zásahu dojde při libovolně silném fouknutí: při silnějším dostane kulička větší počáteční rychlost, zkrátí se doba letu a zmenší se vzdálenost h.

4.6 ŠIKMÝ VRH: MATEMATICKÝ POPIS

Výsledky předchozích úvah nyní uplatníme při důsledném matematickém rozboru šikmého vrhu. Víme již, že při něm můžeme využít zjednodušení spočívající v možnosti rozkladu skutečného pohybu na dva nezávislé pohyby, ve vodorovném a svislém směru.

Obr. 4.12 Svislý průmět rychlosti skatebordisty se mění. Její vodorovný průmět je však trvale shodný s vodorovnou rychlostí skateboardu. Při výskoku je sportovec neustále nad skateboardem a bez problémů na něj opět doskočí.

Pohyb ve vodorovném směru

Vodorovná složka tíhového zrychlení je *nulová*. Vodorovná složka rychlosti šikmého vrhu se tedy s časem nemění. Neustále si udržuje svou počáteční hodnotu v_{0x} (obr. 4.12). Posunutí částice ve vodorovném směru $x - x_0$ je dáno vztahem (2.15) pro $a_x = 0$:

$$x - x_0 = v_{0x} t.$$

Po dosazení $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$, dostaneme

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0) t. \tag{4.15}$$

Pohyb ve svislém směru

Průmětem pohybu částice do svislého směru je svislý vrh. Pro jeho popis použijeme rovnic (2.21) až (2.25), které jsme odvodili již v článku 2.8. Z rovnice (2.22) například rovnou dostaneme vztah pro svislou složku vektoru posunutí

$$\begin{aligned} y - y_0 &= v_{0y} t - \tfrac{1}{2} g t^2 = \\ &= (v_0 \sin\theta_0) t - \tfrac{1}{2} g t^2. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Svislou složku počáteční rychlosti v_{0y} jsme nahradili ekvivalentním výrazem $v_0 \sin\theta_0$. Využít můžeme i rovnic (2.21) a (2.23), když je nejprve vhodně upravíme:

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt \tag{4.17}$$

a

$$v_y^2 = (v_0 \sin\theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \tag{4.18}$$

Z rovnice (4.17) je zřejmé (a obr. 4.12 to intuitivně potvrzuje), že časová závislost svislé složky rychlosti je naprosto stejná jako závislost rychlosti míče vyhozeného svisle vzhůru. Na počátku letu je kladná a její velikost postupně klesá k nule. V okamžiku, kdy je $v_y = 0$, je těleso *ve vrcholu své trajektorie*. Znaménko svislé složky rychlosti se obrací a její velikost s časem opět roste.

Rovnice trajektorie

Vztahy (4.15) a (4.16) představují tzv. parametrické rovnice trajektorie částice při šikmém vrhu. (Parametrem je zde čas t.) Její kartézskou rovnici získáme tak, že z rovnic (4.15) a (4.16) tento parametr vyloučíme. Nejjednodušší je vyjádřit čas z rovnice (4.15) a dosadit jej do (4.16). Po malých úpravách dostaneme

$$y = (\operatorname{tg}\theta_0) x - \frac{g x^2}{2(v_0 \cos\theta_0)^2} \quad \text{(trajektorie)}. \tag{4.19}$$

Získali jsme rovnici trajektorie znázorněné na obr. 4.8. Při výpočtu jsme ve vztazích (4.15) a (4.16) pro jednoduchost zvolili $x_0 = 0$ a $y_0 = 0$. Veličiny g, θ_0 a v_0 jsou konstanty, a tak lze rovnici (4.19) zapsat ve tvaru $y = ax + bx^2$, kde a a b jsou rovněž jisté konstanty. Poznáváme v něm rovnici paraboly s koeficienty a a b. Částice se tedy pohybuje po *parabole*, má parabolickou dráhu.

Dolet

Dolet R definujeme jako vodorovnou vzdálenost, kterou střela urazí od okamžiku výstřelu do okamžiku návratu do počáteční výšky nad povrchem Země. V tomto okamžiku je poloha střely dána souřadnicemi $x = R$ a $y = y_0$. Jejich dosazením do rovnic (4.15) a (4.16) můžeme dolet snadno určit:

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0) t = R$$

a

$$y - y_0 = (v_0 \sin\theta_0) t - \tfrac{1}{2} g t^2 = 0.$$

Vyloučíme čas a dostaneme

$$R = \frac{2{v_0}^2}{g} \sin\theta_0 \cos\theta_0.$$

(Totéž bychom získali dosazením $x = R$ a $y = 0$ do (4.19).) Užitím identity $\sin 2\theta_0 = 2 \sin\theta_0 \cos\theta_0$ z dod. E nakonec upravíme výsledek do tvaru

$$R = \frac{{v_0}^2}{g} \sin 2\theta_0. \tag{4.20}$$

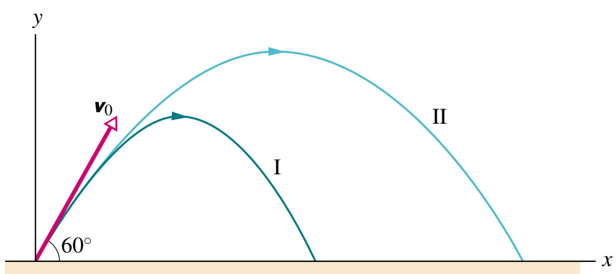
Můžeme si všimnout, že při pevně zvolené velikosti počáteční rychlosti docílíme největšího doletu při elevačním úhlu θ, který splňuje podmínku $\sin 2\theta_0 = 1$, tj. $2\theta_0 = 90°$ a $\theta_0 = 45°$.

Dolet R nabývá největší hodnoty, je-li elevační úhel roven 45°.

Vliv odporu prostředí

Do této chvíle jsme předpokládali, že vliv okolního vzduchu na pohyb tělesa je zanedbatelný. Tento předpoklad může být celkem dobře splněn při nízkých rychlostech. Ve skutečnosti však okolní prostředí klade pohybu tělesa jistý odpor, který může vést ke značným odchylkám idealizovaných výpočtů od skutečnosti, zejména při vyšších rychlostech. Jako příklad porovnání pohybu ve vakuu a skutečného letu tělesa vzduchem poslouží obr. 4.13. Jsou v něm schematicky znázorněny trajektorie dvou tenisových míčků odpálených úderem rakety. Velikost počáteční rychlosti je v obou případech 160 km/h a elevační úhel 60°. Trajektorie I odpovídá skutečnému pohybu míčku, trajektorie II je vypočtena pro případ jeho pohybu ve vakuu. Číselné hodnoty uvedené v tab. 4.1 jsme převzali z článku „The Trajectory of a Fly Ball“ publikovaného v časopisu *The Physics Teacher* v lednu 1985. Pohybu v odporujícím prostředí se budeme podrobněji věnovat v kap. 6.

KONTROLA 5: Jak se mění (a) vodorovná a (b) svislá složka rychlosti šikmo vrženého míče? Určete (c) vodorovnou a (d) svislou složku jeho zrychlení ve vzestupné i sestupné části trajektorie i v jejím vrcholu. Odpor vzduchu zanedbejte.



Obr. 4.13 (I) Dráha tenisového míčku vypočtená (na počítači) s uvážením odporu vzduchu. (II) Dráha míčku ve vakuu, vypočtená pro stejnou počáteční rychlost pomocí vztahů odvozených v této kapitole. Důležité číselné údaje o obou trajektoriích jsou shrnuty v tab. 4.1.

Tabulka 4.1 **Dva míčky v letu**

	DRÁHA I (VZDUCH)	DRÁHA II (VAKUUM)
dolet	98,5 m	177 m
největší výška	53,0 m	76,8 m
doba letu	6,6 s	7,9 s

Elevační úhel je 60° a počáteční rychlost má velikost 160 km/h (obr. 4.13).

PŘÍKLAD 4.6

Záchranný letoun letí na pomoc tonoucímu. Pilot udržuje stálou výšku 1 200 m nad hladinou a směřuje přímo nad hlavu člověka (obr. 4.14). Rychlost letadla má velikost 430 km/h. Při jakém zorném úhlu φ musí pilot uvolnit záchranný vak, aby dopadl co nejblíže k tonoucímu?

ŘEŠENÍ: Počáteční rychlost vaku $\boldsymbol{v}_0$ je shodná s rychlostí letadla. Má tedy velikost 430 km/h a vodorovný směr. Poněvadž víme, v jak velké výšce je vak vypuštěn, můžeme snadno určit dobu jeho pádu na hladinu. Do rovnice (4.16), zapsané ve tvaru

$$y - y_0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

dosadíme $y - y_0 = -1\,200$ m (záporné znaménko je dáno orientací osy y) a $\theta_0 = 0$:

$$-1\,200\ \mathrm{m} = 0 - \tfrac{1}{2}(9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})t^2.$$

Řešením této rovnice vzhledem k neznámé t dostaneme

$$t = \sqrt{\frac{2(1\,200\ \mathrm{m})}{(9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})}} = 15{,}65\ \mathrm{s}.$$

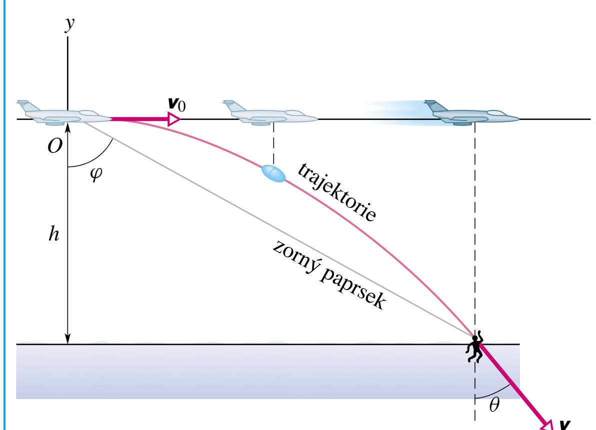
Za tuto dobu urazí vak i letadlo ve vodorovném směru vzdálenost určenou vztahem (4.15):

$$x - x_0 = (v_0\cos\theta_0)t = $$
$$= (430\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}})(\cos 0°)(15{,}65\ \mathrm{s})\left(\frac{1\ \mathrm{h}}{3\,600\ \mathrm{s}}\right) =$$
$$= 1{,}869\ \mathrm{km} = 1\,869\ \mathrm{m}.$$

Pro $x_0 = 0$ je tedy $x = 1\,869$ m. Výpočet zorného úhlu φ je již zřejmý z obr. 4.14.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{h} = \left(\frac{1\,869\ \mathrm{m}}{1\,200\ \mathrm{m}}\right) = 1{,}558,$$
$$\varphi = 57°. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vodorovný průmět rychlosti vaku je v každém okamžiku shodný s rychlostí letadla, takže pilot vidí letící vak neustále pod sebou.



Obr. 4.14 Příklad 4.6. Letadlo letí ve vodorovném směru stálou rychlostí. Během letu vyhodí pilot záchranný vak. Vodorovný průmět rychlosti padajícího vaku je v každém okamžiku shodný s rychlostí letadla. Vak dopadne na hladinu rychlostí $\boldsymbol{v}$, která svírá se svislým směrem úhel θ.

PŘÍKLAD 4.7

Při filmování honičky na ploché střeše má kaskadér přeskočit na střechu sousední budovy (obr. 4.15). Ještě předtím ho prozíravě napadne, zda vůbec může tento úkol zvládnout, běží-li po střeše nanejvýš rychlostí 4,5 m·s^{-1}. Poradíme mu?

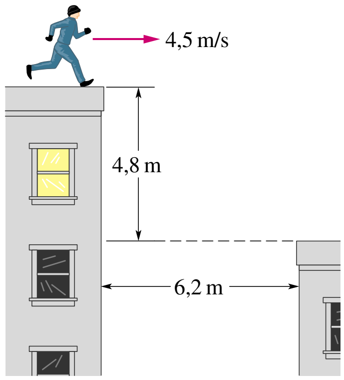
ŘEŠENÍ: Skok z výšky 4,8 m trvá po dobu t, kterou určíme z rovnice (4.16). Dosadíme $y - y_0 = -4{,}8$ m (pozor na znaménko) a $\theta_0 = 0$ a po drobné úpravě dostaneme

$$t = \sqrt{-\frac{2(y-y_0)}{g}} = \sqrt{-\frac{2(-4{,}8\ \mathrm{m})}{(9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})}} = 0{,}990\ \mathrm{s}.$$

Nyní je třeba určit, jak daleko doletí kaskadér za tuto dobu ve vodorovném směru. Odpověď získáme z rovnice (4.15):

$$x - x_0 = (v_0\cos\theta_0)t =$$
$$= (4{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\cos 0°)(0{,}990\ \mathrm{s}) = 4{,}5\ \mathrm{m}.$$

Sousední budova je však ve vzdálenosti 6,2 m. Rada je jasná: neskákat.



Obr. 4.15 Příklad 4.7. Má kaskadér skočit?

PŘÍKLAD 4.8

Pirátská loď je zakotvena 560 m od pobřežní pevnosti, která chrání vjezd do ostrovního přístavu (obr. 4.16). Obránci mají k dispozici dělo umístěné v úrovni mořské hladiny, které může vystřelit náboj rychlostí 82 m·s^{-1}.

(a) Pod jakým elevačním úhlem musí být nastavena hlaveň, aby náboj pirátskou loď zasáhl?

ŘEŠENÍ: Hledaný úhel θ_0 zjistíme přímo z rovnice (4.20):

$$\sin 2\theta_0 = \frac{gR}{v_0^2} = \frac{(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(560\,\mathrm{m})}{(82\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2} = 0{,}816.$$

Této hodnoty nabývá funkce sin pro dva různé úhly z intervalu od 0° do 360°: 54,7° a 125,3°. Získáváme tedy dvě hodnoty elevačního úhlu,

$$\theta_0 = \tfrac{1}{2}(54{,}7^\circ) \doteq 27^\circ \qquad \text{(Odpověď)}$$

a

$$\theta_0 = \tfrac{1}{2}(125{,}3^\circ) \doteq 63^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Zvolí-li velitel pevnosti kteroukoli z nich, bude pirátská loď zničena (za předpokladu, že pohyb střely není ovlivněn odporem vzduchu).

(b) Pro oba elevační úhly vypočtené v části (a) určete dobu letu střely.

ŘEŠENÍ: Dobu t vyjádříme z rovnice (4.15) a postupně dosadíme oba úhly. Pro $\theta_0 = 27^\circ$ dostaneme

$$t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0} = \frac{(560\,\mathrm{m})}{(82\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\cos 27^\circ} = 7{,}7\,\mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

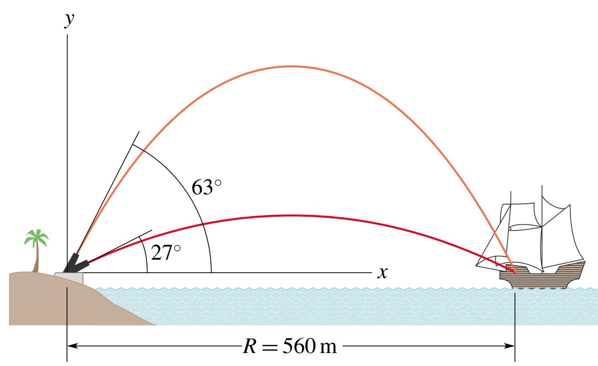
Pro $\theta_0 = 63^\circ$ vychází $t = 15$ s. Podle očekávání trvá let střely při větším elevačním úhlu déle.

(c) V jaké vzdálenosti od pevnosti již bude pirátská loď mimo dostřel?

ŘEŠENÍ: Víme, že dolet střely je největší při elevačním úhlu $\theta_0 = 45^\circ$. Dosazením této hodnoty do rovnice (4.20) dostaneme

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0 = \frac{(82\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2}{(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})}\sin(2\cdot 45^\circ) = 690\,\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

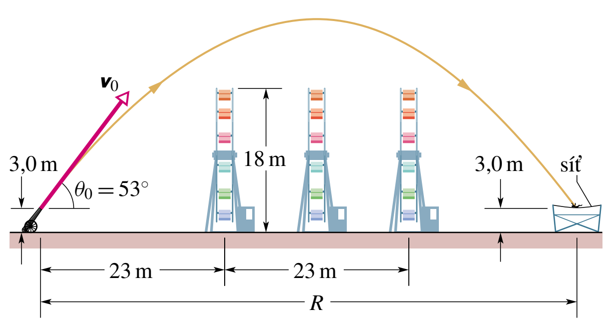
Vydá-li se pirátská loď na ústup, začnou se hodnoty obou elevačních úhlů postupně sbližovat a splynou v okamžiku, kdy bude loď od pevnosti vzdálena 690 m. Jejich společná hodnota je $\theta_0 = 45^\circ$. Ve vzdálenosti větší než 690 m jsou již piráti v bezpečí.



Obr. 4.16 Příklad 4.8. Náboj vystřelený z děla v přístavní pevnosti zasáhne pirátskou loď, míří-li hlaveň ve směru určeném kterýmkoli ze dvou možných elevačních úhlů.

PŘÍKLAD 4.9

Obr. 4.17 znázorňuje historický přelet Emanuela Zacchiniho nad třemi ruskými koly vysokými 18 m. Jejich rozmístění je z obrázku zřejmé. Zacchini byl vystřelen ze speciálního děla rychlostí o velikosti 26,5 m·s^{-1} pod elevačním úhlem $\theta_0 = 53^\circ$. Ústí hlavně i záchranná síť byly ve výšce 3,0 m nad zemí.



Obr. 4.17 Příklad 4.9. Let „lidské střely" nad ruskými koly v zábavním parku. Umístění záchranné sítě.

(a) Ověřte si, že artista skutečně přeletěl nad prvním kolem.

ŘEŠENÍ: Počátek soustavy souřadnic zvolme v ústí hlavně. Při této volbě je $x_0 = 0$ a $y_0 = 0$. Abychom zodpověděli položenou otázku, musíme určit y-ovou souřadnici artisty pro $x = 23\,\mathrm{m}$. Použijeme k tomu rovnici (4.19):

$$\begin{aligned} y &= (\operatorname{tg}\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0\cos\theta_0)^2} = \\ &= (\operatorname{tg}53^\circ)(23\,\mathrm{m}) - \frac{(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(23\,\mathrm{m})^2}{2(26{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2(\cos 53^\circ)^2} = \\ &= 20{,}3\,\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

Výška artisty nad zemí je však v tomto okamžiku 23,3 m, neboť počátek soustavy souřadnic je umístěn ve výšce 3,0 m. Artista proletí $23{,}3 - 18 = 5{,}3\,\mathrm{m}$ nad prvním kolem.

(b) Předpokládejme, že vrchol trajektorie leží právě nad prostředním kolem. Jak vysoko nad ním artista proletí?

ŘEŠENÍ: Ve vrcholu trajektorie je $v_y = 0$ a rovnice (4.18) nabude tvaru

$$v_y^2 = (v_0\sin\theta_0)^2 - 2gy = 0.$$

Jejím řešením vzhledem k neznámé y dostaneme

$$y = \frac{(v_0\sin\theta_0)^2}{2g} = \frac{(26{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2(\sin 53^\circ)^2}{2(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})} = 22{,}9\,\mathrm{m}.$$

Výšková „rezerva" při průletu artisty nad prostředním kolem činí 7,9 m.

(c) Určete dobu celého letu.

ŘEŠENÍ: Dobu letu můžeme určit několika způsoby. Jednu z možností nabízí rovnice (4.16) s uvážením skutečnosti, že při dopadu je $y = 0$. Dostáváme

$$y = (v_0\sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

tj.

$$\begin{aligned} t &= \frac{2v_0\sin\theta_0}{g} = \frac{2(26{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\sin 53^\circ}{(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})} = \\ &= 4{,}3\,\mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

(d) Jak daleko od děla je třeba umístit záchrannou síť?

ŘEŠENÍ: Dolet R získáme například z rov. (4.15) pro $x_0 = 0$, do níž dosadíme dobu letu.

$$\begin{aligned} R &= (v_0\cos\theta_0)t = \\ &= (26{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\cos 53^\circ)(4{,}3\,\mathrm{s}) = \\ &= 69\,\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

Nyní již umíme zodpovědět úvodní otázku celé kapitoly: Jak Zacchini zjistil, kam je třeba umístit záchrannou síť? Kde získal jistotu, že ruská kola skutečně přeletí? Ať již to byl on sám nebo kdokoli jiný, musel provést stejné výpočty jako my před chvílí. Složitými úvahami, které by umožnily respektovat vliv prostředí, se Zacchini pochopitelně nezabýval. Věděl však, že odpor vzduchu jeho let zbrzdí a zmenší tak skutečný dolet ve srovnání s hodnotou vypočtenou z jednoduchých vztahů. Proto použil rozměrnou síť a posunul ji o něco blíže k dělu. Zabezpečil si tak poměrně dobrou bezpečnost letu v různých konkrétních situacích, lišících se především podmínkami určujícími vliv okolního prostředí. Tak jako tak musela být nepředvídatelnost vlivu prostředí zdrojem určitého pocitu nejistoty a napětí před každou reprízou tohoto odvážného kousku.

Při podobných pokusech jsou artisté vystaveni ještě jinému nebezpečí. I při kratších letech je totiž zrychlení v hlavni děla tak velké, že způsobí krátkou ztrátu vědomí. Kdyby artista dopadl do sítě ještě v bezvědomí, mohl by si zlomit vaz. Artisté proto absolvují speciální trénink, aby se dokázali včas probrat. Lety předváděné v cirkusové manéži jsou podstatně kratší než let Emanuela Zacchiniho. Navíc jsou dnes daleko lépe technicky zabezpečeny. Problém bezvědomí tak prakticky představuje jejich jediné riziko.

RADY A NÁMĚTY

Bod 4.3: *Číselný a algebraický výpočet*

Zaokrouhlovacím chybám při číselném výpočtu se můžeme vyhnout tak, že problém řešíme nejprve obecně (algebraicky) a číselné hodnoty dosadíme až do výsledného vztahu. Při řešení př. 4.6 až 4.9 by takový postup byl celkem snadný a zkušenější řešitelé úloh by jej jistě použili. V úvodních kapitolách však raději volíme postupné numerické řešení, abychom získali jasnější představu o hodnotách mezivýsledků. Později dáme přednost řešení algebraickému.

4.7 ROVNOMĚRNÝ POHYB PO KRUŽNICI

Pohyb částice po kružnici nebo jejím oblouku nazýváme **rovnoměrným pohybem po kružnici**, je-li velikost rychlosti částice konstantní. Možná nás překvapí, že i když se velikost rychlosti nemění, je *zrychlení částice nenulové*. Zrychlení totiž často spojujeme se změnou velikosti rychlosti a zapomínáme, že rychlost $\boldsymbol{v}$ je vektorovou veličinou, a má tedy i směr. Při jakékoli změně rychlosti, i kdyby šlo pouze o změnu směru, je zrychlení částice nenulové. Právě takovým případem je rovnoměrný pohyb po kružnici.

Velikost a směr jeho zrychlení určíme pomocí obr. 4.18. Částice na obrázku se pohybuje po kružnici o poloměru r a její rychlost má konstantní velikost v. Ve dvou bodech P

a Q umístěných symetricky vzhledem k ose y jsou zakresleny vektory rychlostí $\boldsymbol{v}_P$ a $\boldsymbol{v}_Q$. Tyto vektory mají sice stejnou velikost, ale liší se směrem. Jsou proto různé. Jejich x-ové a y-ové složky jsou

$$v_{Px} = +v\cos\theta, \quad v_{Py} = +v\sin\theta$$

a

$$v_{Qx} = +v\cos\theta, \quad v_{Qy} = -v\sin\theta.$$

Částice, jejíž rychlost má stálou velikost, přejde z bodu P do bodu Q za dobu

$$\Delta t = \frac{\mathrm{arc}(PQ)}{v} = \frac{r(2\theta)}{v}, \tag{4.21}$$

kde arc(PQ) označuje délku kruhového oblouku spojujícího body P a Q.

Nyní již dokážeme určit složky průměrného zrychlení částice $\overline{\boldsymbol{a}}$ v časovém intervalu Δt. Pro x-ovou složku dostáváme

$$\overline{a}_x = \frac{v_{Qx} - v_{Px}}{\Delta t} = \frac{v\cos\theta - v\cos\theta}{\Delta t} = 0.$$

Tento výsledek není nikterak překvapivý a je zřejmý ze symetrie obr. 4.18. V bodě P je x-ová složka rychlosti stejná jako v bodě Q.

Složku $\overline{a}_y$ určíme z rovnice (4.21):

$$\overline{a}_y = \frac{v_{Qy} - v_{Py}}{\Delta t} = \frac{-v\sin\theta - v\sin\theta}{\Delta t} = \\ = -\frac{2v\sin\theta}{2r\theta/v} = -\left(\frac{v^2}{r}\right)\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right).$$

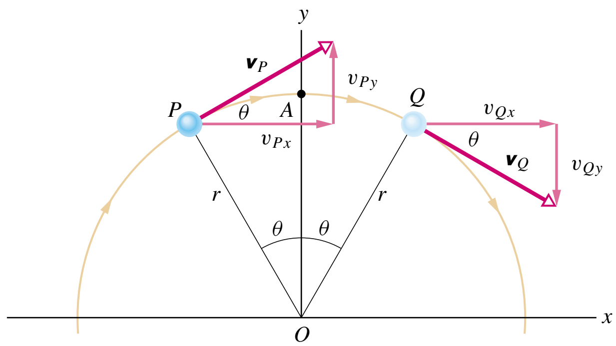
Záporné znaménko znamená, že průmět zrychlení $\overline{\boldsymbol{a}}$ do osy y v obr. 4.18 směřuje svisle dolů.

Při limitním přechodu úhlu θ v obr. 4.18 k nulové hodnotě se budou body P i Q blížit k bodu A ležícímu v nejvyšším bodě kružnice. Limitním případem průměrného zrychlení $\overline{\boldsymbol{a}}$, jehož složky jsme právě určili, bude okamžité zrychlení $\boldsymbol{a}$ v bodě A.

Okamžité zrychlení v bodě A na obr 4.18 míří v obrázku svisle dolů, *do středu kružnice*. Při zmenšování úhlu θ se totiž směr průměrného zrychlení nemění a zůstane tedy zachován i při limitním přechodu. Abychom určili *velikost* a vektoru okamžitého zrychlení, potřebujeme znát limitní hodnotu podílu $\sin\theta/\theta$ při velmi malých úhlech θ. Z matematiky je známo, že tato hodnota je rovna jedné. Ze vztahu pro y-ovou složku průměrného zrychlení již snadno dostaneme velikost okamžitého zrychlení:

$$a = \frac{v^2}{r} \quad \text{(dostředivé zrychlení).} \tag{4.22}$$

Při rovnoměrném pohybu částice rychlostí o velikosti v po kružnici o poloměru r (nebo jejím oblouku) směřuje zrychlení částice trvale do středu kružnice a má konstantní velikost v^2/r.



Obr. 4.18 Částice se pohybuje rovnoměrně po kružnici o poloměru r. Velikost její rychlosti je v, $\boldsymbol{v}_P$ a $\boldsymbol{v}_Q$ jsou rychlosti částice v bodech P a Q, symetricky položených vzhledem k ose y. Rychlosti $\boldsymbol{v}_P$ a $\boldsymbol{v}_Q$ jsou rozloženy do složek. Okamžité zrychlení částice v libovolném bodě trajektorie míří do středu kružnice a má velikost v^2/r.

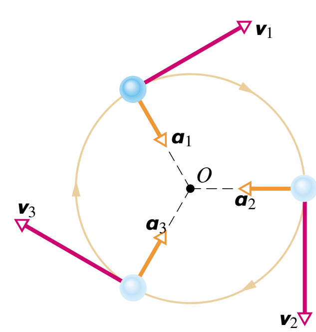
Částice oběhne celý obvod kružnice (vzdálenost $2\pi r$) za dobu T

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad \text{(perioda),} \tag{4.23}$$

zvanou **doba oběhu**, neboli **perioda**. V obecnějším pojetí rozumíme periodou dobu, za kterou vykoná částice právě jeden oběh po uzavřené trajektorii.

Na obr. 4.19 jsou zakresleny vektory okamžité rychlosti a okamžitého zrychlení v různých fázích rovnoměrného pohybu po kružnici. Oba mají stále stejnou velikost, jejich směr se však během pohybu spojitě mění. Rychlost je vždy tečnou ke kružnici, orientovanou ve směru pohybu. Zrychlení trvale směřuje do středu kružnice, a proto je nazýváme **zrychlením dostředivým**.

Obr. 4.19 Rychlost a zrychlení částice při rovnoměrném pohybu po kružnici. Vektory mají stálou velikost, ale proměnný směr.



Zrychlení určující změnu směru rychlosti je stejně skutečné jako zrychlení, které souvisí se změnou její velikosti. Fotografie na obr. 2.8 zachycují tvář plukovníka Johna P. Stappa při prudkém brzdění raketových saní. Je jasné, že zřetelné fyziologické obtíže jsou způsobeny prudkou změnou *velikosti* rychlosti, neboť směr pohybu saní byl při tomto experimentu stálý. Kosmonaut při tréninku na centrifuze je naopak vystaven výrazným změnám *směru* rychlosti, zatímco její velikost je stálá. Fyziologické pocity vznikající v důsledku zrychlení jsou v obou případech stejné.

KONTROLA 6: Těleso se pohybuje v souřadnicové rovině xy po kruhové dráze se středem v počátku soustavy souřadnic. Bodem o x-ové souřadnici $x = -2\,\mathrm{m}$ prochází rychlostí $-(4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j}$. Určete (a) rychlost a (b) dostředivé zrychlení tělesa v bodě o y-ové souřadnici $y = 2\,\mathrm{m}$.

PŘÍKLAD 4.10

Stíhací piloti se oprávněně obávají příliš prudkých zatáček. Je-li totiž tělo pilota vystaveno velkému dostředivému zrychlení v situaci, kdy hlava směřuje do středu křivosti zatáčky, dochází k odkrvení mozku a poruše mozkových funkcí.

Úplné ztrátě vědomí předchází několik varovných příznaků: Je-li velikost dostředivého zrychlení mezi hodnotami $2g$ a $3g$, cítí se pilot být jakoby „těžký“. Při hodnotě $4g$ začíná vidět pouze černobíle a jeho zorný úhel se zmenšuje (tzv. tunelové vidění). Je-li takovému zrychlení vystaven delší dobu anebo se velikost zrychlení dokonce ještě zvětší, přestává pilot vidět úplně a vzápětí ztrácí vědomí. Tento stav se nazývá g-LOC z anglického „g-induced loss of consciousness“.

Jaké je dostředivé zrychlení pilota (v jednotkách g) stíhačky F-22 při průletu kruhové zatáčky o poloměru 5,80 km rychlostí o velikosti $v = 2\,580\,\mathrm{km/h}$ ($716\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$)?

ŘEŠENÍ: Dosazením číselných údajů do vztahu (4.22) dostaneme

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(716\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2}{5\,800\,\mathrm{m}} = \\ = 88{,}39\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} = 9{,}0g. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Pilot, který by byl natolik neopatrný, že by skutečně navedl stroj do takové zatáčky, by téměř okamžitě upadl do bezvědomí bez jakýchkoliv varovných příznaků.

PŘÍKLAD 4.11

Umělá družice Země je na oběžné dráze ve výšce $h = 200\,\mathrm{km}$ nad zemským povrchem. V této výšce má gravitační zrychlení $\boldsymbol{g}$ (viz kap. 6) velikost $9{,}20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Jaká je oběžná rychlost v družice?

ŘEŠENÍ: Družice se pohybuje kolem Země rovnoměrně po kružnici. Dostředivým zrychlením je zrychlení gravitační. Oběžnou rychlost v určíme z rovnice (4.22), do které dosadíme $a = g$ a $r = R_Z + h$, kde R_Z je poloměr Země (viz vnitřní strana obálky nebo dod. C):

$$g = \frac{v^2}{R_Z + h}.$$

Odtud

$$v = \sqrt{g(R_Z + h)} = \\ = \sqrt{(9{,}20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(6{,}37{\cdot}10^6\,\mathrm{m} + 200{\cdot}10^3\,\mathrm{m})} = \\ = 7\,770\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 7{,}77\,\mathrm{km/s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Snadno se přesvědčíme, že doba oběhu družice kolem Země, tedy perioda jejího pohybu, je rovna 1,47 h.

4.8 VZÁJEMNÝ POHYB PO PŘÍMCE

Představme si, že pozorujeme kachnu, jak letí řekněme na sever rychlostí o velikosti 30 km/h. Vzhledem k jiné kachně, která letí spolu s ní, se však naše kachna nepohybuje. Je zřejmé, že rychlost pohybu tělesa závisí na vztažné soustavě pozorovatele, který provádí měření. Obecně budeme **vztažnou soustavou** rozumět vhodně zvolený objekt, s nímž spojíme soustavu souřadnic.

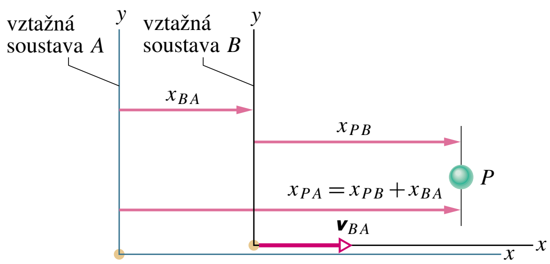
Nejpřirozenější vztažnou soustavou je pochopitelně ta, kterou neustále používáme, aniž si to snad uvědomujeme — zem pod našima nohama. Sdělí-li dopravní policista řidiči, že jel rychlostí 100 km/h, má samozřejmě na mysli rychlost vzhledem k souřadnicové soustavě spojené s povrchem Země. A řidič tomu také tak rozumí.

Pro pozorovatele v letadle nebo třeba v kosmické lodi nemusí být vztažná soustava spojená se Zemí právě nejvhodnější (například pro popis pohybu okolních předmětů). Můžeme si ovšem vybrat kteroukoli jinou, neboť výběr vztažných soustav není nijak omezen. Když už se však pro některou z nich rozhodneme, je důležité se této volby držet a všechna měření vztahovat k vybrané vztažné soustavě.

Problém popisu pohybu částice v různých vztažných soustavách vyložíme pomocí jednoduchého příkladu: Aleš (vztažná soustava A) sedí v autě zaparkovaném na dálnici v odstavném pruhu a sleduje rychlé auto P (částice), které právě projelo kolem v levém pruhu. Barbora (vztažná soustava B) jede v pravém pruhu stálou rychlostí. Také ona pozoruje automobil P. Dejme tomu, že oba pozorovatelé ve stejném okamžiku změří polohu sledovaného vozidla. Z obr. 4.20, který znázorňuje celou situaci, je zřejmé, že

$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}. \qquad (4.24)$$

Všechny členy v této rovnici jsou složky vektorů a mohou být jak kladné, tak záporné. Slovy můžeme rovnici (4.24) vyjádřit takto: „Souřadnici částice P měřenou pozorovatelem ve vztažné soustavě A určíme tak, že k souřadnici částice P měřené pozorovatelem v soustavě B *přičteme* souřadnici pozorovatele B měřenou pozorovatelem A.“ Všimněte si významu veličin obsažených v rovnici (4.24) v souvislosti s jejich označením pomocí indexů.



Obr. 4.20 Aleš (vztažná soustava A) a Barbora (vztažná soustava B) pozorují vozidlo P. Všechna vozidla se pohybují podél společné osy x obou vztažných soustav. Vektor $\boldsymbol{v}_{BA}$ představuje vzájemnou rychlost vztažných soustav (rychlost soustavy B vzhledem k soustavě A). Trojice měření vyznačených poloh je provedena v jediném okamžiku.

Derivací rovnice (4.24) podle času dostaneme

$$\frac{d}{dt}(x_{PA}) = \frac{d}{dt}(x_{PB}) + \frac{d}{dt}(x_{BA}),$$

tj. (vzhledem k tomu, že $v = dx/dt$)

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}. \tag{4.25}$$

Tato rovnice vyjadřuje vztah mezi rychlostmi téhož objektu (automobil P), měřenými v různých vztažných soustavách. Tyto rychlosti jsou obecně různé. Vztah (4.25) lze velmi jednoduše vyjádřit slovy: „Rychlost částice P měřená ve vztažné soustavě A je součtem její rychlosti měřené v soustavě B a rychlosti soustavy B měřené v soustavě A.“ Symbolem v_{BA} značíme rychlost vztažné soustavy B vzhledem k soustavě A (obr. 4.20), neboli relativní rychlost B vůči A; rychlost v_{PA} se též nazývá relativní rychlost (automobilu) vůči vztažné soustavě A.

Zatím uvažujeme pouze o takových vztažných soustavách, které se navzájem pohybují konstantní rychlostí. Barbora (soustava B) tedy musí jet vzhledem k Alešovi (soustava A) stálou rychlostí. Pohyb automobilu P není omezen ničím, může být zrychlený či zpožděný, automobil může i zastavit nebo couvat.

Derivací rovnice (4.25) dostaneme vztah pro zrychlení

$$a_{PA} = a_{PB}. \tag{4.26}$$

(Uvědomte si, že rychlost v_{BA} je konstantní. Její časová derivace je tedy nulová.) Informace obsažená ve vztahu (4.26) je velmi důležitá:

Částice má stejné zrychlení ve všech vztažných soustavách pohybujících se navzájem konstantními rychlostmi.

Jinými slovy:

Pozorovatelé v různých vztažných soustavách, pohybujících se navzájem konstantními rychlostmi, naměří u zkoumané částice totéž zrychlení.

KONTROLA 7: V následující tabulce jsou uvedeny rychlosti (v km/h) Barbořiny vztažné soustavy B a vozidla P pro tři různé situace. Doplňte chybějící údaje a určete, jak se mění vzdálenost vozidel P a B.

SITUACE	v_{BA}	v_{PA}	v_{PB}
1	+50	+50	
2	+30		+40
3		+60	−20

PŘÍKLAD 4.12

Aleš parkuje na okraji silnice, která vede od východu na západ. Sleduje automobil P jedoucí západním směrem. Barbora jede na východ rychlostí $v_{BA} = 52$ km/h, a také pozoruje vůz P. Směr od západu k východu považujeme za kladný.

(a) V určitém okamžiku Aleš zjistil, že se vozidlo P pohybuje rychlostí 78 km/h. Jakou rychlost vozidla P naměří v tomto okamžiku Barbora?

ŘEŠENÍ: Ze vztahu (4.25) dostaneme

$$v_{PB} = v_{PA} - v_{BA}.$$

Víme, že $v_{PA} = -78$ km/h. Záporné znaménko vyjadřuje skutečnost, že se vůz P pohybuje západním (tedy záporným) směrem. Rychlost vztažné soustavy B vzhledem k A je rovněž zadána, $v_{BA} = 52$ km/h. Je tedy

$$v_{PB} = (-78\,\mathrm{km/h}) - (52\,\mathrm{km/h}) =$$
$$= -130\,\mathrm{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kdyby byl vůz P spojen s vozem Barbory lanem navinutým na cívce, odvíjelo by se lano z cívky právě touto rychlostí.

(b) Aleš zpozoruje, že vůz P se po 10 s brzdění zastavil. Jaké zrychlení vozu P Aleš naměřil za předpokladu, že automobil brzdil rovnoměrně?

ŘEŠENÍ: Z rovnice (2.11) ($v_x = v_{0x} + a_x t$) dostaneme

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{0 - (-78\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})}{(10\,\mathrm{s})} = \\ = \left(\frac{78\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}}{10\,\mathrm{s}}\right)\left(\frac{1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{3{,}6\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}}\right) = \\ = 2{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jaké zrychlení vozu P naměří Barbora?

ŘEŠENÍ: V části (a) této úlohy jsme zjistili, že počáteční rychlost vozu P vzhledem k Barboře je $-130\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Vůz P na dálnici zastavil, je tedy v klidu vzhledem k Alešově vztažné soustavě. V soustavě Barbořině se však pohybuje rychlostí o velikosti $52\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ směrem na západ. Rychlost automobilu P vzhledem k Barboře je tedy $-52\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Užitím vztahu $v_x = v_{0x} + a_x t$ dostaneme

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{(-52\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}) - (-130\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})}{(10\,\mathrm{s})} = \\ = 2{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Barbořin výsledek je, podle očekávání, stejný jako Alešův. Ve výpočtech jsme tedy neudělali žádnou chybu.

4.9 VZÁJEMNÝ POHYB V ROVINĚ

Vzájemný pohyb těles v rovině (případně i v prostoru) lze nejlépe popsat pomocí vektorů.

Na obr. 4.21 jsou znázorněny vztažné soustavy A a B našich dvou pozorovatelů, kteří opět sledují pohyb částice P, tentokrát v rovině. Soustavy se stejně jako v předchozím případě pohybují konstantní vzájemnou (neboli relativní) rychlostí $\boldsymbol{v}_{BA}$. Pro zjednodušení výpočtů navíc předpokládejme, že odpovídající si osy obou soustav (x-ové a y-ové) jsou trvale rovnoběžné.

Pozorovatelé v soustavách A a B v určitém okamžiku změří polohu částice P. Z vektorového trojúhelníka na obr. 4.21 je na první pohled zřejmý vztah mezi jejími polohovými vektory v obou soustavách:

$$\boldsymbol{r}_{PA} = \boldsymbol{r}_{PB} + \boldsymbol{r}_{BA}. \tag{4.27}$$

Tato vektorová transformační rovnice odpovídá skalární rovnici (4.24), platné pro pohyb po přímce.

Derivujeme-li ji podle času, získáme vztah mezi rychlostmi částice naměřenými pozorovateli v soustavách A a B:

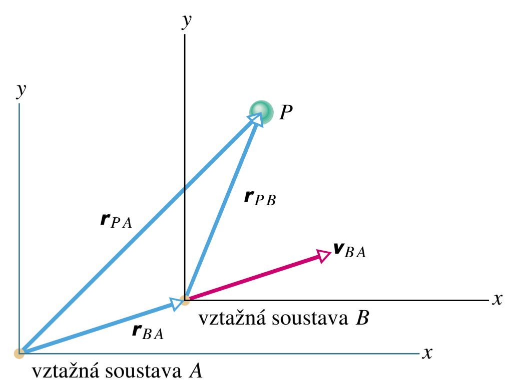
$$\boldsymbol{v}_{PA} = \boldsymbol{v}_{PB} + \boldsymbol{v}_{BA}. \tag{4.28}$$

Tento vztah je dvojrozměrným ekvivalentem skalární rovnice (4.25). Význam indexů je stejný jako v rovnici (4.25) a $\boldsymbol{v}_{BA}$ opět představuje (konstantní) rychlost soustavy B vzhledem k soustavě A.

Dalším derivováním rovnice (4.28) dostaneme vztah pro zrychlení

$$\boldsymbol{a}_{PA} = \boldsymbol{a}_{PB}. \tag{4.29}$$

Důležitý výsledek, který jsme získali pro případ pohybu po přímce, zůstává v platnosti i při pohybu v rovině či prostoru: při konstantních vzájemných rychlostech vztažných soustav naměří všichni pozorovatelé stejné zrychlení pohybující se částice.



Obr. 4.21 Vztažné soustavy v rovině. Vektory $\boldsymbol{r}_{PA}$ a $\boldsymbol{r}_{PB}$ určují polohu částice v soustavách A a B, $\boldsymbol{r}_{BA}$ je polohový vektor počátku soustavy B v soustavě A. Vektor $\boldsymbol{v}_{BA}$ představuje vzájemnou rychlost vztažných soustav (rychlost soustavy B vzhledem k A). Předpokládáme, že tato rychlost je konstantní.

PŘÍKLAD 4.13

Netopýr letící rychlostí $\boldsymbol{v}_{\mathrm{NZ}}$ zaregistruje mouchu, která se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_{\mathrm{MZ}}$. Rychlosti jsou zadány na obr. 4.22a a jsou vztaženy k zemi. Určete rychlost $\boldsymbol{v}_{\mathrm{MN}}$ mouchy vzhledem k netopýrovi a vyjádřete ji pomocí jednotkových vektorů.

ŘEŠENÍ: Podle obr. 4.22a jsou rychlosti mouchy a netopýra vzhledem k zemi dány vztahy

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{MZ}} = (5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\cos 50^\circ)\boldsymbol{i} + (5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\sin 50^\circ)\boldsymbol{j}$$

a

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{NZ}} = (4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\cos 150^\circ)\boldsymbol{i} + (4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\sin 150^\circ)\boldsymbol{j}.$$

Úhly odměřujeme od kladného směru osy x. Při výpočtu vyjdeme ze skutečnosti, že rychlost $\boldsymbol{v}_{\mathrm{MN}}$ *mouchy vzhledem k netopýrovi* je vektorovým součtem rychlosti $\boldsymbol{v}_{\mathrm{MZ}}$ *mouchy* *vzhledem k zemi* a rychlosti $\boldsymbol{v}_{ZN}$ země vzhledem k netopýrovi. Pak

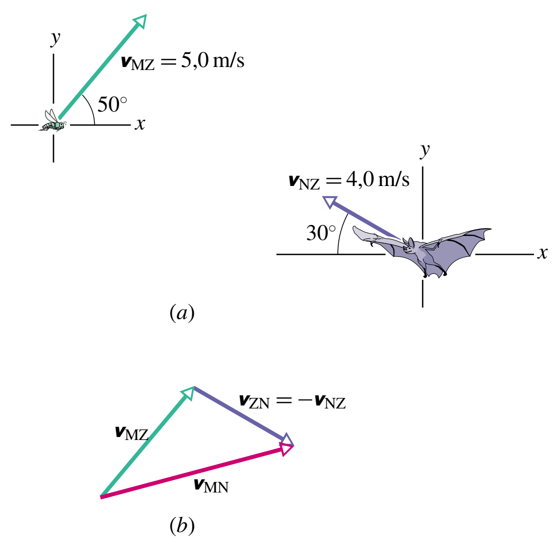
$$\boldsymbol{v}_{MN} = \boldsymbol{v}_{MZ} + \boldsymbol{v}_{ZN}$$

(obr. 4.22b). (Všimněte si, že „vnitřní“ indexy (bližší znaménku „plus“) na pravé straně této rovnice jsou stejné. Vnější indexy pravé strany se shodují s indexy na levé straně a na obou stranách rovnice vystupují ve stejném pořadí.) Vektor $\boldsymbol{v}_{ZN}$ je ovšem definován jako opačný k vektoru $\boldsymbol{v}_{NZ}$, tj. $\boldsymbol{v}_{ZN} = -\boldsymbol{v}_{NZ}$, dostáváme proto

$$\boldsymbol{v}_{MN} = \boldsymbol{v}_{MZ} + (-\boldsymbol{v}_{NZ}).$$

Dosazením rychlostí $\boldsymbol{v}_{MZ}$ a $\boldsymbol{v}_{NZ}$ (obr. 4.22) do předchozího vztahu dostaneme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{MN} &= (5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\cos 50^\circ)\boldsymbol{i} + (5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\sin 50^\circ)\boldsymbol{j} - \\ &\quad - (4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\cos 150^\circ)\boldsymbol{i} - \\ &\quad - (4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\sin 150^\circ)\boldsymbol{j} = \\ &= 3{,}21\boldsymbol{i} + 3{,}83\boldsymbol{j} + 3{,}46\boldsymbol{i} - 2{,}0\boldsymbol{j} \doteq \\ &\doteq (6{,}7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} + (1{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j}. \qquad \text{(Odpověď)}\end{aligned}$$



Obr. 4.22 Příklad 4.13. (a) Netopýr zaregistroval mouchu. (b) Vektory rychlosti mouchy a netopýra.

PŘÍKLAD 4.14

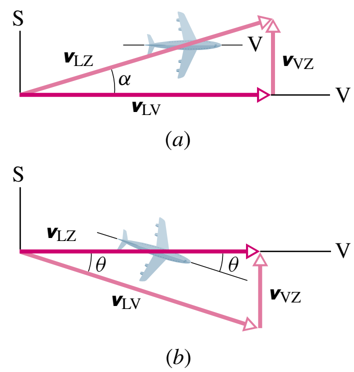
Kompas na palubě letadla ukazuje, že letadlo směřuje k východu. Palubní rychloměr udává hodnotu 215 km/h vzhledem k okolnímu vzduchu. Vane stálý jižní vítr rychlostí 65,0 km/h.

(a) Jaká je rychlost letadla vzhledem k zemi?

ŘEŠENÍ: Pohybujícím se tělesem je nyní letadlo (L). Letadlo (L) zde považujeme za hmotný bod. Jedna ze vztažných soustav je spojena se zemí (Z) a druhá se vzduchem (V). Podle rovnice (4.28) platí

$$\boldsymbol{v}_{LZ} = \boldsymbol{v}_{LV} + \boldsymbol{v}_{VZ}, \tag{4.30}$$

kde $\boldsymbol{v}_{LZ}$ je rychlost letadla vzhledem k zemi, $\boldsymbol{v}_{LV}$ rychlost letadla vzhledem k okolnímu vzduchu a $\boldsymbol{v}_{VZ}$ rychlost vzduchu vzhledem k zemi (rychlost větru). Vektory rychlosti vystupující v rovnici (4.30) lze zakreslit tak, aby tvořily strany trojúhelníka podle obr. 4.23a. V obrázku si všimněte, že letadlo je orientováno přídí k východu, přesně tak, jak ukazuje palubní kompas. To však ještě neznamená, že se tímto směrem také skutečně pohybuje.



Obr . 4.23 Příklad 4.14. (a) Letadlo, jehož pilot udržuje východní kurs, je unášeno severním směrem. (b) Má-li letadlo letět východně, musí mířit částečně proti větru.

Velikost rychlosti letadla vzhledem k zemi určíme z vektorového trojúhelníka na obr. 4.23a:

$$\begin{aligned}v_{LZ} &= \sqrt{v_{LV}^2 + v_{VZ}^2} = \\ &= \sqrt{(215\,\mathrm{km/h})^2 + (65{,}0\,\mathrm{km/h})^2} = \\ &= 225\,\mathrm{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}\end{aligned}$$

Úhel α na obr. 4.23a je dán vztahem

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_{VZ}}{v_{LV}} = \frac{(65{,}0\,\mathrm{km/h})}{(215\,\mathrm{km/h})} = 0{,}302,$$

tj.

$$\alpha = 16{,}8^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Letadlo letí vzhledem k zemi rychlostí o velikosti 225 km/h ve směru, který je od východního kursu odkloněn o 16,8° na sever. Vzhledem k zemi se tedy letadlo pohybuje rychleji než vůči okolnímu vzduchu.

(b) Jaký kurs musí pilot udržovat, chce-li skutečně letět na východ? (Kurs je určen údajem na palubním kompasu.)

ŘEŠENÍ: Aby letadlo letělo vzhledem k zemi přesně východním směrem, musí směřovat částečně proti větru a kompenzovat tak jeho unášivý vliv. Rychlost větru je stejná jako v části (a). Diagram rychlostí odpovídající této situaci je na obr. 4.23b. Vektory $\boldsymbol{v}_{\mathrm{LV}}$, $\boldsymbol{v}_{\mathrm{VZ}}$, $\boldsymbol{v}_{\mathrm{LZ}}$ tvoří opět pravoúhlý trojúhelník, podobně jako na obr. 4.23a a stále platí rovnice (4.30).

Velikost rychlosti letadla vzhledem k zemi určíme podle obr. 4.23b:

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{LZ}} &= \sqrt{v_{\mathrm{LV}}^2 - v_{\mathrm{VZ}}^2} = \\ &= \sqrt{(215\,\mathrm{km/h})^2 - (65{,}0\,\mathrm{km/h})^2} = \\ &= 205\,\mathrm{km/h}. \end{aligned}$$

Z obrázku je rovněž zřejmé, že pilot musí udržovat kurs určený úhlem

$$\sin\theta = \frac{v_{\mathrm{VZ}}}{v_{\mathrm{LV}}} = \frac{(65{,}0\,\mathrm{km/h})}{(215\,\mathrm{km/h})} = 0{,}302,$$

tj.

$$\theta = 17{,}6^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Rychlost letadla vzhledem k zemi je nyní menší než vzhledem k okolnímu vzduchu.

4.10 VZÁJEMNÝ POHYB PŘI VYSOKÝCH RYCHLOSTECH

I když kosmické lety již před časem opustily oblast pouhé fantazie a staly se skutečností, stále na nás působí dojmem něčeho mimořádného. Vyvolávají především představu objektů pohybujících se velkými rychlostmi. Tak třeba typická velikost rychlosti družice na oběžné dráze kolem Země je 27 400 km/h. Máme-li ji však zařadit do kategorie „velkých rychlostí“, musíme se dohodnout, s jakými rychlostmi ji budeme porovnávat. Příroda sama nabízí jako standard rychlost světla ve vakuu

$$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \quad \text{(rychlost světla ve vakuu).} \quad (4.31)$$

Později se přesvědčíme, že se žádný hmotný objekt nemůže pohybovat rychleji než světlo ve vakuu, a to bez ohledu na volbu vztažné soustavy, ve které jej pozorujeme. Všechny objekty běžných rozměrů se ve srovnání s tímto „světelným standardem“ pohybují velice pomalu. Přitom se nám jejich rychlost může zdát obrovská, posuzujeme-li ji našimi lidskými měřítky. Velikost rychlosti družice činí pouhých 0,002 5 % rychlosti světla. Na druhé straně se však rychlosti elementárních částic, například protonů nebo elektronů, mohou této hodnotě velmi přiblížit. Nemohou jí však v žádném případě dosáhnout či dokonce překročit.

Experimenty potvrzují, že elektron získá při urychlení napětím 10 milionů voltů rychlost o velikosti 0,998 8c. Použijeme-li pro jeho urychlení napětí 20 milionů voltů, velikost jeho rychlosti se sice ještě zvýší, avšak už jen na hodnotu 0,999 7c. Rychlost světla představuje hranici, ke které se rychlosti hmotných těles mohou přiblížit, ale nikdy jí nedosáhnou. Lety nadsvětelnými rychlostmi jsou možné jen ve fantastických literárních příbězích. A tak „warpový pohon“, známý z populárního seriálu *Star Trek* a umožňující kosmonautům letět rychlostí $c \cdot 2^n$ (n je číslo „warpu“), zůstane navždy jen ve světě fantazie.

Platí vůbec kinematika, kterou jsme právě vybudovali pro popis pohybu běžných (a tedy velmi pomalých) objektů, také pro velmi rychlé částice, například elektrony či protony? Odpověď, kterou může dát jedině experiment, je záporná. Zákonitosti běžné kinematiky *neplatí* pro tělesa s rychlostmi blízkými rychlosti světla. Pro popis pohybu takových těles musíme použít Einsteinovu **speciální teorii relativity**, která souhlasí s experimentem pro *libovolnou* rychlost.

Kinematické vztahy pro běžná tělesa získáme z rovnic odvozených v rámci Einsteinovy relativistické teorie přechodem k „malým“ rychlostem. Rovnice nerelativistické kinematiky, kterou bychom mohli nazývat „kinematikou pomalých těles“, souhlasí s experimentem o to hůře, čím je rychlost sledovaných těles větší. Uveďme příklad: vztah (4.25)

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA} \qquad \text{(malé rychlosti)}$$

vyjadřuje souvislost mezi rychlostmi tělesa P měřenými dvěma pozorovateli v různých vztažných soustavách A a B. Odpovídající rovnice Einsteinovy teorie má tvar

$$v_{PA} = \frac{v_{PB} + v_{BA}}{1 + v_{PB}v_{BA}/c^2} \quad \text{(libovolné rychlosti).} \quad (4.32)$$

Pro $v_{PB} \ll c$ a $v_{BA} \ll c$ (splněno pro běžná tělesa) je hodnota jmenovatele zlomku velmi blízká jedničce a rovnice (4.32) přechází v rovnici (4.25).

Rychlost světla c je ústřední konstantou Einsteinovy teorie a vystupuje ve všech relativistických rovnicích. Každá z nich v případě „malých“ rychlostí přejde na odpovídající nerelativistický tvar. Ověření této skutečnosti je snadné. Při neomezeném zvyšování rychlosti světla se *všechny* rychlosti budou jevit jako malé a bude platit „kinematika pomalých těles“. Dosadíme-li například $c \to \infty$ do rovnice (4.32), dostaneme její nerelativistický tvar (4.25).

PŘÍKLAD 4.15

(Malé rychlosti) Pro $v_{PB} = v_{BA} = 0{,}000\,1c$ určete v_{PA} z rovnic (4.25) a (4.32).

ŘEŠENÍ: Z rovnice (4.25) dostaneme

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA} = 0{,}000\,1c + 0{,}000\,1c = \\ = 0{,}000\,2c. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Z rovnice (4.32)

$$v_{PA} = \frac{v_{PB} + v_{BA}}{1 + v_{PB}v_{BA}/c^2} = \frac{0{,}000\,1c + 0{,}000\,1c}{1 + (0{,}000\,1c)^2/c^2} = \\ = \frac{0{,}000\,2c}{1{,}000\,000\,01} \doteq 0{,}000\,2c. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Závěr: Pro rychlosti běžných hmotných těles vedou vztahy (4.25) a (4.32) ke stejným výsledkům. V takových případech můžeme celkem automaticky používat rovnici (4.25).

PŘÍKLAD 4.16

(Vysoké rychlosti) Určete v_{PA} ze vztahů (4.25) a (4.32), je-li $v_{PB} = v_{BA} = 0{,}65c$.

ŘEŠENÍ: Z rovnice (4.25) dostaneme

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA} = 0{,}65c + 0{,}65c = \\ = 1{,}30c. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Z rovnice (4.32) plyne

$$v_{PA} = \frac{v_{PB} + v_{BA}}{1 + v_{PB}v_{BA}/c^2} = \frac{0{,}65c + 0{,}65c}{1 + (0{,}65c)(0{,}65c)/c^2} = \\ = \frac{1{,}30c}{1{,}423} = 0{,}91c. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Závěr: Pro vysoké rychlosti jsou výsledky kinematiky pomalých těles a výsledky speciální teorie relativity velmi rozdílné. Klasická kinematika neklade na velikost rychlosti objektů žádná omezení. V jejím rámci jsou tedy přípustné i hodnoty větší než rychlost světla ve vakuu (jako v př. 4.16). Ve speciální teorii relativity naopak nikdy nemůže mít hmotný objekt vůči pozorovateli větší rychlost než světelnou, bez ohledu na to, jak vysoké rychlosti skládáme. Experiment závěry speciální teorie relativity plně potvrzuje.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Polohový vektor

Poloha částice vzhledem k počátku soustavy souřadnic je popsána *polohovým vektorem* $\boldsymbol{r}$, zapsaným pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy souřadnic ve tvaru

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{4.1}$$

Vektory $x\boldsymbol{i}$, $y\boldsymbol{j}$ a $z\boldsymbol{k}$ jsou *průměty* polohového vektoru $\boldsymbol{r}$ do směrů souřadnicových os, x, y a z jsou odpovídající *složky*. Polohový vektor je určen buď velikostí a jedním či dvěma úhly, nebo svými složkami.

Posunutí

Přemístění částice z polohy určené polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_1$ do polohy dané vektorem $\boldsymbol{r}_2$ je popsáno *vektorem posunutí* $\Delta\boldsymbol{r}$:

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1. \tag{4.2}$$

Jiný zápis posunutí využívá opět jednotkových vektorů:

$$\Delta\boldsymbol{r} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}, \tag{4.3}$$

kde (x_1, y_1, z_1) jsou složky vektoru $\boldsymbol{r}_1$ a (x_2, y_2, z_2) složky vektoru $\boldsymbol{r}_2$.

Průměrná rychlost

Průměrná rychlost částice $\overline{\boldsymbol{v}}$ v časovém intervalu od t do $t + \Delta t$ je definována jako podíl

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}, \tag{4.4}$$

kde $\Delta\boldsymbol{r}$ je posunutí částice v tomto intervalu.

Rychlost

Okamžitou rychlostí částice $\boldsymbol{v}$ rozumíme limitu její průměrné rychlosti, blíží-li se doba Δt k nule,

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}, \tag{4.6}$$

tj.

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}, \tag{4.7}$$

kde $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, $v_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ a $v_z = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$. Směr vektoru okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$ je v každém okamžiku tečný k trajektorii částice.

Průměrné zrychlení

Změní-li se rychlost hmotného bodu za časový interval Δt z hodnoty $\boldsymbol{v}_1$ na hodnotu $\boldsymbol{v}_2$, je *průměrné zrychlení* $\overline{\boldsymbol{a}}$ v tomto intervalu definováno jako podíl

$$\overline{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}. \tag{4.9}$$

Zrychlení

Při poklesu délky časového intervalu Δt k nulové hodnotě nabude průměrné zrychlení $\overline{\boldsymbol{a}}$ limitní hodnoty $\boldsymbol{a}$, kterou nazýváme (okamžitým) *zrychlením*,

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}, \tag{4.10}$$

tj.

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \tag{4.11}$$

kde $a_x = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t$, $a_y = \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t$ a $a_z = \mathrm{d}v_z/\mathrm{d}t$.

S jednotlivými složkami vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{r}$ můžeme pracovat odděleně a používat vztahů pro jednorozměrný pohyb, odvozených v kap. 2.

Šikmý vrh

Při šikmém vrhu se částice s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ pohybuje ve svislé rovině s tíhovým zrychlením $\boldsymbol{g}$. Je-li její počáteční rychlost $\boldsymbol{v}_0$ zadána velikostí v_0 a úhlem, který vektor $\boldsymbol{v}_0$ svírá s vodorovnou rovinou, má její trajektorie následující parametrické rovnice:

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t, \tag{4.15}$$

$$y - y_0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2. \tag{4.16}$$

Pro složky rychlosti platí

$$v_x = v_0\cos\theta_0, \qquad v_y = v_0\sin\theta_0 - gt, \tag{4.17}$$

$$v_y^2 = (v_0\sin\theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \tag{4.18}$$

Trajektorií částice je parabola o rovnici

$$y = (\mathrm{tg}\,\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0\cos\theta_0)^2}, \tag{4.19}$$

při takové volbě počátku soustavy souřadnic, při níž jsou počáteční souřadnice x_0 a y_0 nulové. Doletem částice rozumíme její vodorovnou vzdálenost od místa výstřelu v okamžiku, kdy je její výška nad povrchem Země stejná jako v okamžiku výstřelu. Platí

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0. \tag{4.20}$$

Rovnoměrný pohyb po kružnici

Obíhá-li částice po kružnici o poloměru r rychlostí o stálé velikosti v, nazýváme její pohyb *rovnoměrným pohybem po kružnici*. Velikost zrychlení částice má hodnotu

$$a = \frac{v^2}{r}. \tag{4.22}$$

Zrychlení $\boldsymbol{a}$ trvale směřuje do středu kružnice nebo kruhového oblouku. Nazýváme je dostředivým zrychlením. Doba oběhu částice

$$T = \frac{2\pi r}{v} \tag{4.23}$$

se též nazývá *perioda* pohybu.

Vzájemný pohyb

Rychlosti částice měřené ve vztažných soustavách A a B jsou obecně různé. Je-li vzájemný (relativní) pohyb vztažných soustav pouze translační, jsou okamžité rychlosti částice měřené v těchto soustavách vázány transformačním vztahem

$$\boldsymbol{v}_{PA} = \boldsymbol{v}_{PB} + \boldsymbol{v}_{BA}, \tag{4.28}$$

kde $\boldsymbol{v}_{BA}$ je rychlost vztažné soustavy B vzhledem k A. Je-li rychlost vzájemného pohybu vztažných soustav $\boldsymbol{v}_{BA}$ konstantní, naměří pozorovatelé v obou vztažných soustavách stejné zrychlení částice, tj.

$$\boldsymbol{a}_{PA} = \boldsymbol{a}_{PB}. \tag{4.29}$$

Při rychlostech blízkých rychlosti světla je třeba použít místo vztahu (4.25) ($v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}$) vztah vyplývající ze **speciální teorie relativity**. Pro přímočarý pohyb má tento vztah tvar

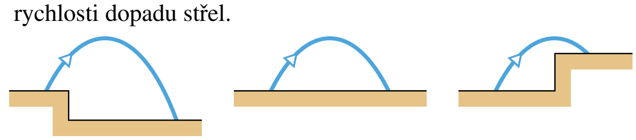
$$v_{PA} = \frac{v_{PB} + v_{BA}}{1 + \dfrac{v_{PB}v_{BA}}{c^2}} \tag{4.32}$$

a pro velmi malé rychlosti (zanedbatelné ve srovnání s rychlostí světla) přejde v rovnici (4.25).

OTÁZKY

1. Rychlost hokejového kotouče pohybujícího se v rovině xy je dána následujícími výrazy (v metrech za sekundu)
(1) $v_x = 3t^2 + 4t - 2$ a $v_y = 6t - 4$,
(2) $v_x = -3$ a $v_y = -5t^2 + 6$,
(3) $\boldsymbol{v} = 2t^2\boldsymbol{i} - (4t + 3)\boldsymbol{j}$,
(4) $\boldsymbol{v} = -2t\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$.
Ve kterém z uvedených případů je některá ze složek a_x a a_y vektoru zrychlení konstantní? Kdy je konstantní vektor zrychlení? Jaké musí být v případě (4) jednotky koeficientů -2 a 3, je-li rychlost $\boldsymbol{v}$ zadána v metrech za sekundu a čas t v sekundách?

2. Náboje na obr. 4.24 jsou ve všech případech vystřeleny stejnou rychlostí pod stejným elevačním úhlem, dopadnou však do různých míst. Seřaďte uvedené situace sestupně podle velikosti rychlosti dopadu střel.



(*a*) (*b*) (*c*)

Obr. 4.24 Otázka 2

3. Ve kterém bodě trajektorie střely z otázky 2 je její rychlost (a) největší, (b) nejmenší?

4. V jistém okamžiku je rychlost letícího míče rovna $\boldsymbol{v} = 25\boldsymbol{i} - 4{,}9\boldsymbol{j}$. (Osa x je vodorovná, osa y svislá a orientovaná směrem vzhůru, rychlost $\boldsymbol{v}$ je dána v metrech za sekundu). Prošel již míč nejvyšším bodem dráhy?

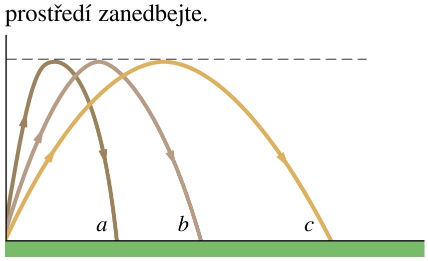
5. Raketa má být vystřelena z povrchu Země počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$, pro kterou připadají v úvahu následující možnosti:
(1) $\boldsymbol{v}_0 = 20\boldsymbol{i} + 70\boldsymbol{j}$,
(2) $\boldsymbol{v}_0 = -20\boldsymbol{i} + 70\boldsymbol{j}$,
(3) $\boldsymbol{v}_0 = 20\boldsymbol{i} - 70\boldsymbol{j}$,
(4) $\boldsymbol{v}_0 = -20\boldsymbol{i} - 70\boldsymbol{j}$.
Osa x kartézské soustavy souřadnic je vodorovná, osa y je svislá a orientovaná vzhůru. (a) Uspořádejte vektory počáteční rychlosti sestupně podle velikosti. (b) Uspořádejte uvedené možnosti sestupně podle doby letu střely.

6. Chlapec stojící v jámě vyhodí sněhovou kouli z úrovně vodorovného chodníku počáteční rychlostí o velikosti v_0 pod elevačním úhlem 45°. Koule dopadne znovu na chodník. Jak se změní (a) délka letu, (b) doba letu, zvolí-li chlapec při příštím hodu větší elevační úhel?

7. Ve výšce 2 m nad vodorovným povrchem vyhodíme hroudu hlíny počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0 = (2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jaká je rychlost hroudy při dopadu?

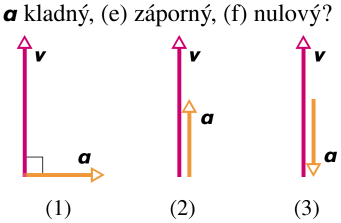
8. Letadlo letí rychlostí o velikosti 350 km/h ve stálé výšce nad povrchem Země. Pilot vypustí balík se zásobou potravin. Jaká je (a) vodorovná, (b) svislá složka počáteční rychlosti balíku? (c) Jaká je vodorovná složka jeho rychlosti těsně před dopadem na zem? (d) Jak by se změnila doba pádu balíku, kdyby letadlo letělo rychlostí 450 km/h? Vliv odporu prostředí neuvažujte.

9. Fotbalový míč letí po některé z trajektorií znázorněných na obr. 4.25. Seřaďte je podle (a) doby letu míče, (b) svislé složky jeho počáteční rychlosti, (c) vodorovné složky počáteční rychlosti, (d) velikosti počáteční rychlosti. Volte vždy sestupné řazení. Odpor prostředí zanedbejte.



Obr. 4.25 Otázka 9

10. Obr. 4.26 znázorňuje tři možné okamžité situace při pohybu částice. Rozhodněte, ve které z nich (a) velikost rychlosti částice roste, (b) klesá, (c) nemění se. Ve kterém z případů je skalární součin (d) $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}$ kladný, (e) záporný, (f) nulový?



Obr. 4.26 Otázka 10

11. Osobní vůz jede stálou rychlostí těsně za nákladní dodávkou. Z dodávky vypadne přepravka. (a) Řidič osobního auta nebrzdí a nesnaží se přepravce vyhnout. Narazí auto do přepravky ještě před jejím dopadem na silnici? (b) Rozhodněte, zda je vodorovná složka rychlosti přepravky během jejího pádu větší, menší, nebo stejná jako rychlost dodávky.

12. (a) Je možné, aby těleso mělo nenulové zrychlení a přitom se neměnila velikost jeho rychlosti? Je možné projíždět zatáčkou (b) s nulovým zrychlením, (c) se zrychlením stálé velikosti?

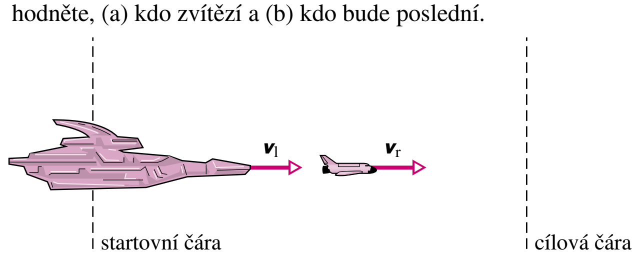
13. Dítě si během jízdy v autě pohrává s míčkem a najednou jej vyhodí svisle vzhůru. V následujících případech rozhodněte, zda míček spadne před dítě nebo za ně, anebo se mu vrátí zpět přímo do ruky: (a) auto jede konstantní rychlostí, (b) zrychluje, (c) brzdí.

14. Člověku jedoucímu ve výtahu vypadne z ruky mince ve chvíli, kdy výtah klesá konstantní rychlostí. Rozhodněte, zda je zrychlení mince větší, menší, nebo shodné s tíhovým zrychlením vzhledem k (a) člověku ve výtahu, (b) pozorovateli na schodišti.

15. Kapsářka stojí na otevřené zadní plošině tramvaje jedoucí konstantní rychlostí. Ve vhodném okamžiku se vykloní přes zábradlí plošiny a upustí ukradenou peněženku, na kterou již čeká její společnice. Popište trajektorii peněženky z hlediska (a) kapsářky, (b) její společnice a (c) policisty, který stojí v tramvaji jedoucí po vedlejší koleji opačným směrem, rovněž konstantní rychlostí.

16. Při ostřelování Paříže ze vzdálenosti 110 km používali Němci dělostřelecký kanón VWI přezdívaný „Tlustá Berta". Náboje byly vystřelovány pod úhlem větším než 45°. Němci totiž zjistili, že tak dosáhnou téměř dvojnásobného doletu ve srovnání s doletem při elevačním úhlu 45°. Lze z této informace usoudit, jak se mění hustota vzduchu s nadmořskou výškou?

17. Obr. 4.27 představuje jednu ze čtyř kosmických lodí při speciálním závodu. V okamžiku průletu startovní čarou vypustí každá z nich raketu, která směřuje k cílové čáře. Rychlosti kosmických lodí vzhledem ke startovní čáře v_l a rychlosti raket vzhledem k mateřským lodím v_r jsou postupně (1) $v_l = 0{,}70c$, $v_r = 0{,}40c$, (2) $v_l = 0{,}40c$, $v_r = 0{,}70c$, (3) $v_l = 0{,}20c$, $v_r = 0{,}90c$ a (4) $v_l = 0{,}50c$, $v_r = 0{,}60c$. Bez počítání rozhodněte, (a) kdo zvítězí a (b) kdo bude poslední.



Obr. 4.27 Otázka 17

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 4.2 Poloha a posunutí

1C. Meloun leží v místě o souřadnicích $x = -5{,}0\,\mathrm{m}$, $y = 8{,}0\,\mathrm{m}$ a $z = 0\,\mathrm{m}$. Vyjádřete jeho polohový vektor (a) pomocí jednotkových vektorů, (b) pomocí velikosti a směru. (c) Načrtněte polohový vektor v kartézské soustavě souřadnic. Meloun se posune do místa o souřadnicích $(x, y, z) = (3{,}00\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$. Určete vektor posunutí a vyjádřete jej (d) pomocí jednotkových vektorů, (e) pomocí velikosti a směru.

2C. Poloha elektronu je zadána vektorem $\boldsymbol{r} = 5{,}0\boldsymbol{i} - 3{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$ (v metrech). (a) Určete jeho velikost a (b) zakreslete jej v kartézské soustavě souřadnic.

3C. Proton se přemístí z počáteční polohy $\boldsymbol{r}_1 = 5{,}0\boldsymbol{i} - 6{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$ do polohy $\boldsymbol{r}_2 = -2{,}0\boldsymbol{i} + 6{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$ (všechny složky v metrech). (a) Určete vektor posunutí. (b) S jakou souřadnicovou rovinou je tento vektor rovnoběžný?

4C. Vektor posunutí pozitronu v určitém časovém intervalu je $\Delta\boldsymbol{r} = 2{,}0\boldsymbol{i} - 3{,}0\boldsymbol{j} + 6{,}0\boldsymbol{k}$ a jeho výsledná poloha je určena polohovým vektorem $\boldsymbol{r} = 3{,}0\boldsymbol{j} - 4{,}0\boldsymbol{k}$ (v metrech). Jaký byl polohový vektor pozitronu na počátku časového intervalu?

ODST. 4.3 Průměrná a okamžitá rychlost

5C. Letadlo letí z města A do C s mezipřistáním ve městě B. Město B leží východně od A ve vzdálenosti 300 km, město C je od B vzdáleno 600 km na jih. Prvá část letu trvá 45,0 min, druhá 1,50 h. (a) Určete vektor posunutí z A do C, (b) průměrnou rychlost a (c) průměrnou velikost rychlosti během celého letu.

6C. Vlak jede na východ stálou rychlostí o velikosti 60,0 km/h. Po 40,0 min jízdy odbočí k severovýchodu a směr jeho dalšího pohybu svírá s místním poledníkem úhel 50,0°. Vlak pokračuje v jízdě dalších 20,0 min. Posledních 50,0 min jízdy míří vlak na západ. Určete jeho průměrnou rychlost.

7C. Balon se během 3,50 h letu dostal do výšky 2,88 km nad povrch Země a posunul se o 21,5 km severně a 9,70 km východně od místa startu. Určete (a) velikost vektoru jeho průměrné rychlosti a (b) úhel, který tento vektor svírá s vodorovnou rovinou.

8C. Poloha iontu se během 10 s změní z hodnoty $\boldsymbol{r}_1 = 5{,}0\boldsymbol{i} - 6{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$ na $\boldsymbol{r}_2 = -2{,}0\boldsymbol{i} + 8{,}0\boldsymbol{j} - 2{,}0\boldsymbol{k}$ (všechny údaje jsou v metrech). Jaká je jeho průměrná rychlost v tomto časovém intervalu?

9C. Poloha elektronu je dána vztahem $\boldsymbol{r} = 3{,}0t\boldsymbol{i} - 4{,}0t^2\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$. (Čas t je měřen v sekundách a složky vektoru $\boldsymbol{r}$ v metrech.) (a) Určete časovou závislost rychlosti elektronu $\boldsymbol{v}(t)$. (b) Jakou rychlost má elektron v okamžiku $t = 2{,}0\,\mathrm{s}$? Výsledek zapište pomocí jednotkových vektorů. (c) Určete velikost a směr rychlosti elektronu v tomto okamžiku.

ODST. 4.4 Průměrné a okamžité zrychlení

10C. Rychlost protonu se během 4,0 s změní z hodnoty $\boldsymbol{v}_1 = 4{,}0\boldsymbol{i} - 2{,}0\boldsymbol{j} + 3{,}0\boldsymbol{k}$ na $\boldsymbol{v}_2 = -2{,}0\boldsymbol{i} - 2{,}0\boldsymbol{j} + 5{,}0\boldsymbol{k}$ (všechny údaje v metrech za sekundu). (a) Určete průměrné zrychlení protonu $\overline{\boldsymbol{a}}$ v tomto časovém intervalu. Výsledek zapište pomocí jednotkových vektorů. (b) Určete, jaká je velikost a směr vektoru $\overline{\boldsymbol{a}}$.

11C. Polohový vektor částice závisí na čase vztahem $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} + 4t^2\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$. Všechny veličiny jsou vyjádřeny v jednotkách SI. Určete časovou závislost (a) rychlosti, (b) zrychlení částice.

12C. Částice se pohybuje v rovině xy. Její poloha se mění s časem podle vztahu $\boldsymbol{r} = (2{,}00t^3 - 5{,}00t)\boldsymbol{i} + (6{,}00 - 7{,}00t^4)\boldsymbol{j}$, kde $\boldsymbol{r}$ je v metrech a t v sekundách. Určete její (a) polohu $\boldsymbol{r}$, (b) rychlost $\boldsymbol{v}$ a (c) zrychlení $\boldsymbol{a}$ v okamžiku $t = 2{,}00\,\mathrm{s}$. (d) Jaký je v tomto okamžiku směr tečny k trajektorii?

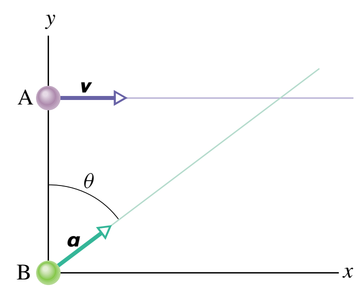
13C. Saně s plachtou jsou hnány větrem po zamrzlém jezeře. V jistém okamžiku t mají rychlost $(6{,}30\boldsymbol{i} - 8{,}42\boldsymbol{j})\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Během dalších tří sekund dojde k náhlé změně podmínek a saně se zastaví. Určete jejich průměrné zrychlení v časovém intervalu od t do $t + 3\,\mathrm{s}$.

14Ú. Částice se pohybuje v souřadnicové rovině xy s konstantním zrychlením $(4{,}0\boldsymbol{i} + 2{,}0\boldsymbol{j})\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. V okamžiku $t = 0$ prochází počátkem soustavy souřadnic rychlostí $8{,}0\boldsymbol{j}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Určete její y-ovou souřadnici v okamžiku, kdy má její x-ová souřadnice hodnotu 29 m. (b) V tomtéž okamžiku určete velikost její rychlosti.

15Ú. Částice vyletí z počátku soustavy souřadnic s počáteční rychlostí $3{,}00\boldsymbol{i}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a pohybuje se s konstantním zrychlením $\boldsymbol{a} = (-1{,}00\boldsymbol{i} - 0{,}500\boldsymbol{j})\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. (a) Jaká je její rychlost v okamžiku, kdy její x-ová souřadnice nabývá největší hodnoty? (b) Jaká je v tomto okamžiku její poloha?

16Ú. Rychlost částice pohybující se v souřadnicové rovině xy je dána vztahem $\boldsymbol{v} = (6{,}0t - 4{,}0t^2)\boldsymbol{i} + 8{,}0\boldsymbol{j}$. Složky rychlosti jsou měřeny v metrech za sekundu a čas ($t > 0$) v sekundách. (a) Jaké je její zrychlení v okamžiku $t = 3{,}0\,\mathrm{s}$? (b) Ve kterém okamžiku je její zrychlení nulové? (c) Kdy je nulová její rychlost? (d) Ve kterém okamžiku má velikost její rychlosti hodnotu $10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$?

17Ú. Částice A se pohybuje po přímce $y = 30\,\mathrm{m}$ rovnoběžně s kladným směrem osy x. Její rychlost $\boldsymbol{v}$ je konstantní a má velikost $v = 3{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Částice B vyletí z počátku soustavy souřadnic s nulovou počáteční rychlostí právě v okamžiku, kdy částice A prochází osou y (obr. 4.28). Částice B se pohybuje



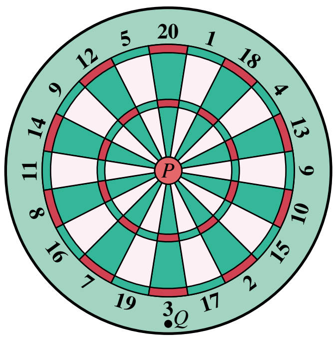
Obr. 4.28 Úloha 17

s konstantním zrychlením $\boldsymbol{a}$ o velikosti $a = 0{,}40\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Jak je třeba volit úhel θ mezi zrychlením $\boldsymbol{a}$ částice B a kladným směrem osy y, aby se částice srazily? (Jestliže při řešení úlohy dospějete k rovnici čtvrtého stupně pro neznámou t, převeďte ji substitucí $u = t^2$ na kvadratickou rovnici s neznámou u.)

ODST. 4.6 Šikmý vrh: matematický popis

Při řešení následujících úloh zanedbáme odpor prostředí, i když to v některých případech nebude opodstatněné. Bez tohoto zjednodušení by totiž výpočty nebyly schůdné.

18C. Hráč hodil šipku vodorovnou rychlostí $10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Mířil přitom přesně na střed terče P (obr. 4.29). Za 0,19 s zasáhla šipka bod Q na okraji terče. (a) Určete vzdálenost PQ a (b) vzdálenost hráče od terče.



Obr. 4.29 Cvičení 18

19C. Střelec míří na terč umístěný ve vzdálenosti 30,5 m od ústí hlavně. V okamžiku výstřelu je hlaveň vodorovná a směřuje přímo do středu terče. Kulka zasáhne terč 1,9 cm pod jeho středem. (a) Určete dobu letu kulky a (b) její rychlost bezprostředně po výstřelu.

20C. Pohyb všech hmotných objektů v blízkosti povrchu Země je ovlivněn tíhovým zrychlením. Týká se to i protonů, elektronů a ostatních hmotných částic. Uvažujme elektron, který opustí elektronovou trysku s vodorovnou rychlostí o velikosti $v = 3{,}0 \cdot 10^6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Určete jeho pokles ve svislém směru po průletu vodorovnou evakuovanou trubicí délky 1,0 m. (b) Jak se změní tento výsledek při vyšší počáteční rychlosti elektronu?

21C. Elektronový svazek v katodové trubici opouští elektronovou trysku rychlostí o velikosti $1{,}0 \cdot 10^9\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$ a vstoupí do oblasti mezi dvěma vodorovnými vychylovacími deskami. Desky jsou čtvercové a jejich strany měří 2 cm. Elektrostatické pole mezi nimi uděluje elektronům zrychlení o velikosti $1{,}0 \cdot 10^{17}\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-2}}$, které míří svisle dolů. Určete (a) dobu průletu elektronu vychylovací soustavou, (b) svislou složku jeho posunutí v tomto časovém intervalu (nenarazí elektron do některé z desek?) a (c) jeho rychlost v okamžiku, kdy opustí prostor mezi deskami (výsledek zapište pomocí jednotkových vektorů).

22C. Míč se skutálel z vodorovné desky stolu vysokého 1,2 m a dopadl na podlahu ve vodorovné vzdálenosti 1,5 m od hrany stolu. (a) Jak dlouho míč letěl? (b) S jakou rychlostí opustil desku stolu?

23C. Při zkušební střelbě z pistole stojí střelec na ocelové konstrukci ve výšce 45,0 m nad vodorovným povrchem Země. Střela opustí hlaveň vodorovnou rychlostí o velikosti $250\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Za jak dlouho a (b) v jaké vzdálenosti od paty konstrukce dopadne střela na zem? (c) Jaká je v tom okamžiku svislá složka její rychlosti?

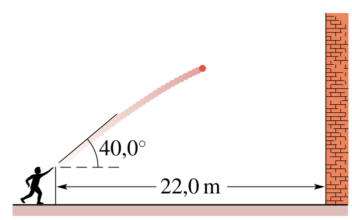
24C. Nadhazovač vyhodí baseballový míč vodorovnou rychlostí o velikosti 160 km/h. Pálkař stojí ve vzdálenosti 20 m. (a) Za jak dlouho urazí míč (a) první, resp. druhou polovinu této (vodorovné) vzdálenosti? (b) Určete svislou složku posunutí míče po průletu prvním, resp. (c) druhým z obou úseků. (d) Jak to, že nejsou výsledky částí (b) a (c) shodné? (Vliv odporu prostředí zanedbejte.)

25C. Střela je vystřelena počáteční rychlostí $30\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 60°. Určete velikost a směr její rychlosti po uplynutí doby (a) 2,0 s a (b) 5,0 s.

26C. Kámen je vržen počáteční rychlostí $20{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 40,0°. Určete vodorovnou i svislou složku jeho posunutí po uplynutí doby (a) 1,10 s, (b) 1,80 s, (c) 5,00 s od počátku pohybu.

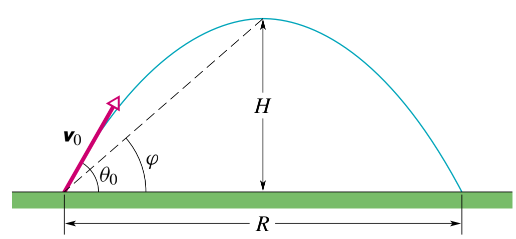
27C. Kdosi hodil míč ze skalního útesu počáteční rychlostí o velikosti $15{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ pod elevačním úhlem $-20{,}0°$ (pozor na znaménko). Určete (a) vodorovnou i (b) svislou složku jeho posunutí po 2,30 sekundách letu.

28C. Chlapec chytá míč po odrazech od zdi vzdálené 22,0 m. Jeho spoluhráč vyhodí míč rychlostí $25{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 40,0° (obr. 4.30). (a) Za jak dlouho a (b) jak vysoko nad úrovní místa, z něhož byl vyhozen, narazí míč do zdi? (c) Určete vodorovnou a svislou složku rychlosti míče v okamžiku nárazu. (d) Zjistěte, zda míč projde ještě před nárazem vrcholem své trajektorie.



Obr. 4.30 Cvičení 28

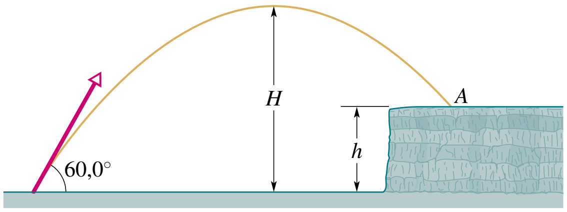
29C. (a) Dokažte, že poměr maximální výšky H a doletu R náboje vystřeleného pod elevačním úhlem θ_0 je dán vztahem $H/R = \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}\,\theta_0$ (obr. 4.31). (b) Lze zvolit úhel θ_0 tak, aby platilo $H = R$?



Obr. 4.31 Cvičení 29 a 30

30C. Střela vyletí z místa na zemském povrchu pod elevačním úhlem θ_0. (a) Ukažte, že zorný úhel φ, pod kterým je z místa výstřelu vidět vrchol její trajektorie, je $\varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\theta_0$ (obr. 4.31). (b) Vypočtěte hodnotu φ pro $\theta_0 = 45°$.

31C. Kluci házejí kameny na skalní vyvýšeninu o výšce h. Počáteční rychlost kamene má velikost 42,0 m·s^{-1} a elevační úhel je 60,0° (obr. 4.32). Kámen dopadne na vyvýšeninu po 5,50 s letu. Určete (a) výšku h, (b) velikost rychlosti dopadu, (c) výšku vrcholu trajektorie nad zemským povrchem.



Obr. 4.32 Cvičení 31

32Ú. Velikost počáteční rychlosti střely je rovna pětinásobku její hodnoty ve vrcholu trajektorie. Určete elevační úhel výstřelu.

33Ú. (a) Určete velikost rychlosti záchranného vaku z př. 4.6 při jeho dopadu na vodní hladinu. (b) Vypočtěte úhel θ zakreslený v obr. 4.14.

34Ú. Celých 23 let odolával světový rekord Boba Beamona ve skoku do dálky. Teprve na atletickém mistrovství světa v Tokiu v roce 1991 se podařilo Miku Powellovi překonat jej o plných 5 cm skokem 8,95 m (obr. 4.33). Předpokládejte, že odrazová rychlost při rekordním skoku byla 9,5 m·s^{-1} (přibližně rychlost běhu sprintera). Tíhové zrychlení v Tokiu má velikost 9,80 m·s^{-2}. Určete největší možný dolet skokana v idealizovaných podmínkách, tj. bez odporu prostředí.

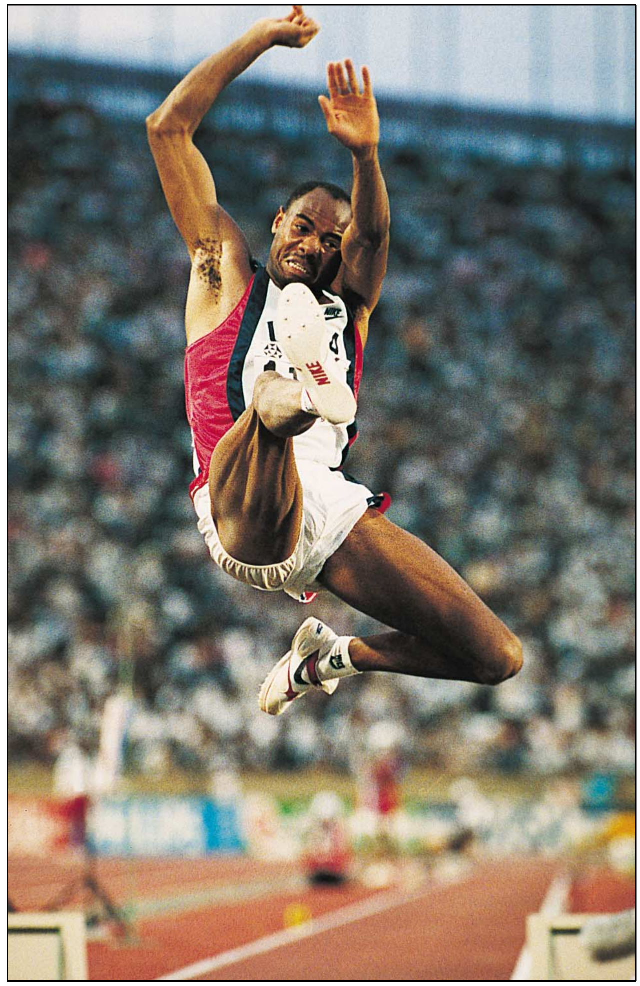
35Ú. Při sportovní střelbě na cíl vzdálený 46 m zvolil závodník zbraň, jejíž střely mají počáteční rychlost 460 m·s^{-1}. Jak vysoko nad cíl musí být hlaveň zbraně namířena v okamžiku výstřelu, aby se podařilo cíl zasáhnout?

36Ú. Ukažte, že největší možná výška vrcholu trajektorie střely nad vodorovným povrchem je $y_{max} = \frac{1}{2}(v_0 \sin\theta_0)^2/g$.

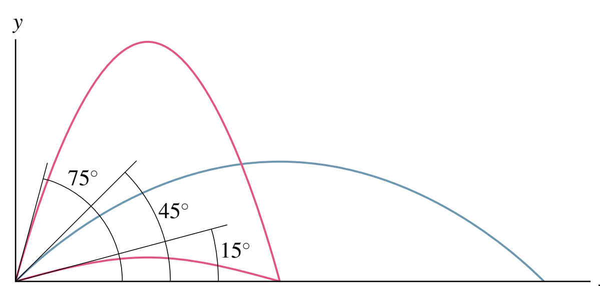
37Ú. V laboratoři prováděli speciální měření s cílem zjistit rychlost fotbalového míče při prudkém výkopu. Letící míč měl ve výšce 9,1 m rychlost $\boldsymbol{v} = 7{,}6\boldsymbol{i} + 6{,}1\boldsymbol{j}$. (Údaje jsou v metrech za sekundu, směr vektoru $\boldsymbol{i}$ je vodorovný a směr vektoru $\boldsymbol{j}$ svislý). (a) Do jaké největší výšky míč vystoupil? (b) Jaký byl jeho dolet? (c) Určete rychlost míče při výkopu a (d) těsně před dopadem na zem (velikost a směr).

38Ú. V detektivce objevila policie tělo pohřešovaného pod otevřeným oknem, ve vzdálenosti 4,6 m od domu. Okno je ve výšce 24 m nad zemí. Inspektor má podezření, že příčinou smrti nebyla nehoda. Odhadněte, zda může mít pravdu. Odhad zdůvodněte.

39Ú. V Galileiově díle „Rozpravy o dvou nových vědách“ se dočteme: „… pro dva různé elevační úhly, lišící se od úhlu 45° o stejnou hodnotu, je délka letu stejná… “ Dokažte pravdivost tohoto tvrzení (obr. 4.34).



Obr. 4.33 Úloha 34. Mike Powell při rekordním výkonu

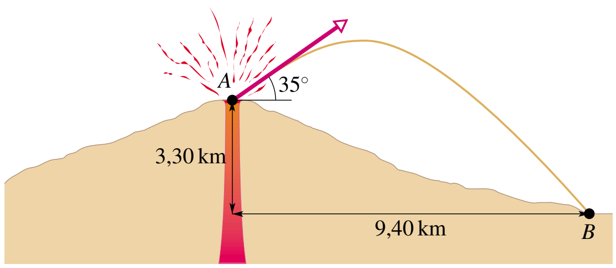


Obr. 4.34 Úloha 39

40Ú. Dolet při šikmém vrhu tělesa nezávisí jen na počáteční rychlosti, určené velikostí v_0 a elevačním úhlem θ_0, ale i na hodnotě tíhového zrychlení g. Ta je ovšem na různých místech zemského povrchu různá. Na olympijských hrách v Berlíně ($g = 9{,}812\,8$ m·s^{-2}) v roce 1936 překonal Jesse Owens dosavadní světový rekord ve skoku do dálky výkonem 8,09 m. Jakého výkonu by dosáhl v Melbourne v roce 1956 ($g = 9{,}799\,9$ m·s^{-2}) při stejných hodnotách v_0 a θ_0?

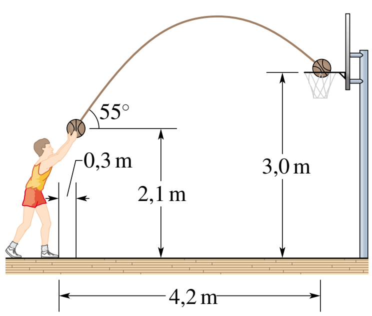
41Ú. Při baseballovém utkání chce hráč z třetí mety dohodit míč na první metu vzdálenou 38,7 m. Největší rychlost, kterou dokáže míč vyhodit, má velikost 137 km/h. (a) Jak daleko od první mety míč dopadne, vyhodí-li jej hráč vodorovným směrem ve výšce 0,9 m nad zemí? (b) Pod jakým elevačním úhlem musí hráč míč vyhodit, aby jej spoluhráč na první metě zachytil ve výšce 0,9 m nad zemí? (c) Jak dlouho v tomto případě míč poletí?

42Ú. Při sopečné erupci bývají z kráteru vymršťovány velké balvany. Na obr. 4.35 je znázorněn řez japonskou sopkou Fuji. (a) Jak velkou počáteční rychlost by musely balvany mít, aby při elevačním úhlu 35° dopadly do bodu B na úpatí sopky? (b) Jaká by byla doba jejich letu? V obou případech zanedbáváme vliv odporu prostředí. (c) Jak by se změnil výsledek části (a), kdybychom odpor prostředí vzali v úvahu?



Obr. 4.35 Úloha 42

43Ú. Jak velkou počáteční rychlostí musí basketbalista na obr. 4.36 vyhodit míč pod elevačním úhlem 55°, aby dopadl přímo do koše?

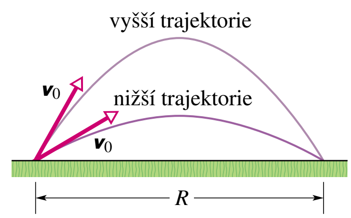


Obr. 4.36 Úloha 43

44Ú. Po 4,5 sekundách letu dopadl fotbalový míč do vodorovné vzdálenosti 46 m od místa výkopu. Jaká byla jeho počáteční rychlost (velikost a směr), jestliže mu ji hráč udělil při výskoku, ve výšce 1,5 m nad zemí?

45Ú. Golfista odpálil míček počáteční rychlostí o velikosti $43\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 30°. Míček doletěl do vzdálenosti 180 m. Předpokládejte, že golfové hřiště je v tomto místě vodorovné. (a) Jak vysoko míček vyletěl? (b) Jak velká byla jeho rychlost těsně před dopadem?

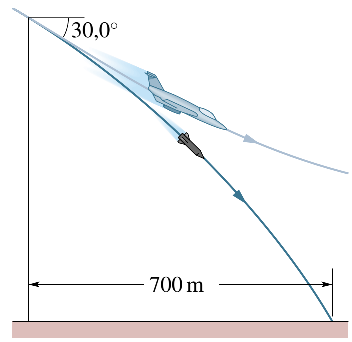
46Ú. Projektil byl vystřelen ze země počáteční rychlostí o velikosti $v_0 = 30{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a zasáhl cíl ležící na zemi ve vzdálenosti 20,0 m (obr. 4.37). Určete obě možné hodnoty elevačního úhlu.



Obr. 4.37 Úloha 46

47Ú. Hráč baseballu dokáže dohodit míč do vzdálenosti 60 m. Určete největší možnou výšku takového hodu.

48Ú. Letadlo sestupuje pod úhlem 30° rychlostí o velikosti 290 km/h. Pilot uvolní „radarovou návnadu“ (obr. 4.38), která dopadne na zem ve vodorovné vzdálenosti 700 m od místa uvolnění. (a) V jaké výšce pilot návnadu uvolnil? (b) Jak dlouho trval její pád?



Obr. 4.38 Úloha 48

49Ú. Hráč vykopne míč rychlostí $20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 45°. V tomtéž okamžiku vyběhne jeho spoluhráč, vzdálený o 55 m, míči naproti. Jakou průměrnou rychlostí musí běžet, aby zachytil míč těsně před jeho dopadem na zem? Odpor prostředí zanedbejte.

50Ú. Míč se kutálí po plošině nad schodištěm rychlostí 1,5 m/s a směřuje přímo ke schodišti. Šířka i výška každého schodu mají stejnou hodnotu 20 cm. Na který schod shora míč poprvé doskočí?

51Ú. Při sestupu svírá rychlost letadla se svislým směrem úhel 53°. Ve výšce 730 m uvolní pilot bombu, která dopadne na zem po 5,00 s letu. (a) Jaká je velikost rychlosti letadla? (b) Do jaké vodorovné vzdálenosti od místa uvolnění bomba dopadne? (c) Určete vodorovnou a svislou složku její rychlosti těsně před dopadem.

52Ú. Míč je vržen vodorovným směrem z místa ve výšce 20 m nad zemí. Na zem dopadne trojnásobnou rychlostí. Jaká byla jeho počáteční rychlost?

53Ú. (a) Při podání odpálil tenista míček vodorovně rychlostí o velikosti $23{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. K úderu došlo ve výšce 2,37 m nad povrchem kurtu. V jaké výšce přeletí míček nad horním okrajem sítě, je-li síť ve vzdálenosti 12 m a je vysoká 0,90 m? (b) Při dalším podání má míček stejně velkou rychlost, úder však směřuje 5,00° pod vodorovnou rovinu. Zdaří se podání?

54Ú. V příkladu 4.8 jsme zjistili, že největší dolet střely vypálené z přístavní pevnosti je 690 m. O jakou vzdálenost by musela pirátská loď ještě ustoupit, kdyby bylo dělo umístěno ve výšce 30 m nad hladinou moře?

55Ú. Pálkař odehraje míček ve výšce 1,2 m nad zemí pod elevačním úhlem 45°. Dolet míčku je 107 m. Pravidla hry zaručují zisk bodu, přeletí-li míček plot vysoký 7,3 m a vzdálený 98 m. Zjistěte, zda hráč získal bod a v kladném případě určete, jak vysoko nad plotem míček přeletěl.

56Ú★. Fotbalista dokáže odehrát míč rychlostí 25 m·s^{-1}. Určete interval, v němž musí ležet elevační úhel, aby hráč skóroval. Branka je ve vzdálenosti 50 m a její břevno je 3,44 m nad zemí. (Využijte vztahu $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, vyjádřete $1/\cos^2\theta$ pomocí $\mathrm{tg}^2\,\theta$ a řešte získanou kvadratickou rovnici pro $\mathrm{tg}\,\theta$.)

ODST. 4.7 Rovnoměrný pohyb po kružnici

57C. Jeden z modelů atomu vodíku je založen na představě elektronu obíhajícího kolem protonu po kruhové dráze o průměru $5{,}28\cdot10^{-11}$ m rychlostí o velikosti $2{,}18\cdot10^{6}$ m·s^{-1}. Určete (a) zrychlení elektronu a (b) periodu jeho pohybu.

58C. Určete (a) velikost, (b) směr zrychlení sprintera při běhu zatáčkou o poloměru 25 m. Velikost rychlosti běžce je 10 m·s^{-1}.

59C. Nabitá částice se za určitých podmínek pohybuje v magnetickém poli po kruhové dráze. Předpokládejme, že elektron, pro který jsme takové podmínky zajistili, se pohybuje po kružnici o poloměru 15 cm s dostředivým zrychlením o velikosti o $3{,}0\cdot10^{14}$ m·s^{-2}. (a) Určete jeho rychlost a (b) periodu jeho pohybu.

60C. Sprinter běží rychlostí 9,2 m·s^{-1} po kruhové dráze. Dostředivé zrychlení má velikost 3,8 m·s^{-2}. (a) Jaký je poloměr dráhy? (b) Jaká je perioda pohybu?

61C. Umělá družice Země obíhá po kruhové dráze ve výšce 640 km nad zemským povrchem. Perioda jejího pohybu je 98,0 min. (a) Jaká je její rychlost? (b) Jaké je gravitační zrychlení v uvedené výšce?

62C. Kosmická sonda odolá mechanickým pnutím při zrychlení nejvýše $20g$. (a) Jaký je nejmenší přípustný poloměr její trajektorie, je-li velikost její rychlosti rovna jedné desetině rychlosti světla? (b) Za jakou dobu opíše polohový vektor takové sondy oblouk příslušný úhlu 90°?

63C. Vrtule ventilátoru se otáčí 1 200krát za minutu. Sledujme bod na konci listu vrtule ve vzdálenosti 0,15 m od osy otáčení. (a) Jakou dráhu opíše tento bod při jedné otáčce vrtule? (b) Jaká je velikost jeho rychlosti? (c) S jakým zrychlením se pohybuje? (d) Jaká je perioda jeho pohybu?

64C. Francouzský expresní vlak TGV (Train à Grande Vitesse, česky „rychlovlak") má stanovenou průměrnou rychlost 216 km/h. (a) Nejvyšší přípustná velikost zrychlení při průjezdu zatáčkou je pro pohodlí cestujících dána hodnotou $0{,}050g$. Jaký je nejmenší možný poloměr zatáčky, kterou může vlak projíždět uvedenou rychlostí? (b) Musí vlak v zatáčce o poloměru 1,00 km zpomalit? Na jakou rychlost?

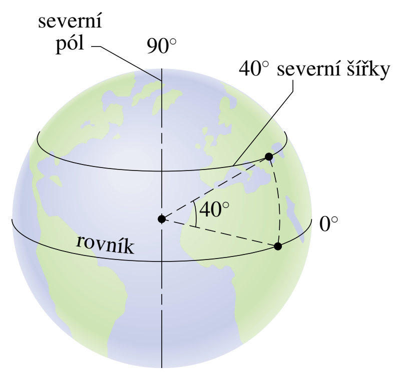
65C. Po výbuchu *supernovy* se může její jádro smrštit tak, že se stane *neutronovou hvězdou* s poloměrem přibližně 20 km. Předpokládejme, že neutronová hvězda vykoná jednu otáčku za jednu sekundu. (a) Jakou rychlostí se pohybuje bod na jejím rovníku? (b) Vyjádřete dostředivé zrychlení tohoto bodu (v m·s^{-2} a v násobcích g). (c) Jak se změní výsledky částí (a) a (b) při vyšší rychlosti rotace?

66C. Kosmonaut se otáčí na centrifuze s poloměrem 5,0 m ve vodorovné rovině. (a) Jakou rychlostí se pohybuje, má-li dostředivé zrychlení velikost $7{,}0g$? (b) Kolikrát za minutu se centrifuga otočí? (c) Jaká je perioda jejího pohybu?

67Ú. (a) Jaké je dostředivé zrychlení na zemském rovníku způsobené rotací Země? (b) Jaká by musela být perioda rotace Země, aby jeho velikost měla hodnotu 9,8 m·s^{-2}?

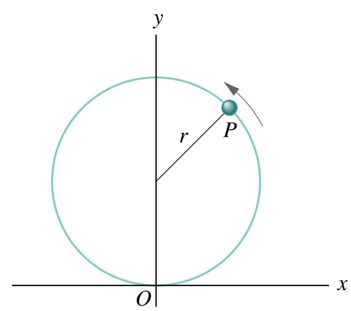
68Ú. Ruské kolo má poloměr 15 m a otočí se pětkrát za minutu. (a) Jaká je perioda pohybu kola? (b) Určete dostředivé zrychlení v nejvyšším a (c) v nejnižším bodě trajektorie.

69Ú. Vypočtěte zrychlení člověka na 40° severní šířky způsobené rotací Země (obr. 4.39).



Obr. 4.39 Úloha 69

70Ú. Částice se pohybuje konstantní rychlostí po kruhové dráze o poloměru $r = 3{,}00$ m (obr. 4.40) a vykoná jednu otáčku za 20,0 s. V čase $t = 0$ právě prochází počátkem O. Určete velikosti a směry následujících vektorů. (a) Polohové vektory částice vzhledem k počátku v okamžicích $t = 5{,}00$ s, $t = 7{,}50$ s a $t = 10{,}00$ s. (b) Vektor jejího posunutí v časovém intervalu od páté do desáté sekundy. (c) Vektor průměrné rychlosti v tomto



Obr. 4.40 Úloha 70

časovém intervalu. (d) Okamžitou rychlost a (e) zrychlení na počátku a konci tohoto intervalu.

71Ú. Chlapec točí kamenem uvázaným na provazu dlouhém 1,5 m. Kámen rovnoměrně obíhá ve vodorovné rovině, ve výšce 2,0 m nad zemí. Náhle se provaz přetrhne a kámen dopadne 10 m od chlapce. Jaké bylo dostředivé zrychlení kamene při rotaci?

ODST. 4.8 Vzájemný pohyb po přímce

72C. Loď pluje proti proudu řeky rychlostí 14 km/h vzhledem k vodnímu proudu. Voda v řece teče rychlostí 9 km/h. (a) Jakou rychlostí pluje loď vzhledem k břehům řeky? (b) Chlapec na lodi jde po palubě od přídě k zádi rychlostí 6 km/h. Jaká je jeho rychlost vzhledem k břehům?

73C. Muž vystoupí po nehybném eskalátoru dlouhém 15 m za čas 90 s. Jedoucí eskalátor překoná tutéž vzdálenost za 60 s. Za jakou dobu vystoupí člověk po pohybujícím se eskalátoru? Je výsledek závislý na délce eskalátoru?

74C. Trasa mezikontinentálního letu má délku 4 350 km a směřuje východozápadním směrem. Podle letového řádu trvá cesta z východu na západ o 50 minut déle než cesta zpáteční. Rychlost letadla je 960 km/h a vítr vane západním nebo východním směrem. S jakou rychlostí větru se počítalo při sestavování letového řádu?

75C. Kameraman stojí na otevřené plošině dodávky a filmuje běžícího geparda. Dodávka jede rychlostí 65 km/h západním směrem, gepard běží ve stejném směru a je o 48 km/h rychlejší. Náhle se gepard zastaví, otočí se a běží zpět na východ rychlostí 97 km/h vzhledem k zemi. Celý obrat trvá 2,0 s. Určete průměrné zrychlení zvířete vzhledem ke kameramanovi i vzhledem k zemi.

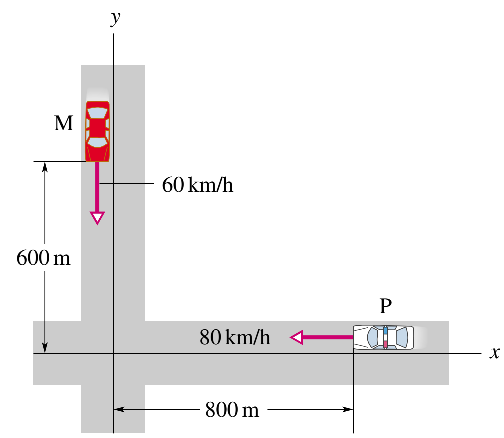
76C. Na letišti v Ženevě usnadňují pohyb cestujících dlouhými koridory „pojízdné chodníky“. Petr chodník nepoužil a prošel koridorem za 150 s. Pavel, stojící v klidu na jedoucím chodníku, urazil tutéž vzdálenost za 70 s. Marie šla po chodníku stejnou rychlostí jako Petr. Za jak dlouho prošla Marie koridorem?

ODST. 4.9 Vzájemný pohyb v rovině

77C. Pravidla ragby (obr. 4.41) zakazují tzv. „dopředné“ přihrávky. (Průmět rychlosti míče do podélného směru hřiště nesmí směřovat k brance soupeře.) Předpokládejme, že hráč běží k brance protihráčů rychlostí o velikosti 4,0 m·s^{-1}, rovnoběžně s podélným okrajem hřiště. V běhu přihrává svému spoluhráči a odhazuje míč (vzhledem k sobě) rychlostí o velikosti 6,0 m·s^{-1}. Pod jakým nejmenším úhlem vzhledem k podélnému rozměru hřiště může míč odhodit, aby neporušil pravidla?

78C. Obr. 4.42 zachycuje dopravní situaci na křižovatce dvou silnic. Policejní automobil P, vzdálený 800 m od křižovatky, jede rychlostí o velikosti 80 km/h. Vozidlo M je od křižovatky vzdáleno 600 m a na jeho tachometru je údaj 60 km/h. (a) Určete rychlost vozidla M vzhledem k policejnímu autu. Výsledek zapište pomocí jednotkových vektorů. (b) Jaký úhel svírá rychlost vypočtená v části (a) se spojnicí vozidel? (c) Předpokládejte, že automobily pokračují v jízdě nezměněnou rychlostí. Mění se odpovědi částí (a) a (b), když se vozy přibližují ke křižovatce?

Obr. 4.41 Cvičení 77

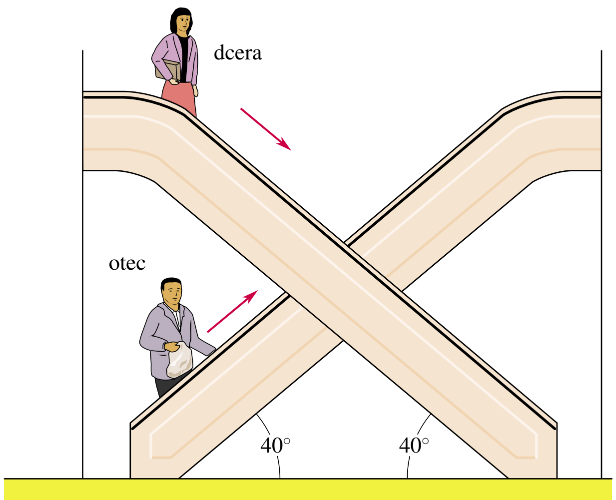


Obr. 4.42 Cvičení 78

79C. Sníh padá svisle rychlostí o velikosti 8,0 m·s^{-1}. Pod jakým úhlem od svislého směru vidí padat sníh řidič automobilu, který jede po rovné silnici rychlostí o velikosti 50 km/h?

80C. Eskalátory v obchodním domě jsou konstruovány tak, že svírají s vodorovnou rovinou úhel 40° a pohybují se rychlostí o velikosti 0,75 m·s^{-1}. Muž stojící na stoupajícím eskalátoru uvidí svou dceru, která již nakoupila a jede směrem dolů (obr. 4.43). Určete rychlost otce vzhledem k dceři. Výsledek zapište pomocí jednotkových vektorů.

81Ú. Vrtulník letí ve výšce 9,5 m nad plochým terénem stálou rychlostí o velikosti 6,2 m·s^{-1}. Pilot vyhodí balík ve vodorovném směru proti směru letu. Jeho rychlost vzhledem k vrtulníku má velikost 12 m·s^{-1}. (a) Jaká je jeho počáteční rychlost vzhledem k zemi? (b) Určete vodorovnou vzdálenost balíku a letadla v okamžiku, kdy balík dopadne na zem. (c) Pod jakým úhlem dopadne balík na zem vzhledem k pozorovateli na zemi?



Obr. 4.43 Cvičení 80

82Ú. Vlak jede na jih rychlostí o velikosti $30\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (vzhledem k zemi). Prší a vítr žene déšť jižním směrem. Trajektorie dešťových kapek vzhledem k zemi svírají se svislým směrem úhel 70°. Cestujícímu ve vlaku se však zdá, že kapky padají svisle. Určete velikost rychlosti kapek vzhledem k zemi.

83Ú. Malé letadlo může vzhledem k okolnímu vzduchu dosáhnout rychlosti o velikosti 500 km/h. Pilot má dopravit pasažéry do místa vzdáleného 800 km přesně na sever. Zjistí však, že má-li letět přímo k severu, musí odklonit kurs o 20,0° na východ. Let trvá 2,00 h. Určete rychlost větru (směr i velikost).

84Ú. Dvě lodi A a B vyplouvají z přístavu ve stejném okamžiku. Loď A pluje přesně na severozápad rychlostí 24 uzlů a loď B míří jihozápadně, pod úhlem 40° vzhledem k místnímu poledníku, rychlostí 28 uzlů (1 uzel = 1 námořní míle za hodinu, viz dod. D). (a) Určete velikost a směr rychlosti lodi A vzhledem k lodi B. (b) Za jak dlouho bude mezi plavidly vzdálenost 160 námořních mil? (c) Určete směr pohybu lodi A vzhledem k lodi B v tomto okamžiku.

85Ú. Státní policie v New Hampshire provádí měření rychlosti vozidel z letadla. Dálnice vede ve sledované oblasti severojižním směrem. Letadlo se pohybuje vzhledem k okolnímu vzduchu rychlostí o velikosti 217 km/h a letí neustále podél dálnice, přímo na sever. Pozemní služba hlásí, že vítr vane rychlostí 113 km/h, zapomene však udat jeho směr. Pilot zjistí zvláštní věc: bez ohledu na vítr urazil podél dálnice za dobu 1,00 h vzdálenost 217 km. Rychlost letadla vzhledem k zemi je tedy stejná jako za bezvětří. (a) Kterým směrem vítr vane? (b) Kam míří příď letadla (jaký úhel svírá podélná osa letadla s dálnicí)?

86Ú. Nákladní vagon s dřevěnými stěnami jede po přímém úseku železniční trati rychlostí o velikosti v_1. Ostřelovač pálí na vagon z velkorážné pušky. Střela, jejíž počáteční rychlost má velikost v_2, prorazí obě boční stěny vagonu. Spojnice otvorů je kolmá ke směru jízdy. Pod jakým úhlem vzhledem ke kolejím ostřelovač mířil? Předpokládejte, že směr letu střely se při průchodu stěnou nezmění, velikost její rychlosti se však sníží o 20 %. Pro číselný výpočet použijte hodnoty $v_1 = 85\,\mathrm{km/h}$, $v_2 = 650\,\mathrm{m/s}$. (Jak to, že nepotřebujeme znát šířku vagonu?)

87Ú. Skifařka dokáže v klidné vodě pádlovat rychlostí 6,0 km/h. (a) Kterým směrem musí namířit příď lodi, aby přejela kolmo k jejím břehům, je-li rychlost vodního proudu 3,0 km/h? (b) Za jak dlouho přejede řeku širokou 6,0 km? (c) Při další jízdě vesluje nejprve 3,0 km *po* proudu řeky (vzdálenost měřena vzhledem ke břehům) a poté se vrátí do výchozího místa. Jak dlouho trvá tato jízda? (d) Jak se změní výsledek části (c), pojede-li skifařka nejprve 3,0 km *proti* proudu a zpět se vrací po proudu? (e) V jakém směru by musela veslovat (vzhledem ke břehům), kdyby chtěla přejet na protější břeh v nejkratším možném čase bez ohledu na místo přistání? Jak dlouho by to trvalo?

ODST. 4.10 Vzájemný pohyb při vysokých rychlostech

88C. Kosmická loď A směřuje ke středu naší galaxie. Posádka zaregistruje záblesk světla, který se šíří rychlostí c ve směru pohybu lodi. Záblesk je zaznamenán i druhou kosmickou lodí B, která letí vzhledem k A rychlostí o velikosti $0{,}98c$. Jakou rychlost světelného pulzu naměří pozorovatel na lodi B, letí-li jeho loď (a) ve stejném směru jako loď A, (b) v opačném směru než loď A?

89C. Elektron letí vzhledem k pozorovateli B rychlostí $0{,}42c$. Pozorovatel B se pohybuje rychlostí $0{,}63c$ vzhledem k pozorovateli A, stejným směrem jako elektron. Jakou rychlost elektronu naměří pozorovatel A?

90Ú. Posádka kosmické lodi A, která letí k hvězdě Betelgeuze, zaznamená svazek protonů, který míjí loď ve stejném směru a rovněž míří k této hvězdě. Rychlost protonů vzhledem k lodi je $0{,}980\,0c$. Rychlost protonů ve svazku měří i posádka lodi B, cestující po téže přímce jako loď A, a získá výsledek $-0{,}980\,0c$. Určete vzájemnou rychlost lodí.

91Ú. Galaxie Alfa se od Země vzdaluje rychlostí o velikosti $0{,}35c$. Galaxie Beta, která je právě na opačné straně, se vzdaluje rychlostí stejně velkou. Pozorovatel v galaxii Alfa měří rychlost, jíž se od něj vzdaluje (a) Země, (b) Galaxie Beta. Dokážete předpovědět výsledky jeho měření?

PRO POČÍTAČ

92Ú. Jestliže při šikmém vrhu tělesa neleží místo dopadu na stejné vodorovné úrovni jako místo vrhu, není délka vrhu (vodorovná vzdálenost místa dopadu od místa vrhu) největší při elevačním úhlu 45°. Předpokládejme, že koulař hodil kouli z místa, které je ve výšce h nad úrovní hřiště. Velikost počáteční rychlosti koule je v_0, elevační úhel označme θ. Ukažte, že délka vrhu je dána vztahem

$$d = \frac{v_0 \cos\theta}{g}\left(v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gh}\right).$$

(b) Sestavte program pro výpočet vzdálenosti d v závislosti na úhlu θ pro zadané hodnoty v_0 a h. (c) S přesností na půl stupně určete elevační úhel, při němž bude délka vrhu největší pro hodnoty $v_0 = 9{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $h = 2{,}1\,\mathrm{m}$. Vypočtěte i tuto největší délku. (d) Závisí výsledky předchozí úlohy na velikosti počáteční rychlosti? Proveďte výpočet ještě pro hodnoty $v_0 = 5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $v_0 = 15\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (Větší z těchto hodnot vysoce přesahuje reálné možnosti i těch nejlepších sportovců.)

93Ú. V této úloze budeme uvažovat o tom, jak se s časem mění vzdálenost šikmo vrženého tělesa od místa vrhu. Nemáme nyní na mysli pouze vodorovnou složku polohového vektoru tělesa vzhledem k místu vrhu, jako tomu bylo v předchozích úlohách, nýbrž jeho *velikost*. Bezprostředně po vyhození tělesa tato veličina s časem vždy nejprve roste. V některých případech však může od jistého okamžiku začít klesat a teprve po uplynutí další doby se její průběh opět změní v rostoucí funkci času. Konkrétní situace je závislá na volbě elevačního úhlu. Sestavte program, který pro danou hodnotu velikosti počáteční rychlosti a různé elevační úhly provede opakovaný výpočet okamžité vzdálenosti tělesa od místa vrhu v časovém intervalu od $t = 0$ (okamžik vrhu) až do okamžiku několik sekund po průletu tělesa počáteční úrovní s časovým krokem Δt. Pro konkrétní výpočet zvolte $v_0 = 100\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $\Delta t = 0{,}5\,\mathrm{s}$, elevační úhly měňte od 5° do 90° s krokem 5°. Pro každý elevační úhel odhadněte časové intervaly, ve kterých se těleso přibližuje a vzdaluje od místa vrhu. (Podrobněji viz James S. Walker: „Projectiles, Are They Comming or Going?“, *The Physics Teacher*, May 1995.)

94Ú. Pálkař odehraje baseballový míč ve výšce 1,00 m nad zemí. Udělí mu při tom počáteční rychlost o velikosti v_0, která svírá s vodorovnou rovinou úhel θ. Ve vzdálenosti 110 m od postavení pálkaře je plot, vysoký 2,40 m. (a) Pro $v_0 = 35{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ určete interval, v němž musí ležet elevační úhel θ, má-li míč plot přeletět. Dolní a horní mez tohoto intervalu jsou určeny podmínkou těsného přeletu míče nad plotem. (*Tip*: Místo explicitního řešení parametrických rovnic trajektorie pro neznámou θ je možné určit hledané úhly grafickou metodou. V úloze je totiž zadána poloha bodu, kterým musí trajektorie míče projít, aby byly podmínky zadání ještě splněny. Z parametrických rovnic trajektorie lze získat dvě různé závislosti úhlu θ na okamžiku průletu míče tímto bodem. Zakreslete je do grafu a určete průsečík získaných křivek.) (b) Pro elevační úhel $\theta = 40°$ určete nejmenší hodnotu v_0, při níž míč ještě přeletí plot. (c) Aby míč přeletěl plot při pevně zvoleném elevačním úhlu, je třeba, aby velikost jeho počáteční rychlosti převyšovala určitou minimální hodnotu $v_0(\theta)$, závislou na tomto úhlu (viz část (b)). Určete nejmenší ze všech těchto mezních hodnot a najděte odpovídající úhel θ. (d) Řešte část (c) pro případ, že pálkař stojí ve vzdálenosti 96 m od zdi vysoké 12,2 m.

95Ú. Golfista vypálí míček směrem ke svislé zdi vzdálené 20,0 m. Snaží se při tom zasáhnout červený kruh o průměru 30,0 cm, namalovaný na zdi. Střed kruhu je 1,20 m nad zemí. Počáteční rychlost míčku má velikost $15{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, elevační úhel je 35,0°. (a) Za jak dlouho po úderu narazí míček na stěnu? (b) Zasáhne červený kruh? (c) Jak velkou rychlostí narazí? (d) Prošel míček před nárazem vrcholem své trajektorie?

96Ú. Cyklista je v jistém okamžiku 40,0 m východně od vlajkového stožáru umístěného v parku a jede na jih rychlostí $10{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Po 30,0 s je vzdálen od stožáru 40,0 m na sever a jede východním směrem rychlostí o velikosti $10{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete (a) posunutí, (b) průměrnou rychlost a (c) průměrné zrychlení za tento časový interval. (d) Vypočtěte rozdíl $\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_\mathrm{f} - \boldsymbol{v}_\mathrm{i})$, kde $\boldsymbol{v}_\mathrm{i}$ je rychlost cyklisty na počátku tohoto intervalu a $\boldsymbol{v}_\mathrm{f}$ je rychlost na jeho konci.

97Ú. V jistém okamžiku je polohový vektor motýla vzhledem k rohu zahradního jezírka roven $\boldsymbol{D}_\mathrm{i} = (2{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} + (3{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{j} + (1{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{k}$. Po 40,0 s je $\boldsymbol{D}_\mathrm{f} = (3{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} + (1{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{j} + (2{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{k}$. Určete (a) vektor posunutí (pomocí jednotkových vektorů), (b) velikost posunutí, (c) průměrnou rychlost a (d) průměrnou velikost rychlosti motýla v uvedeném časovém intervalu.