

24

Gaussův zákon elektrostatiky



Podívejte se na zářivou krásu blesků při bouřce nad Manhattanem. Každý blesk přitom přenese z mraků na zemský povrch přibližně 10^{20} elektronů. Je možné určit průměr blesku? Vzhledem k tomu, že se na blesk díváme ze vzdálenosti několika kilometrů, můžeme porovnat jeho rozměry např. s rozměry automobilu?

24.1 NOVÝ POHLED NA COULOMBŮV ZÁKON

Chcete-li nalézt těžiště brambory, můžete to provést buď experimentálně, nebo pomocí složitého číselného výpočtu trojného integrálu. Jestliže má však brambora tvar elipsoidu, můžete z její symetrie určit přesně těžiště i bez výpočtu. V tom je značná výhoda symetrie. Se symetrickými situacemi se setkáváme ve všech oborech fyziky. Je-li to možné, snažíme se vyjádřit fyzikální zákony v takovém tvaru, aby se výhody symetrie mohly plně projevit.

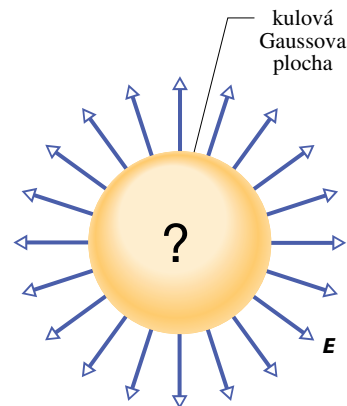
Coulombův zákon je hlavním zákonem elektrostatiky, ale nemá bohužel tvar, který by nám podstatně ulehčoval práci v situacích, které se vyznačují symetrií. Proto v této kapitole zavedeme jinou formulaci Coulombova zákona, kterou odvodil německý matematik a fyzik *Carl Friedrich Gauss* (1777–1855). Tento zákon, zvaný **Gaussův zákon elektrostatiky**, může být s výhodou použit v některých případech symetrie v rozložení nábojů. Pro elektrostatické problémy je přitom zcela ekvivalentní *Coulombovu zákonu*. Který z těchto zákonů zvolíme, závisí pouze na povaze zkoumaného problému.

U Gaussova zákona je důležitá volba myšlené uzavřené plochy, zvané **Gaussova plocha**. Ta může mít libovolný tvar, ale nejvýhodnější je takový, který vyjadřuje symetrii zkoumaného problému. Proto volíme za Gaussovou plochu nejčastěji povrch koule, válce či jiného symetrického útvaru. Musí to však být vždy plocha *uzavřená*.

Představme si, že jsme vytvořili Gaussovou plochu kolem jisté konfigurace nábojů. Potom můžeme použít Gaussův zákon elektrostatiky.

Gaussův zákon vyjadřuje vztah mezi intenzitou elektrického pole na (uzavřené) Gaussově ploše a celkovým nábojem, který se nachází uvnitř této plochy.

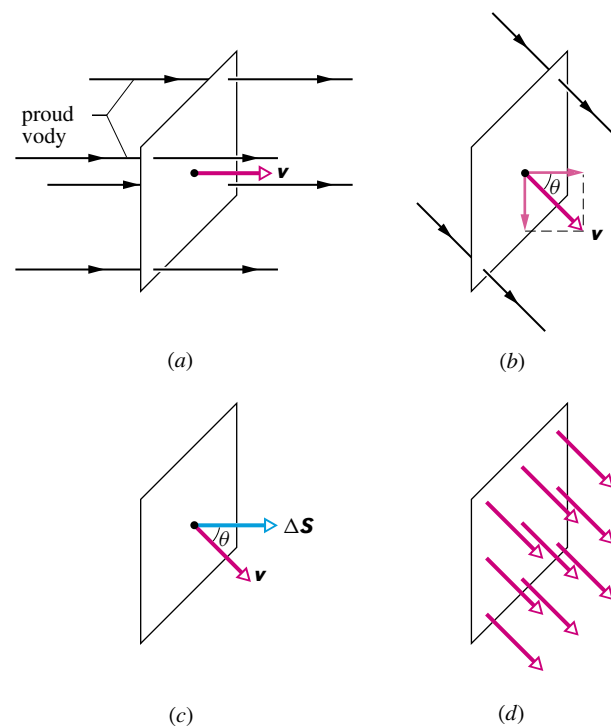
Na obr. 24.1 je znázorněna jednoduchá situace, kdy Gaussovou plochou je kulová plocha. Předpokládejme, že v každém bodě jejího povrchu existuje elektrické pole o intenzitě konstantní velikosti a směřující ven z koule. I bez znalosti Gaussova zákona můžeme usoudit, že uvnitř plochy musí existovat určitý (kladný) náboj. Jestliže *známe* Gaussův zákon, můžeme vypočítat, jak velký náboj se nachází uvnitř plochy. K výpočtu potřebujeme pouze vědět, „jak mnoho pole“ je na povrchu Gaussovy plochy. Toto „jak mnoho“ vyjadřujeme *tokem* elektrické intenzity danou plochou.



Obr. 24.1 Kulová Gaussova plocha. Mají-li vektory elektrické intenzity ve všech bodech povrchu stejnou velikost a míří-li ven z koule, je možné učinit závěr, že v objemu ohraničeném Gaussovou plochou se nachází kulově symetricky rozložený kladný náboj.

24.2 TOK

Předpokládejme podle obr. 24.2a, že proud vody o konstantní rychlosti \mathbf{v} prochází malou čtvercovou plochou



Obr. 24.2 (a) Homogenní proud vody pohybující se rychlostí \mathbf{v} kolmo k ploše čtverce o obsahu ΔS . (b) Vektor \mathbf{v} svírá s kolmicí k ploše čtverce úhel θ ; složka vektoru \mathbf{v} ve směru této kolmice je rovna $v \cos \theta$. (c) Vektor plochy $\Delta \mathbf{S}$ je kolmý k rovině čtverce a svírá s vektorem \mathbf{v} úhel θ . (d) Rychlostní pole v ploše čtverce.

o obsahu ΔS . Nechť $\Delta \Phi$ představuje *objemový tok* (objem za jednotku času) vody plochou. Jeho velikost závisí na úhlu, který svírá rychlost \mathbf{v} s rovinou plochy. Je-li \mathbf{v} kolmá k rovině, je $\Delta \Phi = v \Delta S$. Je-li vektor rychlosti \mathbf{v} rovnoběžný s plochou čtverce, pak jím neproudí žádná voda a $\Delta \Phi = 0$. Obecně $\Delta \Phi$ závisí na průmětu vektoru \mathbf{v} do kolmice k ploše čtverce (obr. 24.2b). Proto

$$\Delta \Phi = (v \cos \theta) \Delta S. \quad (24.1)$$

Dříve než budeme diskutovat tok, který se vyskytuje v elektrostatice, přepíšeme rov. (24.1) do vektorového tvaru. Uvažujme plochu $\Delta \mathcal{S}$ a pokládejme ji za rovinou (obr. 24.2c). Definujme vektor $\Delta \mathbf{S}$ tak, že je k rovině plochy kolmý a jeho velikost je rovna jejímu obsahu ΔS . Potom můžeme napsat rov. (24.1) jako skalární součin vektoru rychlosti \mathbf{v} proudu vody a vektoru plochy $\Delta \mathbf{S}$ čtverce

$$\Delta \Phi = v \Delta S \cos \theta = \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{S}, \quad (24.2)$$

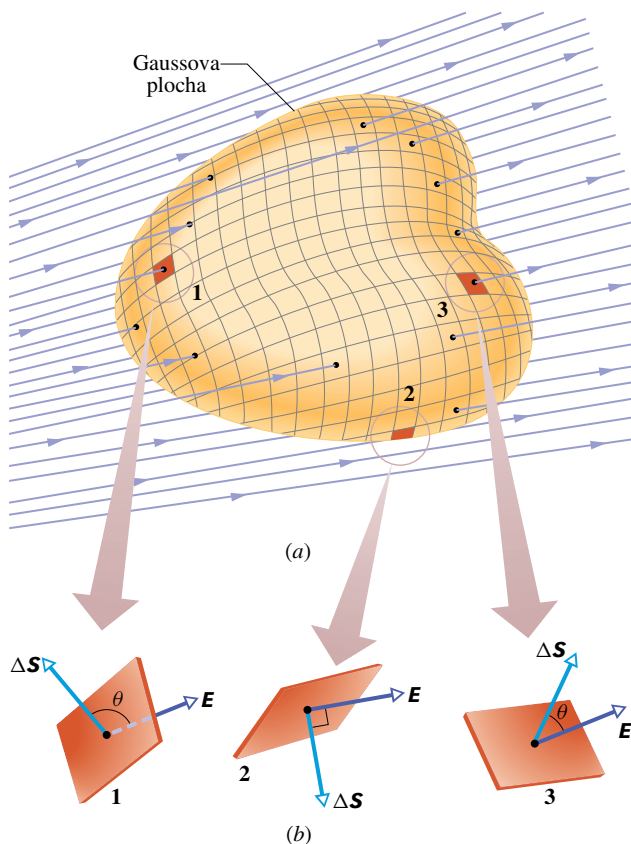
kde θ je úhel mezi \mathbf{v} a $\Delta \mathbf{S}$.

Slovo „tok“ má smysl, jestliže hovoříme např. o proudu vody plochou. Můžeme se však na rov. (24.2) dívat abstraktněji. Abychom to vysvětlili, uvědomme si, že můžeme přiřadit vektor rychlosti každému bodu v proudu vody. Soubor všech těchto vektorů vytváří *pole rychlostí*. Nyní můžeme interpretovat rov. (24.2) jako *tok rychlostního pole plochou, která je ohraničena uzavřenou křivkou* (obr. 24.2d). Podle této interpretace již tok neznačí, že plochou $\Delta \mathcal{S}$ musí téci něco hmatatelného rychlostí \mathbf{v} . Místo rychlosti \mathbf{v} můžeme použít libovolné vektorové pole \mathbf{a} a hovořit o jeho toku $\Delta \Phi = \mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{S}$.

24.3 TOK ELEKTRICKÉ INTENZITY

K definici toku elektrické intenzity uvažujme libovolnou (i nesymetrickou) Gaussovu plochu, nacházející se v nehomogenním elektrickém poli (obr. 24.3a). Rozdělme tuto plochu na plošky (např. čtverečky) $\Delta \mathcal{S}$ natolik malé, abychom mohli zanedbat jejich zakřivení a považovat je za rovinné. Každý z nich popíšeme vektorem $\Delta \mathbf{S}$, jehož velikost je rovna obsahu ΔS a jehož směr je ke čtverečku kolmý a je orientován ven z Gaussovy plochy. (Leží-li $\Delta \mathcal{S}$ na uzavřené ploše, orientujeme vektory $\Delta \mathbf{S}$ směrem ven.)

Protože čtverečky jsou libovolně malé, můžeme předpokládat, že elektrické pole \mathbf{E} na každém z nich je konstantní. Označme θ úhel, který spolu svírají vektory $\Delta \mathbf{S}$ a \mathbf{E} . Na obr. 24.3b jsme zvětšili tři ze čtverečků Gaussovy plochy (1, 2, 3) a vyznačili jsme u nich odpovídající úhel θ .



Obr. 24.3 (a) Gaussova plocha libovolného tvaru ležící v elektrickém poli. Plocha je rozdělena na malé čtverečky o obsahu ΔS . (b) Vektory elektrické intenzity \mathbf{E} a vektory $\Delta \mathbf{S}$ pro tři vyznačené čtverečky (1, 2, 3).

Tok elektrického pole Gaussovou plochou je součtem toků $\Delta \Phi_E$ jednotlivými čtverečky (obr. 24.3)

$$\Phi_E = \sum \Delta \Phi_E = \sum \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{S}. \quad (24.3)$$

Tato rovnice nám říká, že je třeba vzít každý čtvereček na Gaussově ploše, pro něj vyjádřit skalární součin obou vektorů $\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{S}$ a algebraicky sečíst (s patřičnými znaménky) příspěvky od všech čtverečků, které tvoří Gaussovu plochu. Znaménko každého skalárního součinu určuje, zda je tok daným čtverečkem kladný, záporný, nebo nulový. Z tab. 24.1 plyne, že v případech typu 1, v nichž \mathbf{E} směřuje dovnitř plochy, je příspěvek k celkovému součtu vyjádřenému rov. (24.3) záporný. V případech typu 2, kdy \mathbf{E} leží v rovině čtverečku, je příspěvek nulový a v případech typu 3, kdy \mathbf{E} směřuje ven z plochy, je příspěvek kladný.

Definici toku elektrického pole uzavřenou plochou zpřesníme tím, že předpokládáme, že obsahy čtverečků v obr. 24.3a jsou stále menší. Vektor plošky se pak blíží v limitě k $d\mathbf{S}$. Suma v rov. (24.3) přechází v plošný integrál

Tabulka 24.1 Tři čtverečky na Gaussově ploše z obr. 24.3

Č.	θ	SMĚR \mathbf{E}	SOUČIN $\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{S}$
1	$> 90^\circ$	dovnitř plochy	záporný
2	$= 90^\circ$	rovnoběžně s plochou	nulový
3	$< 90^\circ$	ven z plochy	kladný

a tok intenzity elektrického pole definujeme vztahem

$$\Phi_E = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{tok elektrické intenzity Gaussovou plochou } \mathcal{S}). \quad (24.4)$$

Kroužek na integrálu znamená, že integrace probíhá přes uzavřenou plochu \mathcal{S} . Tok intenzity elektrického pole je skalární veličinou a jeho jednotkou v SI je $\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-1}$.

Rov. (24.4) je možné interpretovat ještě jinak, když použijeme hustotu elektrických siločár procházejících plochou jako míru intenzity elektrického pole \mathbf{E} na této ploše. Velikost E je pak úměrná počtu elektrických siločár připadajících na jednotkovou plochu. Skalární součin $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ z rov. (24.4) je tedy úměrný počtu siločár, které procházejí plochou $d\mathcal{S}$. Protože integrace v rov. (24.4) probíhá přes celou uzavřenou Gaussovou plochu, vidíme odtud, že platí:

Tok Φ_E intenzity Gaussovou plochou je úměrný celkovému počtu siločár procházejících touto plochou.

PŘÍKLAD 24.1

Na obr. 24.4 je znázorněna Gaussova plocha tvořená povrchem válce o poloměru R , který se nachází v homogenním elektrickém poli \mathbf{E} . Osa válce je rovnoběžná se směrem pole. Jaký je tok Φ_E touto plochou?

ŘEŠENÍ: Tok je možno vyjádřit jako součet tří výrazů: toku levou podstavou a válce, pláštěm b válce a pravou podstavou c . Potom z rov. (24.4) plyne

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (24.5)$$

Pro všechny body na levé podstavě je úhel θ mezi \mathbf{E} a $d\mathbf{S}$ roven 180° a velikost intenzity E pole je konstantní. Je tedy

$$\begin{aligned} \int_a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \int_a E(\cos 180^\circ) dS = \\ &= -E \int_a dS = -ES, \end{aligned}$$

kde $\int dS = S$ je obsah podstavu πR^2 . Podobně pro pravou podstavu, kde $\theta = 0$:

$$\int_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_c E(\cos 0^\circ) dS = ES.$$

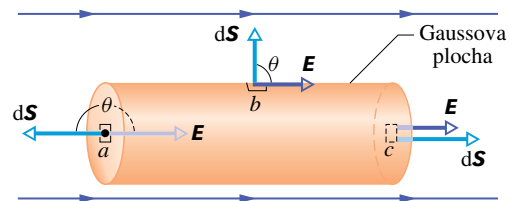
Konečně pro plášť válce, kde úhel $\theta = 90^\circ$ pro každý bod, je

$$\int_b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_b E(\cos 90^\circ) dS = 0.$$

Dosažením těchto výsledků do rov. (24.5) dostaneme

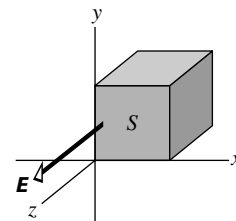
$$\Phi_E = -ES + 0 + ES = 0. \quad (\text{Odpověď})$$

Tento výsledek nás zřejmě nepřekvapí, protože elektrické siločáry, které reprezentují elektrické pole, procházejí Gaussovou plochou tak, že vstupují do válce levou podstavou a vystupují z něj pravou podstavou; jejich celkový tok je tedy nulový.



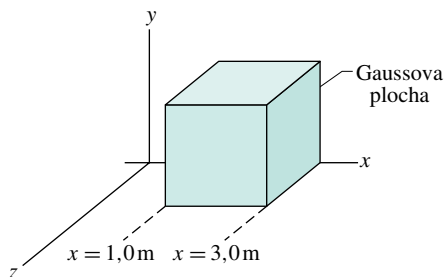
Obr. 24.4 Příklad 24.1. Gaussova plocha (plášť válce + podstavy) se nachází v homogenním elektrickém poli. Osa válce je rovnoběžná se směrem pole.

KONTROLA 1: Na obrázku je Gaussova plocha tvořená povrchem krychle, jejíž jedna stěna má obsah S . Krychle se nachází v homogenním elektrickém poli o intenzitě \mathbf{E} , které směřuje v kladném směru osy z . Vyjádřete pomocí E a S tok (a) čelní stěnou (ležící v rovině xy), (b) zadní stěnou, (c) horní stěnou a (d) celým povrchem krychle.



PŘÍKLAD 24.2

Nehomogenní elektrické pole o intenzitě $\mathbf{E} = 3,0xi + 4,0j$ prochází Gaussovou plochou ve tvaru povrchu krychle podle obr. 24.5 (E je vyjádřeno v newtonech na coulomb a x v metrech). Jaký je tok intenzity elektrického pole pravou stěnou, levou stěnou a horní stěnou krychle?



Obr. 24.5 Příklad 24.2. Gaussova plocha ve tvaru povrchu krychle, jejíž jedna hrana leží na ose x , se nachází v nehomogenním elektrickém poli.

ŘEŠENÍ: *Pravá stěna:* Vektor plochy je vždy kolmý k této ploše a je orientován směrem ven z krychle (z Gaussovy plochy). To znamená, že vektor $d\mathbf{S}$ musí pro pravou stěnu směřovat vždy ve směru $+x$. Při použití jednotkových vektorů je

$$d\mathbf{S} = dS \mathbf{i}.$$

Z rov. (24.4) plyne, že tok $\Phi_{E,p}$ pravou stěnou je

$$\begin{aligned} \Phi_{E,p} &= \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \\ &= \int (3,0x\mathbf{i} + 4,0\mathbf{j}) \cdot (dS \cdot \mathbf{i}) = \\ &= \int [(3,0x)(dS)\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + (4,0)(dS)\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}] = \\ &= \int (3,0x dS + 0) = 3,0 \int x dS. \end{aligned}$$

Protože budeme integrovat přes pravou stěnu, pro niž je v každém bodě hodnota x konstantní ($x = 3,0$ m), platí

$$\Phi_{E,p} = 3,0 \int (3,0) dS = 9,0 \int dS.$$

Integrál vyjadřuje obsah pravé stěny $S = 4,0 \text{ m}^2$. Tedy

$$\begin{aligned} \Phi_{E,p} &= (9,0 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1})(4,0 \text{ m}^2) = \\ &= 36,0 \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Levá stěna: Postup výpočtu je stejný jako pro pravou stěnu. Při postupu je třeba brát v úvahu dvě odlišnosti. (1) Vektor $d\mathbf{S}$ plochy, přes niž integrujeme, směřuje ve směru osy $-x$, tedy $d\mathbf{S} = -dS\mathbf{i}$. (2) Výraz pro x je pro uvažovanou levou stěnu opět konstantní, je však $x = 1,0$ m. Vezmeme-li v úvahu tyto dva rozdíly, nalezneme tok $\Phi_{E,l}$ levou stěnou

$$\Phi_{E,l} = -12 \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-1}. \quad (\text{Odpověď})$$

Horní stěna: Vektor plochy $d\mathbf{S}$, přes niž integrujeme, směřuje ve směru osy y , tedy $d\mathbf{S} = dS\mathbf{j}$. Tok $\Phi_{E,h}$ horní stěnou

je

$$\begin{aligned} \Phi_{E,h} &= \int (3,0x\mathbf{i} + 4,0\mathbf{j}) \cdot (dS\mathbf{j}) = \\ &= \int [(3,0x)(dS)\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + (4,0)(dS)\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}] = \\ &= \int (0 + 4,0 dS) = 4,0 \int dS = \\ &= 16 \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

24.4 GAUSSŮV ZÁKON ELEKTROSTATIKY

Gaussův zákon vyjadřuje vztah mezi celkovým tokem Φ_E intenzity elektrického pole uzavřenou Gaussovou plochou a celkovým nábojem Q obklopeným touto plochou:

$$\varepsilon_0 \Phi_E = Q \quad (\text{Gaussův zákon}). \quad (24.6)$$

Dosažením rov. (24.4), tj. definice toku elektrické intenzity, můžeme přepsat Gaussův zákon do tvaru

$$\varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (\text{Gaussův zákon}). \quad (24.7)$$

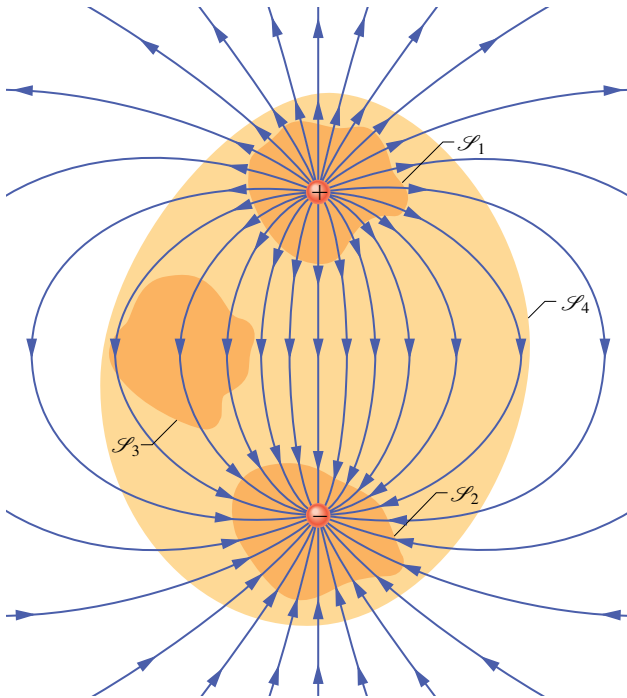
Zatím se budeme zabývat elektrickými náboji a elektrickým polem ve vakuu. V čl. 26.8 ukážeme, v jakém tvaru se zapisuje a používá Gaussův zákon v dielektrickém prostředí, jako jsou např. slída, olej nebo sklo.

V rov. (24.6) a (24.7) je celkový náboj $Q = \sum_k Q_k$ algebraickým součtem všech kladných i záporných nábojů obklopených Gaussovou plochou a může být tedy kladný, záporný, nebo nulový. Znaménko výsledného náboje, nacházejícího se uvnitř plochy, určuje znaménko toku elektrické intenzity Gaussovou plochou: je-li $Q > 0$, je celkový tok Φ_E kladný a intenzita \mathbf{E} směřuje převážně *ven z plochy*, je-li $Q < 0$, je celkový tok Φ_E záporný a intenzita \mathbf{E} směřuje převážně *dovnitř*.

Libovolně velký náboj ležící *vně* Gaussovy plochy, není v Gaussově zákonu zahrnut v Q . Také není rozhodující, jak jsou rozloženy jednotlivé náboje *uvnitř* Gaussovy plochy. Jediné, co je nutno uvažovat na pravé straně rov. (24.7), je velikost a znaménko celkového uzavřeného náboje. Intenzita elektrického pole \mathbf{E} na levé straně rov. (24.7) vyjadřuje intenzitu elektrického pole od *všech* nábojů, ať se nacházejí uvnitř či vně Gaussovy plochy. To se může jevit jako rozpor, ale lze dokázat (a ilustruje to př. 24.1), že elektrické pole od nábojů, které se nacházejí

vně Gaussovy plochy, nepřispívá k *celkovému* toku uzavřenou plochou, protože počet siločár od těchto nábojů do plochy vstupujících se rovná počtu siločár z této plochy vystupujících.

Použijme nyní tyto úvahy na případ znázorněný na obr. 24.6, který ukazuje stejně velké, ale opačné náboje a siločáry, zobrazující elektrické pole jimi vytvořené. Na obrázku jsou v řezu vyznačeny čtyři Gaussovy plochy. Budeme je uvažovat jednu po druhé.



Obr. 24.6 Dva stejně velké bodové náboje opačného znaménka a siločáry elektrického pole jimi vytvořené. V řezu jsou znázorněny čtyři Gaussovy plochy. Plocha \mathcal{S}_1 obklopuje kladný náboj, plocha \mathcal{S}_2 záporný náboj, plocha \mathcal{S}_3 neobklopuje žádný náboj, plocha \mathcal{S}_4 obklopuje oba náboje, a celkový náboj uvnitř je tedy nulový.

Plocha \mathcal{S}_1 : Intenzita elektrického pole směřuje ve všech bodech této plochy směrem ven. Tok intenzity elektrického pole touto plochou je tedy kladný. Kladný je také celkový náboj uvnitř této plochy, jak to vyžaduje Gaussův zákon.

Plocha \mathcal{S}_2 : Intenzita elektrického pole směřuje dovnitř této plochy ve všech bodech plochy. Tok intenzity elektrického pole a celkový náboj uvnitř plochy jsou tedy záporné, jak to vyžaduje Gaussův zákon.

Plocha \mathcal{S}_3 : Tato plocha neobsahuje uvnitř žádné náboje, tedy $Q = 0$. Gaussův zákon vyžaduje, aby celkový tok intenzity elektrického pole touto plochou byl roven nule. To platí, protože všechny siločáry, které procházejí plochou,

do ní vstupují v horní části a vystupují z ní v její spodní části.

Plocha \mathcal{S}_4 : Tato plocha obklopuje celkový náboj nulový (kladný a záporný náboj jsou stejně velké). Z Gaussova zákona plyne, že celkový tok intenzity elektrického pole touto plochou je nulový. To je opět pravda, neboť stejný počet siločár, který z plochy \mathcal{S}_4 vystupuje, do ní na jiném místě vstupuje.

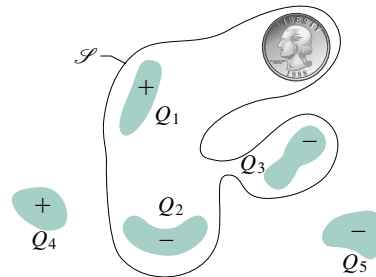
PŘÍKLAD 24.3

Na obr. 24.7 je nakresleno pět nabitých plastových tělísek a elektricky neutrální mince. Je vyznačen i řez jistou Gaussovou plochou \mathcal{S} . Určete tok intenzity elektrického pole plochou \mathcal{S} , jestliže $Q_1 = Q_4 = +3,1 \text{ nC}$, $Q_2 = Q_5 = -5,9 \text{ nC}$ a $Q_3 = -3,1 \text{ nC}$.

ŘEŠENÍ: Nenabitá mince nijak nepřispívá k celkovému náboji Q obklopenému plochou \mathcal{S} i přesto, že elektrické pole, v němž se mince nachází, v ní může polarizovat kladné a záporné náboje. Náboje Q_4 a Q_5 se nacházejí vně plochy \mathcal{S} a nepřispívají tedy k celkovému náboji Q . Je proto $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$. Z rov. (24.6) dostaneme

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{\varepsilon_0} = \\ &= \frac{(+3,1 - 5,9 - 3,1) \cdot 10^{-9} \text{ C}}{(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2})} = \\ &= -670 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-1}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

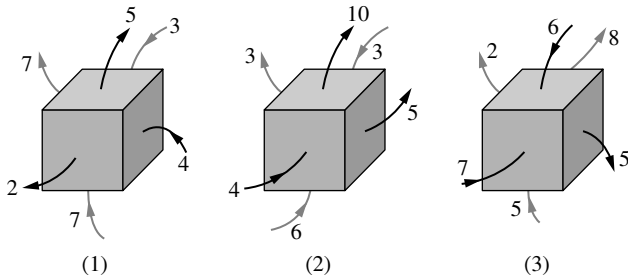
Záporné znaménko značí, že celkový náboj uvnitř uzavřené plochy \mathcal{S} je záporný. Celkový tok pole plochou \mathcal{S} je tedy také záporný.



Obr. 24.7 Příklad 24.3. Pět nabitých plastových tělísek a elektricky neutrální mince. Zvolená Gaussova plocha, znázorněná v řezu, obklopuje tři plastová tělíska a minci.

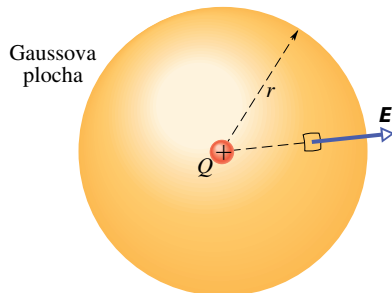
KONTROLA 2: Obrázek znázorňuje tři situace, v nichž se Gaussova plocha tvořená povrchem krychle nachází v elektrickém poli. Šipky ukazují směr intenzity \mathbf{E} a číselnice vyjadřují velikosti toků (v $\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-1}$) stěnami

každé krychle. Určete, ve kterém případě krychle ohraňuje (a) celkový kladný náboj, (b) celkový záporný náboj, (c) nulový náboj.



24.5 GAUSSŮV ZÁKON A COULOMBŮV ZÁKON

Jsou-li Gaussův zákon a Coulombův zákon ekvivalentní, je možné odvodit jeden z druhého. Zde odvodíme Coulombův zákon ze zákona Gaussova s využitím symetrie v rozložení nábojů a jimi vytvořeného elektrického pole.



Obr. 24.8 Kulová Gaussova plocha, v jejímž středu leží bodový náboj Q .

Na obr. 24.8 je znázorněn bodový kladný náboj Q ležící ve středu Gaussovy kulové plochy o poloměru r . Představme si, že povrch koule rozdělíme na jednotlivé infinitezimální plošky o obsahu dS . Podle definice je vektor $d\mathbf{S}$ kolmý k ploše a směřuje z ní ven ve směru vnější normály. Ze symetrie plyne, že i vektor intenzity elektrického pole \mathbf{E} v každém bodě kulové plochy je kolmý k povrchu a směřuje ven z plochy ve směru vnější normály. Úhel θ , který svírají \mathbf{E} a $d\mathbf{S}$, je roven nule. Proto z Gaussova zákona plyne

$$\varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 \oint E dS = Q. \quad (24.8)$$

Protože velikost intenzity je na povrchu koule stejně velká, můžeme E vytknout před integrál. Dostáváme

$$\varepsilon_0 E \oint dS = Q. \quad (24.9)$$

Integrál je roven obsahu kulové plochy, tedy $4\pi r^2$. Dosažením do rov. (24.9) získáme

$$\varepsilon_0 E (4\pi r^2) = Q$$

neboli

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \quad (24.10)$$

Odvozený vztah (24.10) má stejný tvar, jaký jsme získali z Coulombova zákona (23.3).

RADY A NÁMĚTY

Bod 24.1: Volba vhodné Gaussovy plochy

Odvození rov. (24.10) z Gaussova zákona bylo jen rozsvícením pro určení intenzity elektrického pole vytvořeného jinými konfiguracemi nábojů. Vraťme se tedy kousek zpět. Začali jsme s daným kladným bodovým nábojem Q ; víme, že elektrické siločáry míří radiálně směrem od něj a pole je kulově symetrické.

Abychom pomocí Gaussova zákona (24.7) určili velikost intenzity elektrického pole E ve vzdálenosti r , zvolili jsme kulovou Gaussovu plochu se středem v náboji Q a o poloměru r . Potom jsme sčítali (pomocí integrace) skalární součiny $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ přes celou Gaussovu plochu. Aby byla tato integrace co nejjednodušší, zvolili jsme Gaussovu plochu ve tvaru povrchu koule; tím vystihujeme kulovou symetrii elektrického pole. Tato volba umožní trojí zjednodušení: (1) Skalární součin $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ je jednoduchý, protože v každém bodě Gaussovy plochy je úhel mezi \mathbf{E} a $d\mathbf{S}$ roven nule. Skalární součin $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ můžeme proto nahradit součinem skalárů $E dS$. (2) Velikost intenzity elektrického pole E je stejná ve všech bodech kulové Gaussovy plochy, takže při integraci je E konstantní a může se vytknout před integrál. (3) Ve výsledku je velmi jednoduchá integrace — jde pouze o součet obsahů všech infinitezimálních plošek tvořících povrch koule, což je celkový povrch $4\pi r^2$.

Připomeňme, že Gaussův zákon platí bez ohledu na tvar Gaussovy plochy, kterou jsme umístili kolem náboje Q . Kdybychom však např. zvolili Gaussovu plochu ve tvaru povrchu krychle, všechna tři zjednodušení by zmizela a integrace $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ přes plochu krychle by mohla být velmi obtížná. Proto je výhodné zvolit Gaussovu plochu takového tvaru, aby integrace v Gaussově zákoně byla co nejjednodušší.

KONTROLA 3: Gaussovou kulovou plochou o poloměru r , která obklopuje osamocenou nabitou částici, prochází určitý tok Φ_{E1} . Zaměňme tuto Gaussovu plochu za (a) kulovou plochu o větším poloměru, (b) povrch vepsané krychle, (c) povrch opsané krychle. Bude v těchto případech tok větší, menší, nebo stejný jako Φ_{E1} ?

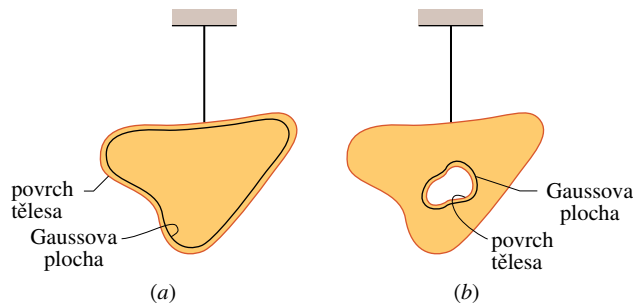
24.6 NABITÝ IZOLOVANÝ VODIČ

Gaussův zákon nám umožňuje dokázat důležitou větu o izolovaných vodičích:

Jestliže na izolovaný vodič přivedeme z vnějšku náboj, pak se všechn rozmistí na vnějším povrchu vodiče. Uvnitř vodiče nezůstane žádný volný náboj.

To vypadá věrohodně, protože náboje stejného znaménka se vzájemně odpuzují. Můžeme si to představit tak, že při pohybu k povrchu se přivedené náboje dostanou tak daleko od sebe, jak je to jen možné. Není to však samozřejmé, protože kvůli každému novému náboji přenesenému na povrch se všechny dosavadní musí trochu „stěsnat“. Pro ověření této domněnky se opět vraťme ke Gaussovu zákonu.

Na obr. 24.9a je v řezu znázorněno na nevodivém vlákně zavěšené měděné těleso, na něž je přiveden náboj Q . Zvolme Gaussovou plochu těsně pod povrchem tělesa.



Obr. 24.9 (a) Měděné těleso nesoucí náboj Q je zavěšené na nevodivém vlákně. Gaussova plocha se nachází těsně pod povrchem tělesa. (b) V tělese je nyní vytvořena dutina. Gaussova plocha se nachází v tělese a těsně obepíná dutinu.

Elektrické pole uvnitř vodiče musí být nulové. Kdyby tomu tak nebylo, působilo by silou na vodivostní (volné) elektrony ve vodiči a vyvolalo jejich pohyb a tím proud; náboj by se ve vodiči pohyboval z místa na místo. Ve vodiči v ustáleném stavu takové „věčné“ proudy neexistují, a proto intenzita elektrického pole uvnitř vodiče musí být nulová. (Detailní popis děje: přeneseme-li na vodič náboj, vytvoří se tím pole i uvnitř vodiče. To silově působí na volné náboje ve vodiči a pohybuje jimi tak dlouho, až celkové pole uvnitř vodiče vymizí a nastane elektrostatická rovnováha. Celý děj proběhne velice rychle.)

Je-li elektrická intenzita \mathbf{E} nulová kdekoli uvnitř vodiče, musí být také nulová ve všech bodech na Gaussově ploše, protože tato plocha, i když se nachází co nejtěsněji pod povrchem, je stále uvnitř vodiče. Z toho plyne, že tok elektrické intenzity Gaussovou plochou je nulový a podle

Gaussova zákona je nulový i celkový náboj uvnitř Gaussovy plochy. Důsledkem tedy je, že přivedený náboj musí ležet na povrchu vodiče.

Izolovaný vodič s dutinou

Na obr. 24.9b je znázorněno totéž těleso, tentokrát s dutinou uvnitř. Můžeme oprávněně předpokládat, že když vyjmeme část materiálu, abychom vytvořili dutinu, nezměníme ani rozložení nábojů, ani tvar elektrického pole, které existovalo na obr. 24.9a. Opět můžeme použít Gaussův zákon, abychom provedli kvantitativní důkaz.

Vytvoříme nyní Gaussovou plochu v materiálu tak, aby těsně obklopovala dutinu. Protože uvnitř vodiče je $E = 0$, nepoteče touto novou Gaussovou plochou žádný tok. Dle Gaussova zákona nemůže být uvnitř plochy nenulový náboj. Z toho plyne, že na stěnách dutiny se nenachází žádný náboj; všechn přivedený náboj je tedy rozložen na *vnějším* povrchu vodiče, stejně jako v případě na obr. 24.9a.

Kdyby vodič zmizel...

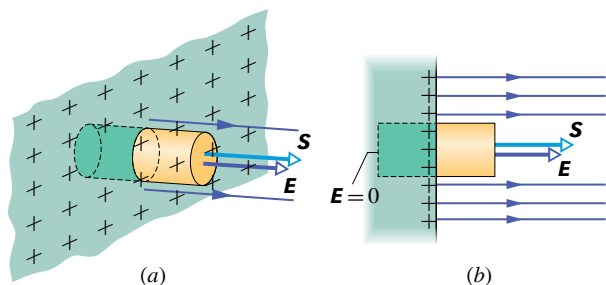
Předpokládejme, že pomocí nějakého kouzla můžeme „zmrazit“ náboj na povrchu vodiče, třeba tak, že jej vložíme do tenkého plastového pláště, a poté odstraníme vodič. To je ekvivalentní případu z obr. 24.9b, v němž rozšíříme dutinu na celý vodič, čímž vodič odstraníme a zůstanou nám pouze náboje. Elektrické pole a jeho intenzita se tím vůbec nezmění. Intenzita elektrického pole bude nulová uvnitř tenké vrstvy nábojů a nezměněná pro všechny vnější body. Odtud vyplývá, že elektrické pole je vytvořeno náboji a ne vodičem. Vodič pouze slouží jako „cesta“, aby náboje mohly zaujmout své polohy.

Vnější elektrické pole

Viděli jsme již, že se volný náboj na izolovaném vodiči přesouvá tak, aby se dostal na jeho povrch. Vyjma kulového vodiče se však náboj nerozdělí rovnoměrně. Plošná hustota náboje σ je obecně různá v různých bodech na povrchu vodiče. Je proto velmi obtížné určit elektrickou intenzitu obecně.

Elektrické pole těsně nad povrchem nabitého vodiče se však snadno určí pomocí Gaussova zákona. K tomu vybereme část povrchu tak malou, abychom mohli zanedbat její zakřivení a mohli ji pokládat za rovinnou. Poté uvažujeme Gaussovou plochu ve tvaru nízkého válečku. Jedna jeho základna je ve vodiči těsně pod povrchem, druhá těsně nad ním a plášť je orientován kolmo k povrchu vodiče (obr. 24.10).

Elektrická intenzita \mathbf{E} těsně nad povrchem vodiče musí být kolmá k povrchu vodiče. Kdyby tomu tak nebylo, měla



Obr. 24.10 (a) Prostorové znázornění, (b) řez částí velkého izolovaného vodiče nabitého přivedeným kladným nábojem. Gaussova plocha je uzavřená, obepíná jistý náboj a její plášť je kolmá k povrchu vodiče. Elektrické siločáry procházejí vnější podstavou válečku, ale neprocházejí vnitřní podstavou. Vnější podstava je popsána vektorem \mathbf{S} .

by složku ve směru povrchu a přesouvala by po povrchu náboj. Takový pohyb by byl ale v rozporu s naším předpokladem elektrostatické rovnováhy.

Vyjáďřeme nyní celkový tok Gaussovou plochou. Vnitřní podstavou neprochází žádný tok, protože uvnitř vodiče je elektrické pole nulové. Pláštěm válečku také neprochází žádný tok, protože uvnitř vodiče je elektrické pole nulové a mimo vodič je jeho intenzita rovnoběžná s pláštěm válečku. Jediný nenulový tok je tok podstavou mimo vodič; vektor \mathbf{E} je zde kolmý k podstavě válečku. Předpokládáme, že obsah podstavy je dosti malý, abychom na ní mohli považovat E za konstantní. Potom tok touto podstavou je ES , což představuje celkový tok Φ_E uvažovanou Gaussovou plochou.

Náboj Q , který je obklopen Gaussovou plochou, leží na povrchu vodiče na ploše o obsahu S . Je-li σ plošná hustota náboje, pak $Q = \sigma S$. Dosadíme-li σS za Q a ES za Φ_E , bude mít Gaussův zákon tvar

$$\varepsilon_0 ES = \sigma S,$$

z něhož plyne

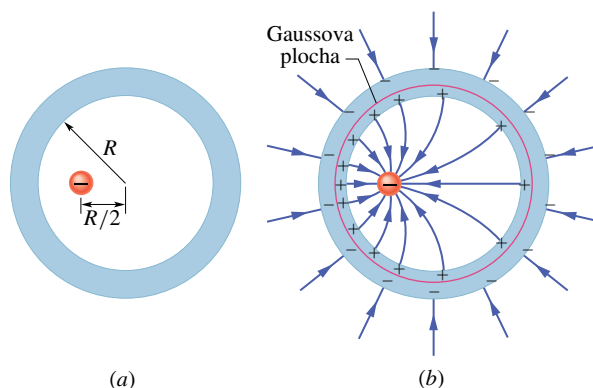
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (\text{vodivý povrch}). \quad (24.11)$$

To znamená, že velikost elektrické intenzity v místě těsně nad povrchem vodiče je přímo úměrná plošné hustotě náboje v tomto místě na vodiči. Je-li vodič nabit kladně, směřují siločáry kolmo od vodiče (obr. 24.10), je-li nabit záporně, směřují kolmo k němu.

Siločáry v obr. 24.10 musí končit v nekonečnu nebo na záporných nábojích někde v okolí vodiče. Jestliže se tyto náboje nacházejí blízko vodiče, změní se plošná hustota náboje v daném místě vodiče, a tím i intenzita elektrického pole v tomto bodě. Mezi veličinami σ a E vztah (24.11) však platí stále.

PŘÍKLAD 24.4

Na obr. 24.11a je příčný řez kovovou kulovou vrstvou o vnitřním poloměru R . Bodový náboj $-5,0 \mu\text{C}$ se nachází ve vzdálenosti $R/2$ od jejího středu. Jaké náboje budou indukovány na její vnitřní a vnější stěně, je-li vrstva elektricky neutrální? Budou tyto náboje rozděleny rovnoměrně? Jak bude vypadat elektrické pole uvnitř a vně kulové vrstvy?



Obr. 24.11 Příklad 24.4. (a) Záporný bodový náboj se nachází uvnitř elektricky neutrální kulové vrstvy. (b) Výsledkem je, že se kladný náboj nerovnoměrně rozloží na vnitřní stěně vrstvy a stejně velký záporný náboj se rovnoměrně rozloží na stěně vnější. Na obrázku je znázorněn i průběh elektrických siločár.

ŘEŠENÍ: Na obr. 24.11b je příčný řez kulovou Gaussovou plochou procházející vrstvou těsně nad její vnitřní stěnou. Protože uvnitř kovu musí být elektrické pole nulové (a tedy i na Gaussově ploše uvnitř kovu), musí být také tok elektrické intenzity Gaussovou plochou roven nule. Z Gaussova zákona plyne, že celkový náboj obklopený Gaussovou plochou musí být také v tomto případě nulový. Jestliže je uvnitř kulové vrstvy bodový náboj $-5,0 \mu\text{C}$, potom na vnitřní stěně vrstvy musí být náboj $+5,0 \mu\text{C}$.

Kdyby se bodový náboj nacházel ve středu kulové vrstvy, byl by náboj rozdělen rovnoměrně na vnitřní stěně vrstvy. Zde však náboj v jejím středu neleží, takže rozdělení indukovaného náboje bude nerovnoměrné (obr. 24.11b): kladný náboj bude přitahován k místům bližším vloženému zápornému náboji.

Poněvadž je vrstva elektricky neutrální, může její vnitřní stěna nést náboj $+5,0 \mu\text{C}$ pouze tehdy, když elektrony o celkovém náboji $-5,0 \mu\text{C}$ se přesunou na vnější stěnu. Na ní pak budou rozloženy rovnoměrně (obr. 24.11b), protože vrstva je kulová. Rovnoměrnost rozložení náboje na vnějším povrchu nemůže být „porušena“ nerovnoměrností na vnitřním povrchu, protože mezi nimi leží vodič — a v něm je elektrické pole nulové.

Přibližný průběh elektrických siločár uvnitř a vně kulové vrstvy je znázorněn na obr. 24.11b. Všechny siločáry jsou ke kulové vrstvě kolmé. Z vnitřního povrchu vrstvy vystupují dovnitř a zakřivují se k náboji v dutině. Uvnitř kovové ku-

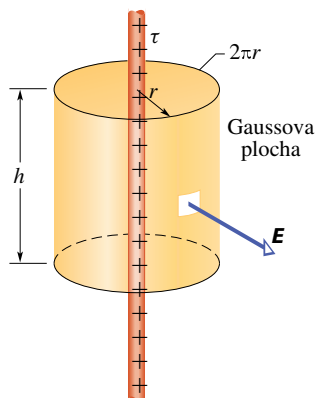
lové vrstvy je pole nulové. Vně kulové vrstvy je průběh elektrických siločar stejný, jako by šlo o pole bodového náboje umístěného ve středu koule a kulová vrstva by neexistovala. Tak je tomu, ať je náboj umístěn uvnitř koule kdekoli.

KONTROLA 4: Náboj $-50e$ leží ve středu duté kulové kovové vrstvy, která je nabitá nábojem $-100e$. Jaký náboj se bude nacházet na (a) vnitřní, (b) vnější stěně vrstvy?

24.7 POUŽITÍ GAUSSOVA ZÁKONA: VÁLCOVÁ SYMETRIE

Na obr. 24.12 je znázorněna část nekonečně dlouhé válcové plastové tyčinky nabitá rovnoměrně kladným nábojem s délkovou hustotou τ . Chceme najít vztah pro elektrickou intenzitu \mathbf{E} ve vzdálenosti r od osy tyčinky.

Gaussovou plochu \mathcal{S} zvolíme tak, aby vystihovala symetrii problému, tedy jako povrch válce (o poloměru r a výšce h), jehož osa splývá s osou plastové tyčinky.



Obr. 24.12 Gaussova plocha ve tvaru povrchu válce obklopuje část velmi dlouhé rovnoměrně nabitě válcové plastové tyčinky.

Představme si nyní, že zatímco jsme se nedívali, někdo pootočil plastovou tyčinkou kolem její podélné osy nebo ji otočil tak, že zaměnil konce tyčinky. Když se znovu na tyčinku a její pole podíváme, nezjistíme žádnou změnu. Z toho plyne, že pole tyčinky má rotační neboli válcovou symetrii: vektor \mathbf{E} směřuje radiálně od osy válce (v případě, že tyčinka je kladně nabitá) a jeho velikost závisí pouze na vzdálenosti od osy válce. Proto je tok podstavami nulový (vektor \mathbf{E} je rovnoběžný s podstavami válce) a zůstává nenulový tok pláštěm válce. Poněvadž $2\pi r$ je obvod válce a h jeho výška, je obsah pláště válce $2\pi r h$. Tok intenzity

elektrického pole \mathbf{E} tímto pláštěm je

$$\Phi_E = ES \cos 0 = E(2\pi r h).$$

Náboj obepnutý plochou je $Q = \tau h$, takže Gaussův zákon

$$\epsilon_0 \Phi_E = Q$$

dává

$$\epsilon_0 E(2\pi r h) = \tau h.$$

Odtud

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{nabitě vlákno}), \quad (24.12)$$

což vyjadřuje velikost elektrické intenzity pole nekonečně dlouhého nabitěho vlákna ve vzdálenosti r od osy vlákna. Vektor \mathbf{E} směřuje radiálně od vlákna, je-li náboj kladný, a radiálně k němu, je-li záporný.

PŘÍKLAD 24.5

Viditelnému záblesku při úderu blesku předchází neviditelné stádium, v němž vznikne kanál elektronů sahající z mraků až k zemskému povrchu. Tyto elektrony pocházejí jednak z mraků, jednak z molekul tvořících vzduch, které jsou ionizovány v kanálu. Typická hodnota délkové hustoty náboje v kanálu je $\tau = -1 \cdot 10^{-3} \text{ C} \cdot \text{m}^{-1}$. Když blesk udeří na zem, elektrony v jeho vodivém kanálu rychle přecházejí do zemského povrchu. Při srážkách elektronů s molekulami vzduchu dochází k ionizaci, což se projeví jako jasné záblesky světla. Určete poloměr kanálu, jestliže se molekuly vzduchu ionizují, překročí-li elektrická intenzita hodnotu $3 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$.

ŘEŠENÍ: I když kanál není ani přímý, ani nekonečně dlouhý, použijeme model lineárně rozloženého náboje (obr. 24.12). (Protože obsahuje záporný náboj, míří \mathbf{E} dovnitř sloupce.) Podle rov. (24.12) klesá velikost intenzity E elektrického pole s rostoucí vzdáleností od osy kanálu. Povrch kanálu je v takové vzdálenosti r , v níž má elektrická intenzita \mathbf{E} velikost $3 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$. Molekuly vzduchu uvnitř kanálu jsou ionizovány, molekuly vzdálenější nikoli. Řešením rov. (24.12) dostáváme pro poloměr kanálu

$$\begin{aligned} r &= \frac{|\tau|}{2\pi\epsilon_0 |E|} = \\ &= \frac{(1 \cdot 10^{-3} \text{ C} \cdot \text{m}^{-1})}{2\pi(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}) \cdot (3 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1})} = \\ &= 6 \text{ m}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

(Poloměr zářivé části blesku je však menší, přibližně jen 0,5 m. Představu o rozměrech blesku si můžete udělat dle obr. 24.13.) I když poloměr sloupce je jen 6 m, nemyslete si, že jste v bezpečí, nacházíte-li se trochu dál od místa dopadu

blesku na zem. Elektrony z blesku putují po zemském povrchu a takové *povrchové zemní proudy* jsou smrtelné. Na obr. 24.14 jsou patrné zřetelné stopy těchto proudů.



Obr. 24.13 Blesk udeřil do 20 m vysoké sekvoje. Protože byl strom mokrý, prošla většina z nábojů vodou po jeho povrchu a strom zůstal nepoškozen.



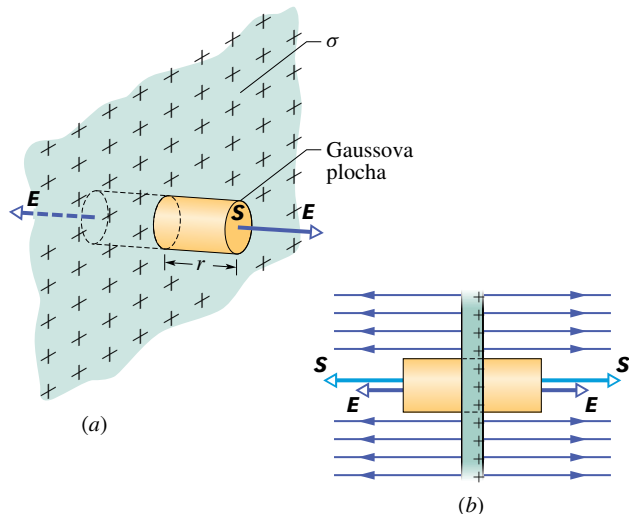
Obr. 24.14 Vypálené stopy zemních proudů blesku na trávníku golfového jamkoviště.

24.8 POUŽITÍ GAUSSOVA ZÁKONA: ROVINNÁ SYMETRIE

Nevodivá vrstva

Na obr. 24.15 je část tenké, nekonečně velké nevodivé vrstvy, na níž je rovnoměrně rozložen kladný náboj s plošnou hustotou σ . Za jednoduchý model nám může posloužit kus tenké plastové fólie. Naším úkolem je určit elektrickou intenzitu \mathbf{E} ve vzdálenosti r od vrstvy.

Vhodnou Gaussovou plochou je povrch válce s podstavami o obsahu S , jehož osa je kolmá k vrstvě (obr. 24.15). Z důvodů symetrie je intenzita \mathbf{E} kolmá k rovině vrstvy, tzn. i k ploše podstav. Pro kladný náboj směřuje \mathbf{E} od roviny a prochází tedy oběma podstavami Gaussovy plochy směrem ven z válce. Protože siločáry neprotínají plášť válce, neprochází touto částí Gaussovy plochy žádný tok.



Obr. 24.15 (a) Celkový pohled, (b) boční pohled na část tenké velmi velké plastové vrstvy, rovnoměrně nabitě na jedné straně nábojem s plošnou hustotou σ . Osa válcové Gaussovy plochy protíná kolmo vrstvu a je rovnoběžná se směrem pole.

Celkový tok je tedy roven součtu toků oběma podstavami válce; pro každou platí $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = ES$. Z Gaussova zákona plyne

$$\varepsilon_0(ES + ES) = \sigma S,$$

kde σS je náboj uzavřený v Gaussově ploše. Odtud dostaneme

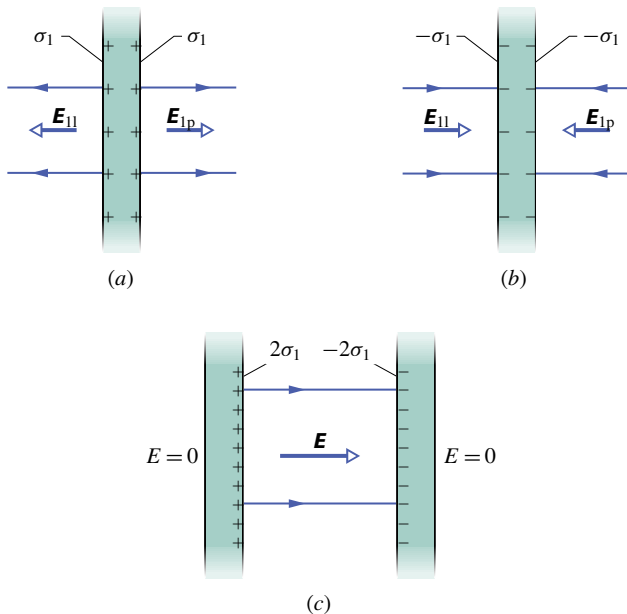
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (\text{nabitá plocha}). \quad (24.13)$$

Uvažovali jsme nekonečně velkou rovinu s konstantní plošnou hustotou náboje. Ve výsledku se nevyskytuje r , takže

intenzita má stejnou velikost v každém bodě prostoru. Rov. (24.13) odpovídá rov. (23.25), kterou jsme dostali integrací složek intenzity elektrického pole vyvolaného jednotlivými náboji. (Podívejte se, kolik bylo třeba integrování, a všimněte si, jak snadno lze dostat tentýž výsledek pomocí Gaussova zákona. To je jeden z důvodů, proč věnujeme celou kapitolu Gaussovu zákonu elektrostatiky: pro určitá symetrická rozložení náboje je opravdu mnohem výhodnější jej použít, než integrovat složky pole.)

Dvě vodivé desky

Na obr. 24.16a je řez tenkou, nekonečně velkou vodivou deskou, na níž byl přenesen kladný náboj. Z čl. 24.6 víme, že tento náboj leží na povrchu desky. Protože deska je tenká a velmi velká, můžeme předpokládat, že se v podstatě celý náboj nachází na obou stranách desky.



Obr. 24.16 (a) Tenká, velmi velká, kladně nabitá vodivá deska. (b) Stejná záporně nabitá deska. (c) Dvě desky rovnoběžné a blízko u sebe.

Jestliže není přítomen žádný vnější náboj, který by rozložení náboje ovlivnil, budou náboje rozloženy na obou stranách desky s konstantní plošnou hustotou σ_1 . Z rovnice (24.11) plyne, že těsně vedle desky má vzniklé pole intenzitu o velikosti $E_1 = \sigma_1/\epsilon_0$. Protože náboj je kladný, směřuje pole \mathbf{E}_1 od desky.

Na obr. 24.16b je znázorněna táž deska, ale záporně nabitá, mající stejnou velikost plošné hustoty náboje σ_1 . Jedinou změnou proti předchozí situaci je, že intenzita pole směřuje k desce.

Předpokládejme, že umístíme obě desky tak, aby byly rovnoběžné a blízko u sebe (obr. 24.16c). Protože desky jsou vodivé, začne náboj na jedné desce přitahovat náboj na druhé desce. Proto se všechny náboje přemístí na vnitřní stěny desek (obr. 24.16c). Na každé z vnitřních stěn desek bude nyní dvojnásobně velký náboj, takže nová plošná hustota náboje σ bude dvojnásobkem σ_1 . Elektrická intenzita v každém bodě mezi deskami bude mít velikost

$$E = \frac{2\sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (24.14)$$

Toto pole směřuje od kladně nabitě desky k záporné. Protože na vnější stěnu desek nebyl přiveden žádný náboj, bude elektrické pole vlevo i vpravo od desek rovno nule.

Může se vám zdát podivné, proč se zabýváme tak nepravděpodobnou situací, jako je pole buzené nekonečně dlouhou nabitou přímkou, nekonečnou rovinou či dvojicí nekonečných nabitých desek. Není to *jen* proto, abychom analyzovali takové situace pomocí Gaussova zákona (ačkoli i to je pravda). Podstatnější je, že tyto analýzy případů, v nichž se vyskytují nekonečně velké rozměry, nám poslouží jako velmi dobrá aproximace reálných situací. Tak se např. dá velmi dobře použít rov. (24.13) pro nevodivou vrstvu konečných rozměrů, pokud zjišťujeme velikost pole v blízkosti vrstvy a dosti daleko od jejích okrajů. Podobně rov. (24.14) platí pro dvojici konečných vodivých desek, pokud opět nebereme v úvahu místa v blízkosti jejich hran.

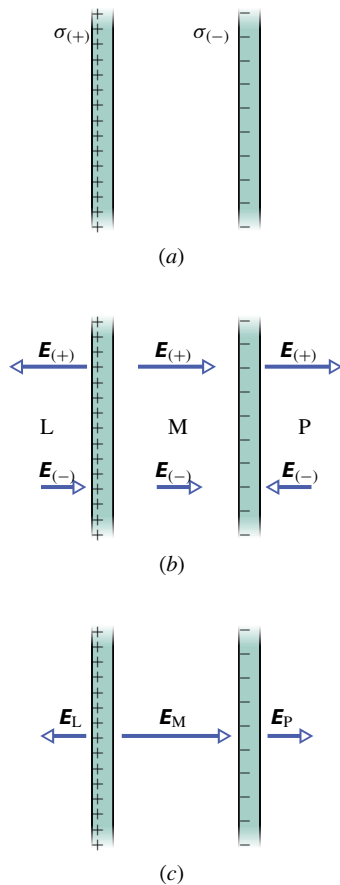
Potíže s okraji vrstev nebo desek a důvody, proč se k nim příliš nepřibližujeme, spočívají v tom, že v jejich blízkosti již není možné použít rovinnou symetrii při určování intenzity polí. Siločáry se zde zakřívují (vlivem okrajů) a detaily pole se pak velmi obtížně počítají.

Při řešení elektrostatických úloh s vodiči nemůžeme jednoduše rozdělit problém na několik úloh, každou s jedním vodičem, a pak sčítat jejich dílčí řešení. Princip superpozice sice platí i zde, ale musíme uvážit, že rozložení náboje na vodiči je výrazně ovlivněno přítomností dalších vodičů či nábojů v jeho okolí. Jinými slovy, kdybychom zmrazili rozložení nábojů na vodičích v soustavě a soustavu rozdělili na části, pak by opravdu pole soustavy bylo součtem polí těchto částí. Jakmile ovšem připustíme, že náboje na vodičích nejsou „zmrazeny“, mohou se pod vlivem ostatních částí přerozdělit jinak, než jak byly rozmístěny.

PŘÍKLAD 24.6

Na obr. 24.17a je znázorněna část dvou velkých rovnoběžných nevodivých desek, z nichž každá nese na jedné stěně rovnoměrně rozložený náboj. Plošné hustoty nábojů jsou $\sigma_{(+)} = 6,8 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$ pro kladně nabitou desku a $\sigma_{(-)} = -4,3 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$ pro záporně nabitou desku.

Vyjádřete intenzitu elektrického pole \mathbf{E} (a) vlevo od desek, (b) mezi deskami, (c) vpravo od desek.



Obr. 24.17 Příklad 24.6.
(a) Dvě velké rovno-
běžné desky rovnoměrně
nabitě po jedné straně.
(b) Elektrická pole
jednotlivých desek.
(c) Výsledné pole
vytvořené superpozicí
polí obou nabitých
desek.

ŘEŠENÍ: Protože se náboje nemohou pohybovat, můžeme najít elektrické pole desek z obr. 24.17a tak, že (1) najdeme pole od každé desky samostatně, (2) sečteme pole od samostatných desek pomocí principu superpozice. Z rov. (24.13) plyne, že velikost intenzity elektrického pole $E_{(+)}$ od kladně nabitě desky je v libovolném bodě rovna

$$E_{(+)} = \frac{\sigma_{(+)}}{2\epsilon_0} = \frac{(6,8 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2})}{2(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2})} = 3,84 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}.$$

Podobně pro záporně nabitou desku je

$$E_{(-)} = \frac{|\sigma_{(-)}|}{2\epsilon_0} = \frac{(4,3 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2})}{2(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2})} = 2,43 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}.$$

Na obr. 24.17b je konfigurace polí od jednotlivých desek vlevo od desek (L), mezi deskami (M) a vpravo od desek (P).

Výsledná pole v těchto oblastech získáme z principu superpozice. Vlevo od desek je velikost intenzity pole

$$\begin{aligned} E_L &= E_{(+)} - E_{(-)} = \\ &= (3,84 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}) - (2,43 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}) = \\ &= 1,41 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Protože $E_{(+)}$ je větší než $E_{(-)}$, směřuje výsledná intenzita \mathbf{E}_L vlevo (obr. 24.17c). Vpravo od desek bude elektrické pole \mathbf{E}_P stejně velké, ale bude směřovat vpravo (obr. 24.17c). Mezi deskami mají obě pole stejný směr, a proto

$$\begin{aligned} E_M &= E_{(+)} + E_{(-)} = \\ &= (3,84 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}) + (2,43 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}) = \\ &= 6,27 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Výsledné pole \mathbf{E}_M míří vpravo.

Všimněme si, že vně desek je elektrické pole stejné, jako by pocházelo od jediné desky, jejíž plošná hustota náboje by byla $\sigma'_{(+)} = \sigma_{(+)} + \sigma_{(-)} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$.

24.9 POUŽITÍ GAUSSOVA ZÁKONA: KULOVÁ SYMETRIE

Nyní dokážeme pomocí Gaussova zákona oba slupkové teoremy, které jsme uvedli bez důkazu v čl. 22.4:

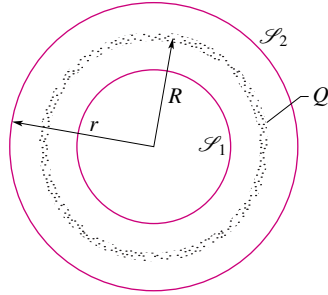
Rovnoměrně nabitá kulová vrstva (slupka) přitahuje, nebo odpuzuje nabitou částici *vně* této vrstvy stejnou silou, jako kdyby se celý náboj vrstvy nacházel v jejím středu.

Pro nabitou částici *uvnitř* (v dutině) této vrstvy je výsledná síla, kterou působí vrstva, rovna nule.

Na obr. 24.18 je znázorněna nabitá kulová vrstva o poloměru R , nesoucí celkový náboj Q , a dvě soustředné kulové Gaussovy plochy \mathcal{S}_1 a \mathcal{S}_2 . Pomocí postupu navrženého v čl. 24.5 a použitím Gaussova zákona na plochu \mathcal{S}_2 , pro niž platí $r > R$, zjistíme, že

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (\text{pole kulové vrstvy ve vzdálenosti } r > R). \quad (24.15)$$

Je to stejné pole, jaké by vytvořil bodový náboj, umístěný ve středu nabitě kulové vrstvy. Velikost síly, kterou působí kulová vrstva na nabitou částici ležící vně, je tedy stejná jako velikost síly v případě, že by vrstva byla nahrazena bodovým nábojem Q ležícím v jejím středu. Tím je dokázán první slupkový teorém.



Obr. 24.18 Řez tenkou kulovou vrstvou, nesoucí rovnoměrně rozložený náboj Q , a dvěma Gaussovými plochami \mathcal{S}_1 a \mathcal{S}_2 . Plocha \mathcal{S}_2 obklopuje kulovou vrstvu, plocha \mathcal{S}_1 obklopuje pouze prázdný prostor uvnitř vrstvy.

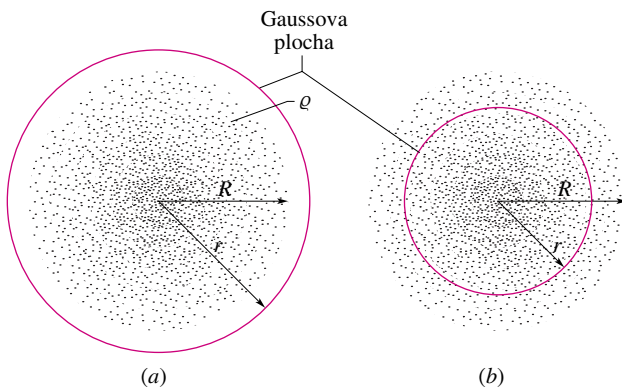
Použijeme-li Gaussův zákon na druhou plochu \mathcal{S}_1 , pro niž $r < R$, dostaneme

$$E = 0 \quad (\text{pole kulové vrstvy ve vzdálenosti } r < R), \quad (24.16)$$

protože tato Gaussova plocha neobepíná žádný náboj. Výsledná síla působící na náboj uvnitř rovnoměrně nabitě kulové vrstvy je tedy rovna nule, což vyjadřuje druhý slupkový teorém.

Libovolné kulově symetrické rozložení náboje, jako je např. na obr. 24.19, může být vytvořeno ze soustředných kulových vrstev. Abychom mohli použít slupkového teorému, musí být koule nabita po vrstvách homogenně; hustota náboje ρ je tedy funkcí pouze vzdálenosti r od středu koule. Pak můžeme zkoumat vliv rozložení náboje v jednotlivých vrstvách odděleně, vrstvu po vrstvě.

Na obr. 24.19a leží celkový náboj uvnitř Gaussovy plochy tvaru povrchu koule o poloměru $r > R$. Tento náboj



Obr. 24.19 Tečky představují kulově symetrické rozložení náboje v kouli o poloměru R , jehož objemová hustota je funkcí pouze vzdálenosti od středu. Nabitá koule není vodič, takže se v ní náboj nemůže pohybovat. (a) Soustředná kulová Gaussova plocha o poloměru $r > R$. (b) Obdobná Gaussova plocha o poloměru $r < R$.

vytváří stejné elektrické pole na této Gaussově ploše jako stejně velký bodový náboj téhož znaménka, umístěný ve středu kulové plochy.

Na obr. 24.19b je znázorněna Gaussova plocha o poloměru $r < R$. Abychom určili velikost elektrického pole na této ploše, budeme rozlišovat nabitě kulové vrstvy uvnitř a vně Gaussovy plochy. Z rov. (24.16) plyne, že náboj ležící vně Gaussovy plochy na ní nevytváří žádné elektrické pole. Z rov. (24.15) plyne, že náboj obklopený uzavřenou plochou vytváří elektrické pole stejné, jako by tento náboj byl soustředěn ve středu kulové vrstvy. Nechť Q' je náboj obklopený uzavřenou plochou; pak podle rov. (24.15) platí

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{r^2} \quad (\text{pole kulové vrstvy ve vzdálenosti } r < R). \quad (24.17)$$

PŘÍKLAD 24.7

Jádro atomu zlata má poloměr $R = 6,2 \cdot 10^{-15}$ m a nese kladný náboj $Q = Ze$, kde $Z = 79$ je atomové číslo zlata. Nakreslete průběh intenzity elektrického pole od středu jádra až do vzdálenosti $2R$. Předpokládejme, že jádro má kulový tvar s prostorově homogenním rozložením náboje.

ŘEŠENÍ: Celkový náboj jádra je

$$Q = Ze = 79(1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}) = 1,264 \cdot 10^{-17} \text{ C}.$$

Pole vně jádra je popsáno rov. (24.15). Gaussovu plochu zvolíme podle obr. 24.19a. Pro bod na povrchu jádra je elektrická intenzita

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} = \\ &= \frac{(1,264 \cdot 10^{-17} \text{ C})}{4\pi(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2})(6,2 \cdot 10^{-15} \text{ m})^2} = \\ &= 3 \cdot 10^{21} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}. \end{aligned}$$

Pro výpočet pole uvnitř jádra použijeme rov. (24.17) a Gaussovu plochu podle obr. 24.19b. Nechť Q' je náboj obklopený kulovou Gaussovou plochou o poloměru $r < R$. Poněvadž je náboj rozložen v objemu jádra homogenně, je náboj uvnitř Gaussovy plochy úměrný objemu koule:

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (24.18)$$

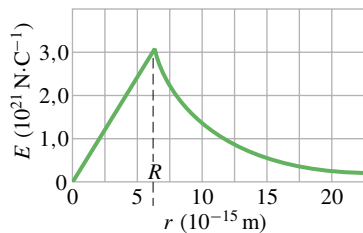
a odtud

$$Q' = Q \frac{r^3}{R^3}.$$

Dosažením tohoto výsledku do rov. (24.17) dostaneme

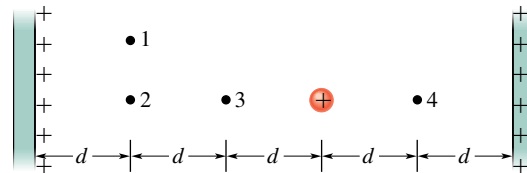
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \quad (r < R). \quad (24.19)$$

Výraz v závorce je konstantní. Uvnitř jádra roste tedy elektrická intenzita přímo úměrně poloměru r , ve středu jádra je $E = 0$. Jak rov. (24.19) pro pole uvnitř jádra, tak i rov. (24.15) pro vnějšek dávají na hranici jádra (pro $r = R$) tutéž hodnotu $E = 3 \cdot 10^{21} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$. Navazují tedy na hranici jádra spojitě. Na obr. 24.20 je celý výsledek vyjádřen graficky.



Obr. 24.20 Příklad 24.7. Závislost intenzity elektrického pole na vzdálenosti od středu jádra atomu zlata. Předpokládáme homogenní rozdělení kladného náboje v objemu jádra.

KONTROLA 5: Na obrázku jsou dvě rovnoběžné, velké, nevodivé vrstvy se stejnými plošnými hustotami kladného náboje a koule s homogenní objemovou hustotou kladného náboje. Určete intenzity elektrického pole v bodech 1 až 4 a seřadte tyto body sestupně podle velikosti intenzity.



PŘEHLED & SHRNU TÍ

Gaussův zákon elektrostatiky

Gaussův zákon a Coulombův zákon, ačkoli mají různé tvary, jsou ekvivalentní způsoby pro popis vztahu mezi nábojem a elektrickým polem v elektrostatice. Gaussův zákon zní

$$\varepsilon_0 \Phi_E = Q \quad (\text{Gaussův zákon}), \quad (24.6)$$

kde Q je celkový náboj uvnitř pomyslné uzavřené plochy \mathcal{S} (Gaussovy plochy) a Φ_E je celkový tok vektoru elektrické intenzity touto plochou:

$$\Phi_E = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{tok elektrické intenzity Gaussovou plochou } \mathcal{S}). \quad (24.4)$$

Coulombův zákon lze snadno odvodit z Gaussova zákona.

Použití Gaussova zákona

Pomocí Gaussova zákona můžeme při využití podmínek symetrie odvodit některé důležité výsledky pro elektrostatiku. Mezi ně patří např. tyto:

1. Náboj na izolovaném vodiči se celý nachází na vnějším povrchu vodiče.

2. Elektrická intenzita vně nabitého vodiče v jeho těsné blízkosti je kolmá k povrchu vodiče a má velikost

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (\text{vodivá plocha}). \quad (24.11)$$

Uvnitř vodiče je $E = 0$.

3. Elektrická intenzita pole buzeného dlouhým přímým vláknem s rovnoměrně rozloženým nábojem má radiální směr a velikost

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad (\text{nabitě vlákno}), \quad (24.12)$$

kde τ je délková hustota náboje a r je vzdálenost uvažovaného bodu od vlákna.

4. Elektrická intenzita pole nekonečně velké roviny s konstantní plošnou hustotou náboje σ je kolmá k této rovině a má velikost

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (\text{nabitá plocha — vrstva nábojů}). \quad (24.13)$$

5. Elektrická intenzita vně rovnoměrně nabitě kulové vrstvy o poloměru R a celkovém náboji Q má radiální směr a velikost

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (\text{kulová vrstva, } r > R), \quad (24.15)$$

kde r je vzdálenost od středu kulové vrstvy k bodu, v němž určujeme \mathbf{E} . (Náboj se projevuje tak, jako by byl všechen soustředěn ve středu vrstvy.) Intenzita pole uvnitř rovnoměrně nabitě kulové vrstvy je rovna nule:

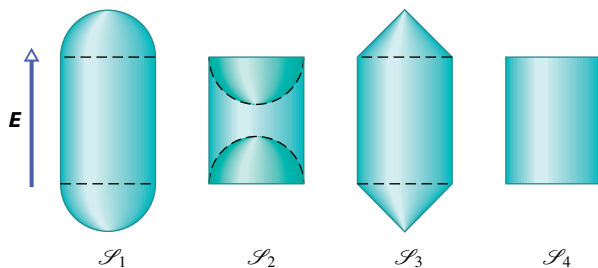
$$E = 0 \quad (\text{kulová vrstva, } r < R). \quad (24.16)$$

6. Elektrická intenzita uvnitř homogenně nabitě koule o poloměru R , $r < R$, má radiální směr a velikost

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r. \quad (24.19)$$

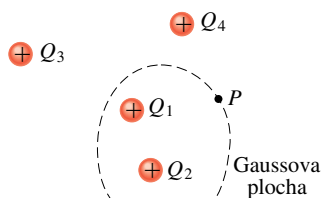
OTÁZKY

- Plocha je charakterizována vektorem $\mathbf{S} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \text{ m}^2$. Jaký je tok intenzity elektrického pole touto plochou, je-li (a) $\mathbf{E} = 4\mathbf{i} \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$, (b) $\mathbf{E} = 4\mathbf{k} \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$?
- Určete $\int dS$ pro (a) čtvercovou plochu o straně a , (b) kruh o poloměru r , (c) plášť válce o výšce h a poloměru r .
- Na obr. 24.21 jsou čtyři válcovité Gaussovy plochy se stejným pláštěm a podstavami různého tvaru. Tyto plochy se nacházejí v homogenním elektrickém poli o intenzitě \mathbf{E} , která je rovnoběžná s osou válcových ploch. Podstavy \mathcal{S}_1 mají tvar povrchu konvexních polokoulí, podstavy \mathcal{S}_2 konkávních polokoulí, podstavy \mathcal{S}_3 kuželů a podstavy \mathcal{S}_4 tvar kruhů. Seřadte sestupně tyto plochy podle (a) velikosti celkového toku intenzity elektrického pole, (b) podle toku elektrické intenzity horními podstavami.



Obr. 24.21 Otázka 3

- Na obr. 24.22 obepíná Gaussova plocha dvě ze čtyř kladně nabitých částic. (a) Určete, které částice přispívají k vytvoření elektrického pole v bodě P na Gaussově ploše. (b) Který z toků elektrické intenzity touto plochou je větší: tok pole buzeného náboji Q_1 a Q_2 , nebo tok pole buzeného všemi čtyřmi náboji?



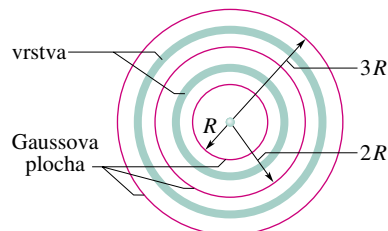
Obr. 24.22 Otázka 4

- Mějme osm částic s náboji $+2Q, +3Q, +4Q, +5Q, -2Q, -3Q, -4Q, -5Q$. Zkuste vytvořit různé Gaussovy plochy obklopující jeden či více z těchto nábojů tak, aby celkový tok plochou byl $0, +Q/\epsilon_0, +2Q/\epsilon_0, \dots, +14Q/\epsilon_0$. Kterou z těchto hodnot není možné dosáhnout?

- Tok elektrického pole kulovou Gaussovou plochou o poloměru r obklopující proton je Φ_E . Určete, ve které z následujících situací je tok menší, roven, či větší než Φ_E : (a) Proton se nachází vně plochy. (b) Uvnitř plochy jsou dva protony. (c) Jeden proton

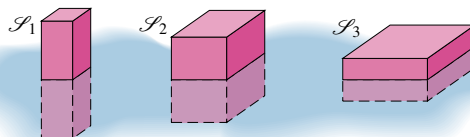
je uvnitř plochy, druhý je vně. (d) Jeden proton a jeden elektron leží uvnitř plochy.

- Na obr. 24.23 jsou zobrazeny v řezu vnitřní kovová koule, dvě kovové kulové vrstvy a tři soustředné kulové Gaussovy plochy o poloměrech $R, 2R, 3R$. Na vnitřní kouli je náboj Q , na kulové vrstvě o menším poloměru je náboj $3Q$, na vrstvě o větším poloměru je náboj $5Q$. Seřadte Gaussovy plochy sestupně podle velikosti elektrické intenzity v libovolném bodě na jejich povrchu.



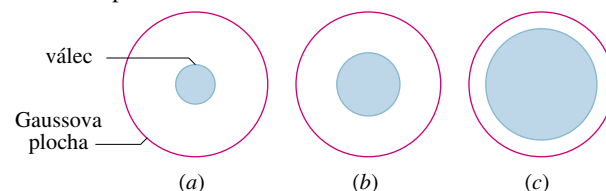
Obr. 24.23 Otázka 7

- Na obr. 24.24 jsou tři Gaussovy plochy tvořené povrchy kvádrů, které jsou částečně zasunuté do velké tlusté kovové desky s konstantní plošnou hustotou náboje. \mathcal{S}_1 má největší výšku a nejmenší čtvercovou základnu, \mathcal{S}_3 má nejmenší výšku a největší čtvercovou základnu a rozměry \mathcal{S}_2 jsou mezi těmito hodnotami. Seřadte sestupně Gaussovy plochy podle velikosti (a) náboje, který obklopují, (b) elektrické intenzity na jejich horních podstavách, (c) toku elektrické intenzity horní podstavou, (d) toku spodní podstavou.



Obr. 24.24 Otázka 8

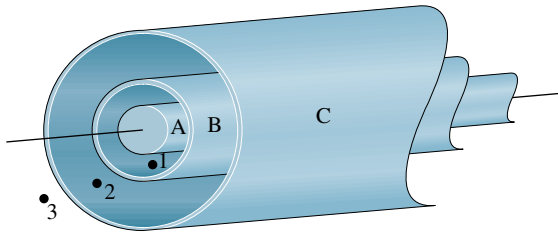
- Na obr. 24.25 je znázorněn řez třemi válci, z nichž každý nese náboj Q . Gaussova plocha je tvořena povrchem sousého válce a má ve všech třech případech stejný poloměr. Seřadte v sestupném pořadí tyto případy podle velikosti elektrické intenzity na Gaussově ploše.



Obr. 24.25 Otázka 9

- Na obr. 24.26 je řez třemi dlouhými sousými dutými válci, na nichž je rovnoměrně rozložen náboj. Na vnitřním válci A je

náboj $Q_A = +3Q_0$. Jaké náboje Q_B a Q_C musí být na válcích B a C, aby (je-li to vůbec možné) elektrická intenzita v bodech 1, 2, 3 byla nulová?



Obr. 24.26 Otázka 10

11. Tři nekonečně velké nevodivé vrstvy s konstantními plošnými hustotami náboje σ , 2σ , 3σ jsou umístěny rovnoběžně, obdobně jako dvě vrstvy na obr. 24.17a. Jaké musí být jejich uspořádání (zleva doprava), aby elektrická intenzita E byla nulová v jedné z oblastí a v jiné oblasti měla velikost $E = 2\sigma/\epsilon_0$?

12. Malá nabitá kulička leží uvnitř tenké kovové kulové vrstvy o poloměru R . Náboje kuličky a vrstvy jsou: (1) $+4Q$ a 0, (2) $-6Q$ a $+10Q$, (3) $+16Q$ a $-12Q$. Seřadte sestupně tyto případy podle velikosti náboje na (a) vnitřní, (b) vnější stěně vrstvy.

13. Seřadte sestupně situace z otázky 12 podle velikosti elektrické intenzity (a) v poloviční vzdálenosti (tj. $R/2$) od středu vrstvy, (b) ve vzdálenosti $2R$ od středu vrstvy.

14. V kontrole 4 určete velikost a směr elektrické intenzity v bodě ležícím ve vzdálenosti r od náboje, který leží ve středu kulové kovové vrstvy, jestliže se tento bod nachází (a) mezi nábojem a vrstvou, (b) v kovu (uvnitř vrstvy), (c) vně vrstvy.

15. Kulový nevodivý balon má na svém povrchu rovnoměrně rozložený kladný náboj. Určete, jak se mění při nafukování balonu velikost elektrické intenzity (zda klesá, roste, nebo zůstává stejná) v bodech, které (a) jsou uvnitř balonu, (b) jsou na povrchu balonu, (c) byly před nafukováním vně, nyní jsou uvnitř balonu, (d) byly a jsou stále vně balonu.

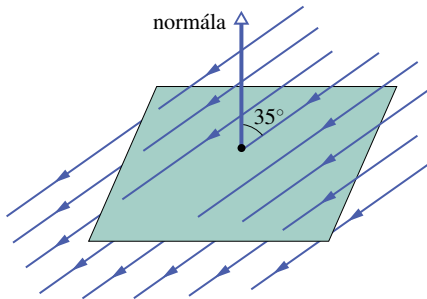
CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 24.2 Tok

1C. Voda v závlahovém kanálu šířky $d = 3,22$ m a hloubky $h = 1,04$ m teče rychlostí o velikosti $v = 0,207$ m·s⁻¹. Tok vody uvažovanou plochou je roven součinu hustoty vody (1 000 kg·m⁻³) a jejího objemového toku touto plochou. Určete tok následujícími plochami: (a) plochou o obsahu hd , která je celá ponořená ve vodě a natočená kolmo k toku vody, (b) plochou $3hd/2$, z níž část hd je ve vodě, kolmo k toku, (c) plochou $hd/2$, která je pod hladinou, kolmo k toku, (d) plochou hd , z níž polovina je ve vodě, polovina nad vodou, kolmo k toku, (e) nakloněnou plochou hd , umístěnou ve vodě, přičemž její normála svírá se směrem toku úhel 34° .

ODST. 24.3 Tok elektrické intenzity

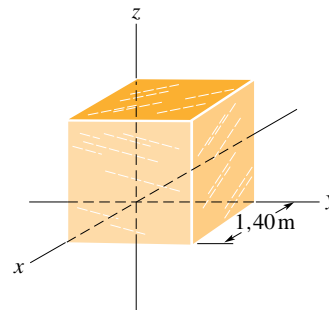
2C. Na obr. 24.27 je čtverec o straně 3,2 mm, který se nachází v homogenním elektrickém poli o intenzitě $1\,800$ N·C⁻¹. Siločáry pole svírají s normálou čtvercové plochy úhel 35° . Vypočítejte tok elektrické intenzity touto plochou.



Obr. 24.27 Cvičení 2

3C. V homogenním elektrickém poli je umístěna krychle o hraně 1,40 m (obr. 24.28). Vypočítejte tok elektrické intenzity

pravou stěnou krychle, je-li intenzita vyjádřena v N·C⁻¹: (a) $6,00\mathbf{i}$, (b) $-2,00\mathbf{j}$, (c) $-3,00\mathbf{i} + 4,00\mathbf{k}$. (d) Jaký je celkový tok elektrické intenzity povrchem krychle pro každé z těchto polí?



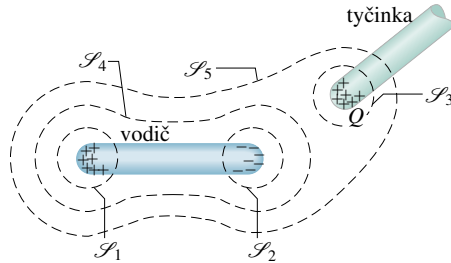
Obr. 24.28 Cvičení 3 a úloha 12

4Ú. V elektrickém poli o intenzitě $\mathbf{E} = 4\mathbf{i} - 3(y^2 + 2)\mathbf{j}$ (N·C⁻¹) je umístěna krychle (obr. 24.5). Vyjádřete tok intenzity (a) horní podstavou, (b) dolní podstavou, (c) levou stěnou, (d) zadní stěnou krychle. (e) Jaký je celkový tok intenzity všemi stěnami krychle?

ODST. 24.4 Gaussův zákon elektrostatiky

5C. Uvažujme čtyři náboje $2Q$, Q , $-Q$, $-2Q$. Popište, jak umístíte (je-li to vůbec možné) uzavřenou plochu tak, aby obklopovala v každém případě první z nábojů a aby jí procházel tok (a) 0, (b) $+3Q/\epsilon_0$, (c) $-2Q/\epsilon_0$.

6C. V obr. 24.29 je náboj izolovaného neutrálního vodiče polarizován kladně nabitou tyčinkou. Jaký je celkový tok každou z pěti Gaussových ploch S_1 až S_5 ? Předpokládejme, že náboje uvnitř ploch S_1 , S_2 , S_3 jsou ve všech případech stejně velké.

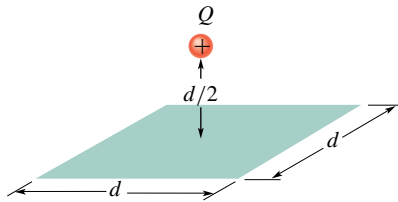


Obr. 24.29 Cvičení 6

7C. Bodový náboj $1,8 \mu\text{C}$ se nachází uprostřed krychle o hraně 55 cm . Určete celkový tok elektrické intenzity povrchem krychle.

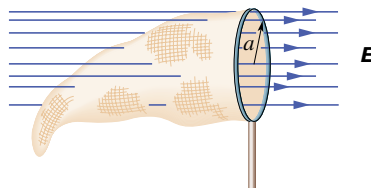
8C. Celkový tok intenzity každou stěnou hrací kostky (v jednotkách $10^3 \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-1}$) má velikost danou počtem N ok na stěně (tj. 1 až 6). Tok pro lichá čísla je záporný, pro sudá čísla je kladný. Určete celkový náboj, který se nachází uvnitř kostky.

9C. Na obr. 24.30 se bodový náboj $+Q$ nachází ve vzdálenosti $d/2$ přímo nad středem čtverce o straně d . Určete elektrické intenzity čtvercem. (Tip: Považujte čtverec za jednu stěnu krychle o hraně d .)



Obr. 24.30 Cvičení 9

10C. Síťka na motýly se nachází v homogenním elektrickém poli o intenzitě \mathbf{E} (obr. 24.31). Její kruhový rám o poloměru a je kolmý ke směru pole. Určete tok elektrické intenzity sítkou.



Obr. 24.31 Cvičení 10

11C. Vypočítejte tok Φ_E elektrické intenzity (a) základnou, (b) kulovým povrchem polokoule o poloměru R . Elektrické pole \mathbf{E} je homogenní a je orientováno kolmo k základně polokoule, přičemž siločáry do ní vstupují její základnou.

12Ú. Vyjádřete celkový tok povrchem krychle ze cvičení 3 a obr. 24.28, jestliže elektrická intenzita je rovna (a) $\mathbf{E} = 3,00y\mathbf{j}$, (b) $\mathbf{E} = -4,00i + (6,00 + 3,00y)\mathbf{j}$. Intenzita E je vyjádřena v $\text{N}\cdot\text{C}^{-1}$, souřadnice y v metrech. (c) Jak velký náboj se v obou případech nachází uvnitř krychle?

13Ú. Jaký celkový náboj se nachází uvnitř Gaussovy plochy tvořené povrchem krychle v úloze 4 (obr. 24.5)?

14Ú. Ve výšce 300 m byla naměřena intenzita elektrického pole o velikosti $60,0 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$, ve výšce 200 m pak $100 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$. V obou případech směřovala elektrická intenzita svisle k Zemi. Stanovte celkový náboj uzavřený v krychli o hraně 100 m , jejíž spodní stěna leží ve výšce 200 m . Zakřivení Země zanedbejte.

15Ú. Bodový náboj Q se nachází v jednom rohu krychle o hraně a . Jaký je tok intenzity každou ze stěn krychle? (Tip: Použijte Gaussův zákon a využijte symetrie úlohy.)

16Ú. „Gaussův zákon pro gravitační pole“ má tvar:

$$\frac{1}{4\pi G} \Phi_g = \frac{1}{4\pi G} \oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -m,$$

kde G je gravitační konstanta a Φ_g je tok intenzity \mathbf{g} gravitačního pole Gaussovou plochou, která obklopuje hmotný bod o hmotnosti m . Intenzita pole \mathbf{g} je rovna zrychlení testovací částice, na kterou bodové těleso o hmotnosti m působí gravitační silou. Odvoďte z uvedeného vztahu Newtonův gravitační zákon. Jaký je význam znaménka minus?

ODST. 24.6 Nabitý izolovaný vodič

17C. Intenzita elektrického pole těsně nad povrchem nabitého válce fotokopírky má velikost $E = 2,3 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$. Jaká je plošná hustota náboje na válci za předpokladu, že válec je vodič?

18C. Rovnoměrně nabitá vodivá koule o průměru $1,2 \text{ m}$ má plošnou hustotu náboje $8,1 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$. (a) Určete celkový náboj na jejím povrchu. (b) Jaký je celkový tok intenzity povrchem koule?

19C. Na povrch družic, které prolétají radiálními pásy Země, dopadá značné množství elektronů. Výsledný nahromaděný náboj může poškodit elektronické součástky a rušit jejich činnost. Předpokládejme, že kovová družice ve tvaru koule o průměru $1,3 \text{ m}$ nashromáždí při jednom obletu Země náboj $2,4 \mu\text{C}$. (a) Určete výslednou plošnou hustotu náboje na povrchu družice. (b) Jaká je těsně nad povrchem družice intenzita pole, které je vytvořeno povrchovým nábojem?

20C. Vodivá koule nesoucí kladný náboj Q je obklopena kulovou vodivou vrstvou. (a) Jak velký náboj je na vnitřní stěně vrstvy? (b) Další kladný náboj Q_1 je umístěn vně vrstvy. Jaký bude nyní náboj na vnitřní stěně vrstvy? (c) Jaký bude náboj na vnitřní stěně vrstvy, jestliže se nyní náboj Q_1 nachází mezi kulovou vrstvou a koulí? (d) Zůstávají naše odpovědi platné, i kdyby koule a kulová vrstva nebyly soustředné?

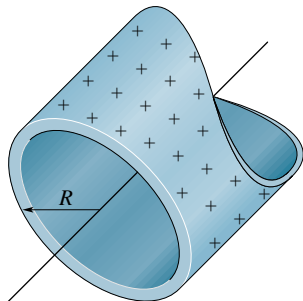
21Ú. Izolovaný vodič libovolného tvaru nese kladný náboj $10 \cdot 10^{-6} \text{ C}$. Uvnitř vodiče je dutina, v níž se nachází bodový náboj $Q = 3,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$. Určete velikost náboje indukovaného (a) na stěnách dutiny, (b) na vnější stěně vodiče.

ODST. 24.7 Použití Gaussova zákona: válcová symetrie

22C. Náboj nekonečně dlouhého vlákna vytváří ve vzdálenosti 2 m elektrostatické pole o intenzitě velikosti $4,5 \cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$. Vypočítejte délkovou hustotu náboje na vlákně.

23C. (a) Válec kopírky ze cvič. 17 má délku 42 cm a průměr 12 cm. Jaký celkový náboj nese? (b) Výrobce si přeje vytvořit desktopovou verzi kopírky. To vyžaduje, aby se zmenšily rozměry válce na délku 28 cm a průměr 8 cm. Přitom se nesmí změnit elektrické pole povrchu válce. Jaký náboj ponese nový válec?

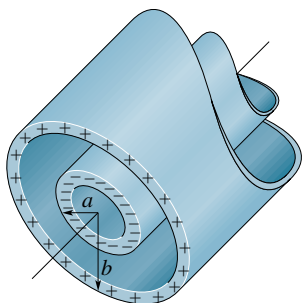
24Ú. Na obr. 24.32 je řez dlouhou tenkostěnnou kovovou trubkou o poloměru R , která nese na povrchu náboj s délkovou hustotou τ . Vyjádřete velikost intenzity E jako funkci vzdálenosti r od osy trubky pro (a) $r > R$, (b) $r < R$. Nakreslete graf této funkce v intervalu od $r = 0$ do $r = 5,0$ cm, jestliže $\tau = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-1}$ a $R = 3,0$ cm. (Tip: Použijte válcovou Gaussovu plochu, sousou s kovovou trubkou.)



Obr. 24.32 Úloha 24

25Ú. Na obr. 24.33 je řez dvěma dlouhými sousými válci o poloměrech a , b , kde $a < b$. Válce nesou stejně velké, ale opačné náboje rozložené s konstantní délkovou hustotou τ . Užitím Gaussova zákona dokažte, že (a) pro $r < a$ je $E = 0$, (b) mezi válci, tj. pro $a < r < b$, je

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r}.$$

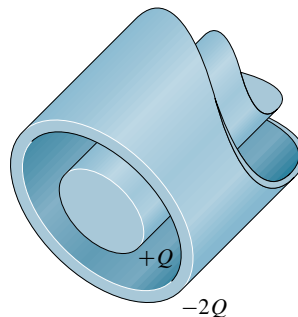


Obr. 24.33 Úloha 25

26Ú. Dlouhý přímý drát nese záporný náboj s délkovou hustotou $\tau = 3,6 \text{ nC} \cdot \text{m}^{-1}$. Drát je obklopen sousým nevodivým dutým válcem o vnějším poloměru 1,5 cm. Válec má mít přitom na své vnější stěně kladný náboj s plošnou hustotou σ takovou, aby celkové vnější pole bylo nulové. Vypočítejte potřebnou hodnotu σ .

27Ú. Velmi dlouhá vodivá válcová tyčinka délky L nesoucí náboj $+Q$ se nachází uvnitř vodivé válcové trubky (rovněž

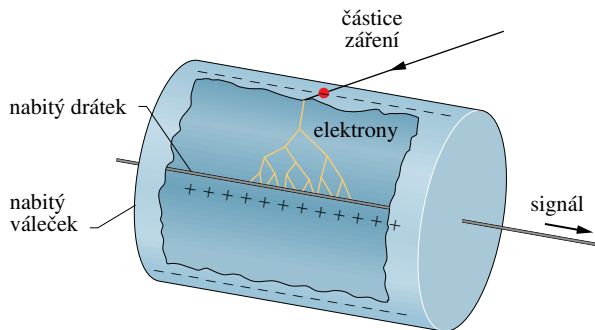
délky L), která má náboj $-2Q$ (obr. 24.34). Použitím Gaussova zákona najděte (a) elektrickou intenzitu pole v bodech vně vodivé trubky, (b) rozložení náboje na vodivé trubce, (c) elektrickou intenzitu pole mezi tyčinkou a trubkou.



Obr. 24.34 Úloha 27

28Ú. Dva dlouhé nabitě sousé válce mají poloměry 3,0 cm a 6,0 cm. Délková hustota náboje na vnitřním válci je $+5,0 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot \text{m}^{-1}$, na vnějším válci $-7,0 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot \text{m}^{-1}$. Určete elektrickou intenzitu ve vzdálenosti (a) $r = 4,0$ cm, (b) $r = 8,0$ cm od osy válců.

29Ú. Na obr. 24.35 je princip Geigerova čítače pro detekci ionizujícího záření. Jeho součástí je tenký, kladně nabitý drátek, kolem něhož je soustředný dutý váleček nesoucí stejně velký záporný náboj. Tím se uvnitř válečku vytvoří silné radiální



Obr. 24.35 Úloha 29

pole. Uvnitř válečku je inertní plyn pod nízkým tlakem. Vnikne-li záření dovnitř válečku, ionizuje několik atomů plynu. Vzniklé volné elektrony jsou přitahovány směrem ke kladně nabitému drátku. Elektrické pole je tak intenzivní, že volné elektrony získají mezi srážkami s jinými atomy plynu energii dostatečnou pro další ionizaci. Tím narůstá počet volných elektronů a proces se opakuje, dokud elektrony nedorazí k drátku. Výsledná „lavina“ elektronů dopadá na drátek a vytváří signál, který indikuje průchod původní částice záření. Předpokládejte, že drátek má poloměr $25 \mu\text{m}$, váleček má poloměr 1,4 cm a délku 16 cm. Určete celkový náboj drátku, je-li intenzita elektrického pole na vnitřní stěně válečku $2,9 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$.

30Ú. Pozitron s nábojem $1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ obíhá po kruhové dráze o poloměru r mezi válci z úlohy 25. Určete jeho kinetickou

energii v elektronvoltech. Předpokládejte, že $a = 2,0 \text{ cm}$, $b = 3,0 \text{ cm}$, $\tau = 30 \text{ nC}\cdot\text{m}^{-1}$.

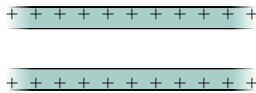
31C. Náboj je rovnoměrně rozložen v objemu nekonečně dlouhého válce o poloměru R . (a) Dokažte, že ve vzdálenosti r od osy válce ($r < R$) platí

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0},$$

kde ρ je objemová hustota náboje. (b) Napište výraz pro E , jestliže $r > R$.

ODST. 24.8 Použití Gaussova zákona: rovinná symetrie

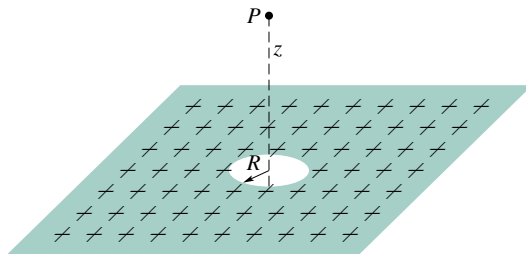
32C. Na obr. 24.36 je řez dvěma velkými, rovnoběžnými nevodivými deskami, na nichž je rovnoměrně rozložen kladný náboj s plošnou hustotou σ . Určete E v bodech (a) nad vrstvami, (b) mezi nimi, (c) pod nimi.



Obr. 24.36 Cvičení 32

33C. Čtvercová kovová deska zanedbatelné tloušťky o straně $8,0 \text{ cm}$ nese celkový náboj $6,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$. (a) Určete velikost intenzity elektrického pole těsně nad středem desky (např. ve výšce $0,50 \text{ mm}$), je-li náboj rozdělen rovnoměrně po obou stěnách desky. (b) Určete E ve vzdálenosti 30 m , můžeme-li z této vzdálenosti považovat desku za bodový náboj.

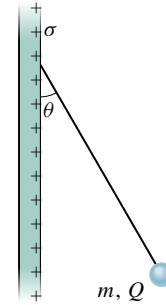
34C. Ve středu velké rovinné nevodivé plochy s plošnou hustotou náboje σ je vyražen malý kruhový otvor o poloměru R (obr. 24.37). Zanedbejte zakřivení siločár kolem okrajů a vypočítejte elektrickou intenzitu v bodě P na ose otvoru ve vzdálenosti z od jeho středu. (Tip: Rov. (23.24) a princip superpozice.)



Obr. 24.37 Cvičení 34

35Ú. Na obr. 24.38 je nevodivá kulička o hmotnosti $m = 1,0 \text{ mg}$ nesoucí náboj $Q = 2,0 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ rovnoměrně rozložený v celém objemu. Kulička je upevněna na nevodivém závěsu, který svírá úhel $\theta = 30^\circ$ se svislou rovnoměrně nabitou nevodivou deskou. Vypočítejte plošnou hustotu náboje σ na desce, přičemž berte v úvahu hmotnost kuličky a předpokládejte, že deska není prostorově ohraničená.

36Ú. Dvě velké, tenké a rovnoběžné kovové desky leží blízko sebe (obr. 24.16c); levá deska je záporně nabitá. Desky mají na



Obr. 24.38 Úloha 35

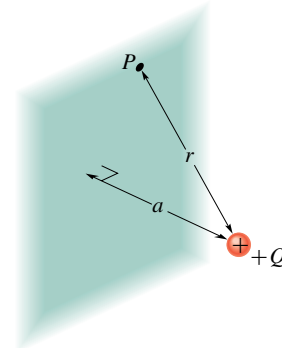
vnitřních stěnách náboje opačných znamének s plošnou hustotou $\sigma = 7,0 \cdot 10^{-22} \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}$. Určete velikost a směr elektrické intenzity \mathbf{E} (a) vlevo od desek, (b) vpravo od nich, (c) mezi nimi.

37Ú. Elektron je vystřelen kolmo k velké kovové desce, která nese záporný náboj s plošnou hustotou $2,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}$. Počáteční kinetická energie elektronu je 100 eV . V důsledku odpuzovacích sil se elektron zastaví právě v okamžiku, kdy se dotkne desky. Určete vzdálenost, ze které byl vystřelen.

38Ú. Dvě rovnoběžné kovové desky o ploše $1,0 \text{ m}^2$ jsou od sebe vzdáleny 5 cm a nesou na vnitřních stěnách stejně velké opačné náboje. Jak velký je náboj na deskách, je-li velikost intenzity elektrostatického pole mezi deskami rovna $55 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$? Neuvažujte změny pole v blízkosti hran desek.

39Ú. Při laboratorním pokusu je tíhová síla elektronu právě vyvážena silou, kterou na něj působí elektrostatické pole vytvořené dvěma velkými, rovnoběžnými nevodivými opačně nabitými deskami vzdálenými od sebe $2,3 \text{ cm}$. Určete (a) velikost plošné hustoty náboje na deskách (za předpokladu, že je homogenní), (b) směr intenzity pole.

40Ú*. Kladný náboj Q , který se nachází ve vzdálenosti a od nekonečně velké vodivé roviny, indukuje na této rovině záporný náboj s plošnou hustotou $\sigma = -Qa/(2\pi r^3)$, kde r je vzdálenost bodu P od náboje $+Q$ na rovině (obr. 24.39). Určete (a) velikost



Obr. 24.39 Úloha 40

složky elektrické intenzity \mathbf{E} kolmé k vodivé rovině pocházející od indukovaného náboje, (b) celkový záporný náboj indukovaný na této rovině. (c) Jaká je elektrostatická síla mezi nábojem $+Q$ a nábojem indukovaným na vodivé rovině? Je přitažlivá, nebo

odpudivá? (d) Jaký náboj, umístěný ve stejné vzdálenosti, ale na opačné straně roviny, by vytvořil tutéž sílu?

41Ú* Rovinná vrstva tloušťky d je rovnoměrně nabitá s objemovou hustotou náboje ρ . Určete velikost elektrické intenzity pole v bodech (a) uvnitř, (b) vně vrstvy, a to jako funkci x , tj. kolmé vzdálenosti měřené od střední roviny vrstvy.

ODST. 24.9 Použití Gaussova zákona: kulová symetrie

42C. Vodivá koule o poloměru 10 cm nese neznámý náboj. Intenzita elektrostatického pole ve vzdálenosti 15 cm od středu koule má velikost $3,0 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$ a směřuje ke středu koule. Určete náboj na povrchu koule.

43C. Bodový náboj způsobí tok intenzity elektrického pole $-750 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-1}$ kulovou Gaussovou plochou o poloměru 10,0 cm se středem v tomto náboji. (a) Určete, jak velký je tok elektrické intenzity Gaussovou plochou, zvětší-li se její poloměr dvakrát. (b) Určete velikost bodového náboje.

44C. Tenkostěnná kovová koule o poloměru 25 cm nese náboj $2,0 \cdot 10^{-7} \text{ C}$. Určete velikost E pro bod (a) uvnitř koule, (b) těsně nad povrchem koule, (c) ve vzdálenosti 3,0 m od středu koule.

45C. Bodový náboj $Q = 1,0 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ je umístěn ve středu kulové dutiny o poloměru 3,0 cm, která je vytvořena v kovovém bloku. Pomocí Gaussova zákona elektrostatiky vyjádřete velikost elektrické intenzity v bodě (a) P_1 , který je v poloviční vzdálenosti mezi nábojem a stěnou dutiny, (b) P_2 uvnitř kovu.

46C. Dvě nabitě soustředné kulové plochy mají poloměry 10,0 cm a 15,0 cm. Náboj na vnitřní z nich je $4,00 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ a náboj na vnější je $2,00 \cdot 10^{-8} \text{ C}$. Určete velikost elektrické intenzity ve vzdálenosti (a) $r = 12,0 \text{ cm}$, (b) $r = 20,0 \text{ cm}$ od jejich středu.

47C. Tenká kovová kulová vrstva o poloměru a nese náboj Q_a . S ní soustředná tenká kulová vrstva o poloměru b ($b > a$) nese náboj Q_b . Vypočítejte velikost elektrické intenzity ve vzdálenosti r od středu, je-li (a) $r < a$, (b) $a < r < b$, (c) $r > b$. (d) Jaké jsou náboje na vnitřních i vnějších stěnách obou vrstev?

48C. V článku z r. 1911 Ernest Rutherford napsal: Abychom si vytvořili určitou představu o silách, které by mohly letící částici α vychýlit, uvažujme atom, který má uprostřed bodový kladný náboj Ze , kolem něhož jsou rovnoměrně rozloženy záporné náboje $-Ze$ v kouli o poloměru R . Elektrická intenzita E ve vzdálenosti r od středu má v bodě nacházejícím se uvnitř atomu velikost

$$E = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3} \right).$$

Ověřte tuto rovnici (tzv. *Rutherfordův vztah*).

49C. Rov. (24.11) $E = \sigma/\epsilon_0$ vyjadřuje elektrickou intenzitu v bodě, který se nachází v blízkosti nabitě vodivé plochy. Použijte tuto rovnici na nabitou kouli o poloměru r nesoucí náboj Q a dokažte, že elektrické pole vně koule je stejné jako pole bodového náboje, umístěného ve středu koule.

50Ú. Proton obíhá po kružnici rychlostí $v = 3 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ těsně nad nabitou koulí o poloměru $r = 1,00 \text{ cm}$. Určete náboj koule.

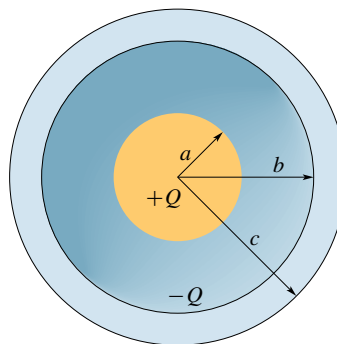
51Ú. Bodový náboj $+Q$ se nachází ve středu elektricky neutrální duté vodivé koule o vnitřním poloměru a a vnějším poloměru b . Jaký náboj se objeví (a) na vnitřní stěně, (b) na vnější stěně koule? Najděte výrazy pro celkovou intenzitu elektrického pole ve vzdálenosti r od středu koule, jestliže (c) $r < a$, (d) $b > r > a$, (e) $r > b$. Nakreslete siločáry pro tyto tři oblasti. Pro případ $r > b$ určete intenzitu elektrického pole pocházející (f) od středového bodového náboje a náboje vnitřní stěny, (g) od vnější nabitě stěny.

Nyní umístěte vně duté koule další bodový náboj $-Q$. Změní tento náboj rozložení nábojů na (h) vnější ploše, (i) vnitřní ploše? Nakreslete pro tyto případy elektrické siločáry. (j) Zjistěte, zda působí na druhý bodový náboj nějaká elektrostatická síla. (k) Působí nějaká další elektrostatická síla na první bodový náboj? (l) Odporuje tato situace třetímu Newtonovu zákonu?

52Ú. V plně nevodivé kouli o poloměru R je nerovnoměrně rozložen náboj s objemovou hustotou $\rho = \rho_0 r/R$, kde ρ_0 je konstanta a r je vzdálenost od středu koule. Dokažte, že (a) celkový náboj na kouli je $Q = \pi \rho_0 R^3$, (b) intenzita elektrického pole uvnitř koule má velikost

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^4} r^2.$$

53Ú. Na obr. 24.40 je koule o poloměru a a s ní soustředná kulová vodivá vrstva o vnitřním poloměru b a vnějším poloměru c . Koule má náboj $+Q$, který je rovnoměrně rozložen v jejím objemu a vodivá kulová vrstva má náboj $-Q$. Vyjádřete závislost elektrické intenzity na poloměru r (a) uvnitř koule ($r < a$), (b) mezi koulí a vrstvou ($a < r < b$), (c) uvnitř vrstvy ($b < r < c$), (d) vně vrstvy ($r > c$). (e) Jak velký náboj se nachází na vnitřní a vnější stěně vrstvy?

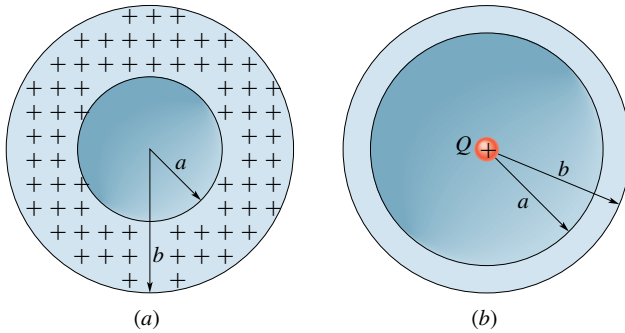


Obr. 24.40 Úloha 53

54Ú. Na obr. 24.41a je znázorněna nabitá kulová vrstva (vnitřní poloměr $a = 10 \text{ cm}$, vnější poloměr $b = 20 \text{ cm}$) s objemovou hustotou náboje $\rho = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}$. Nakreslete závislost velikosti E na vzdálenosti r pro r od 0 do 30 cm.

55Ú. Na obr. 24.41b je nevodivá kulová vrstva o vnitřním poloměru a , vnějším poloměru b s objemovou hustotou náboje $\rho = A/r$ (uvnitř vrstvy), kde A je konstanta a r je vzdálenost od středu kulové vrstvy. Do středu systému umístěte bodový náboj Q . Jaká by měla být velikost A , aby pole ve vrstvě

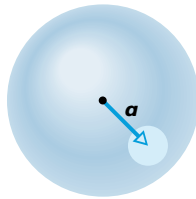
($a \leq r \leq b$) bylo homogenní? (Tip: Konstanta A závisí na a , ale ne na b .)



Obr. 24.41 Úlohy 54 a 55

56Ú. Atom vodíku můžeme považovat za soustavu, kterou tvoří proton s kladným nábojem $+e$ a obíhající elektron, jehož náboj $-e$ je rozložen kolem protonu s objemovou hustotou $\rho = Ae^{-2r/a_0}$, kde A je konstanta, $a_0 = 0,53 \cdot 10^{-10}$ m je Bohrov poloměr a r je vzdálenost od středu atomu. (a) Atom vodíku je elektricky neutrální. Stanovte konstantu A . (b) Poté určete velikost intenzity elektrického pole atomu pro Bohrov poloměr.

57Ú*. V nevodivé kouli je rovnoměrně rozložen náboj s objemovou hustotou ρ . Nechť \mathbf{r} je polohový vektor obecného bodu P uvnitř koule vzhledem k jejímu středu. (a) Dokažte, že intenzita elektrického pole v bodě P je $\mathbf{E} = \rho\mathbf{r}/(3\epsilon_0)$. (Všimněte si, že tento výsledek nezávisí na poloměru koule.) (b) Do koule vyvrtáme nesoustřednou kulovou dutinu (obr. 24.42). Pomocí principu superpozice ukažte, že intenzita elektrického pole v každém bodě dutiny je $\mathbf{E} = \rho\mathbf{a}/(3\epsilon_0)$ (je tedy homogenní), kde \mathbf{a} je polohový vektor středu dutiny. (Všimněte si, že výsledek nezávisí ani na poloměru koule, ani na poloměru dutiny.)



Obr. 24.42 Úloha 57

58Ú*. Kulově symetrické, ale nehomogenní rozložení nábojů vytváří elektrické pole o intenzitě $E(r) = Kr^4$, které směřuje radiálně od středu koule, přičemž r je vzdálenost od středu. Jaká je objemová hustota nábojů?

PRO POČÍTAČ

59Ú. V Rutherfordově vztahu (cvič. 48) pro velikost elektrické intenzity E uvnitř atomu položte $r = \alpha R$ a nakreslete závislost E na α v intervalu $0 < \alpha < 1$. Nakreslete také závislost E' na α pro případ, kdy elektrické pole je vytvořeno pouze samotným nukleonem. Z těchto dvou křivek určete hodnotu α , pro niž $E = 0,500E'$.

60Ú. Počítačem lze snadno ověřit Gaussův zákon ve všech situacích, nejen v takových, kde lze tok elektrické intenzity snadno určit z vhodné symetrie v rozložení nábojů a podle toho vhodné zvolené Gaussovy plochy. Ukažme to na poli bodového náboje a Gaussově ploše tvaru povrchu krychle. Délku její hrany zvolíme $d = 1,000$ m, střed soustavy souřadnic umístíme do středu krychle a osy orientujeme ve směru jejích hran. Na osu y umístíme do polohy y' náboj $1,00 \mu\text{C}$.

Rozdělte každou stěnu krychle na malé čtverečky, pokládejte \mathbf{E} na celém čtverečku za konstantní, vypočtete dílčí tok každým tímto čtverečkem a toky sečtete; tím dostanete tok každou stěnou krychle. Na závěr sečtete toky všemi stěnami; tím dostanete celkový tok Gaussovou plochou. Porovnejte získaný výsledek s výrazem Q/ϵ_0 podle Gaussova zákona, v němž Q je celkový náboj uvnitř krychle. Čím menší čtverečky použijete pro výpočet, tím přesnější výsledek můžete očekávat, protože tím výstižněji lze považovat \mathbf{E} za konstantní na celém čtverečku. Pro výpočet na tři platná místa stačí rozdělit povrch krychle na čtverečky o straně rovné jedné třicetině hrany krychle. Elektrická intenzita v bodě (x, y, z) má složky

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3}, \quad E_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y - y'}{r^3}, \quad E_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3},$$

kde $r = \sqrt{x^2 + (y - y')^2 + z^2}$. Polohu y' náboje zvolte takto: (a) $y' = 0$ (náboj ve středu krychle), (b) $y' = 0,200$ m (náboj uvnitř krychle), (c) $y' = 0,400$ m (náboj uvnitř krychle), (d) $y' = 0,600$ m (náboj vně krychle).