

# 20

## *Kinetická teorie plynů*



---

*Představte si, že jste se právě vrátili z lyžařské túry do promrzlé chaty; co uděláte nejdříve? Nejspíš zatopíte v kamnech — a proč? Řeklo by se, že kamna zvýší obsah vnitřní („tepelné“) energie vzduchu v celé místnosti natolik, že se v něm budete cítit příjemně. Jakkoliv to vypadá logicky, má to velkou slabinu: vnitřní energie veškerého vzduchu v místnosti se totiž zahřátím nezmění. Jak je to možné? A když je tomu tak, proč tedy v kamnech topíme?*

---

## 20.1 NOVÝ POHLED NA PLYNY

Klasická termodynamika, kterou jsme se zabývali v minulé kapitole, nepojednává vůbec o atomech. V jejích zákonech vystupují pouze makroskopické veličiny jako objem, tlak a teplota. Přesto je všeobecně známo, že plyn je souhrn obrovského množství atomů a molekul (tj. skupin atomů vázaných k sobě). Tlak vyvolaný plynem jistě souvisí s nepřetržitým „bubnováním“ jeho molekul na stěny nádoby. Schopnost plynu vyplnit zcela objem nádoby je zase spojena s možností volného pohybu molekul. A konečně teplota a vnitřní energie plynu určitě souvisí s kinetickou energií těchto molekul. Když vyjdeme z těchto představ, jistě získáme nové poznatky o plynech. Tento molekulový přístup nazýváme **kinetickou teorií plynů**; ta je také náplní této kapitoly.

## 20.2 AVOGADROVA KONSTANTA

Obrátíme-li v dalším svou pozornost na molekuly, bude rozumné měřit velikost zkoumaných soustav v molech. Pak si totiž můžeme být jisti, že dva porovnávané vzorky mají stejný počet molekul. Jednotka **mol**, se kterou jsme se setkali již na konci čl. 1.6, je jednou ze sedmi základních jednotek soustavy SI a je definována takto:

Jeden mol je počet atomů obsažených ve 12 gramech uhlíku  $^{12}\text{C}$ .

Říkáme „jeden mol helia“ nebo „jeden mol vody“ a rozumíme tím jistý počet základních jednotek zkoumaného systému. Ale stejně dobře bychom mohli uvažovat „jeden mol tenisáků“, přičemž základní jednotkou by byl jeden tenisový míček.

První, co nás však napadne, je otázka: „A kolik atomů nebo molekul je v jednom molu?“ Odpověď byla zjištěna experimentálně; je to

$$N_A \doteq 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \quad (\text{Avogadrova konstanta}). \quad (20.1)$$

Toto číslo nazýváme **Avogadrova konstanta** (dříve též **Avogadrovo číslo**) podle italského vědce Amadea Avogadra (1776–1856), který formuloval hypotézu, že stejné objemy všech plynů za stejné teploty a stejného tlaku obsahují stejný počet molekul.

Počet molů  $n$  ve vzorku libovolné látky lze určit ze vztahu

$$n = \frac{N}{N_A}, \quad (20.2)$$

kde  $N$  je počet molekul ve vzorku. Počítat jednotlivé molekuly však není snadné, a tak počet molů  $n$  ve vzorku

určujeme z jeho hmotnosti  $m_x$  a buďto z molární hmotnosti  $m_m$  (tj. hmotnosti 1 molu uvažované látky), anebo z hmotnosti  $m'$  jedné molekuly:

$$n = \frac{m_x}{m_m} = \frac{m_x}{m' N_A}. \quad (20.3)$$

Extrémně vysoká hodnota Avogadrovy konstanty poukazuje na to, jak malé a jak početné musí být atomy. Jeden mol vzduchu se například bez problémů vejde do kufru. Pokud bychom tyto molekuly rovnoměrně rozprostřeli po povrchu Země, bylo by jich kolem 120 000 na čtverečný centimetr. Jiný příklad: jeden mol tenisáků by vyplnil stejný objem jako sedm Měsíců.

### RADY A NÁMĚTY

**Bod 20.1:** *Počet molů — ale čeho?*

Řekneme-li „jeden mol helia“, znamená to vždy  $6,02 \cdot 10^{23}$  atomů He a také  $6,02 \cdot 10^{23}$  molekul He, protože pojem atomu splývá u helia s pojmem molekuly jako nejmenší částičky materiálu, zachovávající si stále ještě (chemické) vlastnosti celku. Naproti tomu označení „jeden mol vodíku“ je dvojnásobné; míníme-li atomy H (každý má hmotnost  $1,6 \cdot 10^{-27}$  kg), tak 1 mol tvoří  $(1 \text{ mol}) \cdot (6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}) \cdot (1,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}) \doteq 1 \text{ g}$  vodíku. Míníme-li však molekuly  $\text{H}_2$ , pak 1 mol molekulového vodíku představuje  $(1 \text{ mol}) \cdot 2(6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}) \cdot (1,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}) \doteq 2 \text{ g}$  vodíku. Stručně a přehledně: je-li v balonku 0,4 g vodíku, je v něm 0,4 mol H (atomy) neboli 0,2 mol  $\text{H}_2$  (molekuly).

## 20.3 IDEÁLNÍ PLYNY

V této kapitole chceme vysvětlit makroskopické vlastnosti plynu (jako je tlak a teplota) na základě chování jeho molekul. Okamžitě ale vyvstává otázka: „Jakého plynu?“ Měl by to být vodík či kyslík nebo metan anebo dokonce fluorid uranový? Tyto plyny jsou samozřejmě různé. Nicméně bylo experimentálně zjištěno, že když uzavřeme různé plyny stejného látkového množství (např. 1 mol) a stejné teploty do nádob stejného objemu, naměříme v každé nádobě téměř stejný tlak. Jestliže opakujeme měření při snížené hustotě, pak i tento rozdíl mezi tlaky prakticky vymizí. Také jiné experimenty potvrzují, že se reálné plyny při nízkých hustotách chovají podle vztahu

$$pV = nRT \quad (\text{ideální plyn}), \quad (20.4)$$

kteřímu říkáme **stavová rovnice ideálního plynu**. V této rovnici značí  $p$  tlak plynu (absolutní, nikoli přetlak!),  $n$  je



počet molů plynu a  $R$  je tzv. **plynová konstanta**, která má pro všechny plyny stejnou hodnotu

$$R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}. \quad (20.5)$$

Teplota  $T$  v rov. (20.4) musí být vyjádřena v kelvinech. Pokud je hustota plynu dostatečně nízká, popisuje rov. (20.4) jakýkoli plyn nebo směs různých plynů, přičemž  $n$  značí celkový počet molů všech plynů.

Můžete se ovšem také ptát: „Co je to ideální plyn a co je vlastně na něm tak *ideální*?“ Odpověď je skryta v jednoduchosti rov. (20.4), která popisuje jeho makroskopické vlastnosti. Pomocí této rovnice, jak uvidíme později, budeme schopni snadno nalézt mnoho vlastností ideálních plynů. Přestože se v přírodě nesetkáme s opravdovým ideálním plynem, všechny reálné plyny se k němu blíží při nízkých hustotách, což odpovídá větším vzdálenostem mezi molekulami. Studium ideálního plynu nám tak umožňuje snáze nahlédnout do chování skutečných plynů v tomto limitním případě.

### Práce konaná ideálním plynem za stálé teploty

Uvažujme  $n$  molů ideálního plynu uzavřeného do válce pod pístem. Nechme ho zvětšovat objem z počáteční hodnoty  $V_i$  na koncovou hodnotu  $V_f$ , přičemž teplotu během tohoto děje udržujeme konstantní. Takový proces nazýváme **izotermické rozpínání** (neboli **izotermická expanze**) a opačný proces **izotermické stlačení** (neboli **izotermická komprese**).

Zobrazíme-li uvažovaný izotermický děj jako závislost tlaku plynu na jeho teplotě v tzv.  $p$ - $V$  diagramu, obdržíme část křivky (na obr. 20.1 úsek prostřední křivky od počátečního stavu  $\mathcal{S}_i$  do koncového stavu  $\mathcal{S}_f$ ) nazývané **izoterma**. Obecně je izoterma křivka, na níž leží body o stejné teplotě. V případě ideálního plynu je popsána vztahem

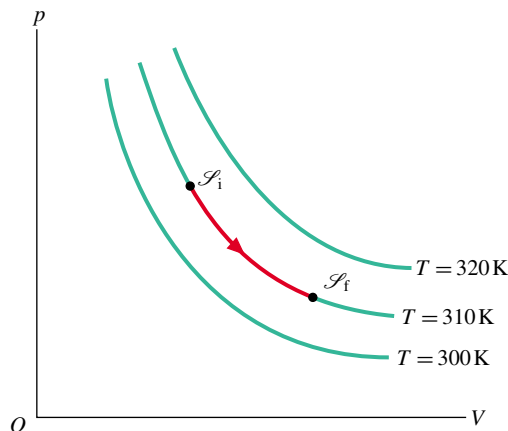
$$p = nRT \frac{1}{V} = \text{konst.} \frac{1}{V}, \quad (20.6)$$

kde teplotu  $T$  udržujeme konstantní. Pro tři různé teploty je tato závislost ukázána na obr. 20.1.

Vypočteme nyní práci, kterou vykoná ideální plyn při izotermickém rozpínání. Z předchozí kapitoly (viz rov. (19.23)) známe obecný vztah

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p \, dV \quad (20.7)$$

pro práci vykonanou plynem při změně jeho objemu. Protože se zde zabýváme ideálním plynem, můžeme za  $p$  do-



**Obr. 20.1** Tři izotermy v  $p$ - $V$  diagramu. Zvýrazněný úsek (s vyznačeným směrem) prostřední izotermy odpovídá izotermickému rozpínání plynu z počátečního stavu  $\mathcal{S}_i$  do koncového stavu  $\mathcal{S}_f$ . Opačný směr by odpovídal izotermickému stlačování ze stavu  $\mathcal{S}_f$  do stavu  $\mathcal{S}_i$ .

sadit z rov. (20.4) a dostaneme

$$W = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} \, dV. \quad (20.8)$$

Navíc uvažujeme izotermické rozpínání, takže teplota  $T$  je konstantní a lze ji společně s ostatními konstantami vytknout před integrál, tedy

$$W = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT [\ln V]_{V_i}^{V_f}. \quad (20.9)$$

Použijeme-li vztah  $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$ , dostaneme

$$W = nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \quad (\text{ideální plyn, izotermický děj}). \quad (20.10)$$

Připomeňme, že symbol  $\ln$  značí *přirozený* logaritmus, tj. logaritmus při základu  $e$ .

Při rozpínání je dle definice  $V_f > V_i$ , tedy podíl  $V_f/V_i$  v rov. (20.10) je větší než jedna. Přirozený logaritmus hodnot větších než jedna je kladný, takže i práce vykonaná plynem při izotermickém rozpínání, jak očekáváme, je kladná. Při stlačování je naopak  $V_f < V_i$  a poměr  $V_f/V_i$  je menší než jedna. Přirozený logaritmus v rov. (20.10) je nyní záporný, z čehož vyplývá, že práce vykonaná plynem je záporná.

Rov. (20.10) neurčuje práci vykonanou ideálním plynem při libovolném ději, ale pouze při ději, během něhož udržujeme konstantní teplotu. Pokud se teplota mění, nemůžeme  $T$  v rov. (20.8) vytknout před integrál, neboť bude záviset na objemu  $V$ . Proto nám znalost rov. (20.10) nestačí a obecně se musíme vrátit ke vztahu (20.7).

Pokud tak učiníme, můžeme ještě snadno odvodit vzorce pro práci vykonanou plynem (a dokonce nejen ideálním) při dalších dvou dějích, a to **izobarickém**, během něhož se nemění tlak plynu, a **izochorickém**, kdy se nemění jeho objem. Jestliže se nemění objem plynu, dává rov. (20.7) přímo

$$W = 0 \quad (\text{izochorický děj}). \quad (20.11)$$

Pokud se naopak objem plynu mění a jeho tlak zůstává konstantní, dostaneme

$$W = p(V_f - V_i) = p\Delta V \quad (\text{izobarický děj}). \quad (20.12)$$

**KONTROLA 1:** Ideální plyn má počáteční tlak 3 a počáteční objem 4 (v jistých jednotkách tlaku a objemu). V tabulce jsou uvedeny koncové tlaky a objemy (ve stejných jednotkách) pro pět dějů. Které z těchto dějů začínají a končí na stejné izotermě?

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>p</i>	12	6	5	4	1
<i>V</i>	1	2	7	3	12

### PŘÍKLAD 20.1

Ve válci je 20 l kyslíku při teplotě 20 °C a tlaku 15 atm. Teplota byla zvýšena na 35 °C a objem byl zmenšen na 8,5 l. Jaký bude výsledný tlak plynu v atmosférách, uvažujeme-li ideální plyn?

**ŘEŠENÍ:** Použijeme-li rov. (20.4), můžeme psát

$$nR = \frac{p_i V_i}{T_i} = \frac{p_f V_f}{T_f}.$$

Odtud pro  $p_f$  nalezneme

$$p_f = \frac{p_i T_f V_i}{T_i V_f}. \quad (20.13)$$

Všimněte si, že pokud převedeme daný počáteční a koncový objem z litrů na základní jednotky, tj. metry krychlové, multiplikativní (tj. *násobící*) převodní faktory se v rov. (20.13) vykrátí. Totéž platí u tlaku pro převodní faktory mezi atmosférami a pascaly. Abychom však převedli stupně Celsia na kelviny, musíme použít *aditivní* faktor, tedy přičíst hodnotu 273, kterou zkrátit nemůžeme. Proto musíme psát

$$T_i = (273 + 20) \text{ K} = 293 \text{ K},$$

$$T_f = (273 + 35) \text{ K} = 308 \text{ K}.$$

Nyní dosadíme tyto hodnoty do rov. (20.13) a dostaneme

$$p_f = \frac{(15 \text{ atm})(308 \text{ K})(12 \text{ l})}{(293 \text{ K})(8,5 \text{ l})} = 22 \text{ atm}. \quad (\text{Odpověď})$$

### PŘÍKLAD 20.2

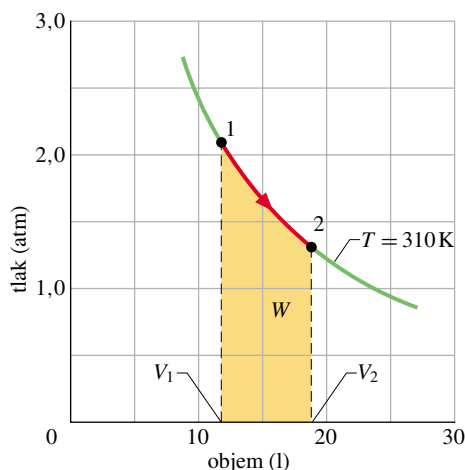
Jeden mol kyslíku (považujeme ho za ideální plyn) expanduje při konstantní teplotě  $T = 310 \text{ K}$  z počátečního objemu  $V_1 = 12 \text{ l}$  na koncový objem  $V_2 = 19 \text{ l}$ .

(a) Jakou práci při tom vykoná?

**ŘEŠENÍ:** Z rov. (20.10) obdržíme

$$\begin{aligned} W &= nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = \\ &= (1 \text{ mol})(8,31 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1})(310 \text{ K}) \ln \frac{(19 \text{ l})}{(12 \text{ l})} = \\ &= 1180 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Na obr.20.2 je zobrazen daný děj jako úsek izotermy v  $p$ - $V$  diagramu. Práci vykonané plynem odpovídá plocha pod křivkou 1 – 2.



**Obr. 20.2** Příklad 20.2. Zvýrazněná plocha odpovídá práci vykonané 1 molem kyslíku při rozpínání za konstantní teploty  $T = 310 \text{ K}$ .

(b) Jakou práci vykoná plyn během izotermického stlačování z  $V_2 = 19 \text{ l}$  na  $V_1 = 12 \text{ l}$ ?

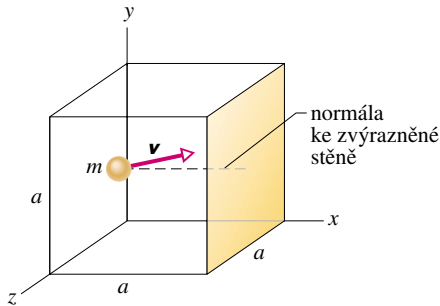
**ŘEŠENÍ:** Stejným postupem jako v (a) dostaneme

$$\begin{aligned} W &= nRT \ln \frac{V_1}{V_2} = \\ &= (1 \text{ mol})(8,31 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1})(310 \text{ K}) \ln \frac{(12 \text{ l})}{(19 \text{ l})} = \\ &= -1180 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Výsledek má stejnou hodnotu, ale opačné znaménko než při izotermickém rozpínání v případě (a). Znaménko minus nám říká, že musíme *vykonat* práci 1180 J, abychom plyn stlačili z objemu  $V_2$  na objem  $V_1$ .

## 20.4 TLAK, TEPLOTA A STŘEDNÍ KVADRATICKÁ RYCHLOST

Nyní se budeme zabývat naším prvním problémem z kinetické teorie plynů. Uvažujme  $n$  molů ideálního plynu uzavřených v krychli o objemu  $V$  (obr. 20.3), jejíž stěny jsou udržovány na stálé teplotě  $T$ . Jaký je vztah mezi tlakem plynu  $p$  působícím na stěny a rychlostí molekul?



**Obr. 20.3** Krychle o hraně  $a$  obsahující  $n$  molů ideálního plynu. Molekula o hmotnosti  $m$  pohybující se rychlostí  $\mathbf{v}$  narazí na zvýrazněnou stěnu o ploše  $a^2$ . Na obrázku je též čárkovaně vyznačena normála k této stěně.

Molekuly plynu se v krychli pohybují všemi směry a různými rychlostmi, narážejí navzájem do sebe a odrážejí se od stěn jako koule na kulečnicku. Pro začátek však nebudeme studovat srážky mezi molekulami, ale pouze pružný odraz od stěny.

Na obr. 20.3 vidíme typickou molekulu plynu o hmotnosti  $m$  a rychlosti  $\mathbf{v}$ , která za chvíli narazí na zvýrazněnou stěnu krychle. Protože odraz molekul od stěny považujeme za pružný, změní se jen  $x$ -ová složka rychlosti, a to na opačnou. Nezmění se však velikost rychlosti. Zároveň se změnou rychlosti dojde též ke změně  $x$ -ové složky hybnosti částice z hodnoty  $mv_x$  na  $(-mv_x)$ , tedy

$$\Delta p_x = (-mv_x) - (mv_x) = -2mv_x.$$

Hybnost  $\Delta p'_x$  přenesená touto molekulou na stěnu má opačné znaménko, tj.  $\Delta p'_x = -\Delta p_x = +2mv_x$ . (U složky vektoru hybnosti  $p_x$  píšeme důsledně index, abychom ji nezaměnili se skalárním tlakem  $p$ .)

Molekula na obr. 20.3 bude narážet na stěnu opakovaně. Doba  $\Delta t$  mezi jednotlivými nárazy je rovna době, za kterou molekula doletí k protější stěně a zpátky, tj. urazí vzdálenost  $2a$  konstantní rychlostí  $v_x$ . (Uvědomte si, že tato doba se nezmění, pokud mezitím molekula narazí na některou z ostatních čtyř stěn, neboť tento náraz nemá vliv na rychlost ve směru osy  $x$ .) Hybnost přenesená na zvýrazněnou stěnu krychle jednou molekulou za jednotku času je

tedy

$$\frac{\Delta p'_x}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{2a/v_x} = \frac{mv_x^2}{a}.$$

Z druhého Newtonova zákona ( $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ ) plyne, že hybnost molekuly přenesená na stěnu krychle za jednotku času se rovná síle působící na tuto stěnu. Abychom našli celkovou sílu působící na danou stěnu, musíme sečíst příspěvky od všech narážejících molekul, přičemž musíme brát v úvahu jejich různé rychlosti. Vydělíme-li pak celkovou sílu  $F_x$  plochou stěny  $a^2$ , dostaneme tlak  $p$  působící na stěnu. Tedy

$$p = \frac{F_x}{a^2} = \frac{mv_{x1}^2/a + mv_{x2}^2/a + \dots + mv_{xN}^2/a}{a^2} = \left(\frac{m}{a^3}\right) (v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots + v_{xN}^2), \quad (20.14)$$

kde  $N$  je počet molekul v krychli.

Protože  $N = nN_A$ , vystupuje v rov. (20.14) v druhé závorce součet  $nN_A$  členů. Tento součet můžeme nahradit výrazem  $nN_A \overline{v_x^2}$ , kde  $\overline{v_x^2}$  značí střední hodnotu kvadrátu  $x$ -ové složky rychlosti všech molekul. Rov. (20.14) tak nabývá tvaru

$$p = \frac{nmN_A}{a^3} \overline{v_x^2}.$$

Výraz  $mN_A$  je ovšem molární hmotnost  $m_m$  plynu (tj. hmotnost jednoho molu plynu) a  $a^3$  není nic jiného než jeho objem  $V$ , tedy

$$p = \frac{nm_m \overline{v_x^2}}{V}. \quad (20.15)$$

Pro každou molekulu platí, že  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ . Protože je v krychli mnoho molekul a všechny se pohybují náhodnými směry, jsou střední hodnoty kvadrátů jednotlivých složek rychlosti stejné a mají hodnotu  $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$ . Rov. (20.15) lze proto přepsat na tvar

$$p = \frac{nm_m \overline{v^2}}{3V}. \quad (20.16)$$

Odmocnina z  $\overline{v^2}$  je jistým druhem střední rychlosti, kterou nazýváme **střední kvadratická rychlost** molekul a značíme ji  $v_{ef}$ . Dle definice  $v_{ef} = \sqrt{\overline{v^2}}$  a rov. (20.16) tak můžeme psát

$$p = \frac{nm_m v_{ef}^2}{3V}. \quad (20.17)$$

Tato rovnice (platná pro objem  $V$  libovolného tvaru) je základní rovnicí kinetické teorie, neboť nám říká, jak souvisí tlak plynu (čistě makroskopická veličina) s rychlostí jednotlivých molekul (čistě mikroskopická veličina).

Rov. (20.17) můžeme také obrátit, a určovat tak střední kvadratickou rychlost molekul z makroskopických charakteristik plynu, použijeme-li navíc stavovou rovnici ideálního plynu  $pV = nRT$ . Platí například

$$v_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{3RT}{m_m}}. \quad (20.18)$$

**Tabulka 20.1 Rychlosti molekul za pokojové<sup>a</sup> teploty**  
( $T = 300 \text{ K}$ )

PLYN	$\frac{m_m}{10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}}$	$\frac{v_{\text{ef}}}{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$
vodík ( $\text{H}_2$ )	2,02	1 920
helium (He)	4,0	1 370
vodní pára ( $\text{H}_2\text{O}$ )	18,0	645
dusík ( $\text{N}_2$ )	28,0	517
kyslík ( $\text{O}_2$ )	32,0	483
oxid uhličitý ( $\text{CO}_2$ )	44,0	412
oxid siřičitý ( $\text{SO}_2$ )	64,1	342

<sup>a</sup> Pro jednoduchost bereme často pokojovou teplotu rovnu 300 K, ačkoliv by nám při ní (27 °C) bylo dosti horko.

V tab. 20.1 jsou uvedeny střední kvadratické rychlosti pro několik plynů, vypočtené podle rov. (20.18). Rychlosti jsou překvapivě vysoké. Například molekuly vodíku mají za pokojové teploty (300 K) střední kvadratickou rychlost  $1\,920 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  neboli  $6\,910 \text{ km/h}$ , tj. větší rychlost, než má vystřelená kulka. Na povrchu Slunce, kde je teplota  $2\cdot 10^6 \text{ K}$ , by střední kvadratická rychlost molekul vodíku měla být dokonce 82krát větší než při pokojové teplotě. To by už však molekuly nepřežily srážky mezi sebou. Navíc mnohé z nich by měly mít rychlost ještě vyšší; nezapomeňte, že střední kvadratická rychlost je jen jistým druhem střední rychlosti. Kinetická teorie proto vylučuje, aby na povrchu Slunce byl vodík ve formě molekul.

Rychlost zvuku v plynu je úzce spojena se střední kvadratickou rychlostí molekul daného plynu. Zvuková vlna se šíří pomocí srážek mezi jednotlivými molekulami. Rychlost vlny proto nemůže být vyšší než *střední* rychlost molekul, neboť molekuly se pohybují všemi směry, a ne jen ve směru vlny. Například střední kvadratická rychlost molekul vodíku, resp. dusíku je při pokojové teplotě  $1\,920 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , resp.  $517 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Při téže teplotě je rychlost zvuku v těchto plynech  $1\,350 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , resp.  $350 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Napadne vás možná otázka: „Jestliže jsou molekuly tak rychlé, proč trvá řekněme minutu, než se k nám rozšíří vůně z otevřeného parfému na druhé straně místnosti?“ Letmý pohled na obr. 20.4 v čl. 20.6 nám naznačí odpověď: Třebaže jsou molekuly tak rychlé mezi jednotlivými sráž-

kami, trvá jedné molekule poměrně dlouho, než se opravdu dostane o kus dál.

### PŘÍKLAD 20.3

Máme pět naměřených hodnot: 5, 11, 32, 67 a 89.

(a) Jaká je jejich střední hodnota  $\bar{n}$ ?

**ŘEŠENÍ:** Určíme ji ze vztahu

$$\bar{n} = \frac{5 + 11 + 32 + 67 + 89}{5} = 40,8. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jaká je jejich střední kvadratická hodnota  $n_{\text{ef}}$ ?

**ŘEŠENÍ:** Určíme ji ze vztahu

$$\begin{aligned} n_{\text{ef}} &= \sqrt{\frac{5^2 + 11^2 + 32^2 + 67^2 + 89^2}{5}} = \\ &= 52,1. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Střední kvadratická hodnota  $n_{\text{ef}}$  je větší než střední hodnota  $\bar{n}$ , protože větší čísla, když je umocníme, hrají relativně důležitější roli při určování  $n_{\text{ef}}$ . Pro ověření tohoto tvrzení nahraďme číslo 89 číslem 300. Střední hodnota je nyní (jak si snadno vypočtete) 2,0krát větší než předchozí. Avšak střední kvadratická hodnota se zvýší 2,7krát oproti předešlému případu.

Střední kvadratická hodnota fyzikálních veličin hraje významnou roli v mnoha oblastech fyziky. Například efektivní hodnota napětí 230 V uváděná na žárovkách je časovou střední kvadratickou hodnotou napětí.

## 20.5 KINETICKÁ ENERGIE POSUVNÉHO POHYBU

Uvažujme opět jedinou molekulu ideálního plynu, která se pohybuje v krychli na obr. 20.3, ale nyní budeme brát v úvahu též změny její rychlosti způsobené srážkami s ostatními molekulami. Kinetická energie této molekuly je v libovolném okamžiku  $\frac{1}{2}mv^2$ . Avšak její *střední* kinetická energie posuvného pohybu během doby, po kterou částici sledujeme, bude

$$\overline{E_k} = \overline{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{1}{2}mv_{\text{ef}}^2, \quad (20.19)$$

kde jsme předpokládali, že střední kvadratická rychlost jedné molekuly během našeho pozorování je stejná jako střední kvadratická rychlost všech molekul v libovolném daném čase. (Tento předpoklad je oprávněný, pokud se nemění celková energie plynu a pokud pozorujeme molekulu

dostatečně dlouho.) Dosazením za  $v_{ef}$  z rov. (20.18) dostaneme

$$\overline{E_k} = \left(\frac{1}{2}m\right) \frac{3RT}{m_m}.$$

Poměr molární hmotnosti a hmotnosti molekuly  $m_m/m$  je však Avogadrova konstanta, takže

$$\overline{E_k} = \frac{3RT}{2N_A},$$

což můžeme přepsat na tvar

$$\overline{E_k} = \frac{3}{2}kT. \quad (20.20)$$

Konstantu  $k$  nazýváme **Boltzmannova konstanta**; je to poměr plynové konstanty  $R$  a Avogadrovy konstanty  $N_A$ . Někdy se nazývá *plynová konstanta na jednu molekulu* (nikoli na mol látky). Má hodnotu

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{(8,31 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1})}{(6,02\cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1})} = 1,38\cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1} \doteq 8,62\cdot 10^{-5} \text{ eV}\cdot\text{K}^{-1}. \quad (20.21)$$

Rov. (20.20) říká něco neočekávaného:

Všechny molekuly ideálního plynu, nezávisle na jejich hmotnosti, mají za dané teploty tutéž střední hodnotu kinetické energie posuvného pohybu, a to  $\frac{3}{2}kT$ . Měříme-li tedy teplotu ideálního plynu, zjistíme tím zároveň také střední kinetickou energii jeho molekul.

**KONTROLA 2:** Směs plynů sestává z molekul typu 1, 2 a 3 s molekulovými hmotnostmi  $m_{m1} > m_{m2} > m_{m3}$ . Uspořádejte sestupně tyto typy podle (a) střední kinetické energie a (b) střední kvadratické rychlosti.

### PŘÍKLAD 20.4

Jaká je střední kinetická energie (v elektronvoltech) posuvného pohybu molekul kyslíku, přítomných ve vzduchu za pokojové teploty 300 K? A jaká je pro molekuly dusíku?

**ŘEŠENÍ:** Střední kinetická energie posuvného pohybu závisí pouze na teplotě a nikoli na druhu molekul. Proto je pro oba plyny dána rov. (20.20), tedy

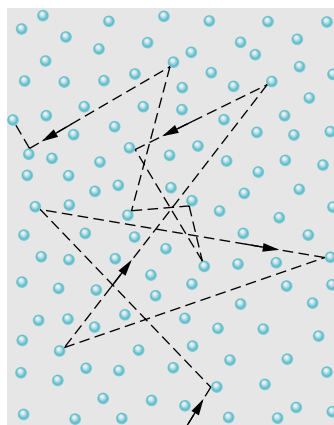
$$\begin{aligned} \overline{E_k} &= \frac{3}{2}kT \doteq \frac{3}{2}(8,62\cdot 10^{-5} \text{ eV}\cdot\text{K}^{-1})(300 \text{ K}) = \\ &= 0,039 \text{ eV} \doteq \frac{1}{25} \text{ eV}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Bývá užitečné zapamatovat si  $\frac{1}{25}$  eV jako přibližnou hodnotu střední kinetické energie posuvného pohybu molekul vzduchu za pokojové teploty.

V tab. 20.1 nalezneme, že střední kvadratická rychlost molekul kyslíku (pro něž  $m_m = 32,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ ) je  $483 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Pro molekuly dusíku ( $m_m = 28,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ ) je to  $517 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Lehčí molekuly mají tedy vyšší střední kvadratickou rychlost, což souhlasí s tím (viz rov. (20.19)), že mají stejnou střední kinetickou energii.

## 20.6 STŘEDNÍ VOLNÁ DRÁHA

Pokračujme ve studiu pohybu molekul ideálního plynu. Na obr. 20.4 je znázorněna typická dráha jedné z molekul, která se pohybuje skrz plyn a velmi často mění jak rychlost, tak směr svého pohybu, když se pružně sráží s jinou molekulou. Mezi srážkami se naše molekula pohybuje rovnoměrně přímočaře. Třebaže jsou ostatní molekuly na obrázku nakresleny jako nepohyblivé, vykonávají ve skutečnosti pohyb stejného druhu jako sledovaná molekula.



**Obr. 20.4** Molekula pohybující se plynem a srážející se během své cesty s ostatními molekulami. Třebaže jsou ostatní molekuly zobrazeny v klidu, pohybují se ve skutečnosti velmi podobným způsobem.

Velice užitečným parametrem, který popisuje náhodný pohyb částice, je **střední volná dráha**  $\lambda$ . Jak název napovídá, jde o střední vzdálenost, kterou molekula urazí mezi dvěma srážkami. Mezi  $\lambda$  a číselnou hustotou  $N/V$  molekul očekáváme nepřímou úměrnost, neboť čím větší bude hustota molekul, tím kratší bude střední volná dráha. Dále lze očekávat, že  $\lambda$  bude nepřímo úměrné velikosti molekul. Pokud by totiž molekuly byly bodové, nedocházelo by vůbec ke srážkám a střední volná dráha by byla nekonečná. Čím větší budou molekuly, tím kratší bude  $\lambda$ . Dokonce můžeme odhadnout, že  $\lambda$  bude záviset na čtverci průměru  $d$  molekuly, neboť velikost „terčíku“ pro srážku je úměrná jeho ploše, tedy  $\frac{1}{4}\pi d^2$ .

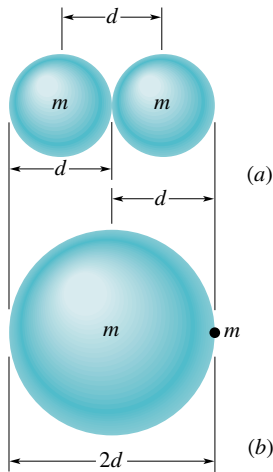


Skutečný výraz pro střední volnou dráhu má tvar

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 N/V} \quad (\text{střední volná dráha}). \quad (20.22)$$

Abychom ověřili rov. (20.22), budeme nejprve sledovat jedinou molekulu (obr. 20.4) pohybující se konstantní rychlostí  $v$  „moří“ nepohyblivých molekul. (Později rozebereme reálnější případ, kdy se pohybují všechny molekuly.)

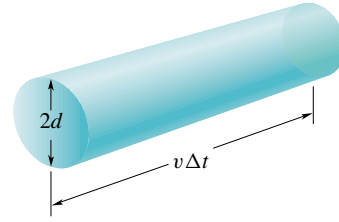
Předpokládejme dále, že molekuly jsou kuličky o průměru  $d$ . Ke srážce dojde tehdy, pokud se středy molekul přiblíží na vzdálenost menší, než je právě průměr molekuly  $d$  (obr. 20.5a). Na tuto situaci lze nahlížet názorněji tak, že pohybující se molekula má *poloměr*  $d$  a ostatní molekuly jsou bodové částice, jako na obr. 20.5b. Tím se popis srážky nezmění, usnadní se však výpočet  $\lambda$ .



**Obr. 20.5** (a) Srážka nastane, pokud se středy dvou molekul přiblíží na vzdálenost menší než je jejich průměr  $d$ . (b) Ekvivalentní, ale názornější je představa pohybující se molekuly o *poloměru*  $d$ , která se sráží s bodovými molekulami. Podmínky srážky však zůstávají stejné.

Mezi jednotlivými srážkami naše molekula „vymete“ krátký válec průřezu  $\pi d^2$ . Pokud pozorujeme tuto molekulu po dobu  $\Delta t$ , urazí vzdálenost  $v\Delta t$ , kde  $v$  značí její rychlost. Pokud seřadíme ony krátké válce mezi jednotlivými srážkami za dobu  $\Delta t$  za sebe, dostaneme jediný válec (obr. 20.6) o délce  $v\Delta t$  a o objemu  $(\pi d^2)(v\Delta t)$ . Počet srážek naší částice za dobu  $\Delta t$  je pak roven počtu (bodových) částic uvnitř tohoto válce.

Protože  $N/V$  je hustota částic, dostaneme počet srážek vynásobením této hustoty objemem válce, tedy  $(N/V)(\pi d^2 v\Delta t)$ . Střední volná dráha je dráha molekuly



**Obr. 20.6** Pohybující se molekula „vymete“ za dobu  $\Delta t$  váleček délky  $v\Delta t$  a poloměr  $d$ .

(tj. délka válce) dělená tímto počtem srážek:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\text{délka dráhy}}{\text{počet srážek}} \sim \frac{v\Delta t}{\pi d^2 v\Delta t N/V} = \\ &= \frac{1}{\pi d^2 N/V}. \end{aligned} \quad (20.23)$$

Tento vztah je pouze přibližný, neboť je založen na předpokladu, že všechny molekuly (až na jedinou) jsou v klidu. Ve skutečnosti se všechny molekuly pohybují. Pokud správně započteme tento pohyb, obdržíme rov. (20.22). Všimněte si, že se rov. (20.23) liší od rov. (20.22) pouze faktorem  $1/\sqrt{2}$ .

Není obtížné nahlédnout, v čem se skrývá „aproximace“, kterou jsme použili při odvození rov. (20.23). Rychlost  $v$  v čitateli totiž není přesně stejná jako rychlost ve jmenovateli. Rychlost  $v$  v čitateli je střední rychlost  $\bar{v}$  molekuly vzhledem k laboratoři. Rychlost  $v$  ve jmenovateli je však střední rychlost  $\bar{v}_{\text{rel}}$  *relativního* pohybu naší molekuly vůči ostatním molekulám, které se taky pohybují. Tato rychlost  $\bar{v}_{\text{rel}}$  určuje počet srážek molekuly. Podrobný výpočet, který vychází ze skutečného rozdělení rychlostí molekul, dává  $\bar{v}_{\text{rel}} = \sqrt{2}\bar{v}$ , odkud je již patrný původ faktoru  $\sqrt{2}$ .

Střední volná dráha molekul vzduchu je u hladiny moře zhruba  $0,1 \mu\text{m}$ . Ve výšce 100 km je hustota vzduchu natolik nízká, že střední volná dráha molekul stoupne na 16 cm, a ve výšce 300 km má pak hodnotu okolo 20 km. Proto je pro vědce, kteří se zabývají fyzikou a chemií vyšších vrstev atmosféry, prakticky nemožné provádět v laboratoři experimenty, které by napodobily podmínky vyšších vrstev atmosféry, neboť nelze vyčerpávat dostatečně velký prostor s plynem na tak nízkou hustotu. Přitom však studium těchto vrstev atmosféry má velký význam např. v souvislosti s problémem „ozonové díry“ a koncentrace freonů.

#### PŘÍKLAD 20.5

Rozměry molekul pro různé plyny lze určovat experimentálně z rychlosti difuze jednoho plynu do druhého. Například pro kyslík se uvádí průměr  $d = 2,9 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ .

(a) Jaká je střední volná dráha  $\lambda$  molekul kyslíku při pokojové teplotě ( $T = 300 \text{ K}$ ) a atmosférickém tlaku 1 atm? Uvažujte ideální plyn.



**ŘEŠENÍ:** Nalezneme nejprve číselnou hustotu molekul  $N/V$  za těchto podmínek. Ze stavové rovnice ideálního plynu zjistíme, že 1,0 mol ideálního plynu zaujímá objem

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{(1,0 \text{ mol})(8,31 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1})(300 \text{ K})}{(1,0 \text{ atm})(1,01\cdot 10^5 \text{ Pa/atm})} \doteq 2,47\cdot 10^{-2} \text{ m}^3.$$

Číselnou hustotu molekul určíme pomocí Avogadrovy konstanty jako

$$\frac{N}{V} = \frac{nN_A}{V} = \frac{(1,0 \text{ mol})(6,02\cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1})}{(2,47\cdot 10^{-2} \text{ m}^3)} \doteq 2,44\cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}.$$

Z rov. (20.22) pak dostaneme pro střední volnou dráhu

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 N/V} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi (2,9\cdot 10^{-10} \text{ m})^2 (2,44\cdot 10^{25} \text{ m}^{-3})} \doteq \\ &\doteq 1,1\cdot 10^{-7} \text{ m}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Tato hodnota odpovídá zhruba 380 molekulovým průměrům, přestože střední vzdálenost mezi jednotlivými molekulami je jen 11 molekulových průměrů.

(b) Jak četné jsou srážky mezi molekulami, je-li střední rychlost molekul kyslíku  $450 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ?

**ŘEŠENÍ:** Hledanou četnost určíme z poměru střední rychlosti molekul a střední volné dráhy

$$\text{četnost} = \frac{\bar{v}}{\lambda} = \frac{(450 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})}{(1,1\cdot 10^{-7} \text{ m})} \doteq 4,1\cdot 10^9 \text{ s}^{-1}. \quad (\text{Odpověď})$$

Každá molekula kyslíku tedy vykoná více než 4 miliardy srážek za sekundu.

**KONTROLA 3:** V nádobě se nachází jeden mol plynu A, jehož molekuly mají poloměr  $2d_0$  a střední rychlost  $v_0$ . Ve druhé, úplně stejné nádobě se nachází jeden mol plynu B, jehož molekuly mají poloměr  $d_0$  a střední rychlost  $2v_0$  (tj. molekuly plynu B jsou menší, ale rychlejší). U kterého z plynů bude vyšší četnost srážek uvnitř nádoby?



## 20.7 ROZDĚLENÍ RYCHLOSTÍ MOLEKUL

Střední kvadratická rychlost  $v_{ef}$  nám dává hrubou představu o tom, jakými rychlostmi se pohybují molekuly plynu při

určité teplotě. Avšak často bychom chtěli vědět více. Kolik molekul má například rychlost větší než  $v_{ef}$ ? A kolik z nich větší než dvojnásobek  $v_{ef}$ ? Abychom mohli odpovědět na tyto otázky, musíme vědět, jak jsou jednotlivé rychlosti mezi molekulami rozděleny. Obr. 20.7a ukazuje rozdělení rychlostí molekul kyslíku při pokojové teplotě ( $T = 300 \text{ K}$ ); na obr. 20.7b je pak toto rozdělení porovnáno s rozdělením při teplotě  $T = 80 \text{ K}$ .

Problém rozdělení rychlostí molekul plynu řešil poprvé v roce 1852 skotský fyzik James Clerk Maxwell. Dospěl k výsledku známému jako **Maxwellovo rozdělení rychlostí molekul**

$$P(v) = 4\pi \left( \frac{m_m}{2\pi RT} \right)^{3/2} v^2 e^{-m_m v^2 / 2RT}. \quad (20.24)$$

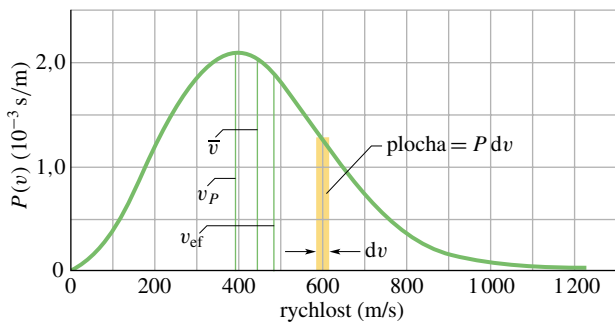
Zde  $v$  značí rychlost molekul,  $T$  teplotu plynu,  $m_m$  molární hmotnost plynu a  $R$  je plynová konstanta. Právě tato funkce je vykreslena na obr. 20.7a, b. Veličinu  $P(v)$  nazýváme rozdělovací funkcí a je definována takto: Součin  $P(v) dv$  (který je bezrozměrový) udává relativní počet molekul s rychlostmi v intervalu  $(v, v + dv)$ .

Jak ukazuje obr. 20.7a, je tento relativní počet roven plošce sloupečku, jehož výška je  $P(v)$  a šířka  $dv$ . Celková plocha pod křivkou rozdělovací funkce odpovídá relativnímu počtu molekul, jejichž rychlosti leží mezi nulou a nekonečnem. To jsou však všechny molekuly, takže tato plocha je rovna jedné.

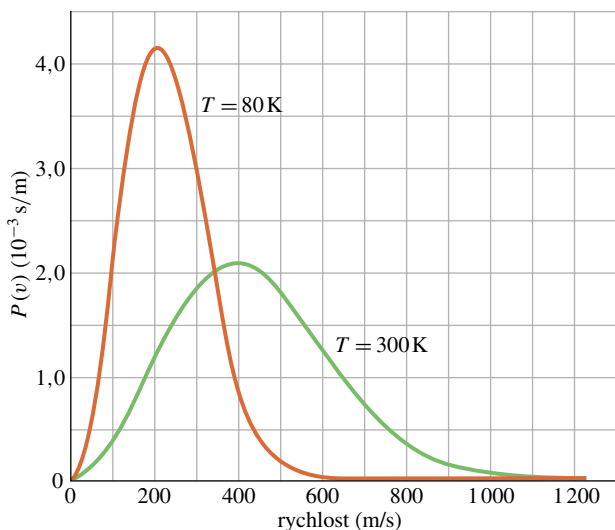
Na obr. 20.7a jsou též vyznačeny střední kvadratická rychlost  $v_{ef} = 483 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a další dvě význačné rychlosti molekul kyslíku; *nejpravděpodobnější rychlost*  $v_P = 395 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , ve které nabývá funkce  $P(v)$  maxima, a *střední rychlost*  $\bar{v} = 445 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , která je prostě průměrem přes všechny velikosti rychlostí molekul. Malý počet molekul může mít rychlosti, které leží na pravém konci rozdělovací funkce a které mohou být několikanásobně vyšší než střední rychlost. Díky tomuto jednoduchému faktu vysvětlíme, proč na Zemi může pršet a proč Slunce může svítit.

**Děšť:** Rozdělení rychlostí molekul vody například v rybníce za letních dnů může být popsáno podobnou křivkou jako na obr. 20.7a. Většina molekul nemá dostatečnou kinetickou energii k tomu, aby unikly skrz hladinu. Avšak molekuly z pravého konce rozdělení, které mají vysokou rychlost, mohou uniknout, tj. vypařit se. Potom mohou vytvořit mraky, a tím může vzniknout děšť.

Vzápětí poté, co rychlé molekuly uniknou z povrchu rybníka, se vyrovnává teplota vody s okolím. Vhodnými srážkami mezi molekulami vody nabývají opět některé mo-



(a)



(b)

**Obr. 20.7** (a) Maxwellovo rozdělení rychlostí pro kyslík při teplotě  $T = 300\text{ K}$ . V grafu jsou též znázorněny tři význačné rychlosti. (b) Rozdělení rychlostí pro teploty  $300\text{ K}$  a  $80\text{ K}$ . Všimněte si, že při nižších teplotách se molekuly pohybují pomaleji. Protože jde o pravděpodobnostní rozdělení, je plocha pod každou křivkou rovna jedné.

lekuly vyšších rychlostí, čímž se neustále obnovuje rozdělení rychlostí molekul pro odpovídající teplotu.

**Světlo Slunce:** Nechť je rozdělení rychlostí protonů v jádře Slunce popsáno zákonem (20.24). Energie Slunce pochází z termojaderné fúze, která začíná slučováním jader vodíku, tj. protonů. Protože se protony kvůli svému elektrickému náboji navzájem odpuzují, nemůže ke sloučení dojít u protonů majících jen střední rychlost. Ty totiž nemají dostatečnou kinetickou energii k tomu, aby se přiblížily na takovou vzdálenost, kde přitažlivé jaderné síly převládou nad odpudivými silami elektromagnetickými. Avšak velmi rychlé protony ze vzdáleného konce rozdělení tuto energii mají, sloučení může proběhnout — a proto Slunce svítí.

### PŘÍKLAD 20.6

Nádoba je naplněna kyslíkem pokojové teploty ( $300\text{ K}$ ). Jaká část molekul má rychlosti v intervalu  $599\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  až  $601\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ? Molární hmotnost  $m_m$  kyslíku je  $0,0320\text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

**ŘEŠENÍ:** Interval rychlostí  $\Delta v = 2\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  je natolik malý, že hledaná část molekul, kterou označíme  $\alpha$ , je dostatečně přesně určena výrazem  $P(v)\Delta v$ , kde  $P(v)$  vyhodnotíme pro rychlost  $v = 600\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  ve středu daného intervalu (viz zvýrazněná ploška na obr. 20.7a). Užitím rov. (20.24) nalezneme

$$\alpha = P(v)\Delta v = 4\pi \left( \frac{m_m}{2\pi RT} \right)^{3/2} v^2 e^{-m_m v^2 / 2RT} \Delta v.$$

Aby byl výpočet přehledný, rozdělíme tento výraz na několik členů, které vyčíslíme odděleně:

$$\alpha = 4\pi(A)(v^2)(e^B)(\Delta v). \quad (20.25)$$

Hodnoty výrazů  $A$  a  $B$  jsou:

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{m_m}{2\pi RT} \right)^{3/2} = \\ &= \left( \frac{0,0320\text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}}{2\pi(8,31\text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1})(300\text{ K})} \right)^{3/2} = \\ &= 2,92\cdot 10^{-9}\text{ s}^3\cdot\text{m}^{-3} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} B &= -\frac{m_m v^2}{2RT} = -\frac{(0,0320\text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1})(600\text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{2(8,31\text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1})(300\text{ K})} = \\ &= -2,31. \end{aligned}$$

Dosazením do rov. (20.25) dostaneme

$$\begin{aligned} \alpha &= 4\pi(A)(v^2)(e^B)(\Delta v) = \\ &= 4\pi(2,92\cdot 10^{-9}\text{ s}^3\cdot\text{m}^{-3}) \cdot \\ &\cdot (600\text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2 (e^{-2,31})(2\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}) = \\ &= 2,62\cdot 10^{-3}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Odtud vidíme, že při pokojové teplotě se  $0,262\%$  molekul kyslíku pohybuje rychlostí v úzkém intervalu mezi  $599\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  až  $601\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Pokud by zvýrazněná ploška na obr. 20.7a měla rozměry odpovídající této úloze, byla by opravdu velice úzká.

### PŘÍKLAD 20.7

(a) Jaká je střední rychlost molekul kyslíku při teplotě  $300\text{ K}$ ? Molární hmotnost  $m_m$  kyslíku je  $0,0320\text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

**ŘEŠENÍ:** Abychom našli střední rychlost molekul, budeme každou rychlost brát s váhou  $P(v)dv$ , která udává relativní počet molekul o rychlostech v intervalu  $(v, v+dv)$ . Integrací přes všechny rychlosti pak dostaneme hledanou střední rychlost, neboli

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v P(v) dv. \quad (20.26)$$

Po dosazení za  $P(v)$  z rov. (20.24) je třeba vyčíslit získaný integrál. Najdeme ho v tabulkách integrálů a výsledkem je

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi m_m}} \quad (\text{střední rychlost}), \quad (20.27)$$

odkud dosazením numerických hodnot obdržíme

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8(8,31 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1})(300 \text{ K})}{\pi(0,0320 \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1})}} \doteq 445 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jaká je střední kvadratická rychlost  $v_{\text{ef}}$  molekul kyslíku?

**ŘEŠENÍ:** Budeme postupovat podobně jako v případě (a), jen místo  $v$  budeme nyní faktorem  $P(v) dv$  násobit  $v^2$ . Po integraci tak dostaneme

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 P(v) dv = \frac{3RT}{m_m}.$$

Střední kvadratickou rychlost obdržíme odmocněním tohoto výrazu

$$v_{\text{ef}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{m_m}} \quad (\text{střední kvadratická rychlost}). \quad (20.28)$$

Tato rovnice souhlasí s rov. (20.18), kterou jsme odvodili dříve. Dosazením numerických hodnot dostaneme

$$v_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{3(8,31 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1})(300 \text{ K})}{(0,0320 \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1})}} \doteq 483 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (\text{Odpověď})$$

(c) Jaká je nejpravděpodobnější rychlost  $v_P$ ?

**ŘEŠENÍ:** Nejpravděpodobnější rychlost odpovídá maximu rozdělení  $P(v)$  daného rov. (20.24). Toto maximum nalezneme z podmínky  $dP/dv = 0$ , kterou vyřešíme vůči  $v$ . Výsledkem je (jak si čtenář snadno dopočte)

$$v_P = \sqrt{\frac{2RT}{m_m}} \quad (\text{nejpravděpodobnější rychlost}). \quad (20.29)$$

Číselně vychází

$$v_P = \sqrt{\frac{2(8,31 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1})(300 \text{ K})}{(0,0320 \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1})}} \doteq 395 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (\text{Odpověď})$$

V této úloze jsme vypočetli tři význačné rychlosti Maxwellova rozdělení. Jejich souhrnný přehled obsahuje tab. 20.2.

## 20.8 MOLÁRNÍ TEPELNÉ KAPACITY IDEÁLNÍHO PLYNU

V tomto článku chceme na základě úvah o atomech a molekulách odvodit výraz pro **vnitřní energii**  $U$  ideálního plynu. Tento výsledek pak použijeme k výpočtu molárních tepelných kapacit ideálního plynu.

### Vnitřní energie $U$

Uvažujme nejprve ideální *jednoatomový* plyn, jehož molekulu tvoří jediný atom, jakým jsou např. helium, neon nebo argon. Jak víme z kap. 8, vnitřní energie souvisí s náhodným pohybem atomů a molekul. Budeme proto předpokládat, že vnitřní energie je prostě součet kinetických energií posuvného pohybu atomů. (Nebudeme tedy uvažovat rotační kinetickou energii, která je pro atomy prakticky zanedbatelná.) Střední kinetická energie posuvného pohybu jedné molekuly závisí pouze na teplotě a je dána rov. (20.20) jako  $\overline{E_k} = \frac{3}{2}kT$ . Vzorek  $n$  molů uvažovaného plynu obsahuje  $nN_A$  atomů. Vnitřní energie vzorku je tedy

$$U = (nN_A)\overline{E_k} = (nN_A)\left(\frac{3}{2}kT\right)$$

neboli, s využitím plynové konstanty  $R = N_A k$ ,

$$U = \frac{3}{2}nRT \quad (\text{jednoatomový ideální plyn}). \quad (20.30)$$

Vnitřní energie  $U$  daného množství ideálního plynu závisí *pouze* na teplotě  $T$ . Nezávisí na jeho tlaku  $p$ , hustotě  $\rho$  ap.

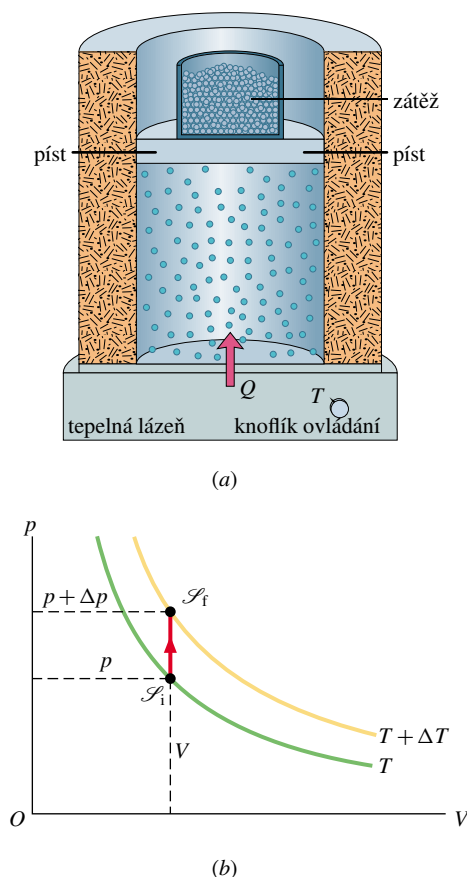
**Tabulka 20.2** Význačné rychlosti Maxwellova rozdělení

VELIČINA	OZNAČENÍ	VZTAH	PRO KYSLÍK PŘI 300 K
Nejpravděpodobnější rychlost	$v_P$	$\sqrt{2RT/m_m}$	$395 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Střední rychlost	$\bar{v}$	$\sqrt{8RT/\pi m_m}$	$445 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Střední kvadratická rychlost	$v_{\text{ef}}$	$\sqrt{3RT/m_m}$	$483 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Pomocí rov. (20.30) můžeme odvodit vztah pro molární tepelnou kapacitu ideálního plynu. Ve skutečnosti odvodíme dva výrazy — jeden pro případ, kdy dodáváme teplo a objem plynu zůstává konstantní, a druhý pro případ konstantního tlaku plynu. Molární tepelné kapacity v těchto případech značíme  $C_V$ , resp.  $C_p$ . Vedle těchto veličin se běžně užívají také měrné tepelné kapacity, které značíme  $c_V$  a  $c_p$  a které se nevztahují na 1 mol, nýbrž na 1 kg plynu.

### Molární tepelná kapacita při stálém objemu

Na obr. 20.8a je válec objemu  $V$  vyplněný  $n$  moly ideálního plynu o tlaku  $p$  a teplotě  $T$ . Počáteční stav tohoto plynu je na obr. 20.8b vyznačen  $\mathcal{S}_i$ . Zvýšíme-li teplotu lázně,



**Obr. 20.8** (a) Teplotu ideálního plynu zvýšíme z teploty  $T$  na  $T + \Delta T$ , přičemž objem udržujeme konstantní. Plynu bylo dodáno teplo, avšak práci nevykonal žádnou. (b)  $p$ - $V$  diagram tohoto děje.

na které spočívá válec s plynem, dodáme tím plynu jisté množství tepla  $Q$  a v koncovém stavu (označeném  $\mathcal{S}_f$ ) bude mít teplotu  $T + \Delta T$  a tlak  $p + \Delta p$ .

Molární tepelná kapacita při stálém objemu je dle

rov. (19.15) definována vztahem

$$Q = nC_V \Delta T \quad (\text{při stálém objemu}). \quad (20.31)$$

Dosazením do prvního termodynamického zákona obdržíme

$$\Delta U = nC_V \Delta T - W.$$

Je-li objem plynu konstantní, nekoná plyn žádnou práci a tedy  $W = 0$ . Pro  $C_V$  proto můžeme psát

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{\Delta U}{\Delta T}. \quad (20.32)$$

Podle rov. (20.30) platí  $\Delta U/\Delta T = \frac{3}{2}nR$ . Dosazením do rov. (20.32) nakonec dostaneme

$$C_V = \frac{3}{2}R \doteq 12,5 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \quad (\text{jednoatomový ideální plyn}). \quad (20.33)$$

Jak ukazuje tab. 20.3, tento výsledek kinetické teorie ideálního plynu velmi dobře souhlasí s experimentem pro reálné jednoatomové plyny, tj. pro případ, který jsme uvažovali. Experimentální (ale i předpovídané) hodnoty  $C_V$  pro dvouatomové a víceatomové plyny jsou vyšší z důvodu, který si objasníme v čl. 20.9.

**Tabulka 20.3** Molární tepelné kapacity při stálém objemu (bez vibrací molekul)

MOLEKULA	PLYN	$C_V$
		$\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Jednoatomová	Ideální	$\frac{3}{2}R \doteq 12,5$
	Reálný He Ar	12,5 12,6
Dvouatomová	Ideální	$\frac{5}{2}R \doteq 20,8$
	Reálný N <sub>2</sub> O <sub>2</sub>	20,7 20,8
Víceatomová	Ideální	$3R \doteq 24,9$
	Reálný NH <sub>4</sub> CO <sub>2</sub>	29,0 29,7

Nyní můžeme zobecnit výraz pro vnitřní energii daný rov. (20.30), dosadíme-li za  $\frac{3}{2}R$  molární tepelnou kapacitu  $C_V$ . Dostaneme

$$U = nC_V T \quad (\text{libovolný ideální plyn}). \quad (20.34)$$

Tato rovnice platí nejen pro jednoatomové ideální plyny, ale také pro dvouatomové a víceatomové ideální plyny, pokud dosadíme odpovídající hodnotu  $C_V$ . Tak jako u rov. (20.30) i nyní vidíme, že vnitřní energie závisí pouze na teplotě a nikoli na tlaku či hustotě plynu.



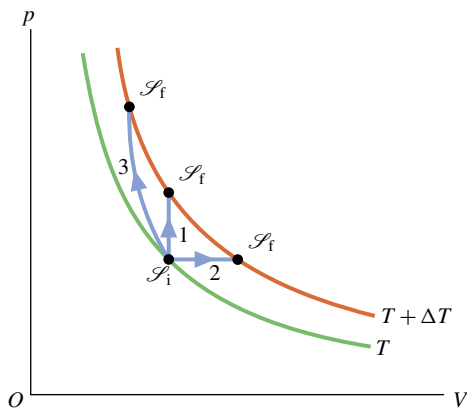
Pokud se změní teplota ideálního plynu uzavřeného v nádobě o  $\Delta T$ , pak výsledná změna jeho vnitřní energie je dána pomocí rov. (20.34) jako

$$\Delta U = nC_V \Delta T \quad (\text{ideální plyn, libovolný děj}). \quad (20.35)$$

Tato rovnice nám říká:

Změna vnitřní energie  $U$  neproměnného množství ideálního plynu závisí pouze na změně jeho teploty. Nezávisí na ději, při kterém tato změna teploty nastala.

Jako příklad uvažujme tři cesty mezi dvěma izotermami na obr. 20.9. Cesta 1 odpovídá izochorickému ději a cesta 2 ději izobarickému, kterým se budeme zabývat v následujícím odstavci. Poslední cesta 3 odpovídá ději, při kterém nedochází k výměně tepla mezi systémem a okolím a který budeme studovat v čl. 20.11. Přestože jsou hodnoty vyměněného tepla  $Q$ , vykonané práce  $W$ , koncového tlaku  $p_f$  a koncového objemu  $V_f$  pro tyto tři procesy různé, změna vnitřní energie  $\Delta U$  spojená s těmito procesy je vždy stejná a je dána rov. (20.35), neboť změna teploty  $\Delta T$  je vždy stejná. Nezávisle na tom, po které cestě se plyn dostane ze stavu o teplotě  $T$  do stavu o teplotě  $T + \Delta T$ , můžeme tedy změnu vnitřní energie plynu určit tak, že použijeme cestu 1, pro kterou platí rov. (20.35).



**Obr. 20.9** Tři cesty odpovídají třem různým dějům, při kterých přešel ideální plyn z počátečního stavu  $S_i$  s teplotou  $T$  do koncového stavu  $S_f$  s teplotou  $T + \Delta T$ . Změna  $\Delta U$  vnitřní energie plynu je stejná pro všechny tyto procesy a také pro libovolný jiný proces se stejnou změnou teploty.

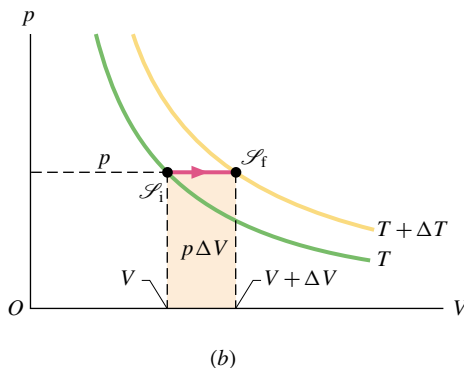
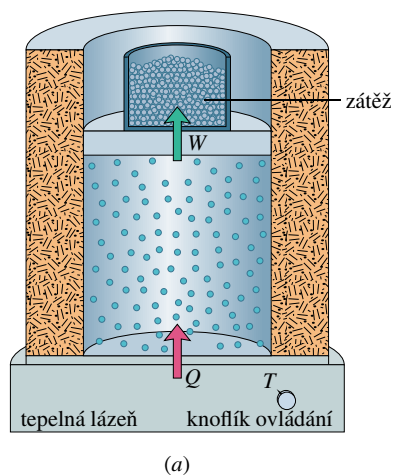
### Molární tepelná kapacita při konstantním tlaku

Stejně jako v předchozím případě budeme nyní zvyšovat teplotu plynu o  $\Delta T$ , ale tentokrát budeme dodávat potřebné

teplo  $Q$  při konstantním tlaku. Na obr. 20.10a je znázorněno, jak lze takový děj provést. Odpovídající  $p$ - $V$  diagram je pak na obr. 20.10b. Ihned můžeme odhadnout, že molární tepelná kapacita  $C_p$  při konstantním tlaku, definovaná vztahem

$$Q = nC_p \Delta T \quad (\text{konstantní tlak}), \quad (20.36)$$

bude větší než molární tepelná kapacita při konstantním objemu, neboť část dodaného tepla se spotřebuje na práci, kterou plyn vykoná během nadzvedávání zatíženého pístu (obr. 20.10a).



**Obr. 20.10** (a) Plynu dodáme teplo  $Q$  za stálého tlaku  $p$ . Tím vzroste jeho objem o  $\Delta V$ , plyn vykoná práci  $p\Delta V$  a jeho teplota vzroste o  $\Delta T$ . (b) Znárodnění tohoto děje na  $p$ - $V$  diagramu. Práce  $p\Delta V$  je dána obsahem zvýrazněné plochy.

Abychom našli vztah mezi  $C_p$  a  $C_V$ , napíšeme nejprve první termodynamický zákon (rov. (19.24)) ve tvaru

$$\Delta U = Q - W. \quad (20.37)$$

Do této rovnice dosadíme za  $\Delta U$  z rov. (20.35) a za  $Q$  z rov. (20.36). Rov. (19.23) nám říká, že práce vykonaná

při konstantním tlaku je  $W = p\Delta V$ . Použijeme-li stavovou rovnici ideálního plynu, můžeme tento vztah přepsat jako

$$W = p\Delta V = nR\Delta T.$$

Po dosazení a vydělení výrazem  $n\Delta T$  dostaneme z rovnice (20.37)

$$C_V = C_p - R,$$

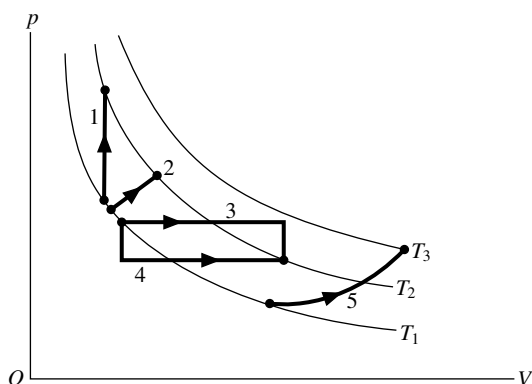
odkud

$$C_p = C_V + R. \quad (20.38)$$

Tato předpověď kinetické teorie plynů dobře souhlasí s experimentem, a to nejen pro jednoatomové plyny, ale pro všechny, jejichž hustota je natolik nízká, že je můžeme považovat za ideální.

**KONTROLA 4:** V  $p$ - $V$  diagramu je vyznačeno pět dějů.

Seřadte sestupně tyto děje podle změny vnitřní energie plynu během těchto dějů.



### PŘÍKLAD 20.8

Balonek s pěti moly (jednoatomového) helia ponoříme do vody do určité hloubky a za konstantního tlaku vodu (a tím i helium) zahřejeme o  $\Delta T = 20\text{ C}^\circ$ . Výsledkem tohoto procesu je zvětšení balonku.

(a) Kolik tepla  $Q$  přijme helium během svého rozpínání a zvyšování teploty?

**ŘEŠENÍ:** Protože považujeme helium za ideální plyn, můžeme použít rov. (20.38) a (20.33), odkud

$$C_p = C_V + R = \frac{5}{2}R.$$

Dosazením do rov. (20.36) dostaneme

$$\begin{aligned} Q &= nC_p\Delta T = n\left(\frac{5}{2}R\right)\Delta T = \\ &= (5,00\text{ mol})(2,5)(8,31\text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1})(20,0\text{ C}^\circ) = \\ &= 2077,5\text{ J} \doteq 2080\text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jaká je změna  $\Delta U$  vnitřní energie helia během zvyšování teploty?

**ŘEŠENÍ:** Ať se teplota helia zvyšuje za konstantního tlaku, nebo za konstantního objemu, můžeme k určení změny vnitřní energie použít rov. (20.35), tedy

$$\begin{aligned} \Delta U &= nC_V\Delta T = \\ &= (5,00\text{ mol})(1,5)(8,31\text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1})(20,0\text{ C}^\circ) = \\ &= 1246,5\text{ J} \doteq 1250\text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

(c) Jakou práci  $W$  vykoná helium proti tlaku okolní vody během svého rozpínání?

**ŘEŠENÍ:** Dle prvního termodynamického zákona platí

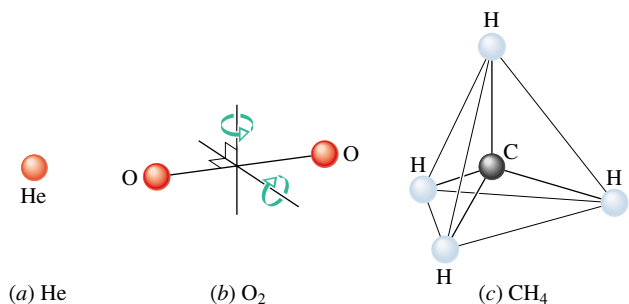
$$\begin{aligned} W &= Q - \Delta U = (2077,5\text{ J}) - (1246,5\text{ J}) = \\ &= 831\text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Všimněte si, že pouze část (1250 J) z celkového tepla (2080 J) přijatého heliem se použije na zvýšení jeho vnitřní energie a tím i jeho teploty. Zbytek (831 J) je použit na práci, kterou helium vykoná během svého rozpínání. Pokud by voda zamrzla, nemohlo by k rozpínání dojít. Pak by stejná změna teploty o  $20\text{ C}^\circ$  vyžadovala pouze 1250 J tepla, protože by helium nekonalo žádnou práci.

## 20.9 STUPNĚ VOLNOSTI A MOLÁRNÍ TEPELNÉ KAPACITY

Jak ukazuje tab. 20.3, souhlasí předpověď  $C_V = \frac{3}{2}R$  s experimentem pro jednoatomové plyny, ale nesouhlasí pro dvouatomové a víceatomové plyny. Tento nesouhlas nyní vysvětlíme tím, že kinetická energie víceatomových molekul není jen energií posuvného pohybu.

Na obr. 20.11 vidíme modely helia (jednoatomový plyn), kyslíku (dvouatomový) a metanu (víceatomový) tak, jak je uvažuje kinetická teorie plynů. Vzhledem ke stavbě jednoatomových molekul, které jsou v podstatě bodové



(a) He

(b) O<sub>2</sub>

(c) CH<sub>4</sub>

**Obr. 20.11** Modely molekul používané v kinetické teorii plynů: (a) helium, typická jednoatomová molekula; (b) kyslík, typická dvouatomová molekula (jsou vyznačeny dvě rotační osy); (c) metan, typická víceatomová molekula.

a jejichž moment setrvačnosti je velmi malý, je rozumné předpokládat, že jejich kinetická energie je plně určena posuvným pohybem. Naopak u víceatomových molekul bude podstatný také příspěvek od rotačního pohybu či kmitů molekuly.

Abychom tyto příspěvky zahrnuli do našich úvah kvantitativně, použijeme tzv. **ekvipartiční teorem**, který poprvé formuloval James Clerk Maxwell:

Každá molekula má jistý počet *stupňů volnosti*  $f$  a každý z nich nezávisle přispívá k energii molekuly. Každému stupni volnosti odpovídá energie  $\frac{1}{2}kT$  na jednu molekulu (neboli  $\frac{1}{2}RT$  na jeden mol).

Pro posuvný pohyb máme tři stupně volnosti, které odpovídají pohybu podél tří kolmých souřadnicových os. Pro rotační pohyb není v případě jednoatomové molekuly žádný stupeň volnosti. V případě dvouatomové molekuly, tj. tuhé činky na obr. 20.11b, existují dvě osy, kolem kterých může molekula rotovat s nezanedbatelným příspěvkem k celkové kinetické energii. Příspěvek od rotace kolem osy spojující jádra atomů v molekule je velice malý, neboť moment setrvačnosti molekuly vůči této ose je prakticky nulový. Molekuly s více než dvěma atomy mají šest stupňů volnosti, tři posuvné a tři rotační. Kmitání (vibrace) mohou přispívat dalšími stupni; ty jsou však někdy „zamrzlé“ a neuplatní se (to vysvětluje kvantová teorie, viz čl. 20.10).

Abychom zobecnili výsledky čl. 20.8 na ideální dvouatomové a víceatomové plyny, musíme postup zopakovat s tím, že nahradíme rov. (20.30) ( $U = \frac{3}{2}nRT$ ) vztahem  $U = (f/2)nRT$ , kde  $f$  je počet stupňů volnosti vzatý z tab. 20.4. Pro molární tepelnou kapacitu za konstantního objemu tak dostaneme

$$C_V = \left(\frac{f}{2}\right)R = 4,16f \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}, \quad (20.39)$$

což samozřejmě souhlasí s rov. (20.33) pro jednoatomový plyn ( $f = 3$ ). Vzorec (20.39), jak vidíme v tab. 20.3, je v souladu s experimentem pro dvouatomové plyny, avšak pro víceatomové plyny dává podstatně nižší hodnoty.

### PŘÍKLAD 20.9

V chatě o objemu  $V$  má vzduch, který budeme považovat za dvouatomový plyn, počáteční teplotu  $T_1$ . Poté, co zatopíme v kamnech, se tato teplota zvýší na  $T_2$ . Jaká je výsledná změna vnitřní energie vzduchu uvnitř chaty?

**ŘEŠENÍ:** Tato situace se poněkud liší od těch, které jsme až dosud vyšetřovali, neboť chata jistě není zcela utěsněna. Pokud by byla utěsněna a teplota by uvnitř stoupla, pak by se dle stavové rovnice ideálního plynu ( $pV = nRT$ ) zvýšil také tlak. Protože však chata není vzduchotěsná, může vzduch různými otvory unikat a tlak vzduchu v chatě se neustále vyrovnává s tlakem venkovního vzduchu.

Dle rov. (20.35) můžeme pro změnu vnitřní energie vzduchu v chatě psát

$$\Delta U = C_V \Delta(nT),$$

přičemž se mění jak  $n$ , tak  $T$ . Použijeme-li stavovou rovnici ideálního plynu a nahradíme-li  $\Delta(nT)$  výrazem  $\Delta(pV)/R$ , získáme vztah

$$\Delta U = \frac{C_V}{R} \Delta(pV).$$

Poněvadž se v chatě nemění ani tlak, ani objem vzduchu, vidíme odtud, že

$$\Delta U = 0,$$

přestože teplota uvnitř stoupá.

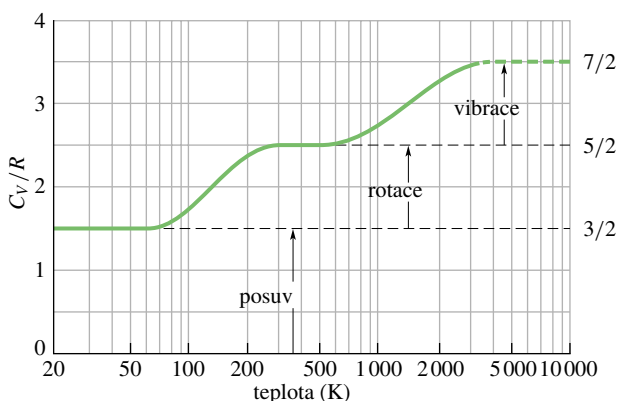
Proč je nám tedy v chatě příjemněji, když si zatopíme? Na naše pocity mají vliv minimálně dva faktory. Člověk si předává s okolím tepelnou energii, protože (a) vyzařuje a přijímá elektromagnetické (termální) záření a (b) si vyměňuje s okolním vzduchem skrze pokožku teplo. Zatopíme-li v kamnech, (a) zvýší se množství přijímaného termálního záření od různých ploch v chatě a (b) stoupne teplota vzduchu v chatě, takže budeme od něho přijímat větší množství tepla a bude nám příjemněji.

**Tabulka 20.4** Stupně volnosti pro různé molekuly

MOLEKULA	PŘÍKLAD	STUPNĚ VOLNOSTI (BEZ VIBRACÍ)			PŘEDPOVĚZENÉ MOLÁRNÍ TEPELNÉ KAPACITY	
		POSUVNÉ	ROTAČNÍ	CELKOVÉ ( $f$ )	$C_V$ (ROV. (20.39))	$C_p = C_V + R$
Jednoatomová	He	3	0	3	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$
Dvouatomová	O <sub>2</sub>	3	2	5	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$
Víceatomová	CH <sub>4</sub>	3	3	6	$3R$	$4R$

## 20.10 TROCHA KVANTOVÉ TEORIE

Souhlas dosavadních výsledků kinetické teorie plynů s experimentem můžeme zlepšit, pokud do našich úvah zahrneme také vibrační pohyb — kmity dvouatomových a víceatomových molekul. Například atomy v molekule  $O_2$  na obr. 20.11b mohou kmitat směrem k sobě a od sebe kolem určité rovnovážné polohy, jako by mezi nimi byla pružina. Avšak experiment ukazuje, že tyto kmity se u molekul objeví až při relativně vysokých teplotách plynu, tj. molekuly začnou kmitat až tehdy, mají-li dostatečnou energii. Podobně je tomu s rotací molekul, ale u tohoto pohybu je potřebná energie nižší, takže molekuly rotují už při běžných teplotách.



**Obr. 20.12** Závislost  $C_V/R$  na teplotě pro (dvouatomový) vodíkový plyn. Protože rotační a vibrační pohyb vyžadují určitou minimální energii, je při nízkých teplotách možný pouze pohyb posuvný. S rostoucí teplotou plynu začínají molekuly nejprve rotovat a při dostatečných teplotách také kmitat.

Obr. 20.12 nám dá lepší představu o tom, kdy začíná hrát roli rotační a kdy vibrační pohyb molekul. Na obrázku je graf závislosti poměru  $C_V/R$  na teplotě pro dvouatomový vodíkový plyn  $H_2$ . Teplotní škála je logaritmická, aby bylo možno pokrýt dostatečný rozsah teplot. Z tohoto grafu odečteme, že pro teploty pod 80 K je  $C_V/R = 1,5$ . Tato hodnota odpovídá třem stupňům volnosti posuvného pohybu, který za nízkých teplot jediný přispívá k tepelné kapacitě  $C_V$ . Se zvyšující se teplotou roste  $C_V/R$  na hodnotu 2,5, neboť začínají přispívat další dva stupně volnosti. Kvantová teorie nám říká, že tyto stupně volnosti odpovídají rotačnímu pohybu molekul a že je zapotřebí určitá minimální energie, aby molekula mohla rotovat. (Tato minimální energie je spojena s kvantováním momentu hybnosti a jde o netriviální výsledek kvantové teorie. Uvědomme si, že v klasické mechanice může být energie rotačního pohybu libovolně malá.) Při nízkých teplotách (pod 80 K) nemají molekuly dostatečnou energii, aby mohly rotovat.

S rostoucí teplotou rotuje nejprve jen několik molekul, později více a více, až nakonec rotují prakticky všechny a  $C_V/R = 2,5$ .

Podobně nám kvantová teorie říká, že i vibrační pohyb molekul vyžaduje určitou minimální energii, která je však vyšší než u rotačního pohybu a je jí dosaženo až při teplotách okolo 1 000 K (obr. 20.12). Se zvyšující se teplotou opět přibývá kmitajících molekul a  $C_V/R$  roste až na hodnotu 3,5. (Graf na obr. 20.12 končí okolo teploty 3 200 K, při které atomy kmitají natolik, že se od sebe odtrhnou — dojde k disociaci molekul  $H_2$  na dva oddělené atomy H.)

## 20.11 ADIABATICKÉ ROZPÍNÁNÍ IDEÁLNÍHO PLYNU

V čl. 18.2 jsme studovali zvukové vlny jako posloupnost stlačení a rozepnutí vzduchu; tyto změny probíhají natolik rychle, že nedejde k přenosu tepla ve vzduchu z jednoho místa na druhé. Proces, při kterém je  $Q = 0$ , jsme v čl. 19.10 nazvali **adiabatický**. Výměně tepla během určitého děje lze zabránit dvěma způsoby. Buď děj probíhá tak rychle, že k výměně tepla prakticky nestihne dojít (jako v případě zvukových vln), anebo systém dobře tepelně izolujeme. Podívejme se nyní, co může o adiabatickém ději říci kinetická teorie plynů.

Na obr. 20.13a je zobrazen izolovaný válec obsahující ideální plyn. Odebíráním závaží z pístu necháme plyn adiabaticky rozpínat. Když se zvětšuje objem plynu, jeho teplota i tlak klesají. Později dokážeme, že během vratného adiabatického děje platí mezi tlakem a objemem plynu vztah

$$pV^\gamma = \text{konst.} \quad (\text{adiabatický děj}), \quad (20.40)$$

kde  $\gamma = C_p/C_V$  je poměr molárních tepelných kapacit, neboli tzv. **Poissonova konstanta**. Tento děj je v  $p$ - $V$  diagramu na obr. 20.13b znázorněn částí křivky zvané **adiabata**, která je popsána rovnicí  $p = \text{konst.}/V^\gamma$ . Pokud děj probíhá z počátečního stavu  $\mathcal{S}_i$  do koncového stavu  $\mathcal{S}_f$ , plyne z rov. (20.40)

$$p_i V_i^\gamma = p_f V_f^\gamma \quad (\text{adiabatický děj}). \quad (20.41)$$

Rovnici pro adiabatický děj lze také přepsat pomocí veličin  $V$  a  $T$ . K tomu použijeme stavovou rovnici ideálního plynu ( $pV = nRT$ ), pomocí níž vyloučíme tlak  $p$  z rov. (20.40) a dostaneme

$$\frac{nRT}{V} V^\gamma = \text{konst.}$$

Protože  $n$  a  $R$  jsou konstantní, přepíšeme ještě poslední rov-

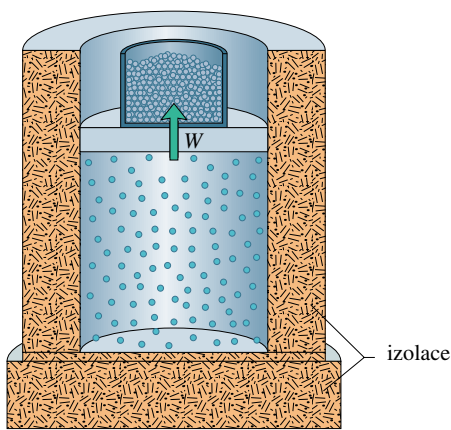


nici na ekvivalentní tvar

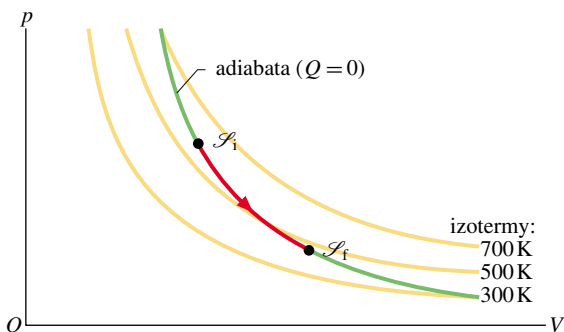
$$TV^{\gamma-1} = \text{konst.} \quad (\text{adiabatický děj}), \quad (20.42)$$

kde však vystupuje jiná konstanta než v rov. (20.40). Pokud děj probíhá z počátečního stavu  $\mathcal{S}_i$  do koncového stavu  $\mathcal{S}_f$ , můžeme rov. (20.42) přepsat jako

$$T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1} \quad (\text{adiabatický děj}). \quad (20.43)$$



(a)



(b)

**Obr. 20.13** (a) Odebíráme-li závaží z pístu, zvětšuje se objem ideálního plynu. Děj je adiabatický, neboť  $Q = 0$ . (b) Děj probíhá z počátečního stavu  $\mathcal{S}_i$  do koncového stavu  $\mathcal{S}_f$  podél adiabaty znázorněné v  $p$ - $V$  diagramu.

### Odvození rov. (20.40)

Předpokládejme, že odebereme z pístu na obr. 20.13a trochu zátěže, a tím necháme plyn povytlačit píst a zvětšit tak jeho objem o  $dV$ . Protože je změna objemu infinitezimální, můžeme tlak plynu působícího na píst považovat během této změny za neměnný. Tento předpoklad nám umožňuje vyjádřit elementární práci  $dW$  vykonanou plynem během

zvětšování objemu jako  $p dV$ . Dosazením do rov. (19.25) přepíšeme první termodynamický zákon jako

$$dU = dQ - p dV. \quad (20.44)$$

Poněvadž je systém tepelně izolovaný (tj. rozpínání je adiabatické), dosadíme  $dQ = 0$ . Dále použijeme rov. (20.35) a nahradíme  $dU$  výrazem  $nC_V dT$ . Po jednoduché úpravě tak obdržíme

$$n dT = -\frac{p}{C_V} dV. \quad (20.45)$$

Diferenciací stavové rovnice ideálního plynu ( $pV = nRT$ ) dostaneme rovnici

$$p dV + V dp = nR dT, \quad (20.46)$$

kterou přepíšeme pomocí vztahu  $R = C_p - C_V$  na tvar

$$n dT = \frac{p dV + V dp}{C_p - C_V}. \quad (20.47)$$

Dosazením za  $n dT$  z rov. (20.47) do (20.45) dostaneme

$$\frac{dp}{p} + \frac{C_p}{C_V} \frac{dV}{V} = 0.$$

Označíme-li poměr molárních tepel jako  $\gamma$  a poslední rovnici integrujeme, dostaneme

$$\ln p + \gamma \ln V = \text{konst.}$$

Levou stranu přepíšeme jako  $\ln pV^\gamma$  a odlogaritmováním nakonec nalezneme

$$pV^\gamma = \text{konst.}, \quad (20.48)$$

což jsme chtěli dokázat.

### Volná expanze

Z čl. 19.10 víme, že volná expanze je nevratný adiabatický děj, při kterém plyn nekoná žádnou práci a nedochází tedy ani ke změně vnitřní energie plynu. Tento proces se odlišuje od vratného adiabatického děje popsaného rov. (20.40) až (20.48), během kterého plyn koná práci a mění se jeho vnitřní energie. Pro volnou expanzi proto nelze uvedené vztahy použít, třebaže jde také o adiabatický děj.

Připomeňme si dále, že během volné expanze je plyn v rovnovážném stavu pouze na začátku a na konci. Na  $p$ - $V$  diagramu nemůžeme zobrazit celý průběh expanze, ale pouze tyto dva rovnovážné stavy, o kterých víme, že leží na izotermě, neboť se při volné expanzi nemění teplota

plynu ( $\Delta U = 0$ ). Rov. (20.43) je v tomto případě nahrazena rovnicí

$$T_i = T_f \quad (\text{volná expanze}). \quad (20.49)$$

Budeme-li považovat plyn za ideální ( $pV = nRT$ ), pak při stálé teplotě zůstává výraz  $pV$  konstantní. Místo rov. (20.41) tak pro volnou expanzi platí

$$p_i V_i = p_f V_f \quad (\text{volná expanze}). \quad (20.50)$$

loty plynu, platí tedy

$$T_f = T_i = 310 \text{ K}. \quad (\text{Odpověď})$$

Koncový tlak určíme pomocí rov. (20.50) a dostaneme

$$p_f = p_i \frac{V_i}{V_f} = (2,0 \text{ Pa}) \frac{(12 \text{ l})}{(19 \text{ l})} \doteq 1,3 \text{ Pa}. \quad (\text{Odpověď})$$

### PŘÍKLAD 20.10

Uvažujme stejnou situaci jako v př. 20.2; jeden mol kyslíku (ideálního plynu) izotermicky expanduje při teplotě 310 K z počátečního objemu  $V_i = 12 \text{ l}$  na koncový objem  $V_f = 19 \text{ l}$ .

(a) Jaká bude koncová teplota plynu, pokud expanduje adiabaticky z objemu 12 l na objem 19 l? Kyslík ( $\text{O}_2$ ) má dvouatomové molekuly, u kterých uvažujte pouze posuvný a rotační pohyb.

**ŘEŠENÍ:** Pro dvouatomový plyn, u jehož molekul neuvažujeme vibrační pohyb, platí  $C_p = \frac{7}{2}R$  a  $C_V = \frac{5}{2}R$ . Tedy  $\gamma = C_p/C_V = 1,40$  a z rov. (20.43) dostaneme

$$T_f = \frac{T_i V_i^{\gamma-1}}{V_f^{\gamma-1}} = \frac{(310 \text{ K})(12 \text{ l})^{1,40-1}}{(19 \text{ l})^{1,40-1}} \doteq 258 \text{ K}. \quad (\text{Odpověď})$$

Protože došlo k ochlazení plynu z teploty 310 K na 258 K, snížila se také jeho vnitřní energie. Tento úbytek vnitřní energie je spojen s prací, kterou plyn vykonal (např. k nadzvednutí závaží na pístu na obr. 20.13a).

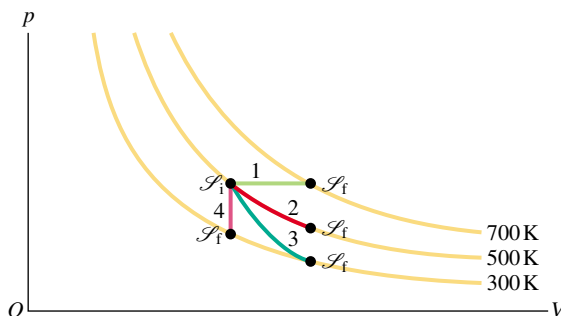
(b) Jaká bude koncová teplota a koncový tlak, pokud bude plyn volně expandovat opět na koncový objem  $V_f$ ? Jeho počáteční tlak byl 2,0 Pa.

**ŘEŠENÍ:** Během volné expanze nedochází ke změně tep-

### RADY A NÁMĚTY

**Bod 20.2:** Grafické zobrazení čtyř dějů s plynem

V této kapitole jsme se zabývali ideálním plynem a ději, které s ním můžeme vykonat. Mezi nimi mají zvláštní význam čtyři děje (izobarický, izotermický, adiabatický a izochorický). Jejich znázornění pomocí  $p$ - $V$  diagramu vidíme na obr. 20.14 a některé jejich charakteristiky v tab. 20.5.



**Obr. 20.14**  $p$ - $V$  diagram popisující čtyři význačné děje v ideálním plynem. Viz také tab. 20.5.

**KONTROLA 5:** Uspořádejte sestupně dráhy 1, 2, 3 z obr. 20.14 podle tepla dodaného plynem.

**Tabulka 20.5** Čtyři význačné děje

DRÁHA NA OBR. 20.14	VLASTNOST	TYP DĚJE	NĚKTERÉ SPECIÁLNÍ VÝSLEDKY
			$(\Delta U = Q - W$ a $\Delta U = nC_V \Delta T$ pro všechny děje)
1	$p = \text{konst.}$	izobarický	$Q = nC_p \Delta T; \quad W = p \Delta V$
2	$T = \text{konst.}$	izotermický	$Q = W = nRT \ln(V_f/V_i); \quad \Delta U = 0$
3	$Q = 0$	adiabatický	$Q = 0; \quad W = -\Delta U$
4	$V = \text{konst.}$	izochorický	$Q = \Delta U = nC_V \Delta T; \quad W = 0$

## PŘEHLED & SHRUTÍ

### Kinetická teorie plynů

Kinetická teorie plynů spojuje makroskopické vlastnosti plynů (např. tlak a teplotu) s mikroskopickými vlastnostmi molekul plynu (např. s rychlostmi a kinetickými energiemi).

### Avogadrova konstanta

Jeden mol substance obsahuje  $N_A$  základních jednotek (obvykle atomů či molekul), přičemž experimentálně určená Avogadrova konstanta  $N_A$  má hodnotu

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \quad (\text{Avogadrova konstanta}). \quad (20.1)$$

Molární hmotnost  $m_m$  libovolné látky je hmotnost jednoho molu této látky.

### Ideální plyn

Ideální plyn je charakterizován stavovou rovnicí

$$pV = nRT \quad (\text{stavová rovnice ideálního plynu}), \quad (20.4)$$

kde  $p$  značí tlak,  $T$  teplotu,  $V$  objem a  $n$  látkové množství (počet molů) plynu. Plynová konstanta  $R$  má hodnotu  $8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

### Práce vykonaná při izotermickém ději

Práce, kterou vykoná ideální plyn během izotermického děje, je dána vztahem

$$W = nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \quad (\text{ideální plyn, izotermický děj}), \quad (20.10)$$

kde  $V_i$ , resp.  $V_f$  je počáteční, resp. koncový objem plynu.

### Tlak, teplota a rychlost molekul

Tlak vyvolaný  $n$  moly ideálního plynu je spojen s rychlostmi molekul plynu vztahem

$$p = \frac{nm_m v_{\text{ef}}^2}{3V}, \quad (20.17)$$

přičemž střední kvadratická rychlost molekul plynu  $v_{\text{ef}}$  je definována jako  $v_{\text{ef}} = \sqrt{v^2}$ . Použitím rov. (20.4) a (20.17) získáme pro ni výraz

$$v_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{3RT}{m_m}}. \quad (20.18)$$

### Teplota a kinetická energie

Střední kinetická energie  $\overline{E}_k$  posuvného pohybu připadající na jednu molekulu ideálního plynu je

$$\overline{E}_k = \frac{3}{2}kT, \quad (20.20)$$

kde  $k = R/N_A = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  je Boltzmannova konstanta.

### Střední volná dráha

Střední volná dráha  $\lambda$  molekul plynu je střední dráha, kterou molekula urazí mezi po sobě jdoucími srážkami. Platí pro ni

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 N/V}, \quad (20.22)$$

kde  $N/V$  je hustota molekul a  $d$  jejich průměr.

### Maxwellovo rozdělení rychlostí molekul

Relativní počet molekul s rychlostmi v intervalu  $(v, v + dv)$  je dán výrazem  $P(v) dv$ , ve kterém funkci

$$P(v) = 4\pi \left( \frac{m_m}{2\pi RT} \right)^{3/2} v^2 e^{-m_m v^2 / 2RT} \quad (20.24)$$

nazýváme Maxwellovo rozdělení rychlostí. Třemi význačnými rychlostmi odvozenými z tohoto rozdělení jsou

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{m_m}} \quad (\text{nejpravděpodobnější rychlost}), \quad (20.29)$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi m_m}} \quad (\text{střední rychlost}) \quad (20.27)$$

a výše uvedená střední kvadratická rychlost  $v_{\text{ef}}$  (rov. (20.18)).

### Molární tepelné kapacity

Molární tepelná kapacita  $C_V$  plynu při stálém objemu  $V$  je definována vztahem

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{Q}{\Delta T} = \frac{1}{n} \frac{\Delta U}{\Delta T}, \quad (20.31, 20.32)$$

ve kterém  $Q$  značí teplo, které si  $n$  molů plynu izochoricky vymění s okolím,  $\Delta T$  je změna teploty a  $\Delta U$  je změna vnitřní energie plynu. Pro ideální jednoatomový plyn platí

$$C_V = \frac{3}{2}R = 12,5 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}. \quad (20.33)$$

Molární tepelná kapacita  $C_p$  plynu při stálém tlaku  $p$  je definována vztahem

$$C_p = \frac{1}{n} \frac{Q}{\Delta T}, \quad (20.36)$$

ve kterém  $Q$ ,  $n$  a  $\Delta T$  mají analogický význam jako v předchozím případě. Molární tepelné kapacity  $C_p$  a  $C_V$  ideálního plynu jsou svázány rovnicí

$$C_p = C_V + R. \quad (20.38)$$

### Vnitřní energie ideálního plynu

Pro vnitřní energii  $U$  molů ideálního plynu platí

$$U = nC_V T \quad (\text{ideální plyn}). \quad (20.34)$$

Pokud libovolným způsobem změňme teplotu o  $\Delta T$ , bude změna jeho vnitřní energie rovna

$$\Delta U = nC_V \Delta T \quad (\text{ideální plyn, libovolný proces}), \quad (20.35)$$

přičemž hodnota  $C_V$  závisí na druhu ideálního plynu.

### Stupně volnosti a $C_V$

Molární tepelnou kapacitu  $C_V$  můžeme odhadnout užitím *ekvipartičního teoremu*. Ten říká, že na každý stupeň volnosti jedné molekuly plynu (tj. na každý nezávislý způsob uchování energie) připadá průměrně energie  $\frac{1}{2}kT$  (což odpovídá energii  $\frac{1}{2}RT$  na jeden mol). Značí-li  $f$  počet stupňů volnosti, je  $U = (f/2)nRT$  a

$$C_V = \left(\frac{f}{2}\right) R = 4,16 f \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}. \quad (20.39)$$

Pro jednoatomový plyn  $f = 3$  (tři stupně volnosti pro posuvný pohyb). Pro dvouatomový plyn  $f = 5$  (tři pro posuvný a dva pro rotační pohyb); po započtení vibrací  $f = 7$ .

### Adiabatický děj

Probíhá-li v ideálním plynu vratný adiabatický děj (tj. děj, pro který je  $Q = 0$ ), jsou tlak a objem plynu spojeny vztahem

$$pV^\gamma = \text{konst.} \quad (\text{adiabatický děj}), \quad (20.40)$$

kde  $\gamma = C_p/C_V$  je Poissonova konstanta daného plynu. Při volné expanzi nabývá plyn stejné teploty v počátečním i koncovém stavu, a proto  $p_i V_i = p_f V_f$ . Během volné expanze není plyn v tepelné rovnováze a nemá proto teplotu ani tlak definovány; výraz  $pV$  nemá smysl a nelze ho průběžně vyhodnocovat.

## OTÁZKY

1. Změní-li se teplota ideálního plynu za neměnného objemu z  $20^\circ\text{C}$  na  $40^\circ\text{C}$ , zvýší se tlak dvakrát, méně než dvakrát, nebo více než dvakrát?

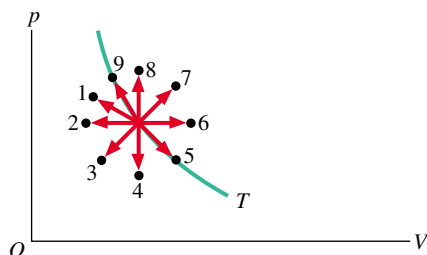
2. Dvě stejně velké místnosti jsou spojeny úzkým otevřeným průchodem, ale jejich teplotu udržujeme na různých hodnotách. Ve které místnosti je více molekul?

3. Molární hmotnosti a teploty tří ideálních plynů (v kelvinech) jsou (a)  $m_m$  a  $2T_0$ , (b)  $2m_m$  a  $T_0$ , (c)  $6m_m$  a  $6T_0$ . Seřadte sestupně tyto plyny podle střední kvadratické rychlosti jejich molekul.

4. Objem a počet molekul plynu ve čtyřech různých situacích nabývají hodnot (a)  $2V_0$  a  $N_0$ , (b)  $3V_0$  a  $3N_0$ , (c)  $8V_0$  a  $4N_0$ , (d)  $3V_0$  a  $9N_0$ . Seřadte sestupně jednotlivé situace podle střední volné dráhy molekul.

5. Uvažujme plyn z př. 20.2. Jaké teplo si vymění plyn s okolím během svého rozpínání?

6. Na obr. 20.15 je vyznačen počáteční stav ideálního plynu a izoterma jdoucí tímto stavem. Během kterého z dějů, které jsou naznačeny šipkami, dojde ke snížení teploty plynu?



Obr. 20.15 Otázka 6

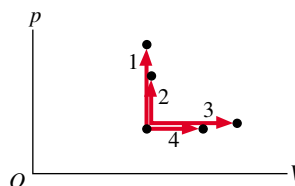
tyto děje podle změny teploty plynu.

	a	b	c	d
$Q$	-50	+35	-15	+20
$W$	-50	+35		
$W'$			-40	+40

8. Abychom zvýšili teplotu určitého množství ideálního plynu o  $\Delta T$ , musíme za neměnného objemu dodat teplo 30 J, nebo za neměnného tlaku teplo 50 J. Jakou práci vykoná plyn v druhém případě?

9. Ideální dvouatomový plyn, u jehož molekul uvažujeme pouze rotaci, ale ne kmity, odevzdá během děje teplo  $Q$ . Je výsledná změna vnitřní energie plynu větší, jde-li o děj izochorický, nebo jde-li o děj izobarický?

10. Jisté množství tepla dodáme jednomu molu jednoatomového plynu (a) při stálém tlaku a (b) při stálém objemu; a dále jednomu molu dvouatomového plynu (c) při stálém tlaku a (d) při stálém objemu. Na obr. 20.16 vidíme  $p$ - $V$  diagram se čtyřmi drahami jdoucími ze společného počátečního stavu do různých koncových stavů. Rozhodněte, která dráha odpovídá kterému ději. (e) Rotují molekuly dvouatomového plynu?



Obr. 20.16 Otázka 10

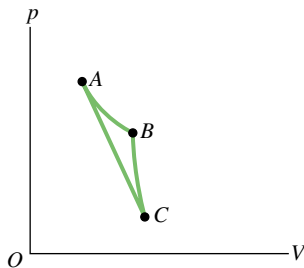
7. Tabulka udává pro děje  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  teplo  $Q$ , které si vymění ideální plyn s okolím, a dále buď práci  $W$  vykonanou plynem, nebo práci  $W'$ , která byla vykonána na plynu. Seřadte sestupně

11. Jak se změni teplota plynu (a) během izotermické expanze, (b) během izobarické expanze, (c) během adiabatické expanze a (d) při zvýšení tlaku během izochorického děje? Stoupne, klesne, nebo zůstane stejná?



**12.** (a) Seřadte sestupně děje vyznačené drahami na obr. 20.14 podle práce, kterou vykoná plyn. (b) Seřadte sestupně děje 1, 2 a 3 podle změny vnitřní energie plynu.

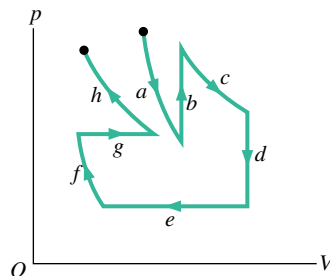
**13.** Plyn vykoná práci 5 J během izotermického děje, který je zobrazen v  $p$ - $V$  diagramu na obr. 20.17 dráhou A–B. Dále vykoná práci 4 J během adiabatického děje, kterému odpovídá dráha B–C. Jaká je změna vnitřní energie plynu při přechodu po přímé dráze A–C?



Obr. 20.17 Otázka 13

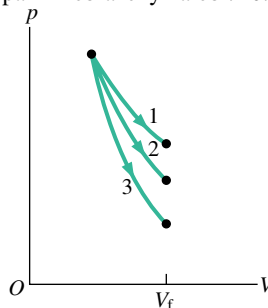
**14.** Na obr. 20.18 je kvalitativně naznačeno osm dějů (označených písmeny  $a$  až  $h$ ), které proběhnou s ideálním plynem, když přechází z počátečního do koncového stavu. V tabulce jsou uvedeny hodnoty  $Q$ ,  $W$  a  $\Delta U$  (v joulech) pro určité děje, označené 1–8. Přiřadte k jednotlivým drahám na obr. 20.18 odpovídající sloupec z tabulky. (Tip: Porovnejte dráhy na obr. 20.18 s drahami na obr. 20.14.)

	1	2	3	4	5	6	7	8
$Q$	10	5	-20		-10	-12		10
$W$	10		-10	10		-12	-10	
$\Delta U$		2		-10	-10		10	10



Obr. 20.18 Otázka 14

**15.** (a) Na obr. 20.19 vidíme  $p$ - $V$  diagram adiabatického rozpínání jednoatomového, dvouatomového a víceatomového plynu z téhož stavu na koncový objem  $V_f$ . Která z drah přísluší kterému z plynů? (b) Pokud by jednoatomový plyn volně expandoval na stejný koncový objem  $V_f$ , byl by výsledný tlak větší, menší, nebo stejný jako v případě (a)? (Tip: Jaký by byl počáteční a koncový stav při volné expanzi zobrazený na obr. 20.14?)



Obr. 20.19 Otázka 15

## CVIČENÍ & ÚLOHY

### ODST. 20.2 Avogadrova konstanta

**1C.** Molární hmotnost zlata je  $197 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ . (a) Kolik molů zlata je obsaženo ve vzorku čistého zlata o hmotnosti 2,50 g? (b) Kolik atomů je ve vzorku?

**2C.** Určete hmotnost v kilogramech  $7,50\cdot 10^{24}$  atomů arsenu, jehož molární hmotnost je  $74,9 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

**3Ú.** Kolik molekul vody by připadalo na  $1,0 \text{ cm}^2$ , kdyby byl  $1,0 \text{ g}$  vody rovnoměrně rozprostřen po zemském povrchu?

**4Ú.** Vyberte ze slov „kapka, čajová lžička, polévková lžice, šálek, vědro, sud, cisterna“ to jediné, které by šlo doplnit na obě místa do věty: ... vody obsahuje tolik molekul, jako je... vody ve všech oceánech světa. Oceány pokrývají 75 % zemského povrchu a mají průměrnou hloubku 5 km. (Podle Edwarda M. Purcella.)

**5Ú.** Jeden fyzik kdysi napsal: „V jediném písmenu této věty je tolik molekul inkoustu, že by po jedné mohli dostat nejen lidé na Zemi, ale i každý tvor v naší Galaxii, kdyby u každé hvězdy byla planeta s obdobnou populací, jako má Země.“ Ověřte toto

tvrzení. Předpokládejte, že hmotnost inkoustu (molární hmotnost  $18 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ ) je  $1 \mu\text{g}$ , že na Zemi žije  $6\cdot 10^9$  lidí a že počet hvězd v naší Galaxii je  $10^{11}$ .

### ODST. 20.3 Ideální plyn

**6C.** (a) Jaký objem zaujímá 1,00 mol ideálního plynu za normálních podmínek, tj. při tlaku 1,00 atm a teplotě  $0^\circ\text{C}$ ? (b) Ukažte, že počet molekul v centimetru krychlovém (tzv. **Loschmidtovo číslo**) za normálních podmínek je  $2,69\cdot 10^{19}$ .

**7C.** Vypočítejte (a) počet molů a (b) počet molekul v  $1,00 \text{ cm}^3$  ideálního plynu při tlaku 100 Pa a teplotě 220 K.

**8C.** Nejlepší vakuum, kterého lze dosáhnout v laboratoři, odpovídá zhruba tlaku  $1\cdot 10^{-18}$  atm. Kolik molekul je v jednom krychlovém centimetru při tomto tlaku a teplotě 293 K?

**9Ú.** Ideální plyn zaujímá při teplotě  $10,0^\circ\text{C}$  a tlaku 100 kPa objem  $2,50 \text{ m}^3$ . (a) Kolik molů plynu tam je? (b) Jaký objem bude plyn zaujímat, zvýší-li se jeho tlak na 300 kPa a jeho teplota na  $30^\circ\text{C}$ ?

**10C.** Kyslík se z počátečního stavu o objemu  $1\,000\text{ cm}^3$ , teplotě  $40,0^\circ\text{C}$  a tlaku  $1,01\cdot 10^5\text{ Pa}$  rozeptne na koncový objem  $1\,500\text{ cm}^3$ , přičemž jeho tlak *vzroste* na hodnotu  $1,06\cdot 10^5\text{ Pa}$ . (a) Kolik molů kyslíku se účastní tohoto děje? (b) Jaká je koncová teplota plynu?

**11C.** Pneumatika automobilu má objem  $1\,000\text{ in}^3$  a je naplněna vzduchem při obvyklém tlaku  $24,0\text{ lb/in}^2$  a teplotě  $0,00^\circ\text{C}$ . Jaký bude tlak v pneumatice, zvýší-li se teplota na  $27,0^\circ\text{C}$  za současného zvýšení jejího objemu na  $1\,020\text{ in}^3$ ? (*Tip:* Není nutno převádět britské jednotky na jednotky SI; proč? Použijte vztah  $p_{\text{atm}} = 14,7\text{ lb/in}^2$ .)

**12C.** Vypočítejte práci, kterou musíme vykonat, abychom izotermicky stlačili kyslík z objemu  $22,4\text{ l}$  na objem  $16,8\text{ l}$ . Na počátku byl jeho tlak  $1,00\text{ atm}$  a teplota  $0^\circ\text{C}$ .

**13Ú.** (a) Jaká je číselná hustota molekul (počet molekul v jednotce objemu) vzduchu při teplotě  $20^\circ\text{C}$  a tlaku  $1,00\text{ atm}$ ? (b) Jaká je hmotnost  $1\text{ m}^3$  vzduchu za těchto podmínek? Uvažujte, že ve vzduchu je  $75\%$  molekul dusíku a  $25\%$  molekul kyslíku.

**14Ú.** Stavová rovnice určitého materiálu pro tlak  $p$ , teplotu  $T$  a objem  $V$  je

$$p = \frac{AT - BT^2}{V},$$

kde  $A$  a  $B$  jsou konstanty. Nalezněte vztah pro práci, kterou vykoná materiál, jestliže se jeho teplota změní z  $T_1$  na  $T_2$ , přičemž tlak zůstává konstantní.

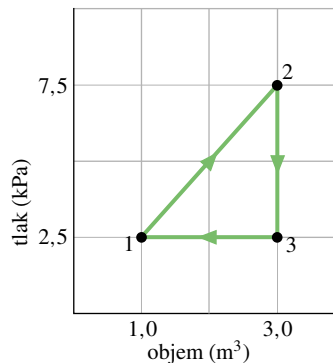
**15Ú.** Vzduch, který na začátku zaujímá objem  $0,14\text{ m}^3$  při tlaku  $1,03\cdot 10^5\text{ Pa}$ , nejprve izotermicky expanduje, přičemž se jeho tlak vyrovná s atmosférickým, a poté je izobaricky ochlazován, až se jeho objem bude rovnat původnímu objemu. Vypočítejte práci, kterou plyn vykoná během popsaného děje.

**16Ú.** Uvažujte jisté množství plynu. Porovnejte křivky pro izochorický, izobarický a izotermický děj (a) na  $p$ - $V$  diagramu, (b) na  $p$ - $T$  diagramu a (c) na  $V$ - $T$  diagramu. (d) Jak tyto křivky závisí na množství plynu?

**17Ú.** V nádobě jsou smíchány 2 moly určitého ideálního plynu s  $0,5$  molu jiného ideálního plynu. První plyn má molární hmotnost  $m_{m1}$  a druhý  $m_{m2} = 3m_{m1}$ . Jaká část z celkového tlaku směsi na stěny nádoby připadá na druhý plyn? (V kinetické teorii plynu je možné odvodit **zákon parciálních tlaků** pro směs plynů, které spolu nereagují: *Celkový tlak směsi plynů v určitém objemu je roven součtu tlaků, které by jednotlivé plyny vyvolaly, pokud by zaujímaly stejný objem jako směs.*)

**18Ú.** Vzorek ideálního plynu prochází kruhovým dějem 1231 na obr. 20.20, přičemž jeho teplota ve stavu 1 je  $T = 200\text{ K}$ . (a) Kolik molů plynu je ve vzorku? Jaká je teplota plynu (b) ve stavu 2 a (c) ve stavu 3? (d) Jaké teplo bylo dodáno plynu během kruhového děje?

**19Ú.** Ideální plyn o počáteční teplotě  $300\text{ K}$  je při tlaku  $25\text{ Pa}$  izobaricky ochlazen a jeho objem se zmenší ze  $3,0\text{ m}^3$  na objem  $1,8\text{ m}^3$ . Během tohoto procesu plyn odevzdá teplo  $75\text{ J}$ .



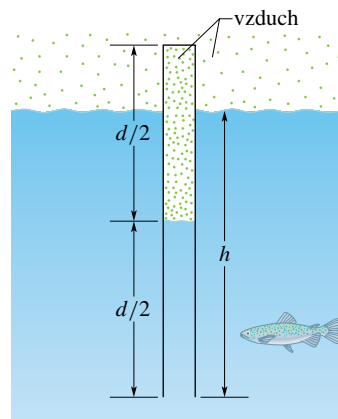
Obr. 20.20 Úloha 18

(a) Jak se změní vnitřní energie plynu? (b) Jaká bude koncová teplota plynu?

**20Ú.** Meteorologický balon je naplněn heliem při atmosférickém tlaku  $1,0\text{ atm}$  a teplotě  $20^\circ\text{C}$ . Objem helia je  $2,2\text{ m}^3$ . V nadmořské výšce  $6\text{ km}$  je atmosférický tlak pouze  $380\text{ torr}$  a helium se proto rozeptne, přičemž obal balonu mu v rozpínání nijak nebrání. Teplota plynu v této výšce je  $-48^\circ\text{C}$ . Jaký je objem helia v této výšce?

**21Ú.** Vzduchová bublina objemu  $20\text{ cm}^3$  se nachází na dně čtyřicetimetrového jezera, kde je teplota vody  $4,0^\circ\text{C}$ . Bublina stoupá k hladině, kde je teplota vody  $20^\circ\text{C}$ . Předpokládejte, že teplota vzduchu v bublině je vždy rovna teplotě okolní vody. Jaký bude mít bublina objem těsně pod hladinou jezera?

**22Ú.** Trubice délky  $d = 25,0\text{ m}$  je na jednom konci uzavřena. Budeme ji svisle nořit do vody jezera otevřeným koncem, až voda vystoupí do poloviny trubice (obr. 20.21). Jak hluboko bude v tomto okamžiku ústí trubice pod hladinou? Předpokládejte, že teplota je všude stejná a že se s časem nemění.

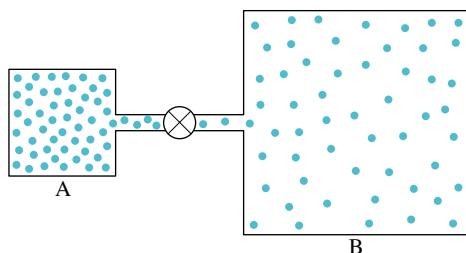


Obr. 20.21 Úloha 22

**23Ú.** Horkovzdušný balon včetně koše má hmotnost  $550\text{ lb}$  a jeho objem je  $77\,000\text{ ft}^3$ . Jaká musí být teplota vzduchu ve  $^\circ\text{F}$  v plně nafouknutém balonu, aby byla jeho nosnost  $600\text{ lb}$  (tj., aby kromě  $550\text{ lb}$  své váhy unesl navíc dalších  $600\text{ lb}$ )? Předpokládejte, že okolní vzduch má při teplotě  $20,0^\circ\text{C}$  hustotu  $7,56\cdot 10^{-2}\text{ lb/ft}^3$ .

**24Ú.** Ocelová nádoba obsahuje 300 g plynného amoniaku ( $\text{NH}_3$ ) při tlaku  $1,35 \cdot 10^6$  Pa a teplotě  $77^\circ\text{C}$ . (a) Jaký je objem nádoby? (b) Po určité době, během níž teplota nádoby poklesla na  $22^\circ\text{C}$ , je naměřen tlak  $8,7 \cdot 10^5$  Pa. Kolik gramů plynu uniklo stěnami nádoby?

**25Ú.** Nádoba A na obr. 20.22, která na začátku obsahuje ideální plyn o teplotě 300 K a tlaku  $5,0 \cdot 10^5$  Pa, je úzkou trubicí spojena s nádobou B, která má čtyřikrát větší objem a která obsahuje stejný plyn, avšak při teplotě 400 K a tlaku  $1,0 \cdot 10^5$  Pa. Jaký bude výsledný tlak v systému, jestliže otevřeme kohoutek na spojovací trubici, ale zároveň budeme udržovat původní teploty obou nádob?



Obr. 20.22 Úloha 25

#### ODST. 20.4 Tlak, teplota a střední kvadratická rychlost

**26C.** Vypočítejte střední kvadratickou rychlost atomů helia při teplotě 1 000 K. Molární hmotnost helia je  $4,00 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

**27C.** Nejnižší teplota v mezihvězdném prostoru je  $2,7 \text{ K}$ . Jaká je střední kvadratická rychlost molekul vodíku při této teplotě? (Použijte tab. 20.1.)

**28C.** Najděte střední kvadratickou rychlost atomů argonu při teplotě 313 K. Molární hmotnost argonu je  $39,9 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

**29C.** Uvažujme Slunce jako obrovskou kouli horkého ideálního plynu. Teplota a tlak v určité oblasti sluneční atmosféry jsou  $2,00 \cdot 10^6 \text{ K}$  a  $0,030 0 \text{ Pa}$ . Vypočítejte střední kvadratickou rychlost volných elektronů v této oblasti. (Hmotnost elektronu je  $9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .)

**30C.** (a) Vypočítejte střední kvadratickou rychlost molekul dusíku při  $20,0^\circ\text{C}$ . Při jaké teplotě bude tato rychlost (b) poloviční, (c) dvojnásobná?

**31C.** Při jaké teplotě mají atomy helia stejnou střední kvadratickou rychlost jako molekuly vodíku  $\text{H}_2$  při  $20,0^\circ\text{C}$ ?

**32Ú.** Při teplotě 273 K a tlaku  $1,00 \cdot 10^{-2} \text{ atm}$  je hustota plynu  $1,24 \cdot 10^{-5} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ . (a) Nalezněte střední kvadratickou rychlost  $v_{\text{ef}}$  molekul plynu. (b) Nalezněte molární hmotnost plynu a určete, o který plyn se jedná.

**33Ú.** Hmotnost molekuly  $\text{H}_2$  je  $3,3 \cdot 10^{-24} \text{ g}$ . Jaký tlak vyvolává plyn na stěnu plochy  $2 \text{ cm}^2$ , jestliže na ni dopadá  $10^{23}$  molekul  $\text{H}_2$  za jednu sekundu rychlostí  $1,0 \cdot 10^5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  pod úhlem  $55^\circ$  od normály?

#### ODST. 20.5 Kinetická energie posuvného pohybu

**34C.** Jaká je střední kinetická energie posuvného pohybu mo-

lekul kyslíku při teplotě 1 600 K (a) v joulech, (b) v elektronvoltech?

**35C.** (a) Určete střední kinetickou energii posuvného pohybu částic ideálního plynu v elektronvoltech pro teploty  $0,00^\circ\text{C}$  a  $100^\circ\text{C}$ . (b) Jaká kinetická energie posuvného pohybu v joulech připadá na jeden mol ideálního plynu při těchto teplotách?

**36C.** Při jaké teplotě je střední kinetická energie posuvného pohybu molekul rovna  $1,00 \text{ eV}$ ?

**37C.** Kyslík  $\text{O}_2$  je uzavřen do krychle o hraně 10 cm při teplotě 273 K a tlaku 1,0 atm. Vypočítejte změnu  $\Delta U$  gravitační potenciální energie molekuly  $\text{O}_2$  při přemístění mezi dnem a víkem krychle a porovnejte ji se střední kinetickou energií  $E_k$  posuvného pohybu molekuly.

**38Ú.** Ukažte, že stavová rovnice ideálního plynu (20.4) může být přepsána (a) na tvar  $p = \rho RT/m_m$ , kde  $\rho$  je hustota plynu a  $m_m$  je jeho molární hmotnost; (b) na tvar  $pV = NkT$ , kde  $N$  je počet částic plynu (atomů či molekul).

**39Ú.** Neuzavřeme-li vodu do nádoby s víkem, bude se neustále vypařovat, neboť molekuly z jejího povrchu unikají do vzduchu. Měrná tepelná kapacita vypařování ( $539 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}$ ) je přibližně rovna  $\varepsilon n$ , kde  $\varepsilon$  je střední energie unikající molekuly a  $n$  je počet molekul v jednom gramu vody. (a) Nalezněte  $\varepsilon$ . (b) Jaký je poměr  $\varepsilon$  a střední kinetické energie molekul  $\text{H}_2\text{O}$ , pro niž budeme předpokládat, že závisí na teplotě jako u ideálních plynů?

**40Ú.** Avogadrův zákon říká, že za stejných podmínek obsahuje daný objem plynu vždy stejný počet molekul, nezávisle na druhu plynu. Je tento zákon ekvivalentní stavové rovnici ideálního plynu? Vysvětlete.

#### ODST. 20.6 Střední volná dráha

**41C.** Střední volná dráha molekul dusíku při teplotě  $0,0^\circ\text{C}$  a tlaku 1,0 atm je  $0,80 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$ . Hustota částic za těchto podmínek je  $2,7 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ . Jaký průměr mají molekuly?

**42C.** Ve výšce 2 500 km nad mořem je zhruba jedna molekula na  $1 \text{ cm}^{-3}$ . (a) Jakou střední volnou dráhu molekul předpovídá rov. (20.22) v těchto podmínkách? (b) Lze tuto rovnici použít při těchto podmínkách? Uvažujte průměr molekul  $2,0 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ .

**43C.** Jaká je střední volná dráha 15 cvrnkacích kuliček v „divoce se třesoucí“ krabici? Objem krabičky je 1,0 l a průměr kuličky je 1,0 cm.

**44C.** Vyjádřete četnost srážek atomů či molekul plynu v závislosti na  $N/V$ ,  $\bar{v}$  a  $d$ .

**45Ú.** V urychlovači částic krouží protony po kruhové dráze o průměru 23,0 m. V jeho evakuovaných komorách je tlak  $1,00 \cdot 10^{-6} \text{ torr}$  při teplotě 295 K. (a) Vypočítejte, kolik molekul při tomto tlaku připadá na jeden krychlový centimetr. (b) Jaká je střední volná dráha molekul plynu, jestliže mají průměr  $2,00 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ ?

**46Ú.** Při jaké frekvenci by byla vlnová délka zvukových vln šířících se vzduchem rovna střední volné dráze molekul kyslíku při  $0,0^\circ\text{C}$  a 1,0 atm? Průměr molekul uvažujte  $3,0 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ .

**47Ú.** (a) Jaký je **molární objem** (tj. objem jednoho molu) ideálního plynu za normálních podmínek (0,00 °C, 1,00 atm)? (b) Vypočtete poměr středních kvadratických rychlostí atomů helia a atomů neonu za normálních podmínek. (c) Jaká je střední volná dráha atomů helia? Průměr atomů helia je  $1,00 \cdot 10^{-8}$  cm. (d) Jaká je střední volná dráha atomů neonu? Použijte stejný průměr atomů jako u helia. (e) Zamyslete se nad výsledky (c) a (d). Přihlédněte k tomu, že se atomy helia pohybují rychleji než atomy neonu.

**48Ú.** Střední volnou dráhu  $\lambda$  molekul plynu lze určovat také experimentálně (např. z měření viskozity plynů). Tato měření dávají pro argon a dusík při teplotě 20 °C a tlaku 750 torr hodnoty  $\lambda_{\text{Ar}} = 9,9 \cdot 10^{-6}$  cm a  $\lambda_{\text{N}_2} = 27,5 \cdot 10^{-6}$  cm. (a) Určete poměr efektivních průměrů atomu argonu a dusíku. Jaká je střední volná dráha atomů argonu (b) při teplotě 20 °C a tlaku 150 torr a (c) při teplotě -40 °C a tlaku 750 torr?

**49Ú.** Dokažte, že k pokrytí tečky na konci této věty je zapotřebí  $10^{13}$  molekul vzduchu. Dokažte dále, že každou sekundu do této tečky narazí  $10^{21}$  molekul vzduchu.

### ODST. 20.7 Rozdělení rychlostí molekul

**50C.** Deset molekul se pohybuje různými rychlostmi: 2,0 km/s, 3,0 km/s, 4,0 km/s, ..., 11,0 km/s. (a) Jaká je jejich střední rychlost? (b) Jaká je jejich střední kvadratická rychlost?

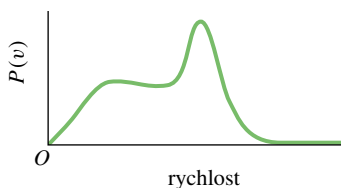
**51C.** Uvažujme 22 částic. Jejich rychlosti jsou dány následující tabulkou ( $N_i$  značí počet částic, které mají rychlost  $v_i$ ):

$N_i$	2	4	6	8	2
$v_i$ (cm·s <sup>-1</sup> )	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0

Vypočtete (a) střední rychlost  $\bar{v}$  a (b) střední kvadratickou rychlost  $v_{\text{ef}}$ . (c) Která z rychlostí v tabulce je nejpravděpodobnější rychlost  $v_P$ ?

**52C.** (a) Čtyři částice se pohybují rychlostí 200 m·s<sup>-1</sup>, dvě rychlostí 500 m·s<sup>-1</sup> a čtyři rychlostí 600 m·s<sup>-1</sup>. Určete střední rychlost a střední kvadratickou rychlost těchto částic. Je  $v_{\text{ef}} > \bar{v}$ ? (b) Vymyslete si vlastní rozdělení rychlostí pro 10 částic a ukažte, že i pro vaše rozdělení platí  $v_{\text{ef}} \geq \bar{v}$ . (c) Za jakých podmínek bude  $v_{\text{ef}} = \bar{v}$ ?

**53C.** Uvažujte rozdělení rychlostí zobrazené na obr. 20.23. (a) Seřadte sestupně rychlosti  $v_{\text{ef}}$ ,  $\bar{v}$  a  $v_P$  tohoto rozdělení. (b) Jak se liší uspořádání  $v_{\text{ef}}$ ,  $\bar{v}$  a  $v_P$  pro Maxwellovo rozdělení oproti zde uvažovanému rozdělení?



Obr. 20.23 Cvičení 53

**54C.** Pro určitý plyn bylo zjištěno, že nejpravděpodobnější rychlost jeho molekul při teplotě  $T_2$  je shodná se střední kva-

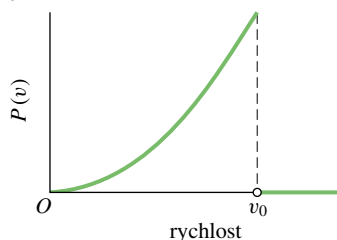
dratickou rychlostí těchto molekul při teplotě  $T_1$ . Určete poměr  $T_2/T_1$ .

**55Ú.** (a) Vypočtete teplotu vodíku, resp. kyslíku, při které je střední kvadratická rychlost molekul rovna únikové rychlosti ze Země. (b) Totéž vypočtete pro únikovou rychlost z Měsíce, jestliže je gravitační zrychlení na jeho povrchu rovno 0,16g. (c) Teplota horních vrstev atmosféry dosahuje teploty 1 000 K. Očekávali byste tam převážně vodík? Nebo kyslík?

**56Ú.** Molekula vodíku o průměru  $1,0 \cdot 10^{-8}$  cm, která se pohybuje střední kvadratickou rychlostí, vylétá z oblasti o teplotě 4 000 K do komory naplněné chladným argonem, jehož atomy o průměru  $3,0 \cdot 10^{-8}$  cm zaplňují komoru s hustotou částic  $4,0 \cdot 10^{19}$  cm<sup>-3</sup>. (a) Jaká je rychlost molekuly vodíku? (b) Jaká je nejmenší možná vzdálenost středů molekuly H<sub>2</sub> a atomu argonu, jestliže dojde k jejich vzájemné srážce? Atom i molekulu považujte za sférické. (c) Jaká je počáteční četnost srážek molekuly vodíku s argonovými atomy?

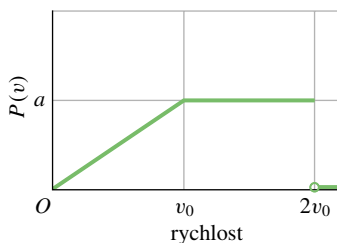
**57Ú.** Uvažujme dvě nádoby o stejné teplotě. V první z nich je plyn, jehož tlak je  $p_1$  a jehož molekuly mají hmotnost  $m_1$  a střední kvadratickou rychlost  $v_{\text{ef},1}$ . V druhé je plyn, jehož tlak je  $2p_1$  a jehož molekuly mají hmotnost  $m_2$  a střední rychlost  $\bar{v}_2 = 2v_{\text{ef},1}$ . Určete poměr  $m_1/m_2$ .

**58Ú.** Uvažujme hypotetické rozdělení rychlostí  $N$  částic plynu, které vidíme na obr. 20.24:  $P(v) = Cv^2$  pro  $0 < v \leq v_0$ ;  $P(v) = 0$  pro  $v > v_0$ . (a) Vyjádřete konstantu  $C$  pomocí  $N$  a  $v_0$ . Naleznete (b) střední rychlost částic a (c) jejich střední kvadratickou rychlost.



Obr. 20.24 Úloha 58

**59Ú.** Na obr. 20.25 je graf rozdělení rychlostí jistého hypotetického vzorku  $N$  částic plynu, přičemž  $P(v) = 0$  pro  $v > 2v_0$ . (a) Vyjádřete hodnotu  $a$  hustoty pravděpodobnosti pomocí  $N$  a  $v_0$ . (b) Kolik částic má rychlost mezi  $1,5v_0$  a  $2,0v_0$ ? (c) Vyjádřete střední rychlost částic pomocí  $v_0$ . (d) Určete střední kvadratickou rychlost  $v_{\text{ef}}$ .



Obr. 20.25 Úloha 59

**ODST. 20.8 Molární tepelné kapacity ideálního plynu**

**60C.** Jaká je vnitřní energie 1,0 molu ideálního jednoatomového plynu při teplotě 273 K?

**61C.** Jeden mol ideálního plynu izotermicky expanduje. Naleznete vztah pro teplo dodané plynu jako funkci počátečního a koncového objemu a teploty. (*Tip:* Použijte první termodynamický zákon.)

**62C.** Hmotnost atomu helia je  $6,66 \cdot 10^{-27}$  kg. Vypočítejte měrnou tepelnou kapacitu jednoatomového heliového plynu při stálém objemu ( $v \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ), znáte-li jeho molární tepelnou kapacitu při stálém objemu.

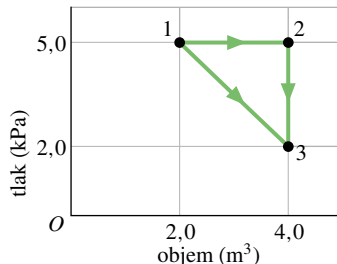
**63Ú.** Dodejme určitému ideálnímu plynu 20,9 J tepla. V důsledku toho se zvětší jeho objem z  $50,0 \text{ cm}^3$  na  $100 \text{ cm}^3$ , zatímco jeho tlak zůstává stejný a má hodnotu 1,00 atm. (a) Jak se změní vnitřní energie plynu? (b) Určete molární tepelnou kapacitu plynu při stálém tlaku, je-li množství plynu  $2,00 \cdot 10^{-3}$  mol. (c) Jaká je jeho molární tepelná kapacita při stálém objemu?

**64Ú.** Na počátku má  $n$  molů ideálního plynu teplotu  $T_1$ . Poté pomalu zdvojnásobíme tlak a objem plynu, přičemž v  $p$ - $V$  diagramu je tento děj popsán úsečkou, spojující počáteční a koncový stav. Vyjádřete (a) práci  $W$ , (b) změnu vnitřní energie  $\Delta U$  a (c) teplo  $Q$  v závislosti na  $n$ ,  $R$  a  $T_1$ . (d) Pokud bychom definovali molární tepelnou kapacitu pro tento proces, jaká by byla její hodnota?

**65Ú.** Nádoba obsahuje směs tří navzájem neinteragujících plynů:  $n_1$  molů (resp.  $n_2, n_3$ ) prvního (resp. druhého, třetího) plynu, který má molární tepelnou kapacitu při stálém objemu  $C_1$  (resp.  $C_2, C_3$ ). Určete pro jejich směs molární tepelnou kapacitu při stálém objemu.

**66Ú.** Hmotnost jedné molekuly plynu je možno vypočítat z měrné tepelné kapacity při stálém objemu  $c_V$ . Pro argon má hodnotu  $c_V = 0,075 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Určete (a) hmotnost atomu argonu a (b) molární hmotnost argonu.

**67Ú.** Děj s jedním molem ideálního dvouatomového plynu je v  $p$ - $V$  diagramu na obr. 20.26 vyznačen šikmou čarou jdoucí z 1 do 2. Teplota plynu v bodě 1 je 1 200 K. (a) Jak se během tohoto děje změní vnitřní energie plynu? (b) Jaké teplo je třeba plynu dodat? (c) Kolik tepla by bylo nutno dodat, pokud by děj probíhal podél dráhy  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ ?



Obr. 20.26 Úloha 67

jeho počáteční teplota je  $0^\circ\text{C}$ . Kolik tepla mu musíme dodat, aby se jeho objem zdvojnásobil? (Neuvažujte kmity molekul, ale pouze jejich rotaci.)

**69C.** (a) Kolik molů  $\text{O}_2$  je obsaženo ve 12,0 g plynného kyslíku? (Viz tab. 20.1.) (b) Kolik tepla musíme dodat, abychom toto množství kyslíku ohřáli při atmosférickém tlaku z  $25,0^\circ\text{C}$  na  $125^\circ\text{C}$ ? (Neuvažujte opět kmity molekul, ale pouze jejich rotaci.) (c) Jaká část dodaného tepla se spotřebuje na změnu vnitřní energie kyslíku?

**70Ú.** (a) Jaké teplo je třeba dodat 4,00 mol ideálního dvouatomového plynu, jehož molekuly rotují, ale nekmitají, aby se jeho teplota při stálém tlaku zvýšila o 60 K? (b) O kolik se přitom změní jeho vnitřní energie? (c) Jakou práci plyn vykoná? (d) O kolik se zvýší celková kinetická energie posuvného pohybu molekul plynu?

**ODST. 20.11 Adiabatické rozpínání ideálního plynu**

**71C.** Jisté množství ideálního plynu s  $\gamma = 1,4$  zaujímá při tlaku 1,2 atm a teplotě 310 K objem 4,3 l. Adiabaticky ho stlačíme na objem 0,76 l. Určete koncový (a) tlak, (b) objem.

**72C.** (a) Jeden litr plynu, pro který platí  $\gamma = 1,3$ , adiabaticky stlačíme na poloviční objem. Jeho počáteční tlak byl 1,0 atm a počáteční teplota 273 K. Zjistěte jeho koncový tlak a koncovou teplotu. (b) Poté ho ochladíme na původní teplotu 273 K, přičemž tlak zůstává konstantní. Jaký je jeho koncový objem?

**73C.** Nechť  $n$  molů ideálního plynu expanduje adiabaticky z počáteční teploty  $T_1$  na koncovou teplotu  $T_2$ . Dokažte, že práce vykonaná plynem je dána výrazem  $nC_V(T_1 - T_2)$ , kde  $C_V$  je molární tepelná kapacita za stálého objemu. (*Tip:* Použijte první termodynamický zákon.)

**74C.** Víme, že pro adiabatický proces platí  $pV^\gamma = \text{konst}$ . Vypočítejte tuto konstantu, když 2,0 mol plynu během tohoto procesu prochází stavem o teplotě  $T = 300 \text{ K}$  a tlaku  $p = 1,0 \text{ atm}$ . Uvažujte dvouatomové molekuly, které rotují, ale nekmitají.

**75C.** Ukažte, že při adiabatickém ději v ideálním plynu je modul objemové pružnosti dán vztahem

$$B = -V \frac{dp}{dV} = \gamma p,$$

z čehož dostaneme pro rychlost zvuku v plynu

$$v_z = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{m_m}}.$$

Viz rov. (18.2) a (18.3).

**76C.** Vzduch má při teplotě  $0,00^\circ\text{C}$  a tlaku 1,00 atm hustotu  $1,29 \cdot 10^{-3} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ . Rychlost zvuku ve vzduchu je při této teplotě  $331 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vypočítejte Poissonovu konstantu  $\gamma$  vzduchu. (*Tip:* Viz cvič. 75.)

**77C.** Rychlost zvuku v různých plynech při dané teplotě závisí pouze na jejich molárních hmotnostech. Ukažte, že  $v_1/v_2 = \sqrt{m_{m2}/m_{m1}}$  (při konstantní teplotě), kde  $v_1$ , resp.  $v_2$  je rychlost zvuku v plynu, jehož molární hmotnost je  $m_{m1}$ , resp.  $m_{m2}$ . (*Tip:* Viz cvič. 75.)

**ODST. 20.9 Stupně volnosti a molární tepelné kapacity**

**68C.** Jeden mol kyslíku  $\text{O}_2$  zahříváme při stálém tlaku, přičemž



**78Ú.** Molární hmotnost jodu je  $127 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Uzly stojatého vlnění zvuku v trubici naplněné plynným jodem teploty  $400 \text{ K}$  jsou při frekvenci  $1400 \text{ Hz}$  vzdáleny  $6,77 \text{ cm}$ . (a) Jaké je  $\gamma$  jodu? (b) Je plynný jod jednoatomový, nebo dvouatomový? (Tip: Viz cvič. 75.)

**79Ú.** Molární tepelná kapacita při stálém objemu  $C_V$  určitého plynu je  $5,0R$ . Určete poměr rychlosti zvuku v tomto plynu a střední kvadratické rychlosti jeho molekul při teplotě  $T$ . (Tip: Viz cvič. 75.)

**80Ú.** (a) Z počátečního stavu o tlaku  $p_0$  se ideální plyn volně rozepe do vakua, čímž zvětší svůj objem na trojnásobek. Jaký je jeho tlak po expanzi? (b) Poté plyn opět pomalu adiabaticky stlačíme na jeho původní objem. Po kompresi je jeho tlak roven  $(3,00)^{1/3} p_0$ . Rozhodněte, zda se jedná o plyn jednoatomový, dvouatomový, nebo víceatomový. (c) Porovnejte střední kinetické energie molekul v jeho koncovém a počátečním stavu.

**81Ú.** Určitý ideální plyn adiabaticky stlačíme z  $p = 1,0 \text{ atm}$ ,  $V = 1,0 \cdot 10^6 \text{ l}$ ,  $T = 0,0^\circ \text{C}$  na  $p = 1,0 \cdot 10^5 \text{ atm}$ ,  $V = 1,0 \cdot 10^3 \text{ l}$ . (a) Jde o jednoatomový, dvouatomový, nebo víceatomový plyn? (b) Jaká je jeho koncová teplota? (c) Kolik molů plynu stlačujeme? (d) Jaká je celková kinetická energie posuvného pohybu molekul připadající na jeden mol plynu před a po kompresi? (e) Jaký je poměr čtverců středních kvadratických rychlostí molekul před a po kompresi?

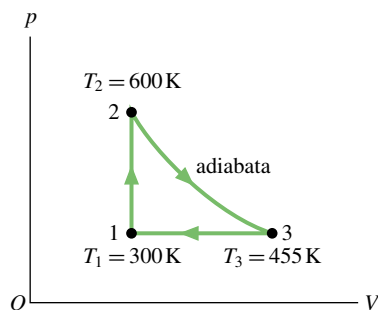
**82Ú.** Vzorek ideálního plynu expanduje ze stavu o tlaku  $32 \text{ atm}$ , teplotě  $300 \text{ K}$  a objemu  $1,01$  na koncový objem  $4,01$ . Jaké jsou koncový tlak a teplota plynu a jakou práci vykoná plyn, je-li expanze (a) izotermická, (b) adiabatická a plyn je jednoatomový a (c) adiabatická a plyn je dvouatomový?

**83Ú.** Ideální plyn má počáteční teplotu  $T_1$  a objem  $2 \text{ m}^3$ . Nejprve ho rozepneme adiabaticky na objem  $4 \text{ m}^3$ , poté rozepneme izotermicky na objem  $10 \text{ m}^3$  a nakonec adiabaticky stlačíme, až dosáhne jeho teplota původní hodnoty  $T_1$ . Jaký má plyn nakonec objem?

**84Ú.** Molární tepelná kapacita  $C_V$  jistého ideálního plynu je  $6,00 \text{ cal} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Tři moly tohoto plynu jsme zahřáli o  $50 \text{ K}$  třemi různými ději: izochorickým, izobarickým a adiabatickým. Doplňte do tabulky u každého děje dodané (či odebrané) teplo  $Q$ , práci  $W$  vykonanou plynem, změnu  $\Delta U$  jeho vnitřní energie a změnu  $\Delta E_k$  celkové kinetické energie posuvného pohybu molekul plynu.

DĚJ	$Q$	$W$	$\Delta U$	$\Delta E_k$
Izochorický	—	—	—	—
Izobarický	—	—	—	—
Adiabatický	—	—	—	—

**85Ú.** Na obr. 20.27 vidíme  $p$ - $V$  diagram kruhového děje s jedním molem jednoatomového ideálního plynu. Děj  $1 \rightarrow 2$  je izochorický,  $2 \rightarrow 3$  adiabatický a  $3 \rightarrow 1$  izobarický. (a) Vypočítejte vyměněné teplo  $Q$ , změnu vnitřní energie  $\Delta U$  a vykonanou práci  $W$  během těchto tří dějů a také během kruhového děje celkově. (b) Určete tlak a objem v bodech 2 a 3, je-li v počátečním bodě 1 tlak  $1,00 \text{ atm}$ . Teploty jsou vyznačeny na obrázku. Použijte převodního vztahu  $1,00 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  a plynové konstanty  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .



Obr. 20.27 Úloha 85

### PRO POČÍTAČ

**86Ú.** V určitém průmyslovém procesu dochází ke stlačování  $25,0 \text{ mol}$  jednoatomového ideálního plynu stálou rychlostí z počátečního objemu  $0,616 \text{ m}^3$  na koncový objem  $0,308 \text{ m}^3$  za  $2,00 \text{ h}$ . Teplota plynu přitom rovnoměrně roste z  $27,0^\circ \text{C}$  na  $450^\circ \text{C}$ . Během tohoto procesu prochází plyn termodynamicky rovnovážnými stavy. (a) Nakreslete graf závislosti práce, kterou je potřeba vykonat ke stlačení plynu, a tepla, které plyn přijme od okolí, na čase. (b) Jaké jsou úhrnné hodnoty těchto veličin pro celý proces? (c) Jaká je molární tepelná kapacita plynu při tomto procesu? (Tip: Abyste vypočetli integrál vyjadřující práci, použijte vztah

$$\int \frac{a + bx}{A + Bx} dx = \frac{bx}{B} + \frac{aB - bA}{B^2} \ln(A + Bx).$$

(d) Porovnejte tyto hodnoty s těmi, které byste obdrželi, kdyby se nejprve zmenšoval objem za konstantní teploty a poté by se zvyšovala teplota za konstantního objemu, přičemž koncový stav by byl stejný.