

8

Potenciální energie a zákon zachování energie

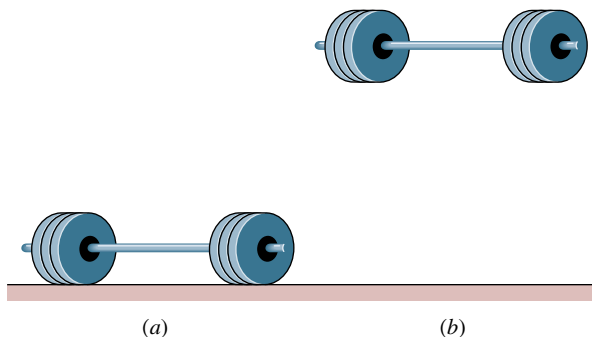


Jedním z nebezpečných „sportů“ je bungee-jumping (v překladu „zaražené skákání“). Skokan, připoutaný za kotníky ke speciálnímu pružnému lanu, se vrhá dolů z velké výšky, většinou z vysokých mostních konstrukcí. Napínající se lano způsobí zbrzdění střemhlavého letu. Lze vůbec zjistit, jaké největší hloubky skokan dosáhne? Odpověď na tuto otázku je pochopitelně obecně zajímavá, pro skokana však navíc životně důležitá.

8.1 POTENCIÁLNÍ ENERGIE

V kap. 7 jsme definovali kinetickou energii částice, resp. bodového objektu a přesvědčili jsme se, že její změny bezprostředně souvisejí se silami, jimiž na částici působí její okolí. Změna kinetické energie částice je totiž rovna výsledné práci všech těchto sil. Uvědomili jsme si také, že v případě soustavy částic či tělesa, které nelze považovat za bodový objekt, přispěje ke změně kinetické energie nejen práce sil, jimiž působí na částice soustavy její okolí, ale i práce interakčních sil, jimiž na sebe částice soustavy působí navzájem. V této kapitole se budeme problémem práce těchto *vnitřních sil* zabývat podrobněji a ukážeme, že za jistých podmínek lze pomocí ní definovat nový typ energie *soustavy*, tzv. **potenciální energii** E_p . Vzhledem k její souvislosti s **konfigurací** soustavy (tj. uspořádáním částic) hovoříme někdy o energii konfigurační. Mění-li se konfigurace soustavy, mění se i její potenciální (konfigurační) energie.

Jedním z typů potenciální energie je **tíhová**, případně* **gravitační** potenciální energie, jež souvisí s konfigurací soustavy částic, které na sebe působí tíhovými (gravitačními) silami. Když Vasilij Aleksejev zvedal nad hlavu 562librovou činku, zvyšoval tím vzdálenost mezi činkou a Zemí. Měnil tak konfiguraci soustavy činka + Země a tím i její tíhovou potenciální energii (obr. 8.1).



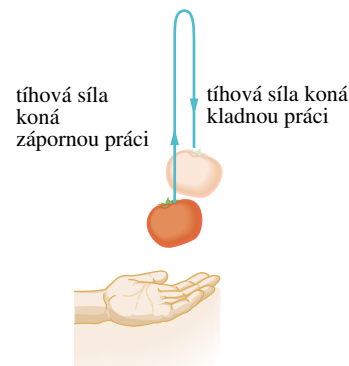
Obr. 8.1 Při zvedání činky nad hlavu zvyšoval V. Aleksejev její vzdálenost od Země a měnil tak konfiguraci soustavy činka + Země z výchozí konfigurace (a) ve výslednou (b).

Jiným typem potenciální energie je **pružná potenciální energie**, která souvisí se stavem napjatosti (protažení či stlačení) pružných těles, například pružin. Silou, která zde hraje podstatnou roli, je pružná síla. Stlačíme-li nebo napneme-li pružinu, měníme tím vzájemné polohy jejích závitů. Pružná síla působí proti takovým změnám a to vede ke zvýšení pružné potenciální energie pružiny.

* Jemný rozdíl mezi nimi vyložíme v čl. 14.4.

Práce a potenciální energie

Pro úvahy o souvislosti práce vnitřních sil působících v soustavě částic a změnách potenciální energie zvolíme nejprve nejjednodušší možný model, soustavu libovolné těleso + Země. Vraťme se proto k příkladu jablíčka, vrženého svisle vzhůru podle obr. 8.2. Pro jednoduchost zanedbejme otáčení Země kolem Slunce i její rotaci kolem vlastní osy a popisujme vše v takové inerciální soustavě, v níž jsou obě tělesa Země + jablíčko zpočátku v klidu. V kap. 7 jsme konstatovali, že ve fázi výstupu je práce W_g vykonaná tíhovou silou působící na jablíčko záporná a kinetická energie jablíčka vzhledem k Zemi klesá.



Obr. 8.2 Rajske jablíčko je vrženo vzhůru. Při výstupu koná tíhová síla zápornou práci a kinetická energie jablíčka vzhledem k Zemi klesá. Roste však tíhová potenciální energie soustavy jablíčko + Země. Při sestupu je práce tíhové síly působící na jablíčko kladná, jeho kinetická energie vzhledem k Zemi roste a tíhová potenciální energie soustavy klesá.

Můžeme zřejmě očekávat, že potenciální energie soustavy jablíčko + Země, kterou se snažíme definovat jako energii závislou na vzájemné poloze obou částic, roste právě na úkor kinetické energie.

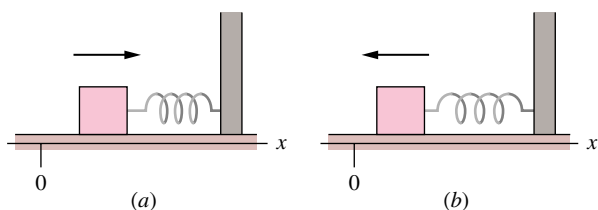
V další fázi pokusu se jablíčko zpomaluje, zastaví se a začíná padat, neboť je k Zemi přitahováno tíhovou silou. Při pádu se energetické poměry obrátí: práce W_g vykonaná tíhovou silou je nyní kladná, kinetická energie jablíčka roste a tíhová potenciální energie soustavy jablíčko + Země klesá. Úvahy z kap. 7 nyní zpřesníme.

Při pohybu tělesa v blízkosti povrchu Země je změna ΔE_p tíhové potenciální energie soustavy těleso + Země definována jako záporně vzatá práce vykonaná interakčními tíhovými silami \mathbf{F}_g a $-\mathbf{F}_g$. Píšeme

$$\Delta E_p = -W_g. \quad (8.1)$$

Veličinu E_p nazýváme **tíhovou potenciální energií soustavy těleso + Země** nebo také **potenciální energií tělesa**

v tíhovém poli Země. Při užívání druhého z obou názvů bychom si měli neustále připomínat, že potenciální energie přísluší *soustavě* obou objektů, tělesa i Země, neboť je definována pomocí práce *obou* interakčních sil. Stejný vztah platí pro soustavu kostka + pružina s upevněným koncem (obr. 8.3), přesněji řečeno pro soustavu kostka + Země s přidanou pružnou interakcí, zprostředkovanou pružinou. Jestliže náhle udeříme do kostky směrem vpravo a uvedeme ji tak do pohybu, koná pružná síla působící na kostku během pohybu vpravo zápornou práci. Kinetická energie kostky klesá a na její úkor roste pružná potenciální energie soustavy. (Vzhledem k tomu, že tato potenciální energie je určena výhradně změnou délky pružiny, hovoříme někdy stručně o potenciální energii pružiny.) Kostka se zpomaluje, zastaví se a začne se vlivem pružné síly pohybovat v opačném směru. Směr energiových změn se obrátí, kinetická energie kostky roste na úkor pružné potenciální energie soustavy.



Obr. 8.3 Kostka, která je připevněná k pružině a je zpočátku v klidu v poloze $x = 0$, je uvedena do pohybu směrem vpravo. (a) Při pohybu kostky vpravo (vyznačeno šipkou) koná pružná síla působící na kostku zápornou práci. Kinetická energie kostky klesá a potenciální energie pružiny roste. Kostka se zastaví v okamžiku, kdy je její kinetická energie nulová. (b) Poté se kostka pohybuje zpět směrem k poloze $x = 0$, pružná síla koná kladnou práci, kinetická energie kostky roste za současného poklesu potenciální energie pružiny.

Konzervativní a nekonzervativní síly

Shrňme klíčové prvky diskuse týkající se předchozích dvou situací:

1. *Soustava* se skládá ze dvou nebo více objektů.
2. Sledovaná částice (jablíčko, resp. kostka) a zbytek soustavy na sebe navzájem působí *interakčními silami*.
3. Mění-li se konfigurace soustavy, konají interakční síly práci W_1 a kinetická energie soustavy E_k se mění.
4. Obrátí-li se směr změn konfigurace soustavy, konají interakční síly práci W_2 .

Jestliže za všech okolností platí $W_1 = -W_2$, lze pomocí práce interakčních sil definovat potenciální energii soustavy. O interakčních silách hovoříme v takovém případě jako o **silách konzervativních**. Jak se dalo tušit, jsou tíhová i pružná síla silami konzervativními (jinak bychom nemohli mluvit o tíhové či pružné potenciální energii).

Ne všechny síly jsou ovšem konzervativní. Představme si například kostku, jak klouže po podlaze, která není dokonale hladká. Při pohybu kostky koná dynamická třecí síla zápornou práci. Pohyb kostky se zpomaluje, její kinetická energie klesá. Nakonec se kostka zastaví a její kinetická energie je nulová. Práce třecích sil, jimiž na sebe navzájem působí kostka a podlaha podél styčných ploch, se spotřebovala na zvýšení vnitřní energie soustavy kostka + podlaha (dokladem toho je zahřátí obou těles). Experimentálně je však prokázáno, že opačný proces není možný: kostku nedokážeme uvést do pohybu tím, že ji ochladíme. I když tedy v soustavě kostka + podlaha působí interakční (třecí) síly, které konají práci na úkor kinetické energie soustavy, nelze tuto práci vyjádřit jako změnu nějakého druhu potenciální energie. Vnitřní energie soustavy kostka + podlaha není energií potenciální, síly tření jsou silami **nekonzervativními**.

Působí-li na částici výhradně konzervativní síly, můžeme jinak složitý problém jejího pohybu značně zjednodušit. V následujícím článku formulujeme kritéria, na základě nichž lze rozpoznat konzervativní síly, a vyjasníme si, v čem zmíněné zjednodušení spočívá.

8.2 NEZÁVISLOST PRÁCE KONZERVATIVNÍCH SIL NA TRAJEKTORII

K formulaci základního kritéria umožňujícího rozhodnout, zda daná síla je či není konzervativní, dospějeme postupnými úvahami: předpokládejme nejprve pro jednoduchost, že na částici pohybující se po *uzavřené trajektorii* působí jediná síla. Počáteční a koncová poloha částice na uzavřené trajektorii splývají, částice vykoná „okružní cestu“, která začíná a končí v tomtéž bodě. Síla působící na částici je konzervativní právě tehdy, je-li kinetická energie částice na počátku i na konci tohoto okruhu stejná. Práce, kterou síla vykoná při oběhu částice po uzavřené trajektorii je tedy nulová. Jako jeden z přirozených příkladů takové situace poslouží oběh Země kolem Slunce po prakticky kruhové trajektorii (nebo i komety po protáhlé eliptické trajektorii), který se skutečně děje vlivem jediné síly působící na planetu. Tou je gravitační síla, jíž na planetu působí Slunce. Jiným příkladem je pohyb jablíčka vrženého svisle vzhůru v tíhovém poli Země.

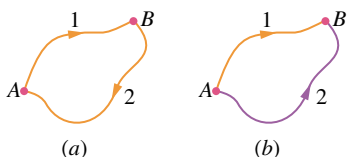
Obecně bychom ovšem měli umět určit práci zkoumané síly \mathbf{F} při pohybu částice po *libovolné* trajektorii. Sama síla \mathbf{F} však k zajištění takového předem naplánovaného pohybu obvykle nestačí. Musíme proto doplnit další, vhodně zvolenou sílu. Je výhodné, je-li tato síla kolmá k požadované trajektorii, protože potom nekoná práci. Typic-

kým příkladem takové *vazební síly* je tlaková síla vhodně tvarované podložky umístěné v tíhovém poli Země, po níž pouštíme těleso jako po skluzavce.

Předpokládejme tedy, že jsme studovanou sílu \mathbf{F} doplnili vhodně zvolenou vazební silou. Sílu \mathbf{F} nazveme konzervativní, je-li její příspěvek ke změně kinetické energie při každém oběhu částice po jakékoli uzavřené cestě nulový. Jinými slovy:

Práce vykonaná konzervativní silou působící na částici pohybující se po libovolně uzavřené trajektorii je nulová.

Experimenty ukazují, že tíhová síla toto kritérium splňuje. Příkladem je hra s jablíčkem na obr. 8.2. Jablíčko opouští výchozí bod s rychlostí o velikosti v_0 a kinetickou energií $\frac{1}{2}mv_0^2$. Tíhová síla Země jablíčko zpomaluje až do zastavení a jablíčko padá nazpět. V okamžiku návratu do výchozího bodu je velikost jeho rychlosti opět v_0 a kinetická energie má hodnotu $\frac{1}{2}mv_0^2$. Tíhová síla tedy během výstupu jablíčka spotřebovala stejně velkou práci ($W_1 < 0$), jako vykonala při jeho zpětném pádu do výchozího bodu ($W_2 > 0$, $W_1 = -W_2$). Tíhová síla, jíž působí Země na jablíčko, vykoná při jeho oběhu po uzavřené trajektorii celkově nulovou práci.



Obr. 8.4 (a) Částice, na niž působí mj. konzervativní síla \mathbf{F} , se pohybuje po okruhu z bodu A do bodu B po cestě 1 a vrací se zpět po cestě 2. (b) Částice může přejít z bodu A do bodu B jak po cestě 1, tak po cestě 2.

Obr. 8.4a znázorňuje oběh částice po obecně zvolené uzavřené trajektorii. Jednou ze sil působících na částici je i síla \mathbf{F} , jejíž konzervativnost studujeme. Částice se pohybuje z počátečního bodu A do bodu B po cestě 1 a vrací se do bodu A po cestě 2. Síla \mathbf{F} koná jistou práci při pohybu částice po jakékoli trajektorii. Aniž bychom specifikovali, pro které části vyznačené trajektorie je tato práce kladná, resp. záporná, označme jako $W_{AB,1}$ práci, kterou uvažovaná síla vykonala při pohybu částice z bodu A do bodu B po cestě 1, a jako $W_{BA,2}$ práci vykonanou při pohybu z B do A po cestě 2. Je-li síla konzervativní, pak výsledná práce, kterou vykoná při pohybu částice po celém okruhu, musí být nulová:

$$W_{AB,1} + W_{BA,2} = 0,$$

tj.

$$W_{AB,1} = -W_{BA,2}. \quad (8.2)$$

Vyjádřeno slovy, práce, kterou síla vykoná při cestě částice z bodu A do bodu B , musí být rovna záporně vzaté práci vykonané při návratu částice.

Uvažujme nyní práci $W_{AB,2}$, kterou síla vykoná při pohybu částice z bodu A do bodu B , avšak po cestě 2 (obr. 8.4b).

Je-li síla \mathbf{F} konzervativní, je tato práce až na znaménko rovna práci $W_{BA,2}$:

$$W_{AB,2} = -W_{BA,2}. \quad (8.3)$$

Dosazením $W_{AB,2}$ namísto $-W_{BA,2}$ do vztahu 8.2 dostaneme

$$W_{AB,1} = W_{AB,2}. \quad (8.4)$$

Tato jednoduchá rovnost představuje velmi silný výsledek, neboť umožňuje zjednodušit obtížné problémy pohybu částic v případě, že na ně působí pouze konzervativní síly. Vyplývá z ní totiž, že práce konzervativní síly při pohybu částice z určitého počátečního bodu A do koncového bodu B nezávisí na tom, po *jaké konkrétní cestě* se tento pohyb děje.

Práce konzervativní síly působící na částici při jejím pohybu mezi dvěma body je nezávislá na trajektorii částice.

Předpokládejme, že potřebujeme vypočítat práci konzervativní síly působící na částici při jejím pohybu po určité trajektorii spojující dva zadané body. Může se stát, že přímý výpočet je pro tuto konkrétní trajektorii složitý. Výsledek však lze získat pro jinou trajektorii spojující oba body, avšak zvolenou způsobem, který vede k usnadnění výpočtu. Tuto skutečnost dokumentuje př. 8.1.

PŘÍKLAD 8.1

Obr. 8.5a znázorňuje balíček o hmotnosti 2,0 kg, jak klouže po dokonale hladké skluzavce z bodu A do bodu B . Celková dráha, kterou po skluzavce urazí, je 2,0 m. Svislá vzdálenost bodů A a B je 0,80 m. Jakou práci vykoná při pohybu balíčku tíhová síla?

ŘEŠENÍ: Dejme tomu, že známe konkrétní tvar skluzavky \mathcal{C} . Počítejme práci tíhové síly podle vztahu (7.31):

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathcal{C}} m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} (0 \cdot dx + (-mg) dy) = \\ &= -mg \int_{y_i}^{y_f} dy = -mg(y_f - y_i). \end{aligned}$$

Integrál tedy na tvaru skluzavky vůbec nezávisí.

Protože je tíhová síla konzervativní, můžeme určit hledanou práci mnohem snadněji. Pro výpočet vybereme jinou

trajektorii spojující body A a B tak, abychom jej zjednodušili. Zvolme trajektorii složenou ze dvou přímých úseků, které jsou v obr. 8.5b vyznačeny přerušovanou čarou. Podél vodorovného úseku je úhel φ konstantní a je roven 90° . I když neznáme posunutí balíčku ve vodorovném směru, můžeme ze vztahu (7.16) usoudit, že práce tíhové síly po vodorovném úseku je nulová:

$$W_h = mgd \cos 90^\circ = 0.$$

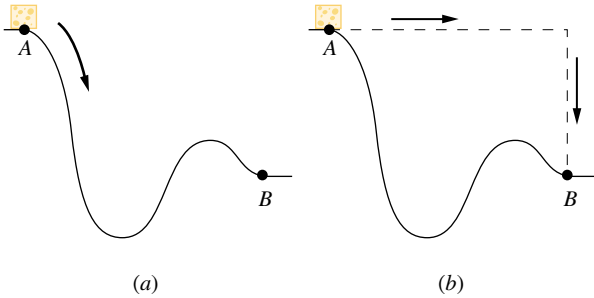
Posunutí balíčku podél svislého úseku je $d = 0,80$ m. Úhel φ mezi vektory \mathbf{d} a $m\mathbf{g}$ je opět konstantní a roven 0° . Podle (7.16) je tedy práce vykonaná tíhovou silou při pohybu balíčku po svislém úseku

$$W_v = mgd \cos 0^\circ = (2,0 \text{ kg})(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(0,80 \text{ m})(1) = 15,7 \text{ J}.$$

Celková práce vykonaná tíhovou silou působící na balíček při jeho pohybu z bodu A do bodu B po cestě vyznačené přerušovanou čarou je tedy

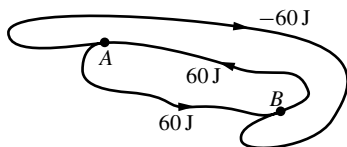
$$W = W_h + W_v = 0 + 15,7 \text{ J} \doteq 16 \text{ J}. \quad (\text{Odpověď})$$

Tato práce je ovšem stejná jako při pohybu balíčku z A do B po skluzavce.



Obr. 8.5 Příklad 8.1. (a) Balíček klouže po dokonale hladké skluzavce z bodu A do bodu B . (b) Výpočet práce vykonané při tomto pohybu tíhovou silou je snazší pro případ trajektorie vyznačené přerušovanou čarou než pro skutečnou trajektorii. Výsledky jsou však stejné.

KONTROLA 1: Obrázek ukazuje tři cesty spojující body A a B . Síla \mathbf{F} působící na částici koná při pohybu částice po jednotlivých úsecích práci, jejíž hodnoty jsou v obrázku vyznačeny. Rozhodněte, zda je síla \mathbf{F} konzervativní.*



* Dokázali byste rozhodnout i v případě, že by údaj u nejnižší zakresleného úseku byl -60 J ?

8.3 URČENÍ HODNOT POTENCIÁLNÍ ENERGIE

Uvažujme nyní bodový objekt (třeba meloun), který náleží do soustavy (řekněme meloun+Země), v níž působí konzervativní interakční síly \mathbf{F} a $-\mathbf{F}$. Změna potenciální energie soustavy ΔE_p při přechodu z počáteční do koncové konfigurace je rovna záporně vzaté práci, kterou při této změně konfigurace vykonaly interakční síly. Tuto skutečnost jsme již vyjádřili vztahem (8.1) ($\Delta E_p = -W$). Práce, kterou vykonají konzervativní interakční síly uvnitř soustavy přitom závisí pouze na její výchozí a výsledné konfiguraci, nikoli však na způsobu, jakým ke změně konfigurace došlo. V případě částice (meloun), jejíž pohyb neovlivní konfiguraci zbytku soustavy (Země), je konfigurace určena polohovým vektorem $\mathbf{r}(t)$ této částice vzhledem k vybranému bodu zbytku soustavy (polohový vektor melounu vůči středu Země). Změna potenciální energie soustavy při přesunu částice z polohy \mathbf{r}_i do polohy \mathbf{r}_f po křivce \mathcal{C} je

$$\Delta E_p = -W = - \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (8.5)$$

Tento integrál však díky konzervativnosti interakčních sil $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ a $-\mathbf{F}(\mathbf{r})$ nezávisí na tvaru křivky \mathcal{C} a změna potenciální energie souvisí pouze s polohou jejího počátečního a koncového bodu. Znamená to tedy, že každé konfiguraci soustavy lze přisoudit určitou hodnotu potenciální energie E_p ? Odpověď je kladná.

Velmi často se setkáváme se zvlášť jednoduchými případy soustav, jejichž konfiguraci lze popsat jedinou skalární veličinou, tzv. **konfigurační proměnnou**. Označme ji pro jednoduchost symbolem x , i když nemusí nutně jít o x -ovou souřadnici. (V případě soustavy meloun+Země jí může být například vzdálenost melounu od povrchu Země, pro soustavu vzniklou připoutáním tělesa k Zemi pružinou může mít x význam prodloužení pružiny, u soustavy planeta + Země pak význam vzdálenosti středů obou těles, apod.) Závisí-li navíc konzervativní interakční síly \mathbf{F} a $-\mathbf{F}$ pouze na této jediné proměnné, velmi často se výpočet změny potenciální energie zjednodušuje do tvaru analogického rov. (7.27):

$$\Delta E_p = - \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx. \quad (8.6)$$

Tíhová potenciální energie

Uvažujme nyní částici o hmotnosti m pohybující se v blízkosti povrchu Země. Soustavu souřadnic zvolme tak, aby osa y směřovala svisle vzhůru. Za konfigurační proměnnou soustavy částice + Země můžeme zvolit y -ovou souřadnici částice. Při pohybu částice z bodu (x_i, y_i, z_i) do

bodů (x_f, y_f, z_f) závisí totiž práce interakčních sil $m\mathbf{g}$ a $-m\mathbf{g}$ pouze na hodnotách y_i a y_f (př. 8.1). Odpovídající změnu tíhové potenciální energie soustavy lze tedy určit užitím vztahu (8.6), v němž zaměníme x za y a dosadíme $F = -mg$. Dostáváme

$$\Delta E_p = - \int_{y_i}^{y_f} (-mg) dy = mg \int_{y_i}^{y_f} dy = mg[y]_{y_i}^{y_f},$$

a tedy

$$\Delta E_p = mg(y_f - y_i) = mg\Delta y. \quad (8.7)$$

Fyzikální význam má pouze změna ΔE_p tíhové potenciální energie (či potenciální energie jiného typu). Abychom však zjednodušili výpočet i další diskusi, můžeme požadovat, aby s každou konfigurací soustavy byla spojena určitá hodnota potenciální energie. Řekněme, že v případě soustavy částice + Země označíme jako E_p hodnotu tíhové potenciální energie příslušnou té konfiguraci, při které je částice v poloze o souřadnici y . Přepíšeme vztah (8.7) do tvaru

$$E_p - E_{p,i} = mg(y - y_i). \quad (8.8)$$

Hodnotu $E_{p,i}$ pak chápeme jako tíhovou potenciální energii soustavy v tzv. **referenční konfiguraci**, při níž se částice nachází v **referenčním bodě** o y -ové souřadnici y_i . Obvykle klademe $E_{p,i} = 0$ pro $y_i = 0$. Podle vztahu (8.8) pak je

$$E_p - 0 = mg(y - 0),$$

a tedy

$$E_p(y) = mgy \quad (\text{tíhová potenciální energie}). \quad (8.9)$$

Ze vztahu (8.9) je vidět, že tíhová potenciální energie soustavy částice + Země závisí pouze na svislé poloze y částice vzhledem k referenční poloze o souřadnici $y = 0$ (tj. na výšce částice nad referenčním bodem).

Pružná potenciální energie

Zabývejme se nyní soustavou kostka + (pružina) + Země, znázorněnou na obr. 8.3. Tuhost pružiny je k . Za konfigurační proměnnou soustavy zvolíme souřadnici x . Při pohybu kostky z bodu x_i do bodu x_f vykonají interakční pružné síly jistou práci. Odpovídající změna potenciální energie soustavy je opět dána vztahem (8.6), do kterého však tentokrát dosadíme $F = -kx$,

$$\Delta E_p = - \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = k \int_{x_i}^{x_f} x dx = \frac{1}{2}k[x^2]_{x_i}^{x_f},$$

tj.

$$\Delta E_p = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2. \quad (8.10)$$

Abychom mohli hovořit o potenciální energii E_p v obecné konfiguraci soustavy určené polohou kostky x , zvolme jako referenční bod rovnovážnou polohu kostky $x_i = 0$ a přisudíme jí nulovou potenciální energii $E_{p,i} = 0$. Ze vztahu (8.10) pak dostaneme

$$E_p - 0 = \frac{1}{2}kx^2 - 0,$$

odkud

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (\text{pružná potenciální energie}). \quad (8.11)$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 8.1: Užití pojmu „potenciální energie“

Potenciální energie je spojena se soustavou jako celkem. Za jistých okolností ji však můžeme spojovat s některou z částí soustavy. Můžeme třeba říci: „Jablko na stromě má tíhovou potenciální energii 30 J.“ Taková tvrzení jsou často přijatelná (například u soustav tvořených dvěma částicemi s velmi rozdílnými hmotnostmi). Musíme však mít stále na paměti, že potenciální energie je charakteristikou celé soustavy, v našem případě soustavy jablko + Země. Dále nesmíme zapomínat, že hovořit o potenciální energii objektu či soustavy (v příkladu s jablkem na stromě hodnota 30 J) má smysl *jen tehdy*, je-li zvolené referenční konfiguraci přisouzena referenční hodnota potenciální energie.

PŘÍKLAD 8.2

Lenochod o hmotnosti 2,0 kg se drží větve, která je 5,0 m vysoko nad zemí (obr. 8.6).

(a) Jaká je tíhová potenciální energie E_p soustavy lenochod + Země, volíme-li za referenční bod místo o souřadnici $y = 0$, ležící (1) na povrchu Země, (2) na podlaze balkonu, jejíž úroveň je ve výšce 3,0 m nad zemí, (3) na větvi, (4) ve výšce 1,0 m nad větví? Bodu $y = 0$ přisuzujeme nulovou hodnotu tíhové potenciální energie.

ŘEŠENÍ: Pomocí vztahu (8.9) vypočteme E_p pro každou volbu polohy počátku souřadnicové osy y , $y = 0$. V případě (1) je lenochod v poloze $y = 5,0$ m a platí

$$E_p = mgy = (2,0 \text{ kg}) \cdot (9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(5,0 \text{ m}) = 98 \text{ J}. \quad (\text{Odpověď})$$

V dalších případech je

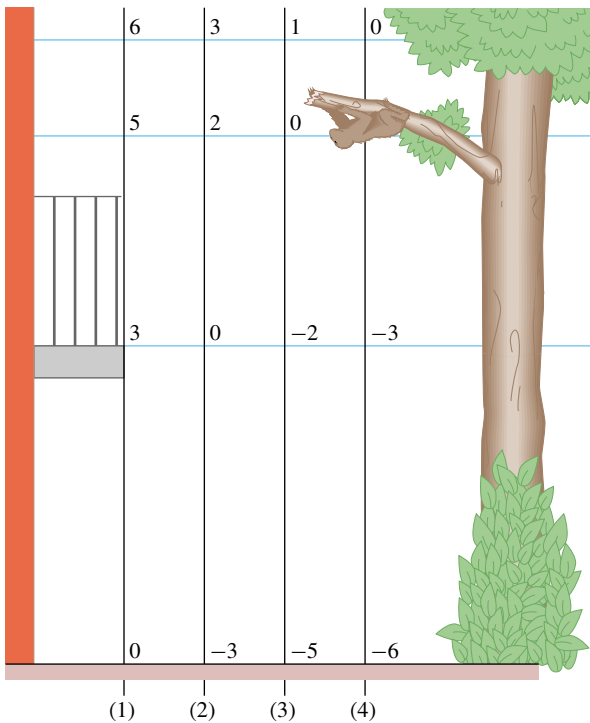
$$\begin{aligned} (2) \quad E_p &= mgy = mg(2,0 \text{ m}) = 39 \text{ J}, \\ (3) \quad E_p &= mgy = mg(0) = 0 \text{ J}, \\ (4) \quad E_p &= mgy = mg(-1,0 \text{ m}) = -19,6 \text{ J} \doteq \\ &\doteq -20 \text{ J}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

(b) Lenochod spadne na zem. Pro každou z předchozích možností volby referenčního bodu určete změnu potenciální energie soustavy lenochod + Země, ke které při pádu lenochoda došlo.

ŘEŠENÍ: Ve všech čtyřech situacích je $\Delta y = -5,0 \text{ m}$, takže pro každou z nich podle (8.7) platí

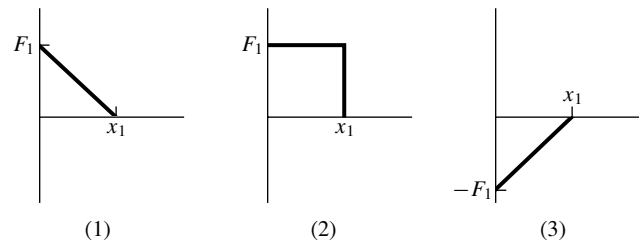
$$\begin{aligned}\Delta E_p &= mg\Delta y = (2,0 \text{ kg})(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(-5,0 \text{ m}) = \\ &= -98 \text{ J.} \quad (\text{Odpověď})\end{aligned}$$

I když hodnota E_p závisí na volbě polohy počátku soustavy souřadnic, je *změna* potenciální energie na ní nezávislá. Připomeňme, že fyzikální význam má pouze změna ΔE_p potenciální energie, nikoli samotná hodnota E_p , která je závislá na libovůli při volbě referenční konfigurace.



Obr. 8.6 Příklad 8.2. Čtyři možnosti volby referenčního bodu $y = 0$. Osa y je ve všech případech cejchována v metrech.

KONTROLA 2: Částice se pohybuje po ose x z bodu $x = 0$ do bodu x_1 . Působí na ni konzervativní síla, která má směr osy x . Obrázek ukazuje tři případy závislosti této síly na souřadnici x . Uspořádejte tyto situace se-stupně podle odpovídající změny potenciální energie.



8.4 ZÁKON ZACHOVÁNÍ MECHANICKÉ ENERGIE

Mechanická energie E soustavy je definována jako součet její potenciální energie E_p a celkové kinetické energie E_k všech jejích objektů:

$$E = E_p + E_k \quad (\text{mechanická energie}). \quad (8.12)$$

V tomto článku se budeme zabývat otázkou, co se děje s mechanickou energií soustavy, ve které působí výhradně konzervativní interakční síly. (Teprve později budeme uvažovat o vlivu sil nekonzervativních.)

Uvažujme nyní soustavu částic, které neinteragují s okolními objekty (tzv. **izolovaná soustava**). Práce W , kterou konají konzervativní interakční síly, jimiž na sebe navzájem působí částice soustavy, určuje změnu kinetické energie soustavy. Současně ji však lze vyjádřit jako záporně vzatou změnu energie potenciální. Kinetická energie soustavy se tedy mění na úkor její energie potenciální. Skutečně, podle vztahu (7.4) je změna kinetické energie

$$\Delta E_k = W \quad (8.13)$$

a pro změnu potenciální energie platí podle (8.1)

$$\Delta E_p = -W. \quad (8.14)$$

Kombinací posledních dvou vztahů dostáváme

$$\Delta E_k = -\Delta E_p. \quad (8.15)$$

Jinými slovy, vzrůst jedné z obou forem energie je přesně vyvážen poklesem druhé.

Vztah (8.15) lze přepsat takto:

$$E_{k,2} - E_{k,1} = -(E_{p,2} - E_{p,1}), \quad (8.16)$$

kde se indexy 1 a 2 vztahují ke dvěma různým okamžikům, tj. ke dvěma různým konfiguracím soustavy. Úpravou (8.16) dostaneme

$$E_{k,2} + E_{p,2} = E_{k,1} + E_{p,1} \quad (\text{zákon zachování mechanické energie}). \quad (8.17)$$

Levá a pravá strana rovnosti (8.17) představují mechanickou energii v různých okamžicích, a tedy ve dvou různých konfiguracích soustavy. Vztah (8.17) vyjadřuje rovnost obou hodnot:

Působí-li v izolované soustavě pouze konzervativní interakční síly, mění se její kinetická a potenciální energie tak, že jejich součet, tj. mechanická energie soustavy, je stálý.



Kdysi se eskymáci z Aljašky nechali vyházet do vzduchu napnutou plachtou, aby po širé pláni dohlédli co nejdále. Dnes se to dělá jen pro zábavu. Všimněme si však, co se při takovém pohybu (viz fotografie) děje z fyzikálního hlediska. Při vzestupu klesá kinetická energie dítěte vzhledem k Zemi a roste tíhová potenciální energie soustavy dítěte + Země. Maximální výška výstupu odpovídá situaci, kdy je kinetická energie nulová. Během pádu se sled energií změn obrací: kinetická energie roste na úkor energie potenciální.

Tento výsledek vyjadřuje **zákon zachování mechanické energie**. (Z toho vidíme, jak vznikl termín „konzervativní“ síla: uchovává (lat. conservare) energii.) Pomocí vztahu (8.15) můžeme zákon zachování mechanické energie ještě přepsat ve tvaru

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = 0. \quad (8.18)$$

Tento zákon umožňuje řešit problémy, jejichž řešení pomocí samotných Newtonových zákonů by bylo obtížné:

Zachovávali-li se mechanická energie soustavy, můžeme porovnávat součet celkové kinetické a potenciální energie v různých okamžicích, *aniž bychom uvažovali o pohybu soustavy v intervalu mezi těmito okamžiky a počítali práci interakčních sil částic soustavy*.

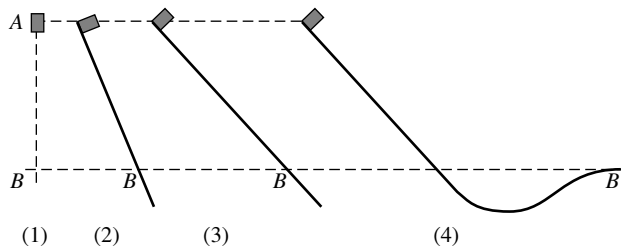
Obr. 8.7 znázorňuje případ, kdy je vhodné zákon zachování mechanické energie použít: kmity kyvadla v tíhovém poli Země. Při kmitavém pohybu kyvadla se mění kinetická i potenciální energie soustavy kyvadlo+Země tak, že součet $E_k + E_p$ je konstantní. Známe-li tíhovou potenciální energii soustavy v konfiguraci, kdy je kulička kyvadla v nejvyšším bodě své trajektorie (obr. 8.7c, g), můžeme určit kinetickou energii kuličky (vzhledem k Zemi) v nejnižším bodě (obr. 8.7a, e) užitím vztahu (8.17).

Zvolme například konfiguraci, při níž je kulička v nejnižší poloze, za referenční a přisudme jí potenciální energii $E_{p,2} = 0$. Předpokládejme, že při této volbě referenční konfigurace odpovídá nejvyšší poloze kuličky potenciální energie $E_{p,1} = 20 \text{ J}$. Kulička má v nejvyšším bodě nulovou rychlost, takže její kinetická energie je $E_{k,1} = 0$. Dosazením těchto hodnot do vztahu (8.17) zjistíme kinetickou energii $E_{k,2}$ v nejnižším bodě:

$$E_{k,2} + 0 = 0 + 20 \text{ J}, \quad \text{tj.} \quad E_{k,2} = 20 \text{ J}.$$

Všimněte si, že tento výsledek jsme získali, aniž bychom se zajímali o pohyb kyvadla mezi nejnižším a nejvyšším bodem (např. obr. 8.7d) a aniž bychom museli počítat práci sil působících na tělesa soustavy.

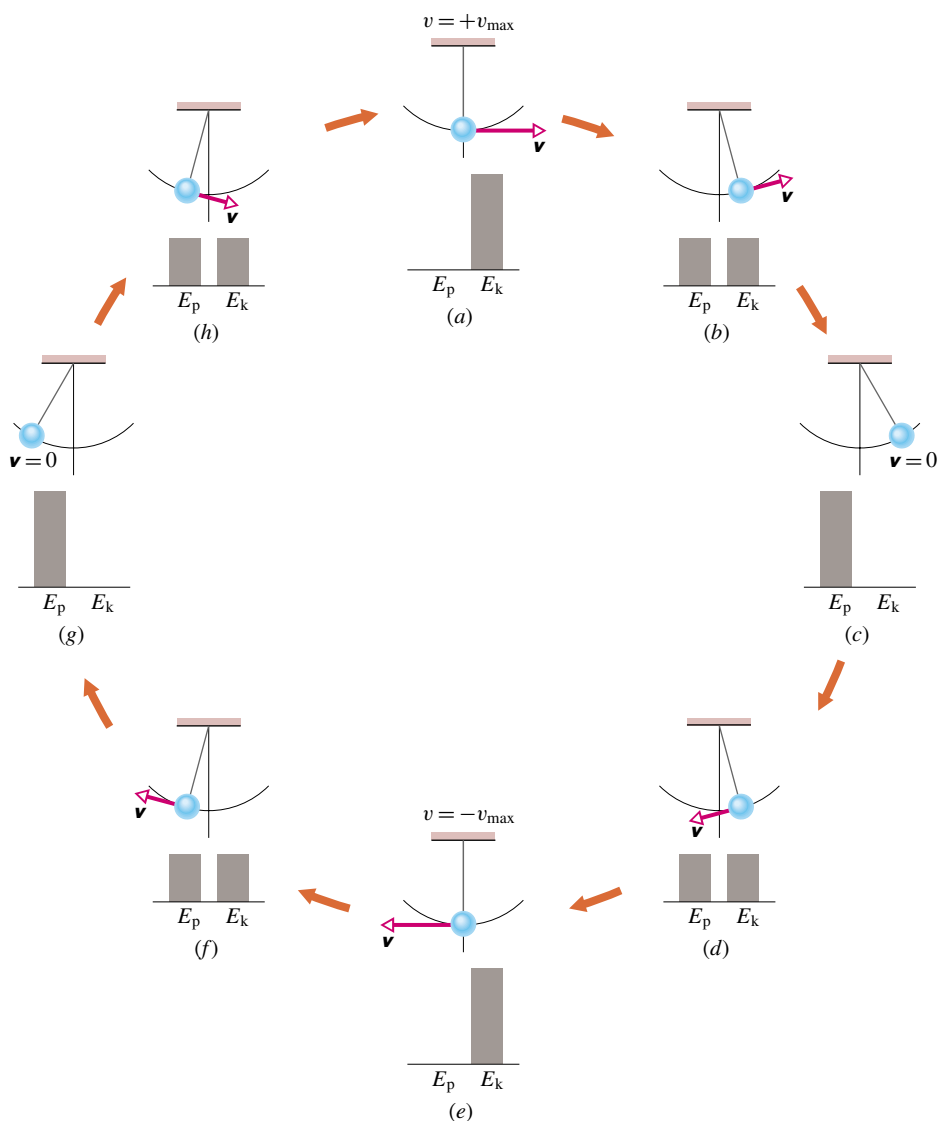
KONTROLA 3: Následující obrázek ukazuje čtyři situace. V první z nich kostka, která byla zpočátku v klidu, volně padá a v ostatních třech sjíždí po dokonale hladké skluzavce. Uspořádejte tyto situace sestupně podle (a) hodnoty kinetické energie kostky v bodě B a podle (b) velikosti rychlosti kostky v bodě B.



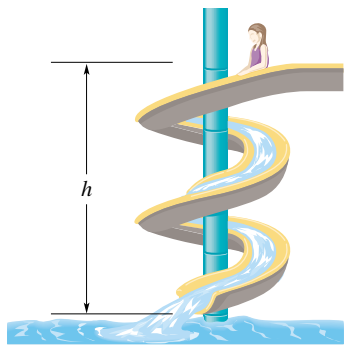
PŘÍKLAD 8.3

Na obr. 8.8 se dítě spouští z vrcholu vodní skluzavky. Dítě je zpočátku v klidu a nejvyšší bod skluzavky je ve výšce $h = 8,5 \text{ m}$ nad jejím ústím do bazénu. Předpokládejme, že

Obr. 8.7 Kyvadlo, jehož hmotnost je soustředěna v kuličce upevněné na konci vlákna, koná kmitavý pohyb. Obrázek zachycuje jednu periodu tohoto pohybu. Během periody se hodnoty kinetické i potenciální energie soustavy kyvadlo + Země spojitě mění, ale její celková mechanická energie zůstává zachována. Pro názornost můžeme použít i takovou představu, že se celková energie E spojitě „přelévá“ z jedné formy v druhou (potenciální v kinetickou a naopak). Ve stavech (a) a (e) je celková energie dána pouze energií kinetickou. Kulička je v nejnižším bodě a má největší rychlost. Ve stavech (c) a (g) je naopak celková energie rovna energii potenciální, neboť kulička je v nejvyšším bodě a její rychlost je v tom okamžiku nulová. V případech (b), (d), (f) a (h) tvoří jak kinetická, tak potenciální energie právě polovinu energie celkové. Pokud by se při kmitech kyvadla uplatňovaly třecí síly v závěsu nebo odporová síla vzduchu, energie E by se nezachovávala a kyvadlo by se nakonec zastavilo.



skluzavka je dokonale hladká díky proudu vody, který po ní stéká. Určete, s jakou rychlostí dítě vklouzne do bazénu.



Obr. 8.8 Příklad 8.3. Dítě sjezdí po vodní skluzavce z výšky h .

ŘEŠENÍ: Pokud bychom chtěli tuto úlohu řešit pouze na základě znalostí z kap. 2 až kap. 6, museli bychom obecně pracovat s neznámým vyjádřením tvaru skluzavky a k výsledku, který je na tvaru skluzavky nezávislý, bychom nakonec dospěli po zbytečných výpočtech. Užitím závěrů kap. 7 a kap. 8 ji však vyřešíme snadno. Nejprve si uvědomme, že zanedbáváme třecí sílu. Jedinou silou, kterou na dítě působí skluzavka, je tedy normálová (tlaková) síla, která je neustále kolmá k povrchu skluzavky. Dítě se ovšem pohybuje *podél* skluzavky. Normálová síla je proto stále kolmá k vektoru posunutí a nekoná práci.

Při pohybu dítěte po skluzavce konají práci pouze tíhové síly, které jsou konzervativní. Mechanická energie soustavy dítě + Země se tedy při jízdě dítěte po skluzavce zachovává.

Její hodnota E_d v okamžiku, kdy je dítě v dolním bodě

skluzavky, je stejná jako hodnota E_v v okamžiku, kdy je na vrcholu, tj. $E_d = E_v$. Vyjádříme-li tuto skutečnost pomocí vztahu (8.17), dostaneme

$$E_{k,d} + E_{p,d} = E_{k,v} + E_{p,v},$$

tj.

$$\frac{1}{2}mv_d^2 + mgy_d = \frac{1}{2}mv_v^2 + mgy_v.$$

Po vydělení této rovnice hmotností m a úpravě máme

$$v_d^2 = v_v^2 + 2g(y_v - y_d)$$

a po dosazení $v_v = 0$ a $y_v - y_d = h$ dostaneme

$$v_d = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(8,5 \text{ m})} = 13 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (\text{Odpověď})$$

Stejně velké rychlosti by dítě dosáhlo, kdyby z výšky 8,5 m spadlo. Na skutečné skluzavce se však přece jen nějaké třecí síly uplatňují, takže rychlost dítěte nebude tak velká.

Již jsme se zmínili, že řešení tohoto problému pomocí Newtonových zákonů by sice bylo možné, ale zbytečně zdoluhavé. Užitím zákona zachování mechanické energie jsme je získali velmi jednoduše. Kdybychom se však zajímali o to, za jak dlouho dítě po skluzavce sjede, pak by nás „energieová metoda“ k výsledku nepřivedla. Abychom dobu jízdy zjistili, museli bychom znát tvar skluzavky a provést poměrně složitý výpočet.

PŘÍKLAD 8.4

Pružina nabitá vzduchovky je oproti výchozímu nenapjatému stavu stlačena o délku $d = 3,2 \text{ cm}$. Náboj má hmotnost $m = 12 \text{ g}$. S jakou rychlostí opustí náboj po výstřelu hlaveň? Tuhost pružiny je $k = 7,5 \text{ N}\cdot\text{cm}^{-1}$. Předpokládejme, že hlaveň je při výstřelu vodorovná, tření při pohybu náboje je zanedbatelné a že po výstřelu zůstane pružina v nenapjatém stavu.

ŘEŠENÍ: Označme E_i mechanickou energii soustavy náboj + puška v počátečním stavu (před výstřelem) a E_f její mechanickou energii v koncovém stavu (poté, co náboj opustil hlaveň). V počátečním stavu je mechanická energie dána pouze potenciální energií stlačené pružiny $E_{p,i} = \frac{1}{2}kd^2$, v koncovém stavu pak pouze kinetickou energií náboje $E_{k,f} = \frac{1}{2}mv^2$. Poněvadž se mechanická energie soustavy zachovává, platí

$$E_i = E_f, \\ E_{p,i} + E_{k,i} = E_{p,f} + E_{k,f},$$

a tedy

$$\frac{1}{2}kd^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2.$$

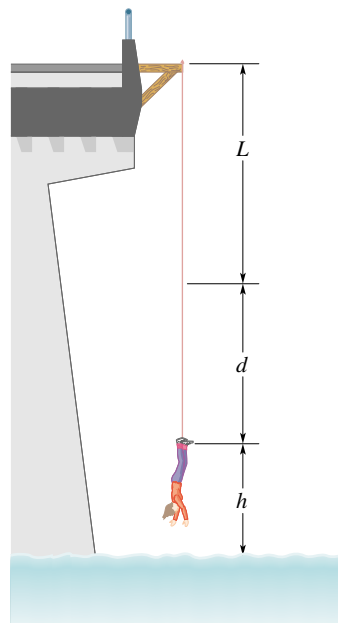
Řešením této rovnice vzhledem k neznámé v dostáváme

$$v = d\sqrt{\frac{k}{m}} = (0,032 \text{ m})\sqrt{\frac{(750 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1})}{(12\cdot 10^{-3} \text{ kg})}} = 8,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (\text{Odpověď})$$

PŘÍKLAD 8.5

Vyznavač bungee-jumpingu se chystá ke skoku z mostu vysokého 45,0 m. Jeho hmotnost je $m = 61,0 \text{ kg}$ a pružné lano, které hodlá použít, má v nenapjatém stavu délku $L = 25,0 \text{ m}$. Předpokládejme, že se lano řídí Hookovým zákonem* a jeho tuhost je $160 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. Tělo skokana považujeme při pohybu za bodový objekt.

(a) Jaká je výška chodidel skokana nad hladinou řeky, tekoucí pod mostem, v okamžiku, kdy se jeho let zastaví v dolním bodě obratu?



Obr. 8.9 Příklad 8.5. Skokan bungee-jumpingu v dolním bodě obratu.

ŘEŠENÍ: V soulahu s obr. 8.9 označme d prodloužení lana v okamžiku dosažení bodu obratu. Změna tíhové potenciální energie soustavy skokan + Země vzhledem k počátečnímu stavu, kdy skokan stál na mostě, je

$$\Delta E_{p,g} = mg\Delta y = -mg(L + d).$$

Změna pružné potenciální energie je

$$\Delta E_{p,p} = \frac{1}{2}kd^2.$$

Počátečnímu stavu i bodu obratu přísluší nulová kinetická energie.

* Ve skutečnosti se guma chová mnohem složitěji. Nesvěřujte svůj život první aproximaci.

Užitím (8.18) dostáváme pro soustavu skokan + Země vztahy

$$\begin{aligned}\Delta E_k + \Delta E_{p,p} + \Delta E_{p,g} &= 0, \\ 0 + \frac{1}{2}kd^2 - mg(L+d) &= 0, \\ \frac{1}{2}kd^2 - mgL - mgd &= 0.\end{aligned}$$

Dosažením zadaných údajů pak získáme kvadratickou rovnici

$$\frac{1}{2}(160 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1})d^2 - (61,0 \text{ kg})(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(25,0 \text{ m}) - (61,0 \text{ kg})(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})d = 0.$$

Jejím řešením dostaneme

$$d = 17,9 \text{ m}.$$

(Druhý kořen rovnice je záporný a pro naši úlohu nemá význam.) Chodidla skokana tedy budou v hloubce $(L+d) = 42,9 \text{ m}$ pod úrovní mostu, a tedy

$$h = 45,0 \text{ m} - 42,9 \text{ m} = 2,1 \text{ m}. \quad (\text{Odpověď})$$

Velmi vysoký skokan by se tedy mohl i namočit.*

(b) Jaká je výsledná síla působící na skokana v nejnižším bodě? (Je nulová?)

ŘEŠENÍ: Na skokana působí směrem dolů tíhová síla mg o velikosti $mg = 597,8 \text{ N}$ a směrem vzhůru pružná síla, jejíž velikost v bodě obratu je podle Hookova zákona rovna

$$F = kd = (160 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1})(17,9 \text{ m}) = 2864 \text{ N}.$$

Celková síla má velikost

$$2864 \text{ N} - 597,8 \text{ N} \doteq 2270 \text{ N}. \quad (\text{Odpověď})$$

Výsledná síla, která působí na skokana v nejnižším bodě jeho trajektorie, je tedy v porovnání s jeho váhou téměř čtyřnásobná. Umíte si jistě představit, jak to s ním „trhne“ vzhůru.

* V případě, že výšku skokana l nepovažujeme za zanedbatelnou, měli bychom výpočet zpřesnit. Hmotný bod, kterým skokana nahrazujeme při použití zákona zachování mechanické energie, umístíme do jeho těžiště, které leží zhruba v polovině jeho výšky. Za předpokladu, že před seskokem odvážlivce na mostě stojí a v bodě obratu naopak visí na laně podle obr. 8.9, je $\Delta y = -(L+d+l)$. V kvadratické rovnici pro neznámou veličinu d je pak třeba zaměnit člen $-mgL$ za $-mg(L+l)$. Proveďte tuto záměnu a rovnici vyřešte. Vezměte v úvahu přesnost zadání výchozích hodnot a posuďte, má-li toto zpřesnění vliv na výsledek.

RADY A NÁMĚTY

Bod 8.2: Zachování mechanické energie

Při řešení úloh pomocí zákona zachování mechanické energie si vždy položíme následující otázku:

*Jak je definována soustava, na kterou hodláme zákon zachování mechanické energie aplikovat? Je třeba, abychom uměli vymezit soustavu a její okolí. Představme si vždy uzavřenou plochu zakreslenou tak, že všechno, co je uvnitř, patří do naší soustavy, zatímco všechno ostatní náleží jejímu okolí. V př. 8.3 tvoří soustavu *dítě + Země*. V př. 8.4 je to dvojice *náboj + puška*. V př. 8.5 pak *skokan + (lano) + Země*.*

Jsou ve hře třecí nebo odporové síly? Působí-li uvnitř soustavy třecí nebo odporové síly, její mechanická energie se nezachovává.

Platí pro naši soustavu zákon zachování mechanické energie? Zákon zachování mechanické energie platí především pro izolované soustavy, tj. v situacích, kdy na objekty soustavy nepůsobí žádné vnější síly (částice soustavy neinteragují s jejím okolím). Pro soustavy neizolované jej lze použít ve speciálních případech, kdy vnější síly nekonají práci. Kdybychom třeba v př. 8.4 zvolili jako zkoumanou soustavu samotný náboj, nebylo by možné zákona zachování mechanické energie použít. Na náboj totiž působí pružná síla, která koná práci. Jeho mechanická energie, která je shodná s jeho energií kinetickou, se nezachovává.

Jaký je počáteční a koncový stav soustavy? Stav soustavy se s časem mění. Z jistého počátečního stavu (či konfigurace) dospěje soustava do stavu koncového. Při aplikaci zákona zachování mechanické energie obvykle využíváme skutečnosti, že mechanická energie má v obou těchto stavech stejnou hodnotu E . Je však třeba si předem ujasnit, jak jsou tyto dva stavy definovány.

8.5 INTERPRETACE KŘIVKY POTENCIÁLNÍ ENERGIE

Vraťme se k problematice izolované soustavy, v níž působí konzervativní interakční síly. Mechanická energie takové soustavy, daná součtem její celkové kinetické energie a všech typů její energie potenciální, se zachovává. Uvažujme velmi speciální situaci, kdy hmotnost jedné z částic soustavy je velmi malá ve srovnání s celkovou hmotností ostatních objektů, jako např. u soustavy typu jablko + Země. V tomto přiblížení (čl. 8.1) je změna kinetické energie soustavy dána změnou kinetické energie uvažované částice, tj. prací konzervativních sil působících na částici. Předpokládejme dále, že pohyb částice je vázán na osu x . V uvedeném přiblížení lze vyjádřit potenciální energii soustavy $E_p(x)$ jako funkci polohy částice x , která tak hraje roli konfigurační proměnné. Ukazuje se, že celou řadu informací

o pohybu částice lze získat již z průběhu křivky $E_p(x)$. Než se však do takové diskuse pustíme, potřebujeme ještě další vztahy.

Analytické vyjádření síly

Vztah (8.6) umožňuje vyjádřit potenciální energii v jednorozměrné situaci, známe-li sílu $F(x)$. Uvažujme však opačný problém. Předpokládejme, že známe průběh potenciální energie $E_p(x)$ a potřebujeme vyjádřit sílu.

Síla $F(x)$, působící na částici pohybující se podél osy x , vykoná při jejím posunutí o Δx práci $W = F(x)\Delta x$. Podle rov. (8.1) je

$$\Delta E_p(x) = -W = -F(x)\Delta x.$$

Vyjádríme $F(x)$ a provedeme limitní přechod $\Delta x \rightarrow 0$. Dostaneme

$$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx} \quad (\text{jednorozměrný pohyb}). \quad (8.19)$$

Tento výsledek můžeme ověřit například pro pružnou potenciální energii $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Podle očekávání dostaneme ze vztahu (8.19) výraz pro pružnou sílu $F(x) = -kx$, tj. Hookův zákon. Podobně pro tíhovou potenciální energii $E_p(x) = mgx$ částice o hmotnosti m ve výšce x nad zemským povrchem dostaneme z (8.19) tíhovou sílu $F(x) = -mg$ působící na částici.

Křivka potenciální energie

Na obr. 8.10a vidíme graf závislosti potenciální energie $E_p(x)$ na poloze částice, která koná jednorozměrný pohyb, při kterém na ni působí konzervativní síla $F(x)$ (resp. konzervativní síly, jejichž výslednice je $F(x)$). Průběh síly $F(x)$ můžeme snadno určit graficky tak, že budeme zjišťovat směrnici křivky $E_p(x)$ v jejích různých bodech (vztah (8.19)). Na obr. 8.10b je graf funkce $F(x)$ získaný právě takovým způsobem.

Body obratu

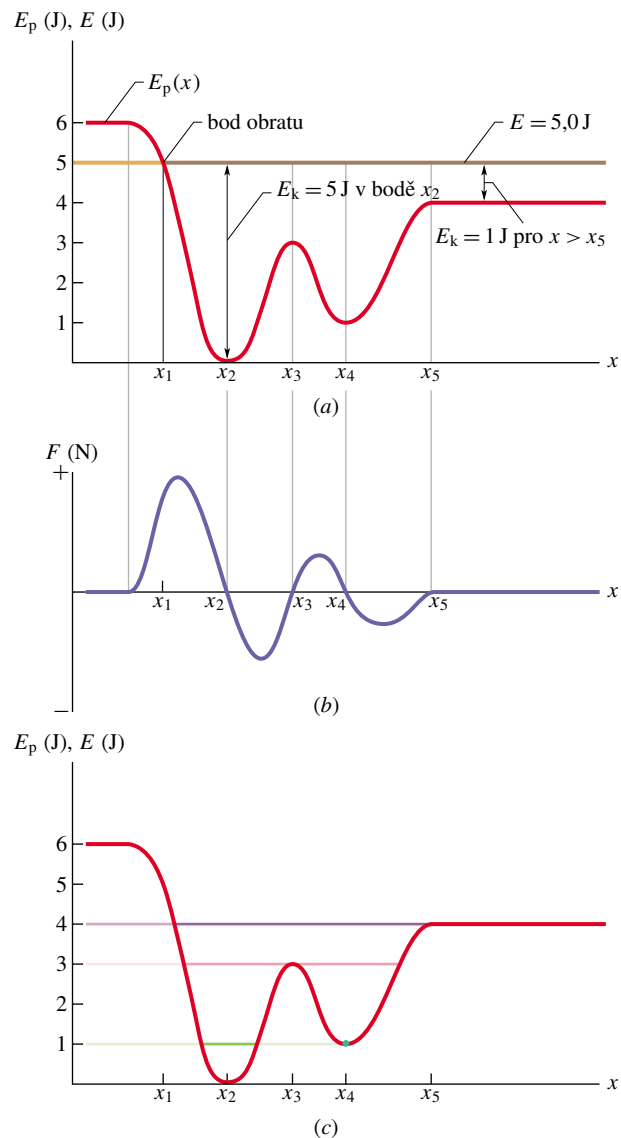
Nepůsobí-li v izolované soustavě nekonzervativní síly, její mechanická energie E se zachovává:

$$E_p(x) + E_k(x) = E. \quad (8.20)$$

Funkce $E_k(x)$ popisuje závislost kinetické energie částice na její poloze x . Vztah (8.20) můžeme přepsat do tvaru

$$E_k(x) = E - E_p(x). \quad (8.21)$$

Předpokládejme, že hodnota E (mějme na paměti, že je konstantní) činí 5,0 J. Tato hodnota je vyznačena vodorovnou přímkou, která prochází značkou 5,0 J na energiové ose (obr. 8.10a).



Obr. 8.10 (a) Graf závislosti potenciální energie $E_p(x)$ soustavy na poloze částice, která se pohybuje po ose x . Částice náleží do soustavy. Nepůsobí-li v soustavě třecí síly, zachovává se její mechanická energie. (b) Graf závislosti síly $F(x)$, působící na částici, na její poloze. Graf je konstruován z hodnot směrnic tečen ke křivce $E_p(x)$ v různých bodech. (c) Graf $E_p(x)$ s vyznačením tří různých hodnot energií E .

Rovnice (8.21) dává návod, jak určit kinetickou energii částice v poloze x : na křivce $E_p(x)$ najdeme hodnotu E_p odpovídající této poloze a odečteme ji od E . Je-li částice např.

v kterémkoli bodě vpravo od x_5 , je $E_k = 1,0\text{ J}$. Nejvyšší hodnoty (5 J) nabývá E_k , je-li částice v bodě x_2 a nejnižší (0 J), je-li v bodě x_1 .

Protože kinetická energie nemůže být záporná (hodnota v^2 je vždy kladná), nemůže se částice nikdy ocitnout vlevo od bodu x_1 (v této oblasti poloh by byl rozdíl $E - E_p$ záporný). Blíží-li se částice k bodu x_1 , její kinetická energie klesá, částice se zpomaluje. Při $E_k = 0$ je její rychlost nulová.

Všimněme si, že v okamžiku, kdy částice dosáhne bodu x_1 , působí na ni síla, daná vztahem (8.19). Tato síla míří ve směru kladné osy x (směrnice dE_p/dx je záporná). To znamená, že částice nezůstane v klidu v bodě x_1 , ale začne se pohybovat doprava, tj. opačným směrem. Polohu x_1 proto nazveme **bodem obratu**, tj. místem, kde kinetická energie částice nabývá nulové hodnoty a směr jejího pohybu se obrací.

Vpravo od bodu x_1 již žádný bod obratu není. Pohyb částice směrem vpravo bude pokračovat donekonečna.

Rovnovážné konfigurace

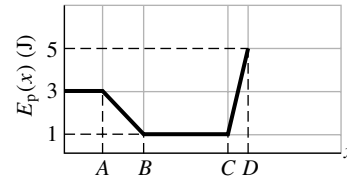
V grafu potenciální energie $E_p(x)$ na obr. 8.10c jsou vyznačeny tři další hodnoty mechanické energie E . Všimněme si podrobněji jednotlivých situací, abychom zjistili, jaký vliv má volba hodnoty E na pohyb částice. Je-li $E = 4,0\text{ J}$ (fialová čára), posune se bod obratu z polohy x_1 do nové polohy, která leží mezi x_1 a x_2 . Dále vidíme, že v každém bodě ležícím napravo od x_5 je potenciální energie konstantní a její hodnota splývá s hodnotou energie mechanické. Kinetická energie částice je nulová, stejně jako síla $F(x)$. Částice setrvává v klidu. V takovém případě hovoříme o **volné** (neboli indiferentní) **rovnovážné poloze**. Příkladem je kulička ležící na vodorovném stole.

Pro $E = 3,0\text{ J}$ (růžová čára) existují dva body obratu. Jeden z nich leží mezi x_1 a x_2 , druhý mezi x_4 a x_5 . V bodě x_3 je navíc $E_k = 0$. Nachází-li se částice právě v tomto bodě, je $F(x) = 0$ a částice setrvává v klidu. Při sebemenším vysunutí částice z této polohy na kteroukoli stranu (například působením náhodných vlivů) však vznikne nenulová síla $F(x)$ ve směru původní náhodné výchylky a částice se začne pohybovat. Takovou polohu proto nazýváme **vratkou** (neboli labilní) **rovnovážnou polohou**. Ve vratké rovnovážné poloze je například malá kulička položená na vrch velké kulečnickové koule.

Nakonec uvažujme chování částice při hodnotě $E = 1,0\text{ J}$ (zelená čára). Vložíme-li částici do polohy x_4 , částice v ní setrvá a sama od sebe se z ní nemůže vychýlit v žádném směru. Všem bodům v blízkém okolí x_4 by totiž odpovídala záporná kinetická energie. Vysuneme-li částici z polohy x_4 vlevo či vpravo, začne na ni působit vratná

síla a částice se bude pohybovat zpět k bodu x_4 . Hovoříme o tzv. **stálé** (neboli stabilní) **rovnovážné poloze**. Příkladem může být kulička na dně duté polokoule. Částice na dně *potenciálové jámy* tvaru „poháru“ s minimem v bodě x_2 se bude pohybovat v rozmezí bodů obratu ležících někde mezi x_2 a x_1 , resp. x_2 a x_3 .

KONTROLA 4: Na obrázku je křivka potenciální energie $E_p(x)$ pro případ jednorozměrného pohybu částice. (a) Uspořádejte úseky AB , BC a CD sestupně podle velikosti síly působící na částici. (b) Jaký směr má síla působící na částici v úseku AB ?



Mechanická energie dvoučásticové soustavy

V tomto odstavci se přesněji uvažujeme k problematice zachování mechanické energie dvoučásticových izolovaných soustav s konzervativní interakcí a k podrobnější diskusi o oprávněnosti přiblížení, jichž jsme používali u soustav typu těleso + Země, charakterizovaných velmi malou hodnotou poměru hmotností m/M .

Uvažujme tedy libovolnou izolovanou soustavu složenou ze dvou těles o hmotnostech m a M , která na sebe navzájem působí interakcemi (vnitřními, interními) silami jakékoli povahy. Nechť F_{int} je síla, jíž působí těleso M na m a $-F_{\text{int}}$ označuje působení tělesa m na M . Při změnách konfigurace soustavy konají obě tyto síly práci. Práce síly F_{int} je podle vztahu (7.4) rovna změně kinetické energie tělesa m , zatímco práce síly $-F_{\text{int}}$ určuje změnu kinetické energie tělesa M . Celková práce interakčních sil W_{int} tedy představuje změnu kinetické energie soustavy vzhledem k libovolně zvolené inerciální vztažné soustavě. Předpokládejme nejprve pro jednoduchost, že jiné interakční síly než F_{int} a $-F_{\text{int}}$ v naší soustavě nepůsobí, a označme zrychlení těles m a M jako a_m a a_M . Platí

$$m a_m = F_{\text{int}}$$

a

$$M a_M = -F_{\text{int}}.$$

Odtud

$$m a_m + M a_M = 0.$$

Označíme-li Δv_m a Δv_M změny rychlosti těles m a M při určité změně konfigurace soustavy, vidíme, že

$$m \Delta v_m + M \Delta v_M = 0$$

a veličina

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_m + M\mathbf{v}_M,$$

zvaná **hybnost** soustavy, se tedy zachovává. Tato skutečnost umožňuje zvolit pro řešení našeho problému takovou inerciální vztažnou soustavu* \mathcal{S} , ve které je $\mathbf{p} = \mathbf{0}$.

Opravdu, pokud bychom jako $\bar{\mathbf{v}}_m$ a $\bar{\mathbf{v}}_M$ označili rychlosti těles m a M vzhledem k inerciální vztažné soustavě \mathcal{S} , na jejíž konkrétní volbu jsme nekladli žádné požadavky, bude celková hybnost soustavy těles nulová v každé vztažné soustavě \mathcal{S} , která se vůči \mathcal{S} pohybuje rychlostí

$$\mathbf{v}_0 = \frac{m\bar{\mathbf{v}}_m + M\bar{\mathbf{v}}_M}{m + M}.$$

Tato rychlost bude konstantní, neboť celková hybnost $\bar{\mathbf{p}}_0$ izolované soustavy dvou těles se zachovává. Rychlosti těles v nové vztažné soustavě jsou $\mathbf{v}_m = \bar{\mathbf{v}}_m - \mathbf{v}_0$ a $\mathbf{v}_M = \bar{\mathbf{v}}_M - \mathbf{v}_0$. Platí

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= m\mathbf{v}_m + M\mathbf{v}_M = m(\bar{\mathbf{v}}_m - \mathbf{v}_0) + M(\bar{\mathbf{v}}_M - \mathbf{v}_0) = \\ &= m\left(\bar{\mathbf{v}}_m - \frac{m\bar{\mathbf{v}}_m + M\bar{\mathbf{v}}_M}{m + M}\right) + M\left(\bar{\mathbf{v}}_M - \frac{m\bar{\mathbf{v}}_m + M\bar{\mathbf{v}}_M}{m + M}\right) = \\ &= \frac{m}{m + M}(m\bar{\mathbf{v}}_m + M\bar{\mathbf{v}}_M - m\bar{\mathbf{v}}_m - M\bar{\mathbf{v}}_M) + \\ &\quad + \frac{M}{m + M}(m\bar{\mathbf{v}}_m + M\bar{\mathbf{v}}_M - m\bar{\mathbf{v}}_m - M\bar{\mathbf{v}}_M) = \\ &= \frac{mM}{m + M}(\bar{\mathbf{v}}_m - \bar{\mathbf{v}}_M) + \frac{mM}{m + M}(\bar{\mathbf{v}}_M - \bar{\mathbf{v}}_m) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Rychlosti \mathbf{v}_m a \mathbf{v}_M nyní vyjádříme pomocí rychlosti \mathbf{v} tělesa m vzhledem k tělesu M ,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_m - \mathbf{v}_M.$$

Ve vztažné soustavě \mathcal{S} platí

$$m\mathbf{v}_m + M\mathbf{v}_M = \mathbf{0}.$$

Řešením posledních dvou rovnic vzhledem k neznámým \mathbf{v}_m a \mathbf{v}_M dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_m &= \frac{M\mathbf{v}}{m + M}, \\ \mathbf{v}_M &= -\frac{m\mathbf{v}}{m + M}. \end{aligned}$$

Celková kinetická energie soustavy těles měřená vzhledem k \mathcal{S} je pak

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 = \\ &= \frac{1}{2}\frac{m(Mv)^2}{(m + M)^2} + \frac{1}{2}\frac{M(-mv)^2}{(m + M)^2} = \frac{1}{2}\frac{mM}{m + M}v^2. \end{aligned}$$

* Nazývá se **těžišťová**, protože vůči ní je v klidu těžiště soustavy; to však zavedeme až v čl. 9.2. Srovnej př. 9.10.

Veličina

$$m_{\text{red}} = \frac{mM}{m + M}$$

charakterizuje soustavu jako celek a nazývá se **redukovaná hmotnost** soustavy. Změna kinetické energie naší soustavy při změně její konfigurace je určena celkovou prací W_{int} interakčních sil \mathbf{F}_{int} a $-\mathbf{F}_{\text{int}}$, tj.

$$\frac{1}{2}m_{\text{red}}\Delta(v^2) = W_{\text{int}}.$$

Tento závěr je platný bez ohledu na povahu interakčních sil. Pohybuje-li se během změny konfigurace soustavy těleso m po křivce \mathcal{C}_m a těleso M po křivce \mathcal{C}_M , platí

$$W_{\text{int}} = \int_{\mathcal{C}_m} \mathbf{F}_{\text{int}} \cdot d\mathbf{r}_m + \int_{\mathcal{C}_M} -\mathbf{F}_{\text{int}} \cdot d\mathbf{r}_M.$$

Označíme-li jako $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M$ vektor, který udává polohu tělesa m vzhledem k M a určuje tedy konfiguraci soustavy, dostaneme

$$W_{\text{int}} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}_{\text{int}} \cdot d\mathbf{r},$$

kde \mathcal{C} je křivka, po které se pohybuje těleso m vzhledem k M . (Pro lepší pochopení předchozího výpočtu se vraťte k poznámce o křivkových integrálech v čl. 7.5.)

Jsou-li však síly \mathbf{F}_{int} a $-\mathbf{F}_{\text{int}}$ konzervativní, lze jejich práci W_{int} zapsat jako záporně vzatou změnu odpovídajícího typu potenciální energie soustavy:

$$W_{\text{int}} = -\Delta E_p.$$

Dostáváme tak zákon zachování mechanické energie dvoučásticové izolované soustavy ve tvaru

$$\frac{1}{2}\frac{mM}{m + M}\Delta(v^2) + \Delta E_p = 0.$$

Působí-li v soustavě více typů konzervativních interakčních sil, je třeba náš výsledek zobecnit:

$$\frac{1}{2}\frac{mM}{m + M}\Delta(v^2) + \Delta E_{p,1} + \Delta E_{p,2} + \dots = 0.$$

Vyjádření zákona zachování mechanické energie lze zobecnit i na vícečásticové soustavy. Pojem redukované hmotnosti, který je velmi užitečný při praktických výpočtech u dvoučásticových soustav, však nemá analogii u soustav vícečásticových.

Mechanická energie dvoučásticové (resp. vícečásticové) izolované soustavy, v níž působí pouze konzervativní interakční síly, je definována jako součet kinetických energií obou (všech) částic a všech typů potenciální energie soustavy, příslušejících jednotlivým dvojicím konzervativních interakčních sil. Při změnách konfigurace soustavy se mechanická energie nemění.

S pojmem redukované hmotnosti je užitečné se vrátit k úvahám o přiblíženích, o nichž jsme se již předběžně zmínili v článku 8.1 při rozboru energetické bilance soustav typu těleso + Země. Tyto soustavy se vyznačují mizivou hodnotou poměru m/M . Upravme výraz pro redukovanou hmotnost na tvar:

$$m_{\text{red}} = \frac{mM}{m+M} = \frac{m}{1 + \frac{m}{M}}.$$

Z tohoto vyjádření je ihned patrný vliv podílu m/M na odchylku redukované hmotnosti soustavy od hmotnosti tělesa m . Veličina $x = \frac{m}{M}$ je velmi malá, takže v rozvoji funkce

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots$$

lze členy s vyššími mocninami proměnné x zanedbat. Pro redukovanou hmotnost dvoučásticové soustavy pak dostáváme

$$m_{\text{red}} \approx m \left(1 - \frac{m}{M}\right) \approx m.$$

Náhradou redukované hmotnosti hmotností méně hmotného tělesa se tedy při výpočtu kinetické energie soustavy dopouštíme relativní chyby m/M . Tato hodnota například pro soustavu tvořenou tělesem o hmotnosti $m = 5 \text{ kg}$ a Zemí, jejíž hmotnost je $M \doteq 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, je zhruba 10^{-24} . Namísto o celkové kinetické energii soustavy těleso + Země pak můžeme hovořit o kinetické energii tělesa vzhledem k Zemi (kap. 7).

Na závěr toho odstavce si uvědomme ještě jeden aspekt pojmu redukovaná hmotnost. Pozorovatel spojený s tělesem M a sledující pohyb částice m nemůže pro tuto částici přímo použít druhý Newtonův zákon, neboť vztažná soustava spojená s M je neinerciální (na těleso M působí síla $-\mathbf{F}_{\text{int}}$). Pomocí druhého Newtonova zákona lze však vyjádřit zrychlení \mathbf{a}_m a \mathbf{a}_M (viz výše) a určit zrychlení \mathbf{a} částice m vzhledem k vztažné soustavě spojené s M :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}_m - \mathbf{a}_M = \frac{\mathbf{F}_{\text{int}}}{m} - \frac{(-\mathbf{F}_{\text{int}})}{M} = \\ &= \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \mathbf{F}_{\text{int}} = \frac{1}{m_{\text{red}}} \mathbf{F}_{\text{int}}, \end{aligned}$$

odkud

$$m_{\text{red}} \mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{int}}.$$

Tento vztah má formálně tvar zápisu druhého Newtonova zákona pro částici o hmotnosti m_{red} , na kterou působí síla \mathbf{F}_{int} . Neinerciálnost vztažné soustavy spojené s tělesem M , způsobenou přítomností tělesa m , lze tedy při formulaci pohybového zákona pro těleso m „vykompenzovat“ záměnou jeho skutečné hmotnosti redukovanou hmotností soustavy. Víme již, že relativní chyba, které se dopustíme zanedbáním této neinerciálnosti a dosazením $m_{\text{red}} \approx m$, je řádu m/M . Je-li v roli tělesa M Země, je tato nepřesnost opět zcela neměřitelná. Je zřejmé, že neinerciálnost laboratorní vztažné soustavy, spojené s povrchem Země, je v daleko větší míře způsobena pohybem Země kolem Slunce a především její vlastní rotací (pozn. pod čarou u čl. 5.2).

8.6 PRÁCE VNĚJŠÍCH A NEKONZERVATIVNÍCH SIL

Působí-li v izolované soustavě pouze konzervativní interakční síly, je její mechanická energie konstantní. Jsou-li však interakční síly v soustavě nekonzervativní, nebo působí-li na částice soustavy vnější síly, které konají nenulovou práci, nebude se mechanická energie soustavy zachovávat. V takových případech *nemůžeme* použít vztahů (8.17) a (8.18). Co potom můžeme říci o změnách energie soustavy? Abychom na tuto otázku odpověděli, všimneme si odděleně obou situací, v nichž se mechanická energie soustavy nezachovává. Zvláštní pozornost budeme věnovat případu, kdy v soustavě působí třecí síly.

Práce nekonzervativních interakčních sil

Představme si, že zvedáme kuželkovou kouli svisle vzhůru. Soustavu koule + člověk + Země můžeme opět považovat za izolovanou. Můžeme si představit, že koule a Země takto interagují prostřednictvím vazby, kterou zajišťuje člověk. Působí-li člověk na kouli silou \mathbf{F}_{int} , změní se tlaková síla, jíž působí na podložku pod svými nohama, o vektor $-\mathbf{F}_{\text{int}}$. Obě tyto síly jsou *vnitřními* silami soustavy. Při zvedání koule dochází ke změnám konfigurace soustavy. Tíhové síly při tom vykonají práci W_g , která určuje změnu tíhové potenciální energie soustavy $\Delta E_{p,g} = -W_g$. Celkovou práci *obou* sil \mathbf{F}_{int} i $-\mathbf{F}_{\text{int}}$ označme W_{int} . Pokud tyto síly nejsou konzervativní, nelze jim přisoudit potenciální energii. Víme, že mechanická energie soustavy je součtem kinetických energií všech objektů a všech druhů potenciální energie příslušných *konzervativním interakčním silám*. Mechanická energie naší soustavy je tedy součtem její tíhové potenciální energie a kinetických energií koule a zbytku soustavy. Ukážeme, že se nebude zachovávat, ale bude se měnit právě na úkor práce nekonzervativních sil

\mathbf{F}_{int} a $-\mathbf{F}_{\text{int}}$: vzhledem k zanedbatelnému poměru hmotnosti koule a zbytku soustavy je změna kinetické energie soustavy při zvedání koule dána změnou kinetické energie koule samotné. Ze zkušenosti víme, že kouli můžeme v rámci tohoto experimentu považovat za bodový objekt. Užitím vztahu (7.15) mezi prací a kinetickou energií dostaneme změnu kinetické energie koule:

$$\Delta E_k = W_{\text{int}} + W_g.$$

Tíhová síla je konzervativní, a tak můžeme práci W_g zaplat pomocí odpovídající změny tíhové potenciální energie soustavy koule + člověk + Země:

$$W_g = -\Delta E_{p,g}. \quad (8.22)$$

Dosazením za W_g do rov. (8.22) dostaneme

$$\Delta E_k + \Delta E_{p,g} = W_{\text{int}}. \quad (8.23)$$

Levá strana této rovnice představuje změnu ΔE mechanické energie soustavy koule + člověk + Země. Vlivem nekonzervativních interakčních sil v soustavě se tedy obecně mění mechanická energie soustavy.

Práce vnější síly

Stejně jako v předchozím odstavci uvažujeme i nyní soustavu koule + Země. Místo člověka, který byl součástí soustavy a působil na kouli silou \mathbf{F}_{int} , bude však na kouli působit jiné těleso, které do soustavy nepatří (je součástí jejího okolí). Soustava koule + Země tedy *neбудe* izolovaná a o síle \mathbf{F}_{ext} , kterou působí na kouli vnější těleso, budeme hovořit jako o síle **vnější** (externí). Označme W_{ext} práci, kterou tato síla koná při změnách vzdálenosti koule od povrchu Země. Podle (7.15) opět platí

$$\Delta E_k = W_{\text{ext}} + W_g.$$

Užitím (8.22) dostaneme

$$\Delta E_k = W_{\text{ext}} - \Delta E_{p,g}$$

a nakonec

$$\Delta E = W_{\text{ext}}. \quad (8.24)$$

Vidíme, že změna mechanické energie neizolované soustavy, v níž působí pouze konzervativní interakční síly, je rovna práci vykonané vnějšími silami.

Získané závěry lze zobecnit i pro soustavy, které nejsou izolované a v nichž působí jak konzervativní, tak nekonzervativní interakční síly:

Změna mechanické energie soustavy je rovna celkové práci nekonzervativních interakčních sil soustavy a vnějších sil, jimiž na objekty soustavy působí její okolí.

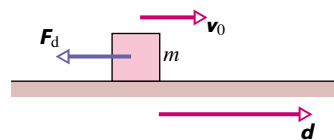
Platí

$$\Delta E = W_{\text{int}} + W_{\text{ext}}. \quad (8.25)$$

Tento vztah platí pro libovolnou soustavu, ať již je tvořena jediným objektem jako v kap. 7, nebo dvěma (či více) objekty, jako například u soustavy koule + Země, jíž jsme se zabývali před chvílí.

Práce třecí síly

Kostka o hmotnosti m na obr. 8.11 klouže po podlaze, která není dokonale hladká. Počáteční rychlost kostky má velikost v_0 . Vlivem dynamické třecí síly \mathbf{F}_d se kostka zastaví poté, co urazila dráhu d . Z experimentu víme, že působením třecí síly klesá kinetická energie kostky a soustava kostka + podložka + Země se zahřeje. V kap. 19 až 21 uvidíme, že toto zahřátí souvisí se změnou vnitřní energie těles, způsobenou urychlením neuspořádaného pohybu částic, z nichž jsou tělesa složena.



Obr. 8.11 Kostka o hmotnosti m klouže po podlaze, která není dokonale hladká, počáteční rychlostí v_0 . Vlivem dynamické třecí síly \mathbf{F}_d se kostka zpomaluje a po posunutí d se zcela zastaví.

Z experimentu je známo i to, že takový proces vzrůstu vnitřní energie soustavy na úkor její energie kinetické je nevratný. Říkáme, že kinetická energie kostky je *rozptýlována* (disipována) působením síly \mathbf{F}_d , nebo že dochází k energiovým ztrátám. Práce W_f třecích sil \mathbf{F}_d a $-\mathbf{F}_d$, které jsou *nekonzervativními vnitřními* silami soustavy kostka + podložka + Země, je záporná a její velikost je rovna úbytku kinetické energie kostky vzhledem k podložce. Tento úbytek představuje rozptýlenou energii (energiovou ztrátu) a přispívá ke zvýšení vnitřní energie jak kostky, tak i podložky.

Předchozí úvahu objasníme ještě na příkladu kostky z obr. 8.11. Dejme tomu, že jsme při měření změny kinetické energie kostky získali hodnotu $\Delta E_k = -100 \text{ J}$. Tato hodnota představuje současně i práci W_d vykonanou silami dynamického tření. Rozptýlená energie je tedy 100 J . O tuto hodnotu vzroste vnitřní energie soustavy kostka + podložka + Země, tj. $\Delta E_{\text{int}} = 100 \text{ J}$. Předpokládejme dále, že jsme bezprostředně po zastavení kostky zjistili

pomocí přesných kalorimetrických měření, že při brzdění došlo ke zvýšení její vnitřní energie o 60 J. Je zřejmé, že vnitřní energie podložky se zvýšila o 40 J.

Situace na obr. 8.11 je podobná jako na obr. 7.2 v čl. 7.3. Můžeme tedy použít vztah (7.8) se dvěma obměnami. Velikost síly je nyní F_d namísto F a úhel φ mezi silou a posunutím je 180° . Vztah (7.8) pak nabude tvaru

$$\Delta E_k = F_d d \cos 180^\circ = -F_d d. \quad (8.26)$$

Hodnota součinu $-F_d d$ tedy představuje pokles kinetické energie kostky na obr. 8.11 vlivem působení třecích sil. Kdyby se měnila i potenciální energie soustavy (kostka by například sjížděla po šikmé rampě), představovala by tato hodnota pokles mechanické energie soustavy E vlivem třecích sil, tj. energií ztrátu:

$$\Delta E = -F_d d \quad (\text{rozptýlená mechanická energie}). \quad (8.27)$$

Rozptýlená energie přispěje částečně ke zvýšení vnitřní energie kostky (zahřátí), částečně ke zvýšení vnitřní energie podložky.

PŘÍKLAD 8.6

Vadný robot o hmotnosti $m = 40 \text{ kg}$ je tažen na laně po stěně sopečného kráteru (obr. 8.12). Stěna svírá s vodorovnou rovinou úhel 30° . Tažná síla lana F má velikost 380 N, velikost dynamické třecí síly působící proti pohybu robota je 140 N. Robot se posune o vzdálenost $d = 0,50 \text{ m}$ podél stěny kráteru.

(a) Jaká je ztráta mechanické energie soustavy robot + Země způsobená vlivem třecích sil při posunutí robota o vektor \mathbf{d} ?

ŘEŠENÍ: Ze vztahu (8.27) a zadaných údajů dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta E &= -F_d d = -(140 \text{ N})(0,50 \text{ m}) = \\ &= -70 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Vnitřní energie robota a podložky se tedy zvýšila o 70 J.

(b) Jakou práci vykonají při posunutí robota tíhové síly?

ŘEŠENÍ: Podle vztahů (8.1) a (8.7) je

$$W_g = -\Delta E_p = -mg\Delta y. \quad (8.28)$$

Na obr. 8.12 vidíme, že změna y -ové souřadnice robota, v obrázku označená jako h , je $h = d \sin 30^\circ$. Dosazením tohoto výrazu do (8.28) a užitím zadaných hodnot dostáváme

$$\begin{aligned} W_g &= -mgh = -mgd \sin 30^\circ = \\ &= -(40 \text{ kg})(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(0,50 \text{ m})0,5 = \\ &= -98 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

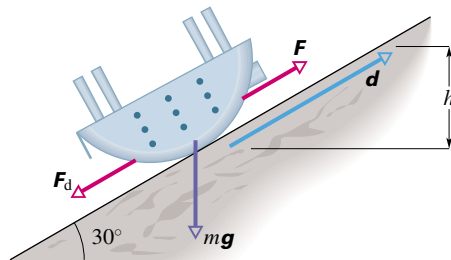
Potenciální energie soustavy robot + Země vzrostla během posunutí robota o 98 J.

(c) Jakou práci vykonala síla F ?

ŘEŠENÍ: Práce síly F je prakticky rovna celkové práci W_{int} sil F a $-F$. (Sílu $-F$ působí robot prostřednictvím tažného lana na naviják, který je pevně spojen se stěnou kráteru a náleží tedy rovněž do studované soustavy.) Pro její výpočet uijeme vztahu (7.9) ($W = Fd \cos \varphi$). Úhel φ mezi vektory F a d je 0° . Dosazením do (7.9) dostáváme:

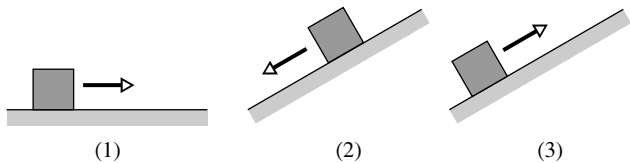
$$\begin{aligned} W_{\text{int}} &= Fd \cos \varphi = (380 \text{ N})(0,50 \text{ m}) \cos 0^\circ = \\ &= 190 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Působením sil F a $-F$ při posunutí robota došlo ke zvýšení mechanické energie soustavy robot + Země o 190 J.



Obr. 8.12 Příklad 8.6. Vadný robot je tažen na laně po šikmé stěně sopečného kráteru silou F , proti pohybu působí dynamická třecí síla F_d . Robot se posune podél nakloněné roviny o vektor \mathbf{d} , jeho výška nad dnem kráteru při tom vzroste o h .

KONTROLA 5: Obrázek ukazuje tři možnosti pohybu kostky po nakloněné rovině, která není dokonale hladká. Ve všech případech je velikost počáteční rychlosti kostky stejná. Pohyb kostky sledujeme až do zastavení. Uspořádejte tyto situace sestupně podle velikosti rozptýlené mechanické energie.



8.7 ZÁKON ZACHOVÁNÍ ENERGIE

Představme si kostku, která klouže po dokonale hladké vodorovné podlaze. Soustavu tvořenou samotnou kostkou můžeme považovat za izolovanou v tom smyslu, že žádná ze sil, které na ni působí (tíhová síla a tlaková síla podložky), nekoná práci. Na tuto jednoduchou soustavu lze samozřejmě rovněž aplikovat zákon zachování energie: energie kostky se zachovává.

Nyní nechme kostku klouzat po podlaze, která není dokonale hladká. Uvažujeme-li opět soustavu tvořenou samotnou kostkou, musíme konstatovat, že tentokrát se o izolovanou soustavu nejedná. Dynamická třecí síla, která na kostku působí, je z hlediska zvolené soustavy silou vnější. Energie soustavy (kostky) se nezachovává.

Můžeme však soustavu rozšířit tak, že do ní zahrneme jak kostku, tak podložku pevně spojenou se Zemí. V této soustavě jsou již třecí síly silami vnitřními, soustava je izolovaná a její energie se zachovává. Zobecníme-li náležitě představy o tom, co rozumíme *soustavou*, můžeme formulovat nový zákon zachování energie, který umožňuje uvažovat o různých energiových přeměnách.

Dospějeme k němu pomocí vztahu (8.27) pro vyjádření mechanické energie rozptýlené třecími silami \mathbf{F}_d a $-\mathbf{F}_d$. V případě kostky pohybující se po vodorovné podlaze zahrnuje mechanická energie pouze energii kinetickou a vztah (8.27) má tvar

$$\Delta E_k = -F_d d, \quad (8.29)$$

kde ΔE_k je změna kinetické energie. Celý úbytek kinetické energie přispěje ke zvýšení vnitřní energie kostky a podložky (obě se zahřejí). Změna vnitřní energie soustavy je tedy

$$\Delta E_{\text{int}} = -\Delta E_k, \quad (8.30)$$

odkud

$$\Delta E_k + \Delta E_{\text{int}} = 0. \quad (8.31)$$

A tak i když se mechanická energie kostky nezachovává, je součet její mechanické energie a vnitřní energie soustavy kostka + podložka konstantní. Tento součet představuje *celkovou energii* soustavy kostka + podložka. Nově získaný vztah pro zachovávající se energii nazýváme **zákonem zachování energie**. Užitím vztahu (8.31) jej můžeme zapsat ve tvaru

$$\Delta E_{\text{celk}} = \Delta E_k + \Delta E_{\text{int}} = 0. \quad (8.32)$$

Působí-li navíc v soustavě konzervativní interakční síly, máme opět poněkud širší a obecnější pojem izolované soustavy, ve které může kromě změn kinetické a vnitřní energie jednotlivých objektů docházet i ke změnám energie potenciální. Celková energie se bude opět zachovávat a zákon zachování nabude tvaru

$$\Delta E_{\text{celk}} = \Delta E_k + \Delta E_p + \Delta E_{\text{int}} = 0 \quad (\text{izolovaná soustava, zákon zachování celkové energie}). \quad (8.33)$$

Objevíme-li ještě jiné formy energie, můžeme je vždy zahrnout do zákona zachování energie a přepsat vztah

(8.33) takto:

$$\Delta E_{\text{celk}} = \Delta E_k + \Delta E_p + \Delta E_{\text{int}} + \Delta E_{\text{ostatní}} = 0. \quad (8.34)$$

Uvědomme si, že tento obecný zákon zachování energie jsme *nijak* neodvodili. Naopak, vyplývá z nesčetných experimentů. Vědci ani konstruktéři dosud neobjevili žádnou výjimku z tohoto zákona. Jeho značná účinnost při analýze obtížných situací spočívá právě v tom, že přisuzuje celkové energii úlohu zachovávající se veličiny i v situacích, kdy se dílčí energie různých typů mění.



Obr. 8.13 Při sestupu se snižuje tíhová potenciální energie soustavy horolezkyňe s výstrojí + Země. Lano je provlečeno kovovými karabinami a tře se o ně. Podstatná část úbytku potenciální energie tak přispěje ke vzrůstu vnitřní energie soustavy a kinetická energie horolezkyňe se prakticky nezvyšuje.

V izolované soustavě může docházet ke změnám všech typů energie, které lze soustavě přisoudit. Celková energie však zůstává zachována.

Chceme-li tuto skutečnost vyjádřit méně formálně, můžeme říci, že energie nemůže záhadně mizet ani se objeovat.

Nad obr. 8.13 můžeme například uvažovat tak, že do soustavy zahrneme jak horolezkyňu s kompletní výstrojí, tak Zemi. Při slaňování po skalní stěně musí horolezkyňe řídit pokles potenciální energie soustavy (tato energie nemůže najednou záhadně zmizet). Část jejího úbytku se jistě může projevit přírůstkem kinetické energie horolezkyňe, ten však nesmí být příliš velký. V tom tkví podstata slaňování: lano je provlečeno kovovými karabinami. Třecí síly mezi lanem a karabinami řízeně a pomalu rozptylují

převážnou část mechanické energie soustavy a zvyšují tak energii vnitřní.

Není-li soustava izolovaná a vnější síly konají práci, nelze vztahy (8.33) a (8.34) použít. Je třeba je nahradit obecnějším vztahem

$$W = \Delta E_{\text{celk}} = \Delta E_k + \Delta E_p + \Delta E_{\text{int}}, \quad (8.35)$$

kde W je celková práce vnějších sil působících na objekty soustavy. Kdybychom například lano horolezkyňe (obr. 8.13) nezahrnuli do soustavy, bylo by třeba třecí sílu, jíž působí lano na karabiny, považovat za vnější sílu, jejíž práce W přispívá ke změně kinetické, potenciální a vnitřní energie soustavy.

Výkon

Poté, co jsme podrobně prodiskutovali problematiku a mechanismy energiových přeměn a uvědomili jsme si přítomnost existenci různých typů energie, můžeme rozšířit i definici výkonu formulovanou v čl. 7.7. Tam jsme výkon definovali jako „rychlost“, s jakou síla koná práci, tj. vykonanou práci vztahenou k časové jednotce. V obecnějším smyslu bude výkon veličinou, která určuje, jak „rychle“ dochází ke změně energie. Označíme-li ΔE změnu energie soustavy, k níž došlo působením jisté síly za dobu Δt , můžeme definovat **průměrný výkon** této síly jako podíl

$$\bar{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t}. \quad (8.36)$$

Analogicky definujeme **okamžitý výkon** síly

$$P = \frac{dE}{dt}. \quad (8.37)$$

PŘÍKLAD 8.7

Cvičený pudl (obr. 8.14) o hmotnosti 6,0 kg vběhl rychlostí o velikosti $v_0 = 7,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ na levý okraj skluzavky, který leží ve výšce 8,5 m nad podlahou. Při skluzu po ní se dostal do bodu obratu, ležícího ve výšce $y = 11,1 \text{ m}$ nad podlahou. Jaký byl při tom přírůstek vnitřní energie soustavy pudl + skluzavka + Země?

ŘEŠENÍ: Soustavu pudl + skluzavka + Země můžeme považovat za izolovanou a použít vztahu (8.33), neboť jedinými silami, které v soustavě působí, jsou síly tíhové, normálové (tlakové) a třecí. Tíhové síly jsou konzervativní a jsou spjaty se změnami tíhové potenciální energie soustavy. Vlivem třecích sil dochází při pohybu pudla po skluzavce k rozptylu mechanické energie soustavy za současného přírůstku vnitřní energie soustavy o hodnotu ΔE_{int} . Normálové síly nekonají

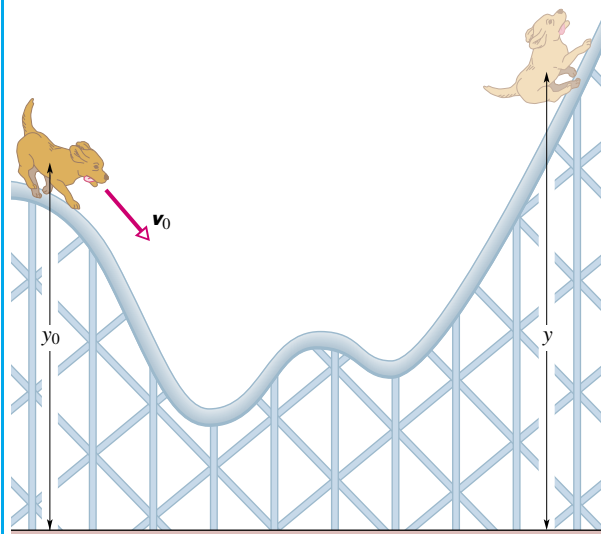
práci, neboť jsou trvale kolmé k trajektorii pudla. Nepřispívají tedy k energiovým změnám.

V bodě obratu má pudl nulovou rychlost a tedy i nulovou kinetickou energii. Užitím vztahu (8.33) pro soustavu pudl + skluzavka + Země dostáváme:

$$\begin{aligned} \Delta E_k + \Delta E_{p,g} + \Delta E_{\text{int}} &= 0, \\ (0 - \frac{1}{2}mv_0^2) + mg(y - y_0) + \Delta E_{\text{int}} &= 0. \end{aligned}$$

Odtud určíme ΔE_{int} :

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{int}} &= \frac{1}{2}mv_0^2 - mg(y - y_0) = \\ &= \frac{1}{2}(6,0 \text{ kg})(7,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2 - \\ &\quad - (6,0 \text{ kg})(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(11,1 \text{ m} - 8,5 \text{ m}) \doteq \\ &\doteq 30 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$



Obr. 8.14 Příklad 8.7. Pudl klouže po skluzavce z výšky y_0 s počáteční rychlostí o velikosti v_0 a dosáhne bodu obratu ve výšce y .

PŘÍKLAD 8.8

Ocelová kulka o hmotnosti 5,2 g je vystřelena svisle dolů z výšky $h_1 = 18 \text{ m}$. Její počáteční rychlost má velikost $v_0 = 14 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (obr. 8.15a). Kulka se zaryje do písku a zastaví se v hloubce $h_2 = 21 \text{ cm}$.

(a) K jaké změně mechanické energie kulky přitom došlo?

ŘEŠENÍ: V místě, kde se kulka zastavila, je její rychlost, a tedy i kinetická energie, nulová. Změna mechanické energie kulky je dána vztahem

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_{p,g}. \quad (8.38)$$

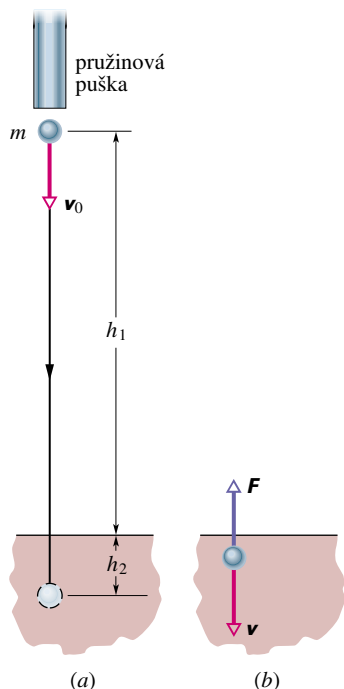
Odtud užitím vztahu (8.8) ($\Delta E_{p,g} = mg\Delta y$) dostáváme

$$\Delta E = (0 - \frac{1}{2}mv_0^2) - mg(h_1 + h_2),$$

kde $-(h_1 + h_2)$ je celkové posunutí kulky. Dosazením zadaných údajů určíme hodnotu ΔE :

$$\begin{aligned}\Delta E &= -\frac{1}{2}(5,2 \cdot 10^{-3} \text{ kg})(14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 - \\ &\quad -(5,2 \cdot 10^{-3} \text{ kg})(9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})(18 \text{ m} + 0,21 \text{ m}) = \\ &= -1,437 \text{ J} \doteq -1,4 \text{ J.} \quad (\text{Odpověď})\end{aligned}$$

(Všimněte si, že jsme v této úloze hovořili o potenciální energii kulky, místo abychom ji správně přisuzovali soustavě kulka + Země. Jedná se o přiblížení, jehož oprávněnost jsme již zdůvodnili v bodě 8.1.)



Obr. 8.15 Příklad 8.8. (a) Kulka je vystřelena svisle dolů a zabrzdí se v písku. Její mechanická energie se při pohybu po dráze h_1 zachovává, při brzdění po dráze h_2 působí na kulku odporová síla F . (b) Při působení odporových sil klesá mechanická energie kulky a roste vnitřní energie soustavy kulka + písek.

(b) Jaká je změna vnitřní energie soustavy kulka + pískoviště + Země?

ŘEŠENÍ: Soustavu kulka + pískoviště + Země po výstřelu lze považovat za izolovanou. Jedinými vnitřními silami jsou síly tíhové a odporové síly F a $-F$, jimiž na sebe vzájemně působí kulka a částičky písku (obr. 8.15b). Lze tedy použít vztah (8.33). Dosazením ze vztahu (8.38) do (8.33) získáme pro soustavu kulka + pískoviště + Země vztah

$$\Delta E + \Delta E_{\text{int}} = 0,$$

tj.

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{int}} &= -\Delta E = -(-1,437 \text{ J}) \doteq \\ &= 1,4 \text{ J.} \quad (\text{Odpověď})\end{aligned}$$

Při průchodu kulky pískem konají odporové síly práci a dochází k rozplytu mechanické energie soustavy. Vnitřní energie soustavy roste.

(c) Jaká je velikost průměrné odporové síly F ?

ŘEŠENÍ: Mechanická energie soustavy se nemění, dokud kulka nedoletí k pískovišti. Při zarytí kulky do hloubky h_2 se však změní o hodnotu ΔE . Vztah (8.27) ($-F_{\text{d}}d = \Delta E$) lze přepsat do tvaru

$$-Fh_2 = \Delta E.$$

Řešením vzhledem k neznámé F dostaneme

$$F = \frac{\Delta E}{-h_2} = \frac{(-1,437 \text{ J})}{(-0,21 \text{ m})} = 6,84 \text{ N} \doteq 6,8 \text{ N.} \quad (\text{Odpověď})$$

Hodnotu F bychom mohli určit také užitím postupů vyložených v kap. 2: zjistili bychom velikost rychlosti kulky těsně nad pískovištěm a její průměrné zrychlení při brzdění v písku. Užitím druhého Newtonova zákona bychom zjistili F . Tento postup by však vyžadoval provedení většího počtu algebraických výpočtů.



8.8 HMOTNOST A ENERGIE

Klasická chemie byla založena na předpokladu, že při chemických reakcích se zachovává jak energie, tak hmotnost. V roce 1905 však ukázal Albert Einstein v rámci své speciální teorie relativity, že hmotnost lze ekvivalentně vyjádřit pomocí energie a že zákon zachování energie říká jinými slovy totéž, co zákon zachování hmotnosti.

Při chemických reakcích jsou ovšem změny hmotnosti odpovídající změnám energie ve smyslu Einsteinovy teorie tak nepatrným zlomkem celkové hmotnosti látek, které se reakce účastní, že není naděje na jejich registraci ani při nejpreciznějších laboratorních analýzách. Situace se tedy *jeví* tak, že hmotnost i energie se skutečně zachovávají odděleně. Během reakcí jaderných však často dochází k uvolnění energie až milionkrát větší a změny hmotnosti lze měřit docela snadno. Úvahy o souvislostech změn hmotnosti a energie při jaderných reakcích se již staly součástí laboratorní rutiny.

Vztah mezi hmotností a energií je zcela jistě nejnámější rovnicí fyziky (obr. 8.16):

$$E = mc^2, \quad (8.39)$$

kde E je energie ekvivalentní hmotnosti m (tzv. **energií ekvivalent hmotnosti**), c je rychlost světla ve vakuu. (Při hlubším studiu fyziky mimo rámec této knihy se jistě časem setkáte s hlubším rozborem vztahu mezi hmotností a energií a pravděpodobně i s různými názory na jeho správnou interpretaci.)



Obr. 8.16 Takto vzdali hold Albertu Einsteinovi studenti střední školy Shenandoah Junior v Miami (Florida) při oslavách stého výročí jeho narození v roce 1979. Slavnou formuli vytvořili svými těly.

Tabulka 8.1 shrnuje energiové ekvivalenty hmotností vybraných objektů. Energie uložená v běžných objektech je obrovská. Například výroba energiového ekvivalentu třígramové mince by stála desítky milionů korun. Také hmotnostní ekvivalenty některých typických hodnot energie jsou šokující. Například celá roční produkce elektrické energie v USA odpovídá hmotnosti pouhých několika stovek kilogramů látky (kamení, brambor, prostě čehokoliv!).

Tabulka 8.1 Energiové ekvivalenty vybraných objektů

OBJEKT	HMOTNOST (kg)	ENERGIOVÝ EKVIVALENT
Elektron	$9,11 \cdot 10^{-31}$	$8,2 \cdot 10^{-14}$ J (= 511 keV)
Proton	$1,67 \cdot 10^{-27}$	$1,5 \cdot 10^{-10}$ J (= 938 MeV)
Atom uranu	$4,0 \cdot 10^{-25}$	$3,6 \cdot 10^{-8}$ J (= 225 GeV)
Prachová částice	$1 \cdot 10^{-13}$	$1 \cdot 10^4$ J (= 2 kcal)
Mince	$3,1 \cdot 10^{-3}$	$2,8 \cdot 10^{14}$ J (= 78 GW·h)

Chceme-li použít vztah (8.39) pro chemické či jaderné reakce, je vhodné jej přepsat do tvaru

$$Q = -\Delta m c^2, \quad (8.40)$$

kde Q je energie uvolněná (kladná hodnota), nebo pohlcená (záporná hodnota) při reakci a Δm je odpovídající úbytek, či přírůstek hmotnosti částic v důsledku reakce. Při jaderném štěpení, kdy se větší jádra rozpadnou v jádra s nižším atomovým číslem, činí hmotnostní úbytek méně než 0,1% původní hmotnosti. Při chemických reakcích je toto procento zhruba milionkrát nižší.

Při praktických výpočtech pomocí vztahu (8.40) se jen zřídka užívá jednotek SI, neboť jsou pro tento účel příliš velké. Hmotnost obvykle udáváme v atomových jednotkách

(zkratka u, čl. 1.6), kde

$$1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}. \quad (8.41)$$

Obvyklou jednotkou energie je elektronvolt či jeho násobky. Podle (7.3) je

$$1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \quad (8.42)$$

V jednotkách definovaných vztahy (8.41) a (8.42) má kvadrát rychlosti světla hodnotu

$$\begin{aligned} c^2 &= 9,315 \cdot 10^8 \text{ eV} \cdot \text{u}^{-1} = 9,315 \cdot 10^5 \text{ keV} \cdot \text{u}^{-1} = \\ &= 931,5 \text{ MeV} \cdot \text{u}^{-1}. \end{aligned} \quad (8.43)$$

PŘÍKLAD 8.9

Při jaderném štěpení



je neutron (n) zachycen jádrem uranu (${}^{235}\text{U}$). Vznikne nestabilní jádro, které se rozštěpí na dvě menší jádra (${}^{140}\text{Ce}$ a ${}^{94}\text{Zr}$) za současného uvolnění dvou neutronů. Hmotnosti zúčastněných elementů jsou

$$\begin{aligned} \text{hmotnost } ({}^{235}\text{U}) &= 235,04 \text{ u}, \\ \text{hmotnost } ({}^{94}\text{Zr}) &= 93,91 \text{ u}, \\ \text{hmotnost } ({}^{140}\text{Ce}) &= 139,91 \text{ u}, \\ \text{hmotnost } (n) &= 1,008 67 \text{ u}. \end{aligned}$$

(a) Jaká je relativní změna hmotnosti interagujících částic?

ŘEŠENÍ: Změnu hmotnosti Δm získáme odečtením hmotnosti částic, které vstupují do reakce od hmotnosti částic, které jsou výsledkem reakce:

$$\begin{aligned} \Delta m &= (139,91 + 93,91 + 2 \cdot 1,008 67) \text{ u} - \\ &\quad - (235,04 + 1,008 67) \text{ u} = \\ &= -0,211 \text{ u}. \end{aligned}$$

Hmotnost částic vstupujících do reakce je

$$M = 235,04 \text{ u} + 1,008 67 \text{ u} = 236,05 \text{ u}.$$

Tomu odpovídá relativní úbytek hmotnosti

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta m|}{M} &= \frac{0,211 \text{ u}}{236,05 \text{ u}} = \\ &= 0,000 89, \quad \text{tj. asi } 0,1 \%. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Jakkoli je tato veličina malá, je poměrně snadno měřitelná.

(b) Jaká energie se při štěpné reakci uvolní?

ŘEŠENÍ: Ze vztahu (8.40) dostaneme

$$Q = -\Delta m c^2 = -(-0,211 \text{ u})(931,5 \text{ MeV} \cdot \text{u}^{-1}) = 197 \text{ MeV.} \quad (\text{Odpověď})$$

Za c^2 jsme dosadili hodnotu uvedenou ve vztahu (8.43). Uvolněná energie 197 MeV, připadající na jednu reakci, je mnohonásobně větší než typické hodnoty energie uvolněné při chemických reakcích, které se pohybují v jednotkách elektronvoltů.

PŘÍKLAD 8.10

Jádro atomu deuteria (tzv. těžký vodík) se nazývá **deuteron**. Je složeno z protonu a neutronu. Jak velká energie se uvolní, či absorbuje při procesu, při němž dojde k odtržení neutronu a protonu? Hmotnosti částic účastnících se reakce jsou:

$$\left. \begin{array}{l} \text{deuteron: } m_d = 2,013 55 \text{ u} \\ \text{proton: } m_p = 1,007 28 \text{ u} \\ \text{neutron: } m_n = 1,008 67 \text{ u} \end{array} \right\} 2,015 95 \text{ u}$$

ŘEŠENÍ: Vzhledem k tomu, že celková hmotnost volného protonu a volného neutronu je větší než hmotnost deuteronu, je při štěpení deuteronu nutno energii dodat. Přírůstek hmotnosti při reakci činí

$$\Delta m = (m_p + m_n) - m_d = (1,007 28 + 1,008 67) \text{ u} - (2,013 55) \text{ u} = 0,002 40 \text{ u.}$$

Odpovídající energie je dána vztahem (8.40):

$$Q = -\Delta m c^2 = -(0,002 40 \text{ u})(931,5 \text{ MeV} \cdot \text{u}^{-1}) = -2,24 \text{ MeV.} \quad (\text{Odpověď})$$

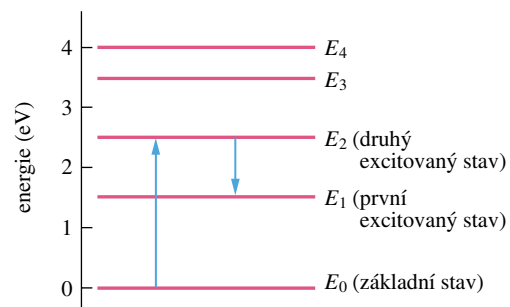
Znaménko minus ve výsledku potvrzuje, že při této reakci se energie absorbuje. Hodnota 2,24 MeV se nazývá *vazební energie* deuteronu. Vazební energie jádra je definována jako energie, kterou by bylo třeba jádru dodat, aby se rozštěpilo na volné protony a neutrony, resp. energie, která by se musela uvolnit, kdybychom měli jádro z volných protonů a neutronů vytvořit.

KONTROLA 6: Představme si, že bychom nějakým způsobem dokázali přimět šest volných protonů a stejný počet volných neutronů, aby se spojily v jádro uhlíkového atomu ^{12}C . Byla by hmotnost jádra větší, či menší než celková hmotnost volných částic?

8.9 KVANTOVÁNÍ ENERGIE

Dosud jsme předpokládali, že energie soustavy může nabývat *jakýchkoli* hodnot. Tento předpoklad je nepochybně rozumný u soustav, s nimiž se setkáváme v každodenním životě. Pro soustavy z oblasti mikrosvěta, jako jsou atomy nebo i tzv. *kvantové tečky* (laboratorně vyrobené shluky elektronů, které se atomům podobají), však nevyhovuje. Vnitřní energie takových mikrosoustav je **kvantována**, může nabývat jen některých hodnot. Přísluší-li soustavě určitá hodnota energie, říkáme, že se soustava nachází v **kvantovém stavu** s touto energií.

Obr. 8.17 ukazuje typický diagram hodnot energie (tzv. *energiových hladin*) atomu.* Energie je vynesena na svislé stupnici a každá z pěti nejnižších energií E_0, E_1, \dots, E_4 je vyznačena vodorovnou čarou (odtud název *hladiny*). Energie atomu nemůže nabývat žádné hodnoty ležící mezi povolenými hladinami. Kvantový stav spojený s nejnižší hladinou, označenou na obr. 8.17 jako E_0 , se nazývá *základním stavem* atomu. (V obr. 8.17 je mu přisouzena nulová hodnota energie.) Kvantové stavy s vyšší energií se nazývají *excitované*. Stav s energií E_1 je první excitovaný stav, stav s energií E_2 druhý excitovaný stav atd.



Obr. 8.17 Diagram energií atomu, znázorňující kvantované hodnoty energie (energiové hladiny). Každá hladina odpovídá jistému kvantovému stavu atomu. Nejnižší energie, označená jako E_0 , přísluší základnímu stavu. Šipka směřující vzhůru symbolizuje kvantový přechod atomu ze základního stavu do druhého excitovaného stavu, jemuž odpovídá energie E_2 . Šipka směřující dolů odpovídá kvantovému přechodu z druhého do prvního excitovaného stavu o energii E_1 .

Atomy mají tendenci zaujímat konfiguraci základního stavu, jemuž odpovídá nejnižší energie (podobně jako se koule kutálí po svahu dolů). Atom může přejít do excitovaného stavu s vyšší energií jen tehdy, je-li mu z vnějšího zdroje dodána energie daná rozdílem mezi excitovaným a základním stavem. Atom může tuto energii získat na-

* I když ve zkratce hovoříme o energiích hladin atomu, máme většinou na mysli možné hodnoty energie jednotlivých elektronů jeho elektronového obalu.

příklad při srážce s jiným atomem nebo volným elektronem, případně při pohlcení (absorpci) světla. Každopádně je třeba, aby získaná energie postačovala pro přechod na některou z vyšších hladin. Kvantovány jsou tedy nejen hodnoty energie samotné, ale i jejich možné změny (přírůstky i ztráty). Při změnách energie dochází ke kvantovým *přechodům* neboli *přeskokům* atomu mezi jednotlivými energetickými hladinami.

Šipka mířící v obr. 8.17 vzhůru představuje kvantový skok ze základního do druhého excitovaného stavu. Podle diagramu je pro takový přechod třeba, aby atom získal energii 2,5 eV. Při absorpci fotonu s touto energií foton zanikne a celá jeho energie přispěje k přírůstku energie atomu. Světlo tedy musí mít energii právě 2,5 eV, aby byl atom schopen je pohltnout. Je-li energie světla o něco větší či menší, k absorpci nedojde.

Aby došlo k absorpci světla atomem, musí být energie absorbovaného fotonu rovna rozdílu energetických hladin odpovídajících výslednému a výchozímu stavu atomu.

Přejde-li atom do excitovaného stavu, nesevtrvá v něm, ale je rychle *deexcitován*. Ztrácí energii buď při srážkách nebo vyzářením (emisí) světla. Světlo vyzářené při deexcitaci atomu při ní skutečně *vzniká* (předtím neexistovalo). Při kterémkoli z obou deexcitačních procesů je však třeba, aby atom ztratil přesně definovanou energii, a mohl tak přejít na některou z nižších energetických hladin.

Energie světla emitovaného atomem je vždy rovna rozdílu energií výchozí hladiny atomu a některé nižší hladiny.

Šipka, směřující v obr. 8.17 dolů, označuje kvantový přechod z druhého do prvního excitovaného stavu. Energie světla vyzářeného při tomto přechodu je 1,0 eV. Poté atom přejde do základního stavu a znovu vyzáří světlo, tentokrát o energii 1,5 eV. Místo tohoto dvoustupňového procesu mohl také atom přejít do základního stavu rovnou a vyzářit světlo o energii 2,5 eV.

KONTROLA 7: Bylo zjištěno, že kvantový systém vyzářil světlo čtyř různých energií, aniž byl mezitím znovu excitován. Tři hodnoty energie emitovaného světla byly změřeny: 1,1 eV, 1,4 eV a 2,8 eV. Pořadí emisí není známo. Energetické hladiny systému jsou tyto:

$$\begin{array}{lll} E_8 = 7,7 \text{ eV} & E_5 = 4,8 \text{ eV} & E_2 = 2,7 \text{ eV} \\ E_7 = 6,6 \text{ eV} & E_4 = 4,2 \text{ eV} & E_1 = 1,3 \text{ eV} \\ E_6 = 5,5 \text{ eV} & E_3 = 3,9 \text{ eV} & E_0 = 0,0 \text{ eV} \end{array}$$

(a) Jaký byl počáteční stav systému a (b) jakou energii mělo světlo vyzářené při čtvrté emisi?

PŘEHLED & SHRUTÍ

Konzervativní síly

Síla působící na částici je **konzervativní**, je-li celková práce, kterou vykoná při pohybu částice po libovolně uzavřené trajektorii, nulová. Ekvivalentní vyjádření: Síla působící na částici je konzervativní, jestliže práce, kterou vykoná při přemístění částice mezi dvěma zadanými body, nezávisí na trajektorii, po které se částice pohybovala. Tíhová síla a pružná síla jsou konzervativní. Dynamická třecí síla je *nekonzervativní*.

Potenciální energie

Potenciální energie souvisí s konfigurací soustavy, v níž působí konzervativní interakční síly. Změna potenciální energie soustavy je definována jako záporně vzatá práce, kterou konzervativní interakční síly vykonají při odpovídající změně konfigurace soustavy

$$\Delta E_p = -W_g. \quad (8.1)$$

Je-li konfigurace soustavy (poloha částice vzhledem ke zvolenému bodu zbytku soustavy) určena jedinou skalární proměnnou x a závisí-li konzervativní síly \mathbf{F} a $-\mathbf{F}$ popisující interakci částice se zbytkem soustavy pouze na této proměnné, je často

možné vyjádřit změnu potenciální energie vztahem

$$\Delta E_p = - \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx, \quad (8.6)$$

kde x_i je počáteční a x_f koncová poloha částice.

Tíhová potenciální energie

Potenciální energie soustavy s tíhovou interakcí se nazývá **tíhová potenciální energie**. Jedná-li se o soustavu zahrnující Zemi a částici, která se pohybuje v blízkosti jejího povrchu, hovoříme o **tíhové potenciální energii**. Při přechodu částice mezi body ležícími ve výškách y_i a y_f nedaleko od povrchu Země je změna tíhové potenciální energie soustavy částice + Země rovna

$$\Delta E_p = mg(y_f - y_i) = mg\Delta y. \quad (8.7)$$

Je-li **referenční konfigurace** soustavy zvolena tak, že $y_i = 0$, a je-li jí přisouzena nulová hodnota tíhové potenciální energie $E_{p,i} = 0$, můžeme tíhovou potenciální energii soustavy v obecné konfiguraci (resp. tíhovou potenciální energii částice v obecné poloze vzhledem k Zemi) vyjádřit vztahem

$$E_p = mgy. \quad (8.9)$$

Pružná potenciální energie

Pružná potenciální energie je spojena se stavem napjatosti (při napínání či stlačování) pružných objektů. Pro pružinu, která vyhovuje lineárnímu vztahu pro pružnou sílu $F(x) = -kx$, je pružná potenciální energie

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2. \quad (8.11)$$

Tento vztah platí pro případ, že referenční konfigurace odpovídá nenapjaté pružině a je jí přisouzena nulová potenciální energie. Je tedy $E_p = 0$ pro $x = 0$.

Mechanická energie

Mechanickou energii E soustavy definujeme jako součet její kinetické energie E_k a potenciální energie E_p :

$$E = E_k + E_p. \quad (8.12)$$

Kinetická energie soustavy je součtem kinetických energií všech jejích objektů. Potenciální energie je součtem všech příspěvků odpovídajících konzervativním interakčním silám uvnitř soustavy. Působí-li v izolované soustavě pouze konzervativní interakční síly, nemění se její mechanická energie E . Tuto skutečnost nazýváme **zákonem zachování mechanické energie** a píšeme

$$E_{k,2} + E_{p,2} = E_{k,1} + E_{p,1}. \quad (8.17)$$

Indexy 1 a 2 odpovídají různým okamžikům v průběhu energetických změn. Zákon zachování mechanické energie lze zapsat i ve tvaru

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = 0. \quad (8.18)$$

Křivky potenciální energie

Je-li sledovaná částice v soustavě popsána svou polohou x a známe-li závislost potenciální energie E_p soustavy na této poloze, můžeme vyjádřit výslednou sílu, kterou zbytek soustavy působí na částici:

$$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}. \quad (8.19)$$

Při zadání funkce $E_p(x)$ grafem lze pro libovolnou hodnotu x zjistit hodnotu $F(x)$ jako záporně vzatou směrnicí tohoto grafu. Kinetickou energii částice lze pak spočítat ze vztahu

$$E_k(x) = E - E_p(x), \quad (8.21)$$

kde E je mechanická energie soustavy. **Bodem obratu** rozumíme takovou polohu x , v níž se obrací směr pohybu částice (tj. $E_k = 0$). Částice je v **rovnováze** v každém bodě, v němž je směrnice grafu funkce $E_p(x)$ nulová ($F(x) = 0$).

Práce vnějších a nekonzervativních sil

Uvažujme částici, která je součástí soustavy. Působí-li na ni vnější síla \mathbf{F} , která při změně konfigurace soustavy vykoná práci W , změní se o tuto hodnotu mechanická energie soustavy:

$$W = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E. \quad (8.24, 8.25)$$

Působí-li v soustavě dynamické třecí síly \mathbf{F}_d a $-\mathbf{F}_d$, je změna celkové mechanické energie soustavy dána vztahem

$$\Delta E = -F_d d, \quad (8.27)$$

kde d je velikost posunutí sledované částice při změně konfigurace soustavy. O úbytku mechanické energie, k níž vlivem třecích sil došlo, hovoříme jako o **energii rozptýlené** třecími silami. Rozptýlená energie je rovna práci sil \mathbf{F}_d a $-\mathbf{F}_d$.

Zákon zachování energie

V izolované soustavě může docházet ke změnám různých typů energie, avšak celková energie soustavy E_{celk} se zachovává. Tento zákon zachování lze zapsat ve tvaru

$$\Delta E_{\text{celk}} = \Delta E_k + \Delta E_p + \Delta E_{\text{int}} + \Delta E_{\text{ostatní}} = 0. \quad (8.34)$$

ΔE_{int} je změna vnitřní energie soustavy a zahrnuje změny vnitřní energie všech jejích objektů.

Není-li soustava izolovaná, dochází vlivem působení vnějších sil ke změnám její celkové energie. Změna celkové energie soustavy je rovna práci vykonané vnějšími silami

$$W = \Delta E_{\text{celk}} = \Delta E_k + \Delta E_p + \Delta E_{\text{int}}. \quad (8.35)$$

Výkon

Výkon síly udává, s jakou „rychlostí“ dochází při jejím působení ke změnám energie soustavy. Dojde-li za dobu Δt ke změně energie o ΔE (tato změna je rovna práci, kterou síla za dobu Δt vykonala), je **průměrný výkon** síly roven

$$\overline{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t}. \quad (8.36)$$

Okamžitý výkon síly je dán vztahem

$$P = \frac{dE}{dt}. \quad (8.37)$$

Hmotnost a energie

Energiovým ekvivalentem E hmotnosti m rozumíme energii danou vztahem

$$E = mc^2, \quad (8.39)$$

kde c je rychlost světla ve vakuu. Pro výpočet energiového ekvivalentu v megaelektronvoltech je třeba údaj o hmotnosti zadaný v atomových jednotkách (u) vynásobit faktorem $931,5 \text{ MeV} \cdot u^{-1}$. Energii uvolněnou či pohlcenou při jaderných nebo chemických reakcích vyjadřujeme vztahem

$$Q = -\Delta m c^2, \quad (8.40)$$

kde Δm je odpovídající úbytek, či přírůstek hmotnosti. (Hodnota Q je kladná, jestliže se při reakci energie uvolňuje, a záporná, je-li reakce doprovázena pohlcením energie.)

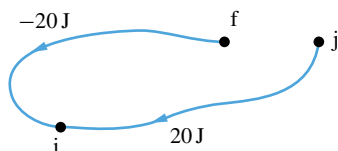
Kvantování energie

Energie v mikroskopických soustavách, jakými jsou např. atomy, je **kvantována** (nabývá pouze některých hodnot). Soustava se může nacházet v **kvantových stavech** charakterizovaných povolenými hodnotami energie. Energie soustavy nenabývá žádných

jiných hodnot. Nejnižší energie odpovídá **základnímu stavu** soustavy, vyšší hodnoty energie přísluší jejím **excitovaným stavům**. Jestliže soustava získává, či ztrácí energii pohlcením (absorpce), či vyzářením (emisí) světla, je energie světla vždy rovna rozdílu některých povolených hodnot energie soustavy.

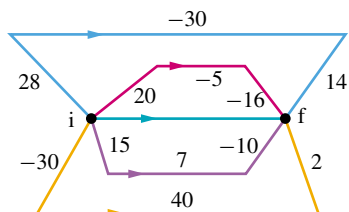
OTÁZKY

1. Částice na obr. 8.18 se pohybuje mezi polohami (f) a (i), resp. (j) a (i) ve vyznačených směrech. Přitom na ni působí konzervativní síla F , která při jednotlivých přesunech částice vykoná práci, jejíž hodnoty jsou v obrázku rovněž vyznačeny. Jakou práci by síla F vykonala při přemístění částice z polohy (f) do polohy (j)?



Obr. 8.18
Otázka 1

2. Částice na obr. 8.19 se může dostat z polohy (i) do polohy (f) různými cestami. V obrázku je vyznačena jedna přímá cesta a čtyři možnosti pohybu částice po lomených čarách. Při pohybu po přímé cestě a po třech ze čtyř lomených čar působí na částici pouze konzervativní síla F_c . Při pohybu po čtvrté trajektorii se přidá ještě působení nekonzervativní síly F_{nc} . Každý z přímých úseků jednotlivých lomených trajektorií je opatřen údajem o práci (v joulech), kterou vykonala výslednice sil působících na částici při jejím pohybu po tomto úseku. (a) Jakou práci vykonaly všechny síly působící na částici při jejím pohybu z (i) do (f) po přímé trajektorii? (b) Jakou práci vykonala nekonzervativní síla F_{nc} při pohybu částice po čtvrté trajektorii?

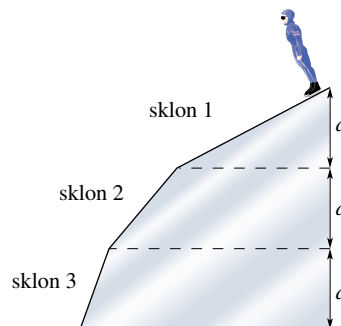


Obr. 8.19
Otázka 2

3. Pružina je oproti nenapjatému stavu protažena o 3,0 cm. Uvažujeme čtyři možné koncové stavy pružiny: (a) protažena o 2,0 cm, (b) stlačena o 2,0 cm, (c) stlačena o 4,0 cm, (d) protažena o 4,0 cm. Uspořádejte tyto možnosti sestupně podle změny potenciální energie pružiny při přechodu z počátečního do koncového stavu.

4. Odvážný bruslař na obr. 8.20 sjíždí po ledovém svahu se třemi různými sklony. Výška všech úseků je stejná a rovna d . Uspořádejte jednotlivé úseky sestupně podle (a) práce vykonané tíhovou silou působící na bruslaře, (b) změny jeho kinetické energie.

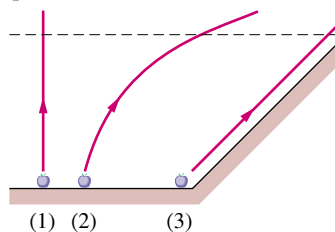
5. Kokosový ořech je vržen ze skalního útesu do širokého plochého údolí s počáteční rychlostí v o velikosti $8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Ná-



Obr. 8.20
Otázka 4

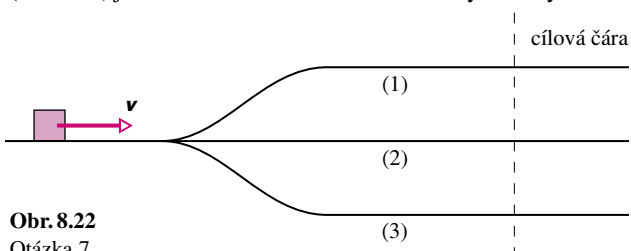
sledující možnosti volby směru počáteční rychlosti uspořádejte sestupně (a) podle počáteční kinetické energie ořechu, (b) podle kinetické energie ořechu při jeho dopadu na dno údolí: (1) vektor v směřuje téměř svisle vzhůru, (2) v směřuje vzhůru pod úhlem 45° vzhledem k vodorovné rovině, (3) směr vektoru v je vodorovný, (4) v směřuje dolů pod úhlem 45° vzhledem k vodorovné rovině, (5) v směřuje téměř svisle dolů.

6. Na obr. 8.21 jsou tři švestky, které jsou vymrštěny z míst ležících na stejné vodorovné úrovni rychlostmi o stejných velikostech. Jedna z nich se pohybuje svisle vzhůru, druhá je vržena pod malým úhlem vzhledem ke svislému směru a třetí klouže po dokonale hladké nakloněné rovině. Uspořádejte tyto situace sestupně podle velikosti výsledné rychlosti švestek při dosažení úrovně vyznačené přerušovanou čarou.



Obr. 8.21
Otázka 6

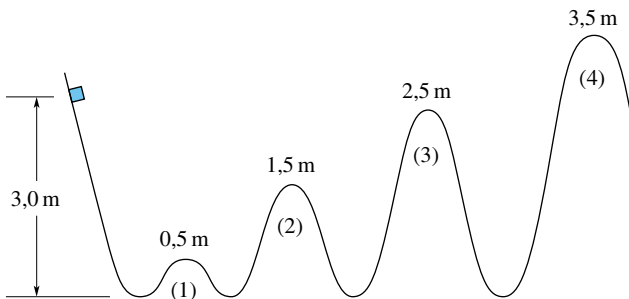
7. Kostku pohybující se zpočátku po vodorovné podložce (obr. 8.22) je možné navést na kteroukoli ze tří vyznačených drah



Obr. 8.22
Otázka 7

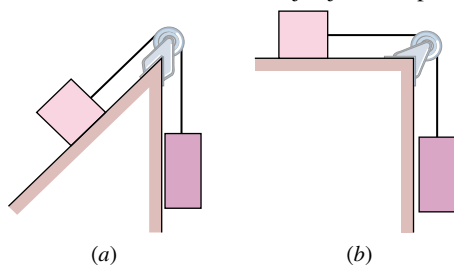
vedených v různých úrovních vzhledem k původní vodorovné rovině. Ve všech případech je podložka dokonale hladká. Kostku sledujeme do okamžiku, než dospěje k cílové čáře (zakreslena přerušovaně). Uspořádejte dráhy sestupně (a) podle velikosti rychlosti kostky v okamžiku průchodu cílovou čarou, (b) podle doby pohybu.

8. Malá krychlička je volně vypuštěna z bodu ve výšce 3,0 m nad základní úrovní po dokonale hladké trati (obr. 8.23). V obrázku jsou vyznačeny výšky vrcholů, které jsou na trati vymodelovány. Všechny pahorky mají v okolí nejvyššího bodu stejný kruhový tvar. Předpokládáme, že krychlička v žádném bodě neztratí kontakt s dráhou. (a) Přes který pahorek krychlička nepřejde? (b) Jaký bude její další pohyb? (c) Na kterém z vrcholů má krychlička největší dostředivé zrychlení a (d) na kterém z nich na ni podložka působí nejmenší tlakovou silou?



Obr. 8.23 Otázka 8

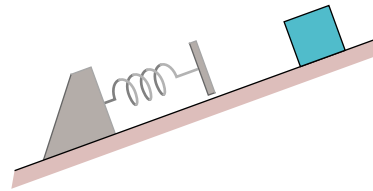
9. Na obr. 8.24 vidíme dvě uspořádání dvou experimentů s dvojicí kostek. Kostky jsou spojeny lankem vedeným přes kladku zanedbatelné hmotnosti, která se může otáčet bez tření. Podložka, po které se pohybuje světlejší kostka, je v obou případech dokonale hladká. V obou případech visutá kostka po uvolnění soustavy klesá. Uvažujme celkovou energii kostek v časovém intervalu, během něhož kostka klesne o vzdálenost d . Rozhodněte, zda kinetická energie kostek v uspořádání (a) je po uplynutí tohoto intervalu větší, menší, nebo stejná jako v uspořádání (b).



Obr. 8.24 Otázka 9

10. Kostku zakreslenou na obr. 8.25 jsme v okamžiku t_1 vypustili z klidu po dokonale hladké nakloněné rovině. V okamžiku t_2 narazí kostka na pružinu zanedbatelné hmotnosti, připevněnou k nakloněné rovině, a stlačuje ji. Stlačení pružiny je maximální v okamžiku t_3 . Jak se v časovém intervalu od t_1 do t_3 mění (a) kinetická energie kostky, (b) tíhová potenciální energie soustavy kostka + Země, (c) pružná potenciální energie pružiny,

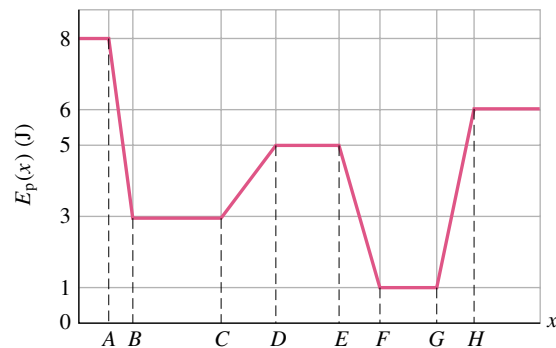
(d) mechanická energie soustavy tvořené jen kostkou a Zemí, (e) mechanická energie pružiny, (f) mechanická energie soustavy kostka + pružina + Země?



Obr. 8.25 Otázka 10

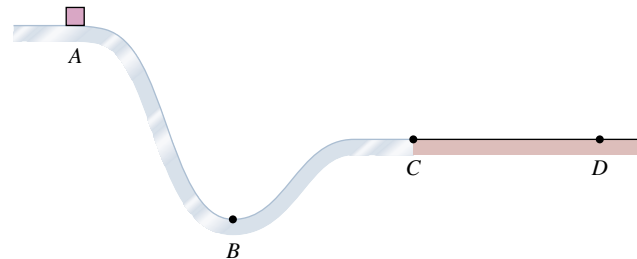
11. Jakou hodnotu nesmí překročit mechanická energie E a kinetická energie E_k částice v kontrole 4, (a) má-li být částice uvězněna v potenciálové jámě, (b) má-li být umožněn pohyb částice pouze vlevo od bodu D ?

12. Na obr. 8.26 je graf potenciální energie částice. (a) Uspořádejte úseky AB , BC , CD a DE sestupně podle velikosti síly působící na částici. Jakou hodnotu nesmí překročit mechanická energie částice E , má-li částice (b) být uvězněna v levé potenciálové jámě, (c) v pravé potenciálové jámě, (d) mít možnost pohybu mezi jámami, ale nedostat se vpravo za bod H ? V případě situace (d) určete, ve kterém z úseků má částice (e) největší kinetickou energii, (f) nejmenší rychlost.



Obr. 8.26 Otázka 12

13. Kostka sjezdí po skluzavce znázorněné na obr. 8.27. Mezi body A a C je skluzavka dokonale hladká, mezi body C a D působí na kostku třecí síla. Rozhodněte, zda v jednotlivých úsecích dráhy kinetická energie kostky roste, klesá, nebo zůstává konstantní: (a) AB , (b) BC , (c) CD . (d) Jak je tomu v každém z těchto úseků s mechanickou energií kostky?



Obr. 8.27 Otázka 13

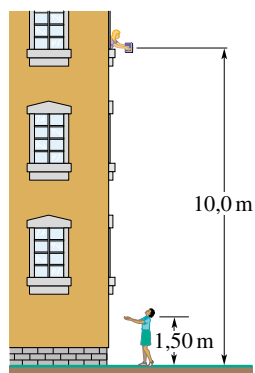
CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 8.3 Určení hodnot potenciální energie

1C. Částice náleží do soustavy, v níž působí pouze konzervativní interakční síly \mathbf{F} a $-\mathbf{F}$. Na částici působí síla \mathbf{F} . Je-li částice v bodě A , je potenciální energie soustavy rovna 40 J. Během pohybu částice z bodu A do bodu B vykonají interakční síly práci +25 J. Jaká je potenciální energie soustavy v okamžiku, kdy je částice v bodě B ?

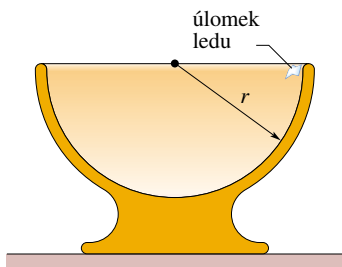
2C. Jaká je tuhost pružiny, jejíž potenciální energie je 25 J při stlačení o 7,5 cm vzhledem k nenapjatému stavu?

3C. Student hodil kamarádovi z okna knihu, jejíž hmotnost je 2,00 kg. Přítel stojí pod oknem a drží ruce ve výšce 1,5 m nad zemí, aby knihu zachytil (obr. 8.28). (a) Jakou práci vykonala tíhová síla působící na knihu od okamžiku jejího vypuštění do chvíle, kdy ji přítel chytil? (b) Jak se přitom změnila potenciální energie soustavy kniha + Země? Zvolme nulovou hladinu tíhové potenciální energie této soustavy na zemském povrchu. Jaká je potenciální energie soustavy v okamžiku (c) vypuštění knihy, (d) zachycení knihy?



Obr. 8.28
Cvičení 3 a 12

4C. Ledový úlomek o hmotnosti 2,00 g jsme volně vypustili z bodu na vnitřním okraji polokulového poháru o poloměru $r = 22,0$ cm (obr. 8.29). Tření mezi ledem a stěnou poháru je za-

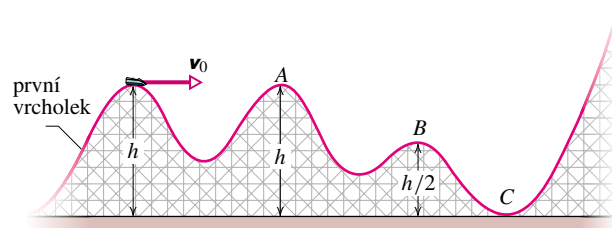


Obr. 8.29 Cvičení 4 a 13

nedbatelné. (a) Jakou práci vykonala tíhová síla působící na úlomek při jeho přesunutí na dno poháru? (b) Jak se přitom změnila potenciální energie soustavy úlomek + Země? (c) Konfiguraci, v níž je úlomek na dně poháru, přisoudíme nulovou potenciální

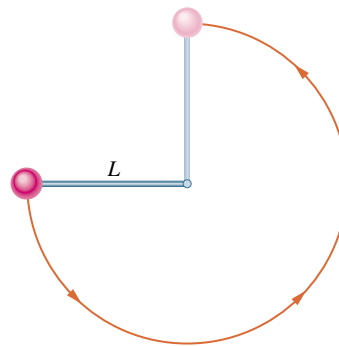
energii. Jaká je potenciální energie soustavy v okamžiku vypuštění ledového úlomku? (d) Jaká je hodnota potenciální energie soustavy v okamžiku, kdy je úlomek na dně poháru, jestliže pro změnu přisoudíme její nulovou hodnotu konfiguraci, v níž je na jeho okraji?

5C. Vozík horské dráhy má hmotnost m a pohybuje se po dráze bez tření. Prvním vrcholkem dráhy (obr. 8.30) projíždí rychlostí v_0 . Jakou práci vykoná tíhová síla, která působí na vozík, od tohoto počátečního okamžiku do okamžiku průjezdu vozíku (a) bodem A , (b) bodem B , (c) bodem C ? Tíhové potenciální energii soustavy vozík + Země přisoudíme nulovou hodnotu v konfiguraci, v níž je vozík v bodě C . Jaká je její hodnota při průjezdu vozíku (d) bodem B , (e) bodem A ?



Obr. 8.30 Cvičení 5 a 14

6C. Koule o hmotnosti m je upevněna na konci tenké tyčky o délce L (obr. 8.31), jejíž hmotnost je zanedbatelná. Druhý konec tyčky je uchycen tak, aby se koule mohla pohybovat po kružnici ve svislé rovině. Tyčku nastavíme do vodorovné polohy a udělíme kouli směrem dolů takovou rychlost, aby prošla částí kružnice vyznačenou na obrázku a dosáhla nejvyššího bodu právě s nulovou rychlostí. Určete práci, kterou vykonala tíhová síla působící na kouli mezi počátečním bodem a (a) nejnižším bodem trajektorie, (b) nejvyšším bodem trajektorie, (c) bodem ležícím na protilehlé straně trajektorie na stejné úrovni s počátečním bodem. (d) Konfiguraci soustavy koule + Země, v níž je koule v počátečním bodě, přisoudíme nulovou hodnotu tíhové potenciální energie. Jaká hodnota tíhové potenciální energie odpovídá konfiguracím (a), (b) a (c)?

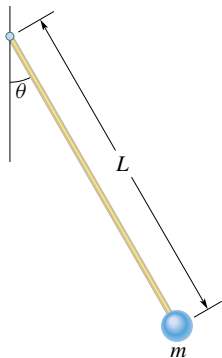


Obr. 8.31 Cvičení 6 a 15

7Ú. Pružina o tuhosti $3\,200\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ je protažena tak, že její pružná potenciální energie je $1,44\text{ J}$. (Pro nenapjatou pružinu klademe $E_p = 0$.) Jaká bude změna pružné potenciální energie, změní-li se stav pružiny tak, že pružina bude (a) napjata o $2,0\text{ cm}$, (b) stlačena o $2,0\text{ cm}$, (c) stlačena o $4,0\text{ cm}$?

8Ú. Sněhovou kouli o hmotnosti $1,50\text{ kg}$ házíme ze skály vysoké $12,5\text{ m}$. Počáteční rychlost koule svírá s vodorovnou rovinou úhel $41,0^\circ$, míří vzhůru a má velikost $14,0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. (a) Jakou práci vykoná tíhová síla, která působí na kouli, od počátečního okamžiku do okamžiku jejího dopadu na vodorovný povrch pod skálou? (b) Jak se během letu koule změní tíhová potenciální energie soustavy koule + Země? (c) Konfiguraci, v níž je koule na vrcholku skály, přisoudíme nulovou hodnotu tíhové potenciální energie soustavy koule + Země. Jaká je její hodnota při dopadu koule na zem?

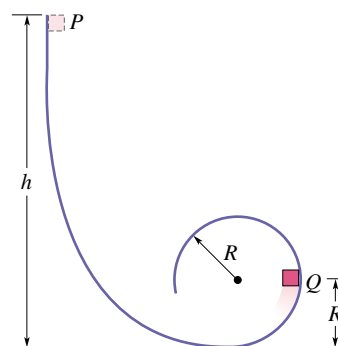
9Ú. Tenká tyč délky L a zanedbatelné hmotnosti je na konci uchycena tak, aby se mohla otáčet ve svislé rovině, podle obr. 8.32. K jejímu druhému konci je upevněna těžká koule o hmotnosti m . Tyč odchýlíme od svislého směru o úhel θ a volně vypustíme. Uvažme časový interval mezi uvolněním tyče a okamžikem, kdy koule prochází nejnižším bodem své trajektorie. (a) Jakou práci vykoná v tomto intervalu tíhová síla působící na kouli? (b) Jak se změní tíhová potenciální energie soustavy koule + Země? (c) Jaká hodnota tíhové potenciální energie odpovídá konfiguraci soustavy koule + Země, v níž je koule v krajní poloze, přisoudíme-li nejnižší poloze koule nulovou hodnotu této energie?



Obr. 8.32 Úlohy 9 a 20

10Ú. Malá kostka o hmotnosti m může klouzat bez tření po dráze tvaru „smyčky smrti“, znázorněné na obr. 8.33. Kostku vypustíme z klidové polohy v bodě P , který leží ve výšce $h = 5R$ nade dnem smyčky. Jakou práci vykoná tíhová síla působící na kostku od okamžiku jejího vypuštění z bodu P do okamžiku průchodu (a) bodem Q , (b) vrcholem smyčky? Konfiguraci soustavy kostka + Země, v níž je kostka na dně smyčky, přisoudíme nulovou hodnotu tíhové potenciální energie. Jaká je tíhová potenciální energie soustavy, je-li kostka (c) v bodě P , (d) v bodě Q , (e) ve vrcholu smyčky?

11Ú. Částice se pohybuje podél osy x z bodu $x = 1,0\text{ m}$ do bodu $x = 4,0\text{ m}$ a pak zpět do výchozího bodu $x = 1,0\text{ m}$. Jednou



Obr. 8.33 Úlohy 10 a 39

ze sil, které na ni při tom působí, je síla \mathbf{F} , která má rovněž směr osy x . Jakou práci vykoná tato síla při každém takovém oběhu částice, jestliže její složka ve směru osy x nabývá při pohybu z počátečního bodu do bodu obratu, resp. při návratu, těchto hodnot: (a) pohyb k bodu obratu: $F_x = 3,0\text{ N}$, resp. pohyb zpět: $F_x = -3,0\text{ N}$, (b) $5,0\text{ N}$, resp. $5,0\text{ N}$, (c) $2,0x$, resp. $-2,0x$, (d) $3,0x^2$, resp. $3,0x^2$? Souřadnice x je zadávána v metrech a údaje o síle \mathbf{F} v newtonech. (e) Ve kterých z uvedených případů by mohla být síla \mathbf{F} konzervativní?

ODST. 8.4 Zákon zachování mechanické energie

12C. (a) Jak velkou rychlost má kniha, o níž jsme uvažovali ve cvič. 3, v okamžiku, kdy ji zachytí člověk pod oknem? (b) Jaká by v okamžiku zachycení byla rychlost knihy, jejíž hmotnost by byla dvojnásobná?

13C. (a) Jak velkou rychlost má na dně poháru úlomek ledu, kterým jsme se zabývali ve cvič. 4? (b) Jak velkou rychlost by měl na dně poháru jiný úlomek, jehož hmotnost by byla dvojnásobná?

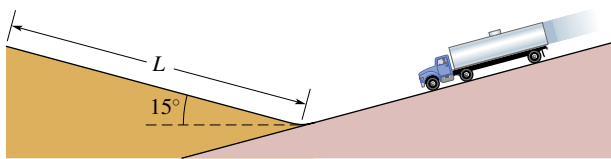
14C. Určete rychlost vozíku horské dráhy ze cvič. 5 v bodech (a) A , (b) B a (c) C . (d) Poslední, nejvyšší, pahorek již vozík nepřekoná. Do jaké výšky vyjede po jeho svahu? (e) Zodpovězte znovu otázky (a) až (d) pro vozík o dvojnásobné hmotnosti.

15C. (a) Jakou počáteční rychlost jsme udělili kouli ve cvič. 6? Jaká byla její rychlost (b) v nejnižším bodě trajektorie, (c) v bodě protilehlém k počátečnímu bodu?

16C. Člověk o hmotnosti $70,0\text{ kg}$ vyskočil z okna a dopadl do záchranné plachty rozestřené a uchycené v hloubce $11,0\text{ m}$ pod oknem. Během brzdění pádu se plachta napínala a v okamžiku, kdy člověk dosáhl nulové rychlosti, bylo její dno $1,50\text{ m}$ pod původní úrovní. Předpokládejme, že se mechanická energie soustavy člověk + plachta + Země během popsání děje zachovává a že chování pružné plachty lze popsat pomocí modelu ideální pružiny. Určete pružnou energii plachty ve stavu, kdy je napjata o $1,50\text{ m}$.

17C. Nákladní automobil s vadnými brzdami sjíždí po svahu (obr. 8.34). V okamžiku, kdy jej řidič navádí na bezpečnostní nájezd o sklonu 15° , ukazuje tachometr údaj $130\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Jakou nejmenší délku L by musel nájezd mít, aby na něm automobil

ještě dosáhl nulové okamžité rychlosti? Proč bývají bezpečnostní nájezdy obvykle pokryty silnou vrstvou písku, nebo šterku?



Obr. 8.34 Cvičení 17

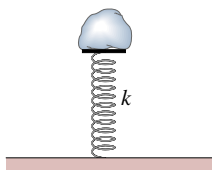
18C. Proud sopečného popela se pohybuje po vodorovném povrchu a dorazí ke svahu se stoupáním 10° . Čelo proudu urazí podél svahu ještě 920 m a zastaví se. Dejme tomu, že plyny unášené proudem jej nadnášejí a minimalizují tak tření mezi částicemi popela a zemským povrchem. Předpokládejme také, že mechanická energie souboru částic v oblasti čela proudu se zachovává. Jaká je počáteční rychlost čela proudu?

19Ú. Balon naplněný vodou o hmotnosti $1,50 \text{ kg}$ je vyhozen svisle vzhůru počáteční rychlostí $3,00 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. (a) Jaká je v tom okamžiku kinetická energie balonu? (b) Jakou práci vykoná tíhová síla působící na balon během jeho výstupu k bodu obratu? (c) Jak se během výstupu změní tíhová potenciální energie soustavy balon + Země? (d) Jaká je tíhová potenciální energie této soustavy v okamžiku, kdy balon dosáhne nejvyššího bodu, přisoudíme-li nulovou hodnotu této energie konfiguraci, v níž je soustava v počátečním okamžiku? (e) Položme naopak $E_p = 0$ v konfiguraci, v níž je balon v nejvyšším bodě své trajektorie. Jaká byla potenciální energie soustavy balon + Země v okamžiku vyhození balonu? (f) Jaké výšky nad povrchem Země balon dosáhne?

20Ú. Jaká je rychlost koule z úlohy 9 v nejvyšším bodě její trajektorie, je-li $L = 2,00 \text{ m}$ a $\theta = 30^\circ$?

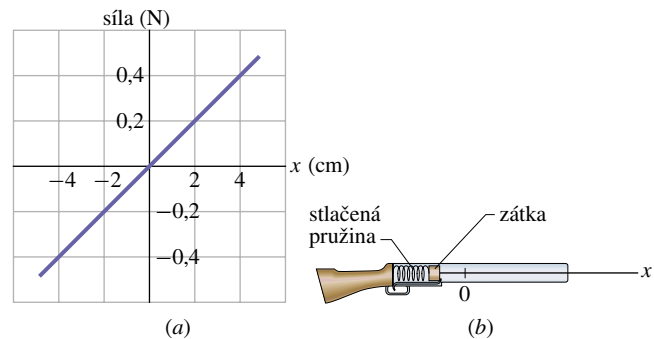
21Ú. (a) Určete velikost rychlosti sněhové koule z úlohy 8 v okamžiku jejího dopadu na vodorovný povrch pod skaliskem. Při řešení úlohy je samozřejmě možné použít výsledků kap. 4. Vyjděte však raději z energiových úvah. (b) Jak by se změnil výsledek úlohy (a), kdyby byla koule vyhozena opět pod úhlem $41,0^\circ$ vzhledem k vodorovné rovině, avšak směrem *dolů*?

22Ú. Na obr. 8.35 je vyobrazen kámen o hmotnosti 8 kg spočívající na svislé pružině. Pružina je kamenem stlačena o $10,0 \text{ cm}$. (a) Jaká je tuhost pružiny? (b) Pružinu stlačíme o dalších $30,0 \text{ cm}$ a uvolníme. Bod, v němž se kámen nachází v tomto okamžiku, označme U . Jaká je pružná potenciální energie soustavy bezprostředně před uvolněním pružiny? (c) Jaká změna tíhové potenciální energie soustavy kámen + Země odpovídá přemístění kamene z bodu U do nejvyššího bodu nad povrchem Země, jehož kámen dosáhne? (d) Jaká je největší výška kamene nad bodem U ?

Obr. 8.35
Úloha 22

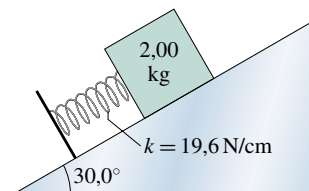
23Ú. Kulka o hmotnosti $5,0 \text{ g}$ je vystřelena ze vzduchovky svisle vzhůru. Má-li kulka právě doletět k terči umístěnému ve výšce 20 m nad místem, v němž se nacházela před výstřelem (spocívala na horním konci stlačené svislé pružiny), musí být pružina před výstřelem stlačena o $8,0 \text{ cm}$. (a) Jak se změní tíhová potenciální energie soustavy kulka + Země během výstupu kulky? (b) Jak se změní pružná potenciální energie pružiny během výstřelu? (c) Jaká je tuhost pružiny?

24Ú. Graf závislosti pružné síly na prodloužení pružiny na obr. 8.36a odpovídá dětské špuntovce z obr. 8.36b. Pružina připravená k výstřelu je stlačena o $5,5 \text{ cm}$, hmotnost zátky sloužící jako náboj je $3,8 \text{ g}$. (a) S jakou rychlostí opustí zátka hlavěň za předpokladu, že ztrácí s pružinou kontakt v okamžiku, kdy konec pružiny prochází polohou odpovídající nenapjatému stavu? (b) Předpokládejme pro změnu, že se zátka k pružině přilepila a ještě ji o $1,5 \text{ cm}$ protáhne, než s ní ztratí kontakt. Jaká bude rychlost vystřelené zátky nyní?



Obr. 8.36 Úloha 24

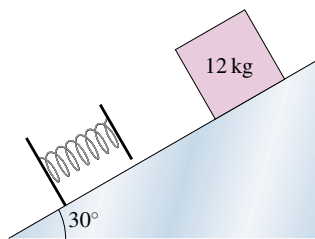
25Ú. Dvoukilogramová kostka spočívá na dokonale hladké nakloněné rovině o úhlu sklonu $30,0^\circ$ a proti sklouznutí je zajištěna pružinou (obr. 8.37). Pružinu, jejíž tuhost je $19,6 \text{ N}\cdot\text{cm}^{-1}$, stlačíme tak, aby její celkové stlačení bylo $20,0 \text{ cm}$, a uvolníme. (a) Jaká je pružná potenciální energie stlačené pružiny? (b) Jak se změní tíhová potenciální energie soustavy kostka + Země od okamžiku uvolnění pružiny do okamžiku, kdy kostka dostoupí při pohybu podél nakloněné roviny do nejvyššího bodu své trajektorie? (c) Jakou dráhu urazí kostka podél nakloněné roviny během pohybu popsaného v části (b)?



Obr. 8.37 Úloha 25

26Ú. Kostku o hmotnosti 12 kg položíme na nakloněnou rovinu o úhlu sklonu $\theta = 30^\circ$ a vypustíme s nulovou počáteční rychlostí. Na nakloněné rovině je připevněna pružina (obr. 8.38), jejíž tuhost je taková, že ji silou o velikosti 270 N dokážeme stlačit

o 2,0 cm. Kostka narazí na pružinu a stlačuje ji. V okamžiku, kdy je rychlost kostky nulová, je pružina stlačena o 5,5 cm. (a) Jakou dráhu urazila kostka podél nakloněné roviny od okamžiku, kdy byla vypuštěna, do okamžiku, kdy dosáhla bodu obratu? (b) S jakou rychlostí narazila do pružiny?



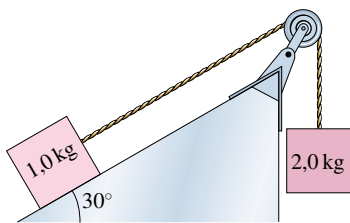
Obr. 8.38 Úloha 26

27Ú. Střela o hmotnosti 0,55 kg je vystřelena z hrany skalního útesu s počáteční kinetickou energií 1 550 J. Nejvyšší bod, kterého střela dosáhne, leží ve výšce 140 m nad ústím hlavně. (a) Jaká je vodorovná složka rychlosti střely? (b) Jaká je svislá složka její rychlosti bezprostředně po vystřelu? (c) V jistém okamžiku má svislá složka rychlosti velikost $65 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Jaká je v tomto okamžiku poloha střely vzhledem k ústí hlavně (vodorovná vzdálenost a výška, resp. hloubka)?

28Ú. Z okna vyletěl 50 g míček s počáteční rychlostí $8,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ vzhůru pod elevačním úhlem 30° . Pomocí energiové metody určete (a) kinetickou energii míčku na vrcholu jeho dráhy, (b) jeho rychlost v okamžiku, kdy je 3 m pod oknem. Závísí tato rychlost na (c) hmotnosti míčku, (d) počátečním úhlu?

29Ú. Pružina dětské vzduchovky má tuhost $7,0 \text{ N}\cdot\text{cm}^{-1}$. Dítě vystřelilo kulku o hmotnosti 30 g pod úhlem 30° šikmo vzhůru. Kulka dosáhla maximální výšky 1,8 m nad ústím hlavně. (a) Jakou rychlostí opustila kulka hlavně? (b) Jaké bylo stlačení pružiny před výstřelem?

30Ú. Nakloněná rovina v experimentu na obr. 8.39 je dokonale hladká, kladka má zanedbatelnou hmotnost a může se otáčet bez tření. Tělesa spojená napjatou nepružnou šňůrou jsou nejprve v klidu a pak je uvolníme. Jaká je celková kinetická energie soustavy v okamžiku, kdy těleso o hmotnosti 2,0 kg pokleslo o 25 cm?



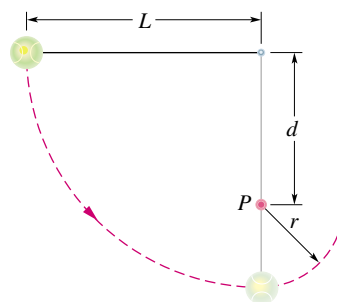
Obr. 8.39 Úloha 30

31Ú. Sněhovou kouli o hmotnosti 1,50 kg jsme vyhodili šikmo vzhůru pod elevačním úhlem $34,0^\circ$ s počáteční rychlostí o velikosti $20,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. (a) Jaká je její počáteční kinetická energie? (b) Jak se změní potenciální energie soustavy koule + Země od

počátečního okamžiku do okamžiku, kdy koule dosáhne největší výšky nad výchozím místem? (c) Určete tuto výšku.

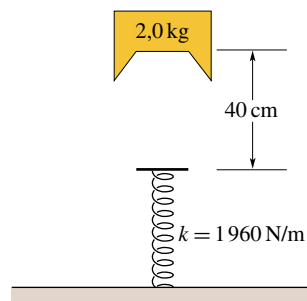
32Ú. Kyvadlo je vyrobeno z kamene o hmotnosti 2,0 kg, který se může houpat na nehmotné šňůře o délce 4,0 m. Při průchodu nejnižším bodem své trajektorie má kámen rychlost $8,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. (a) Jak velká je jeho rychlost v okamžicích, kdy šňůra svírá se svislým směrem úhel 60° ? (b) Jaké největší hodnoty dosahuje během pohybu kyvadla úhel mezi šňůrou a svislým směrem? (c) Určete celkovou mechanickou energii soustavy kyvadlo + Země, přisoudíme-li nulovou hodnotu její potenciální energie konfiguraci, v níž je kámen v nejnižší poloze.

33Ú. Délka šňůry kyvadla na obr. 8.40 je $L = 120 \text{ cm}$. V bodě P je umístěn pevný kolík, jehož vzdálenost od bodu závěsu kyvadla je $d = 75,0 \text{ cm}$. Kuličku kyvadla zvedneme tak, aby šňůra byla vodorovná a volně ji vypustíme (obr. 8.40). Kulička se pohybuje po trajektorii vyznačené v obrázku přerušovanou čarou. Jaká je její rychlost v okamžiku, kdy dosáhne (a) nejnižšího bodu trajektorie, (b) nejvyššího bodu poté, co se šňůra zachytí o kolík.



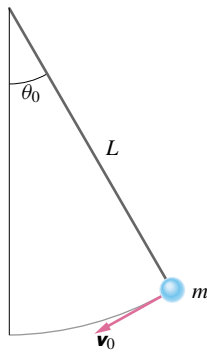
Obr. 8.40 Úlohy 33 a 41

34Ú. Kostka o hmotnosti 2,0 kg je upuštěna z výšky 40 cm a dopadne na svislou pružinu o tuhosti $k = 1 960 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ (obr. 8.41). Určete největší stlačení pružiny.



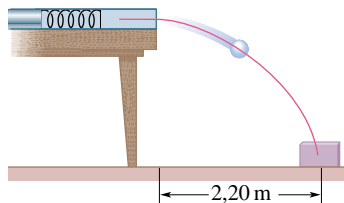
Obr. 8.41 Úloha 34

35Ú. Na obr. 8.42 je nakresleno kyvadlo délky L. Kulička, která prakticky nese veškerou hmotnost kyvadla, má rychlost v_0 v okamžiku, kdy šňůra svírá se svislým směrem úhel θ_0 . (a) Odvoďte vztah pro rychlost kuličky v nejnižším bodě její trajektorie. Jaká je nejmenší možná hodnota v_0 , má-li kyvadlo (b) dosáhnout polohy, v níž je šňůra vodorovná, (c) projít nejvyšším bodem nad místem závěsu tak, aby se šňůra nepokrčila?



Obr. 8.42 Úloha 35

36Ú. Dvě děti hrají hru, při níž se snaží kuličkou z dětské pušky, připevněné ke stolu, trefit do malé krabičky na podlaze (obr. 8.43). Krabička leží ve vzdálenosti 2,20 m od stolu. Honza stlačil pružinu pušky o 1,10 cm a kulička dopadla 27,0 cm před střed krabičky. Jak musí stlačit pružinu Eva, aby zasáhla cíl?



Obr. 8.43 Úloha 36

37Ú. Velikost gravitační síly, jíž na sebe působí dvě částice o hmotnostech m_1 a m_2 , je dána vztahem

$$F(x) = G \frac{m_1 m_2}{x^2},$$

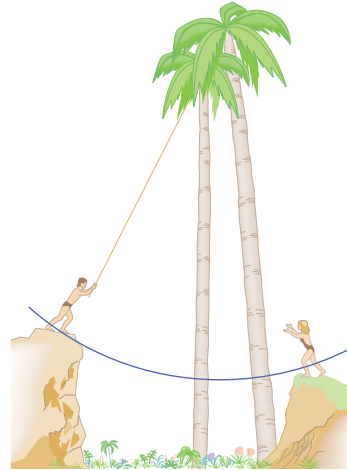
kde G je konstanta a x je vzdálenost částic. (a) Najděte odpovídající funkci pro potenciální energii $E_p(x)$. Předpokládejte, že $E_p(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow \infty$. (b) Jakou práci vykonají síly, jimiž je třeba na částice působit, abychom jejich vzdálenost zvýšili z hodnoty x_1 na hodnotu $x = x_1 + d$ (beze změny jejich kinetické energie)?

38Ú. Na těleso o hmotnosti 20 kg, které je součástí izolované soustavy, působí ve směru osy x konzervativní síla $F = -3,0x - 5,0x^2$, kde F je v newtonech a x v metrech. Potenciální energii soustavy spojenou s tímto silovým působením považujeme za nulovou při $x = 0$. (a) Jaká je potenciální energie soustavy pro $x = 2,0$ m? (b) V okamžiku, kdy je poloha tělesa určena souřadnicí $x = 5,0$ m, má jeho rychlost velikost $4,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a je nesouhlasně rovnoběžná s osou x . Jaká je velikost rychlosti tělesa v okamžiku, kdy prochází počátkem soustavy souřadnic? (c) Odpovězte na otázky (a) a (b) za předpokladu, že konfiguraci $x = 0$ přisoudíme potenciální energii $-8,0$ J.

39Ú. (a) Jaká je výslednice sil, které působí na kostku z úlohy 10, v okamžiku jejího průchodu bodem Q ? (b) Z jaké výšky h je třeba kostku volně vypustit, aby ztratila kontakt se smyčkou

právě při průchodu jejím vrcholem? (Ztráta kontaktu se smyčkou je charakterizována tím, že tlaková síla smyčky na kostku se právě anuluje.)

40Ú. Představme si románového hrdinu Tarzana, jak se zhoupane ze skalního výběžku na liáně dlouhé 18 m (obr. 8.44). Nejnižší bod trajektorie leží 3,2 m pod úrovní výběžku. Liána vydrží zátěž 950 N, Tarzan váží 688 N. (a) Přetrhne se liána? (b) Jestliže ne, zjistěte, jak velká je největší síla, která ji napíná během zhoupanutí.

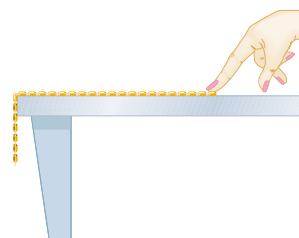


Obr. 8.44 Úloha 40

41Ú. Ukažte, že kulička na obr. 8.40 může oběhnout pevný kolík (při napjaté šňůře) jedině tehdy, je-li $d > 3L/5$. (Tip: Kulička musí mít v nejvyšším bodě kruhové trajektorie stále ještě nenulovou rychlost. Víte proč a jak velkou?)

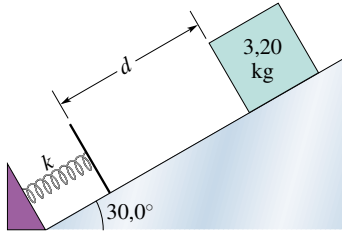
42Ú. Kyvadlo je tvořeno kuličkou o hmotnosti m připevněnou na konci tuhé tyče délky L . Hmotnost tyče je zanedbatelná. Kuličku zvedneme tak, aby tyčka mířila přímo vzhůru, a pak uvolníme. (a) Jaká je rychlost kuličky v nejnižším bodě její trajektorie? (b) Jakou silou je napínána tyč při průchodu kuličky tímto bodem? (c) Kyvadlo nyní vychýlíme tak, aby tyč byla vodorovná, a opět uvolníme. Jaký úhel svírá tyč se svislým směrem v okamžiku, kdy jsou tíhová síla a tahová síla tyče působící na kuličku stejně velké?

43Ú*. Řetěz přidržujeme na dokonale hladkém vodorovném stole tak, že jedna čtvrtina jeho délky visí přes okraj (obr. 8.45). Řetěz má délku L a hmotnost m . Jak velkou práci musíme vykonat, abychom vytáhli celý řetěz zpět na stůl?



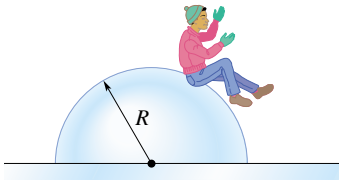
Obr. 8.45 Úloha 43

44Ú*. Kostka o hmotnosti 3,20 kg může klouzat po dokonale hladké nakloněné rovině o úhlu sklonu 30° . Na nakloněné rovině leží pružina o tuhosti $431 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, připevněná k jejímu spodnímu okraji (obr. 8.46). Kostka je vypuštěna s nulovou počáteční rychlostí z místa, jehož vzdálenost od volného konce pružiny, měřená podél nakloněné roviny, je d . Kostka narazí do pružiny a urazí ještě 21,0 cm, než se dostane do bodu obratu (její rychlost je v tom okamžiku nulová). (a) Určete vzdálenost d . (b) Určete vzdálenost mezi bodem prvního kontaktu kostky s pružinou a bodem, v němž je rychlost kostky největší.



Obr. 8.46 Úloha 44

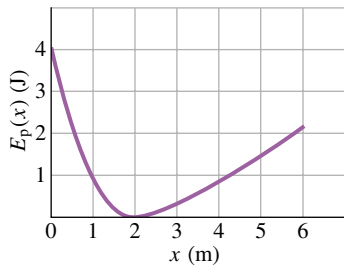
45Ú*. Chlapec si sedl na vršek polokulového ledového náspu (obr. 8.47). Nepatrně se odrazil a začal klouzat dolů. Tření považujte za zanedbatelné a ukažte, že chlapec ztratil kontakt s ledovou polokoulí v bodě ležícím ve výšce $2R/3$ nad vodorovnou podložkou. (Tip: Při ztrátě kontaktu se anuluje tlaková síla podložky.)



Obr. 8.47 Úloha 45

ODST. 8.5 Interpretace křivky potenciální energie

46C. Na částici pohybující se podél osy x působí konzervativní síla $F(x)$. Na obr. 8.48 je graf závislosti příslušné potenciální energie E_p na poloze částice. (a) Nakreslete závislost $F(x)$. Použijte stejnou stupnici proměnné x jako na obr. 8.48. (b) Mechanická energie soustavy E je 4,0 J. Nakreslete graf závislosti kinetické energie $E_k(x)$ částice na poloze x .



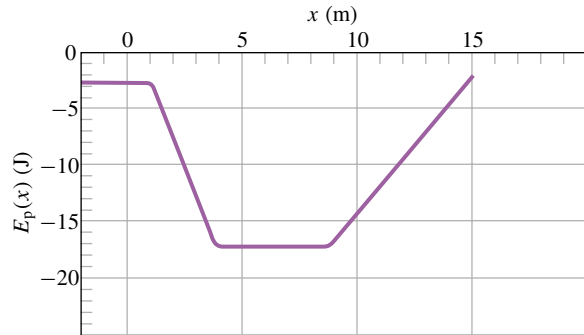
Obr. 8.48 Cvičení 46

47Ú. Potenciální energie dvouatomové molekuly (např. H_2 nebo O_2) je dána vztahem

$$E_p = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6},$$

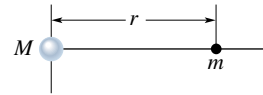
kde r je vzdálenost atomů v molekule a A a B jsou kladné konstanty. Tato potenciální energie souvisí s interakčními (vazebnými) silami, které drží molekulu pohromadě. (a) Určete rovnovážnou vzdálenost atomů, tj. vzdálenost, jíž odpovídají nulové interakční síly. Rozhodněte, zda je výsledná síla vzájemného působení atomů odpudivá, nebo přitažlivá, jestliže je vzdálenost atomů (b) menší, (c) větší než vzdálenost rovnovážná.

48Ú. Na částici o hmotnosti $m = 2 \text{ kg}$ pohybující se podél osy x působí konzervativní síla $F(x)$. Graf odpovídající potenciální energie je na obr. 8.49.

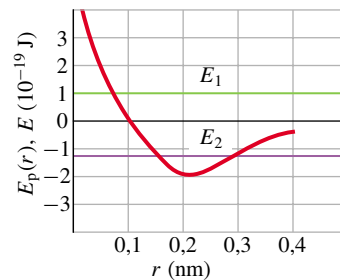


Obr. 8.49 Úloha 48

V poloze $x = 2,0 \text{ m}$ má částice rychlost $v_x = -1,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. (a) Jakou velikost a směr má v této poloze síla $F(x)$? (b) Mezi jakými krajními hodnotami x se částice pohybuje? (c) Jaká je rychlost částice v bodě $x = 7,0 \text{ m}$?



(a)



(b)

Obr. 8.50 Úloha 49

49Ú. Na obr. 8.50a je dvouatomová molekula. Hmotnosti atomů jsou m a M ($m \ll M$) a jejich vzdálenost je r . Na obr. 8.50b je graf závislosti potenciální energie molekuly $E_p(r)$ na vzdálenosti r . Popište pohyb atomů, (a) je-li celková mechanická

energie molekuly E kladná (např. E_1), (b) záporná (např. E_2). Pro $E_1 = 1 \cdot 10^{-19}$ J a $r = 0,3$ nm určete (c) potenciální energii soustavy, (d) celkovou kinetickou energii obou atomů, (e) sílu (velikost a směr) působící na každý atom. Pro jaké hodnoty r je interakce atomů (f) odpuzivá, (g) přitažlivá, (h) nulová?

ODST. 8.6 Práce nekonzervativních sil

50C. Pes vleče svou boudu vodorovnou silou 8,0 N. Na boudu působí dynamická třecí síla o velikosti 5,0 N. (a) Jakou práci vykoná síla, jíž působí na boudu pes, a (b) jak velká mechanická energie bude rozptýlena vlivem třecí síly při posunutí boudy o 0,70 m?

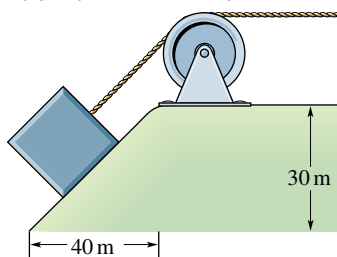
51C. Na kostku z umělé hmoty působí vodorovná síla o velikosti 15 N. Kostka se pohybuje po podlaze stálou rychlostí, přičemž je průběžně zaznamenávána její teplota. Zjistilo se, že při posunutí o 3,0 m se zvýšila vnitřní energie kostky o 20 J. Jakou práci vykonala dynamická třecí síla působící na kostku?

52Ú. Dělník sune bednu o hmotnosti 27 kg po vodorovné podlaze stálou rychlostí. Síla, kterou na ni při tom působí, svírá s vodorovnou rovinou úhel 32° a míří dolů. (a) Jakou práci vykoná tato síla při posunutí bedny o 9,2 m, je-li koeficient dynamického tření mezi bednou a podlahou 0,20? (b) Určete mechanickou energii rozptýlenou třecími silami.

53Ú. Stroj tlačí kmen o hmotnosti 50 kg stálou rychlostí vzhůru po nakloněné rovině o úhlu sklonu 30° . Síla, kterou stroj na kmen působí, je stálá a má vodorovný směr. Koeficient tření mezi kmenem a nakloněnou rovinou je 0,20. (a) Určete práci, kterou vykoná síla stroje při posunutí kmenu o 6,0 m, a (b) práci tíhové síly působící na kmen. (c) Jaká energie je rozptýlena třecími silami?

54Ú. Kostka o hmotnosti 3,57 kg je tažena na laně po vodorovné podlaze stálou rychlostí. Tahová síla lana má velikost 7,68 N a míří vzhůru po úhlem 15° vzhledem k vodorovné rovině. Vypočítejte (a) práci tahové síly lana při posunutí kostky o 4,06 m a (b) koeficient dynamického tření mezi kostkou a podlahou. (c) Jaká energie je přitom rozptýlena třecími silami?

55Ú. Žulový blok o hmotnosti 1 400 kg je tažen pomocí navijáku po nakloněné rovině stálou rychlostí $1,34 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (obr. 8.51). Koeficient dynamického tření mezi blokem a nakloněnou rovinou je 0,40. Jaký je výkon tahové síly lana?



Obr. 8.51 Úloha 55

ODST. 8.7 Zákon zachování energie

56C. Fotbalista o hmotnosti 70 kg běží rychlostí $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,

sklouzne po trávníku a zastaví se vlivem třecích sil. (a) Jak velká energie je třecími silami rozptýlena? (b) Jaká je změna vnitřní energie fotbalisty a podložky, po níž klouže?

57C. Dítě vyhodilo míček o hmotnosti 75 g z místa ve výšce 1,1 m nad zemí. Udělilo mu přitom rychlost o velikosti $12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Ve výšce 2,1 m nad zemí měla rychlost míčku velikost $10,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. (a) Jakou práci vykonala tíhová síla působící na míček? (b) K jaké energetické ztrátě došlo vlivem odporu vzduchu?

58C. Brankář vyhodil míč rychlostí o velikosti $35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Bezprostředně před tím, než míč zachytil ve stejné výšce útočník, byla velikost rychlosti míče $28 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Zjistěte, k jaké ztrátě energie míče došlo vlivem odporu prostředí. Hmotnost míče je 0,3 kg.

59C. Hráč vyhodil míč o hmotnosti 0,63 kg počáteční rychlostí $14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Míč vystoupil do výšky 8,1 m. Jakou energetickou ztrátu způsobil odpor prostředí?

60C. Střela o hmotnosti 9,4 kg byla vystřelena svisle vzhůru. Během jejího výstupu došlo vlivem odporu prostředí k energetické ztrátě 68 kJ. O kolik metrů výše by střela vystoupila při zanedbatelném odporu prostředí?

61C. Výška přejezí na řece je 15 m. Velikost rychlosti toku řeky nad přejezí je $3,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, pod nimi $13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Jaká část změny tíhové potenciální energie soustavy voda + Země (v procentech), k níž došlo při pádu vody, přispěla k přírůstku energie kinetické? (Tip: Úvahu proveďte pro zvolené množství vody, řekněme 10 kg.)

62C. Niagarským vodopádem protéká přibližně $5,5 \cdot 10^6$ kg vody za sekundu. (a) K jak velkému poklesu tíhové potenciální energie soustavy voda + Země každou sekundu dochází, padá-li voda z výšky 50 m? (b) Představme si, i když je to nemožné, že by se této energii využilo pro výrobu elektřiny. Jak velký elektrický výkon by byl dodáván do sítí? (c) Kolik bychom získali ročně, kdyby cena jedné kilowatthodiny elektrické energie byla 30 haléřů?

63C. Vodopádem o výšce 100 m proteče $1\,200 \text{ m}^3$ vody za každou sekundu. Tři čtvrtiny kinetické energie, kterou voda získá pádem z této výšky, se využijí pro výrobu elektrické energie ve vodní elektrárně. Jaký je výkon generátoru?

64C. Rozloha pevninské části USA je asi $8 \cdot 10^6 \text{ km}^2$, průměrná nadmořská výška je 500 m. Průměrné roční srážky činí 75 cm. Dvě třetiny dešťové vody se opět odpaří do atmosféry, zbytek se dostává do oceánu. Představme si, že by odpovídající přírůstek tíhové potenciální energie soustavy voda + Země mohl být plně využit pro výrobu elektrické energie. Jaký by byl průměrný výkon pomyslné elektrárny?

65C. Výsadkář o hmotnosti 68 kg padá s konstantní mezní rychlostí $59 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. (a) Jak rychle klesá tíhová potenciální energie soustavy výsadkář + Země? (b) Jak rychle dochází ke ztrátám mechanické energie (energetická ztráta za sekundu)?

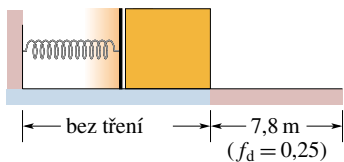
66C. Medvídek o hmotnosti 25 kg sjel ze stromu o výšce 12 m. V počátečním okamžiku byla jeho rychlost nulová, těsně před dopadem na zem měla velikost $5,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. (a) Jak se změnila

potenciální energie soustavy medvídek + Země? (b) Jakou kinetickou energii měl medvídek těsně nad zemí? (c) Jak velká průměrná třecí síla na něj působila?

67C. Kámen o hmotnosti 520 kg sjíždí po svahu dlouhém 500 m a vysokém 300 m. Kámen je zpočátku v klidu. Koeficient dynamického tření mezi kamenem a svahem je 0,25. Zvolme hladinu nulové tíhové potenciální energie soustavy kámen + Země na úpatí svahu. (a) Jaká byla potenciální energie soustavy, než se kámen dal do pohybu? (b) K jaké ztrátě mechanické energie soustavy došlo během skluzu vlivem tření? (c) Jaká je kinetická energie kamene na úpatí svahu? (d) Jaká je jeho rychlost?

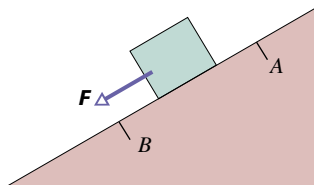
68C. Střela o hmotnosti 30 g letící vodorovnou rychlostí o velikosti $500 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ se zaryla 12 cm hluboko do stěny. (a) Jak se změnila její mechanická energie? (b) Jaká byla velikost průměrné brzdící síly působící na střelu?

69Ú. Kostka o hmotnosti 3,5 kg na obr. 8.52 je urychlována stlačenou pružinou. Tuhost pružiny je $640 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. V okamžiku, kdy je pružina nenapjatá, ztrácí s ní kostka kontakt a pohybuje se dále po vodorovné podložce. Podložka je zčásti dokonale hladká, zčásti je vyrobena z materiálu, který působí na kostku třecí silou charakterizovanou koeficientem tření 0,25. Poloha rozhraní obou částí je shodná s polohou volného konce nenapjaté pružiny (obr. 8.52). Po ztrátě kontaktu s pružinou urazí kostka ještě 7,8 m a zastaví se. (a) K jaké ztrátě mechanické energie došlo při brzdění kostky vlivem třecích sil? (b) Jaká byla největší hodnota kinetické energie kostky? (c) Jaké bylo stlačení pružiny na začátku pokusu?



Obr. 8.52 Úloha 69

70Ú. Kostka na obr. 8.53 se posune po nakloněné rovině z bodu A do bodu B, vzdáleného o 5,0 m. Kromě tíhové, tlakové a třecí síly působí na kostku ještě síla F o velikosti 2,0 N, rovnoběžná s nakloněnou rovinou. Velikost třecí síly je 10 N. Při přesunu mezi body A a B vzrostla kinetická energie kostky o 35 J. Jakou práci vykonala tíhová síla?



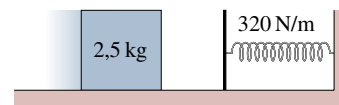
Obr. 8.53 Úloha 70

71Ú. Jeden konec pružiny upevníme ke stropu a na druhý připevníme hlávkou zelí. Hlávkou pomalu uvolňujeme, až přejde do rovnovážné polohy, v níž je pružná síla kompenzována silou

tíhovou. Ukažte, že změna tíhové potenciální energie soustavy hlávka + Země je rovna dvojnásobku přírůstku pružné potenciální energie. Jak to, že se tyto dvě veličiny nerovnejí?

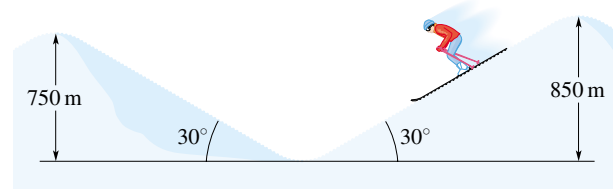
72Ú. Kostku o hmotnosti 2,0 kg přitiskneme k volnému konci vodorovné pružiny a stlačíme pružinu o 15 cm. Poté kostku uvolníme. Kostka bude klouzat po vodorovném stole a zastaví se ve vzdálenosti 75 cm od místa, kde byla uvolněna. Tuhost pružiny je $200 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. Určete koeficient tření mezi kostkou a deskou stolu.

73Ú. Kostka o hmotnosti 2,5 kg narazí na konec vodorovné pružiny o tuhosti $320 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ (obr. 8.54). V okamžiku, kdy je kostka v bodě obratu, je pružina stlačena o 7,5 cm. Koeficient dynamického tření mezi kostkou a podložkou je 0,25. (a) Jakou práci vykonala pružná síla působící na kostku během jejího brzdění? (b) K jak velké ztrátě mechanické energie došlo vlivem třecích sil? (c) Jaká byla rychlost kostky v okamžiku nárazu na pružinu?



Obr. 8.54 Úloha 73

74Ú. Výšky dvou zasněžených vrcholků nad údolím jsou 850 m a 750 m. Lyžař sjede z vyššího z nich, zamíří do protisvahu a vyjede na nižší vrchol. Urazí přitom celkovou dráhu 3,2 km. Průměrný sklon obou svahů je 30° (obr. 8.55). (a) Předpokládejme, že lyžař odstartuje z vyššího vrcholku s nulovou rychlostí, a zanedbejme vliv tření. Jakou rychlost má na nižším vrcholku, neodráží-li se holemi? (b) Jaký by musel být koeficient tření mezi lyžemi a sněhovou pokrývkou, aby se lyžař na nižším vrcholku právě zastavil?



Obr. 8.55 Úloha 74

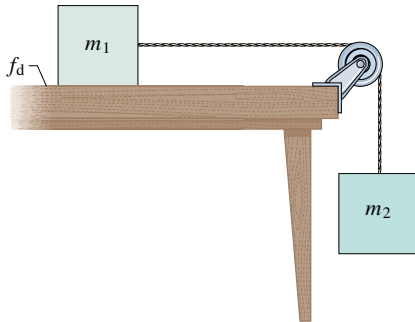
75Ú. V továrně došlo nešťastnou náhodou k uvolnění bedny o hmotnosti 0,2 tuny, která byla upevněna v nejvyšším bodě šikmé rampy. Rampa má délku 4,0 m a její úhel sklonu vzhledem k vodorovné podložce je 39° . Koeficient dynamického tření mezi rampou a bednou je 0,28. (a) Jaká je rychlost bedny na konci rampy? (b) Jak daleko bude bedna klouzat po vodorovné podlaze? (Předpokládáme, že kinetická energie bedny se v okamžiku sklouznutí z rampy na podlahu nezmění.) (c) Vysvětlete, proč jsou odpovědi na otázky (a) i (b) nezávislé na hmotnosti bedny?

76Ú. Dvě kostky spojené šňůrou podle obr. 8.56 jsou uvolněny z klidového stavu. Ukažte, že velikost rychlosti kostek je v zá-

vislosti na uražené dráze L dána vztahem

$$v = \sqrt{\frac{2(m_2 - f_d m_1)gL}{m_1 + m_2}},$$

kde f_d je koeficient dynamického tření mezi kostkou m_1 a deskou stolu. Předpokládáme, že kladka má zanedbatelnou hmotnost a otáčí se bez tření.



Obr. 8.56 Úloha 76

77Ú. Balík o hmotnosti 4,0 kg je uveden do pohybu směrem vzhůru po nakloněné rovině o úhlu sklonu 30° . Jeho počáteční kinetická energie je 128 J. Jak daleko bude balík klouzat po nakloněné rovině, je-li koeficient tření 0,30?

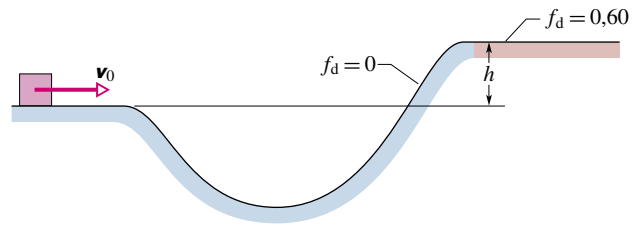
78Ú. Nádoba se pohybuje vzhůru po nakloněné rovině o úhlu sklonu 40° . V bodě ležícím ve vzdálenosti 0,55 m od jejího dolního konce (měřeno podél nakloněné roviny) je rychlost nádoby $1,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Koeficient dynamického tření mezi nádobou a nakloněnou rovinou je 0,15. (a) Jak daleko se bude nádoba podél nakloněné roviny ještě pohybovat? (b) Jaká bude její rychlost poté, co opět sklouzne k dolnímu konci nakloněné roviny?

79Ú. Experimentátor zjistil, že pružina používaná k pokusům *nevyhovuje* Hookovu zákonu. Pružná síla (v newtonech) má při prodloužení o vzdálenost x (v metrech) velikost $52,8x + 38,4x^2$ a působí proti prodloužení. (a) Vypočítejte práci potřebnou k prodloužení pružiny z hodnoty $x = 0,500 \text{ m}$ na hodnotu $x = 1,00 \text{ m}$. (b) Jeden konec pružiny upevníme a k druhému připojíme částici o hmotnosti 2,17 kg. Pružinu protáhneme o $x = 1,00 \text{ m}$ a uvolníme. Určete rychlost částice v okamžiku, kdy je pružina prodloužena o $x = 0,500 \text{ m}$. (c) Rozhodněte, zda síla, jíž působí pružina na částici, je konzervativní či nikoliv. Zdůvodněte.

80Ú. Dívenka vážící 267 N se vozí po dětské skluzavce. Skluzavka měří 6,1 m a svírá s vodorovnou rovinou úhel 20° . Koeficient dynamického tření je 0,10. (a) Jakou práci vykoná během jedné „jízdy“ tíhová síla působící na holčičku? (b) Určete energetickou ztrátu způsobenou třecími silami. (c) Jak velkou rychlost bude mít holčička na konci skluzavky, jestliže na jejím vrcholu startuje s rychlostí o velikosti $0,457 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$?

81Ú. Kostka se pohybuje po vodorovném úseku kolejnic na obr. 8.57 rychlostí $v_0 = 6,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, projede dolíkem a vyjede na plošinu vyvýšenou nad původní úroveň o $h = 1,1 \text{ m}$. Na

horní plošinu je kostka brzděna třecí silou, charakterizovanou koeficientem dynamického tření $f_d = 0,60$ a zastaví se poté, co urazila vzdálenost d . Určete tuto vzdálenost.

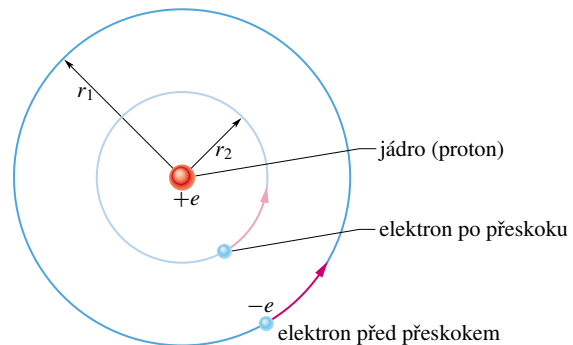


Obr. 8.57 Úloha 81

82Ú. Velikost přitažlivých elektrostatických sil, jimiž na sebe vzájemně působí kladně nabitě jádro (proton) a záporně nabitý elektron ve vodíkovém atomu, je dána vztahem

$$F = k \frac{e^2}{r^2},$$

kde e je velikost náboje elektronu a protonu, k je konstanta a r je vzdálenost elektronu od jádra. Předpokládejme, že jádro je nepohyblivé. Představte si, že elektron, který zpočátku obíhal kolem jádra po kružnici o poloměru r_1 , náhle „přeskočí“ na kruhovou dráhu o menším poloměru r_2 (obr. 8.58). (a) Určete změnu kinetické energie elektronu užitím druhého Newtonova zákona. (b) Na základě znalosti vztahu mezi silou a potenciální energií určete změnu potenciální energie atomu. (c) Jaký je pokles celkové energie atomu při tomto ději? (Celková energie atomu musí klesnout, neboť při popsaném přechodu elektronu vyzáří atom světlo.)



Obr. 8.58 Úloha 82

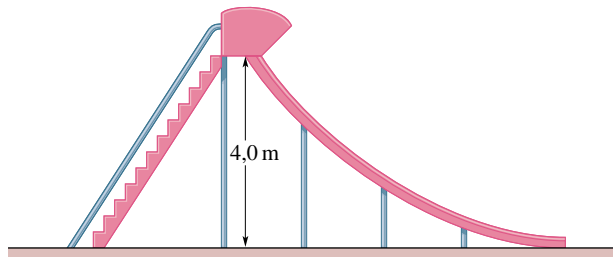
83Ú. Kámen o váze G (v newtonech) je vržen svisle vzhůru počáteční rychlostí v_0 . Předpokládáme, že na letící kámen působí stálá odporová síla vzduchu o velikosti F . (a) Ukažte, že kámen dosáhne maximální výšky

$$h = \frac{v_0^2}{2g(1 + \frac{F}{G})}.$$

(b) Dále ověřte, že rychlost kamene bezprostředně před dopadem na zem je

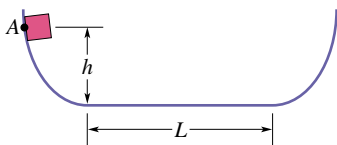
$$v = v_0 \left(\frac{G - F}{F + G} \right)^{1/2}.$$

84Ú. Skluzavka ve tvaru kruhového oblouku o poloměru 12 m je vysoká 4,0 m a dotýká se povrchu Země (obr. 8.59). Dítě o hmotnosti 25 kg sjede z vrcholu skluzavky. Při nulové počáteční rychlosti je velikost jeho rychlosti na konci skluzavky $6,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. (a) Jaká je délka skluzavky? (b) Jaká je průměrná velikost třecí síly působící na dítě? Představte si nyní, že by skluzavka byla umístěna tak, aby svislá přímka procházející jejím nejvyšším bodem byla tečnou ke kruhovému oblouku. (c) Jaká by byla v tomto případě délka skluzavky a (d) průměrná velikost třecí síly působící na dítě při skluzu?



Obr. 8.59 Úloha 84

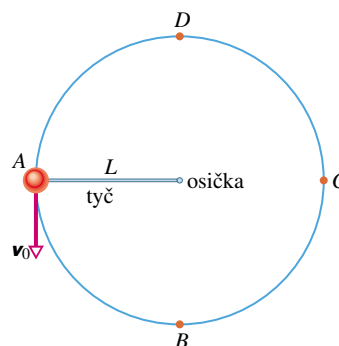
85Ú. Částice může klouzat po kolejnici upravené do tvaru znázorněného na obr. 8.60. Střední vodorovný úsek má délku L . Zakřivené úseky kolejnice jsou dokonale hladké, v rovném úseku však na částici působí třecí síla charakterizovaná koeficientem tření $f_d = 0,20$. Částice je volně vypuštěna z bodu A, ležícího ve výšce $h = L/2$ nad vodorovným úsekem. Kde se částice nakonec zastaví?



Obr. 8.60 Úloha 85

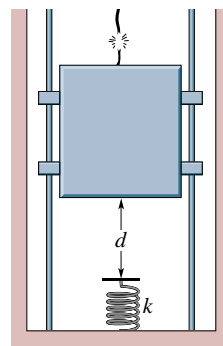
86Ú. Ke konci tenké tuhé tyče o zanedbatelné hmotnosti a délce L je připevněna koule o hmotnosti m (obr. 8.61). Druhý konec tyče je nasazen na tenké osičce tak, aby se koule mohla pohybovat po kružnici ležící ve svislé rovině. Koule je z výchozí polohy A, kdy je tyč vodorovná, uvedena do pohybu počáteční rychlostí o velikosti v_0 , směřující dolů. Rychlost koule se anuluje právě v okamžiku jejího průchodu bodem D. (a) Vyjádřete v_0 pomocí L , m a g . (b) Jakou silou je namáhána tyč, je-li koule právě v bodě B? (c) Osičku posypeme jemným pískem, aby otáčení tyče bylo poněkud brzděno třením, a uvedeme kyvadlo do pohybu stejným způsobem jako v předchozím pokusu. Koule však nyní dostoupí pouze do bodu C. Jak velká je ztráta mechanické energie způsobená třením? (d) Po několika kmitech se kyvadlo zastaví v poloze B. Určete celkovou energiovou ztrátu způsobenou třením od okamžiku vypuštění kyvadla z výchozí polohy A.

87Ú. Kabina zdviže na obr. 8.62 váží 20 000 N. Tažné lano zdviže se přetrhlo v okamžiku, kdy zdviž stála v prvním poschodí a její dno bylo ve vzdálenosti $d = 4 \text{ m}$ od konce tlumící pružiny



Obr. 8.61 Úloha 86

o tuhosti $k = 1,2 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. Při přetržení lana bylo uvedeno do chodu bezpečnostní zařízení, které sevřelo kabínu mezi svislé vodící kolejnice. Na kabínu tak začala působit třecí síla o stálé velikosti 5 000 N, směřující proti jejímu pohybu. (a) Jaká byla rychlost kabiny těsně před nárazem na tlumící pružinu? (b) Určete maximální stlačení x pružiny. (c) Jakou dráhu urazí kabina od okamžiku odskoku od pružiny do okamžiku, kdy se dostane do bodu obratu a začne opět padat? (d) Pomocí zákona zachování energie určete přibližně celkovou dráhu, kterou kabina urazí od okamžiku přetržení lana do úplného zastavení. Proč může být odpověď pouze přibližná?

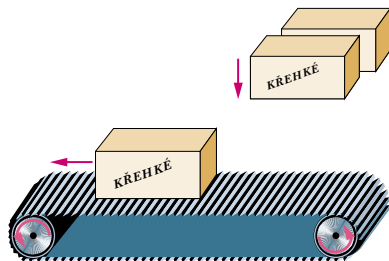


Obr. 8.62 Úloha 87

88Ú. Brusič tlačí kovový nástroj ke kotouči brusky silou o velikosti 180 N. Kotouč má poloměr 20 cm a vykoná 2,5 otáčky za sekundu. Koeficient tření mezi nástrojem a kotoučem je 0,32. Jaký je výkon třecí síly (energiová ztráta způsobená třecí silou za jednu sekundu, která se projeví přírůstkem vnitřní energie soustavy)?

89Ú*. Zboží z balírny se expeduje v krabicích na pásovém přepravníku. Hmotnost krabice se zbožím je 300 kg. Motor přepravníku udržuje velikost rychlosti pásu na stálé hodnotě $1,20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Balicí stroj uvolňuje krabice tak, aby na pás dopadaly kolmo (obr. 8.63). Koeficient dynamického tření mezi pásem a krabicí je 0,400. Po dopadu pás pod krabicí nejprve prokluzuje. Během velmi krátké doby Δt však prokluzování ustane a krabice se začne pohybovat spolu s pásem. Zvolte vztahnou soustavu spojenou s místností balírny a určete (a) kinetickou energii,

ktou získá krabice za dobu Δt , (b) velikost dynamické třecí síly, kterou působí pás na krabici, (c) energii dodanou soustavě pás + krabice za dobu Δt motorem přepravníku. (d) Vysvětlete, proč se odpovědi (a) a (c) liší.



Obr. 8.63 Úloha 89

ODST. 8.8 Hmotnost a energie

90C. (a) Jaká energie (v joulech) odpovídá hmotnosti 102 g? (b) Kolik let by takový „zdroj energie“ mohl zásobovat jednu domácnost, je-li k provozu domácnosti potřeba průměrný výkon 1,00 kW?

91C. „Mohutnost“ zemětřesení M v tzv. Richterově stupnici souvisí s uvolněnou energií E (v joulech) vztahem

$$\log E = 5,24 + 1,44M.$$

(a) V roce 1906 bylo San Francisco postiženo zemětřesením o velikosti 8,2 stupňů Richterovy stupnice (obr. 8.64). Kolik energie se při tomto zemětřesení uvolnilo? (b) Jak velká hmotnost je ekvivalentní této energii?

92C. Celková produkce elektrické energie v USA činila v roce 1983 $2,31 \cdot 10^{12}$ kW·h. Určete odpovídající hmotnostní ekvivalent.

93Ú. Jaká nejmenší energie je potřebná k rozštěpení jádra uhlíku ^{12}C (hmotnost 11,996 71 u) na tři jádra helia ^4He (hmotnost každého z nich je 4,001 51 u)?

94Ú. Jádro atomu zlata obsahuje 79 protonů a 118 neutronů. Jeho hmotnost je 196,923 2 u. Jaká je jeho vazebná energie? Další potřebné údaje najdete v př. 8.10.

95Ú. Při jaderné fúzi popsané rovnicí $d + t \rightarrow ^4\text{He} + n$ se deuteron (označený symbolem d) sloučí s atomem tritia (označený symbolem t, obsahuje jeden proton a dva neutrony). Vzniká jádro helia (dva protony a dva neutrony) a volný neutron (n). Hmotnosti částic účastnících se reakce jsou tyto:

$$\begin{array}{ll} \text{d: } 2,013\,55\, \text{u} & ^4\text{He: } 4,001\,51\, \text{u} \\ \text{t: } 3,015\,50\, \text{u} & \text{n: } 1,008\,67\, \text{u} \end{array}$$

(a) Rozhodněte, zda při této reakci dochází k uvolnění energie, nebo k jejímu pohlcení. (b) Jak velká je uvolněná, resp. pohlcená energie?

ODST. 8.9 Kvantování energie

96C. V následující tabulce jsou uvedeny energie pěti nejnižších energetických hladin tří typů hypotetických atomů v elektronvoltech:

TYP A	TYP B	TYP C
3,8	3,2	3,1
3,0	2,7	2,9
2,4	2,0	2,2
1,4	1,2	1,5
0	0	0

U každého z těchto „atomů“ byly zaznamenány dvě emisní spektrální čáry: (a) 1,4 eV, (b) 1,5 eV. Pro každou z nich najdete odpovídající přechody elektronu v jednotlivých atomech.



Obr. 8.64 Cvičení 91. Oblast Nob Hill v San Francisku zničená zemětřesením v roce 1906. Čára zlomu v oblasti San Andreas měřila přes 400 km.

97C. Přístroj sledující chování hypotetického atomu zaznamenal pět případů emise světla, aniž při tom došlo k nové excitaci atomu. Energie vyzářeného světla ve čtyřech z nich jsou 0,7 eV; 0,8 eV; 0,9 eV a 2,0 eV. Poslední hodnota a údaje o pořadí jednotlivých přechodů se ztratily chybou v počítači. Následující tabulka uvádí dvanáct nejnižších energetických hladin atomu v elektronvoltech:

6,5	4,1	2,6
5,3	3,8	2,0
4,9	3,4	1,5
4,5	2,9	0

(a) Jaká energetická hladina odpovídala kvantovému stavu excitovaného atomu před vyzářením? (b) Jaká byla hodnota energie vyzářeného světla, která se ztratila chybou v počítači?

PRO POČÍTAČ

98Ú. Mezní rychlost kulky o hmotnosti 9,8 g při pohybu ve vzduchu je $7,3\, \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Kulku vystřelíme svisle vzhůru počáteční rychlostí o velikosti $15\, \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Numerickou integrací s krokem

$\Delta t = 0,1$ s určete polohu a rychlost kulky v libovolném okamžiku $t_n = n \cdot \Delta t$ od výstřelu do okamžiku jejího návratu k místu výstřelu. V každém z okamžiků t_n určete kinetickou energii kulky, její potenciální energii v tíhovém poli Země (potenciální energie soustavy kulka + Země) a celkovou mechanickou energii. K jak velké ztrátě mechanické energie soustavy kulka + Země dojde při výstupu kulky vlivem odporu vzduchu? Jaká je energetická ztráta při pádu kulky? V okamžiku výstřelu přisuzujeme soustavě nulovou potenciální energii.

99Ú. Kostku o hmotnosti 700 g upustíme z výšky h_0 přesně nad koncem svislé pružiny. Pružina má zanedbatelnou hmotnost a její tuhost je $k = 400 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. Kostka narazí na pružinu a stlačuje

ji. V bodě obratu je pružina stlačena o 19,0 cm. Jakou práci vykonala (a) síla, jíž působila kostka na pružinu, (b) síla, jíž působila pružina na kostku? (c) Z jaké výšky h_0 kostka padala? (d) Jaké by bylo maximální stlačení pružiny, kdyby kostka padala z dvojnásobné výšky?

100Ú. Kyvadlo je tvořeno tělesem o hmotnosti 300 g zavěšeným na niti dlouhé 1,4 m. Kyvadlo vychýlíme tak, aby napjatá nit svírala se svislým směrem úhel 30° a uvolníme. Určete (a) rychlost tělesa v okamžiku, kdy nit svírá se svislým směrem úhel 20° , a (b) největší rychlost, jíž těleso dosáhne. (c) Jaký úhel svírá nit se svislým směrem v okamžiku, kdy velikost rychlosti tělesa dosahuje jedné třetiny největší hodnoty?