7

Práce a kinetická energie

Při soutěži vzpěračů na olympijských hrách v roce 1976 byl celý sportovní svět doslova ohromen výkonem Vasilije Aleksejeva. Vzpěrač dokázal zvednout 562librovou činku (2 500 N) z podlahy nad hlavu do výšky asi 2 m. Téměř o dvacet let předtím mohli diváci žasnout nad výkonem Paula Andersona. Ten se sehnul pod nákladní plošinu vyrobenou ze dřeva vyztuženého ocelí, opřel si ruce o stoličku a zády nadzvedl asi o centimetr plošinu i s nákladem 6 270 liber (27 900 N)! Zdá se, že tyto dva výkony snad ani nelze srovnávat. A přece: kdo vykonal při zvedání předmětů větší práci, Aleksejev nebo Anderson?

7.1 KINETICKÁ ENERGIE

Pojem energie, jedné z klíčových veličin nejen mechaniky, ale celé fyziky, je velmi široký. Slovo *energie* užíváme v běžné řeči naprosto samozřejmě a do značné míry i volně. Definovat energii jako fyzikální veličinu však vůbec není snadné. Není prostě schůdné vyslovit nějakou jednoduchou definici, která by zahrnovala všechny aspekty tohoto pojmu. Je třeba jej postupně vybudovat, od jeho nejjednodušší podoby v mechanice až po úroveň zcela obecných úvah. Na samém začátku se spokojíme s velmi hrubou a neúplnou charakteristikou pojmu energie: **Energie** je skalární veličina, jejíž hodnota je určena stavem fyzikální soustavy (objektu). Pojem *stav* jsme v této formulaci použili v obvyklém významu: je to soubor podmínek, v nichž se objekt nachází, tj. soubor hodnot veličin (parametrů), jimiž je charakterizován. V této kapitole se soustředíme na jeden typ energie, **kinetickou energii** E_k, která souvisí s *pohybovým stavem* částice či tělesa. Pohybuje-li se těleso rychleji, má kinetickou energii větší. Je-li v klidu, je jeho kinetická energie nulová.

Kinetickou energii částice o hmotnosti m, která se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$ velmi malou ve srovnání s rychlostí světla, definujeme vztahem

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{(kinetická energie).} \qquad (7.1)$$

Kinetická energie nemůže být nikdy záporná, neboť m ani v^2 záporných hodnot nenabývají.

Tutéž definici můžeme použít i pro těleso nezanedbatelných rozměrů, pokud se všechny jeho části pohybují stejnou rychlostí $\boldsymbol{v}$, tj. konají *posuvný* neboli *translační* pohyb. (Těleso tedy nesmí rotovat, ani se deformovat.) Z hlediska definice kinetické energie se takové těleso chová jako částice. Někdy je nazýváme **bodovým objektem** a o jeho kinetické energii vypočtené podle vztahu (7.1) hovoříme jako o *translační* kinetické energii. Úvahy této kapitoly se týkají právě bodových objektů.

Jednotkou kinetické energie (a každého jiného typu energie) v soustavě SI je **joule** (J), pojmenovaný podle anglického vědce 18. století Jamese Prescotta Joula. Je odvozen přímo z jednotek hmotnosti a rychlosti:

$$1\,\text{joule} = 1\,\text{J} = 1\,\text{kg}{\cdot}\text{m}^2{\cdot}\text{s}^{-2}. \qquad (7.2)$$

Vhodnou jednotkou energie v oblasti atomové fyziky a fyziky subatomových částic je **elektronvolt** (eV):

$$1\,\text{elektronvolt} = 1\,\text{eV} = 1{,}60{\cdot}10^{-19}\,\text{J}. \qquad (7.3)$$

Nečastěji užívanými násobky elektronvoltu jsou kiloelektronvolt ($1\,\text{keV} = 10^3\,\text{eV}$), megaelektronvolt ($1\,\text{MeV} = 10^6\,\text{eV}$) a gigaelektronvolt ($1\,\text{GeV} = 10^9\,\text{eV}$).

PŘÍKLAD 7.1

Psal se rok 1896 a ve městě Waco v Texasu se odehrával neobvyklý experiment. Před zraky třiceti tisíc diváků jej předvedl pracovník železniční společnosti „Katy“ Wiliam Crush. Postavil dvě lokomotivy na opačných koncích trati dlouhé 6,4 km, roztopil jejich kotle a zablokoval záklopky strojů tak, aby zůstaly otevřené. Pak pustil lokomotivy plnou parou proti sobě (obr. 7.1). Čelný náraz měl nedozírné následky. Stovky lidí byly zraněny odletujícími úlomky, několik osob bylo dokonce usmrceno. Předpokládejme, že každá z lokomotiv vážila $1{,}2{\cdot}10^6$ N a jejich zrychlení při rozjezdu mělo konstantní velikost $0{,}26\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-2}$. Jaká byla celková kinetická energie obou lokomotiv těsně před srážkou?

Obr. 7.1 Příklad 7.1. Následky srážky lokomotiv v roce 1896

ŘEŠENÍ: Abychom určili kinetickou energii lokomotivy, potřebujeme znát její hmotnost a velikost rychlosti těsně před srážkou. Pro stanovení velikosti rychlosti v můžeme použít vztahu (2.16), v němž položíme $v_x = v$, $v_{0x} = v_0$ a $a_x = a$:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

Dosadíme $v_0 = 0$ a $x - x_0 = 3{,}2{\cdot}10^3$ m (polovina počáteční vzdálenosti lokomotiv) a dostaneme

$$v^2 = 0 + 2(0{,}26\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-2})(3{,}2{\cdot}10^3\,\text{m}),$$

tj.

$$v = 40{,}8\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-1} \doteq 147\,\text{km/h}.$$

Hmotnost lokomotivy zjistíme vydělením její váhy (tj. tíhové síly, jíž na ni působí Země) tíhovým zrychlením:

$$m = \frac{(1{,}2{\cdot}10^6\,\text{N})}{(9{,}8\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-2})} = 1{,}22{\cdot}10^5\,\text{kg}.$$

Pomocí vztahu (7.1) nyní vypočteme celkovou kinetickou energii obou lokomotiv bezprostředně před srážkou:

$$E_k = 2(\tfrac{1}{2}mv^2) = (1{,}22\cdot10^5\,\mathrm{kg})(40{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})^2 = $$
$$= 2{,}0\cdot10^8\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato energie je ekvivalentní výbuchu asi 45 kg TNT.

7.2 PRÁCE

I když jsme při budování pojmu energie učinili zatím pouze první krůček (definovali jsme kinetickou energii částice), zdá se nám být nepochybné, že energie objektu v obecném smyslu musí mít jednu zcela přirozenou vlastnost: bude se měnit při jeho interakci s okolím. Stejně samozřejmě lze očekávat, že se bude měnit i energie okolí. Hovoříme o **výměně** nebo **přenosu** energie mezi objektem a jeho okolím. Přenos energie mezi jakoukoli fyzikální soustavou a jejím okolím může být zprostředkován silovým působením nebo tepelnou výměnou při různých dějích, které mohou v soustavě probíhat. (**Dějem** neboli procesem jednoduše rozumíme posloupnost stavových změn soustavy.) Výměnou tepla se budeme zabývat až v kapitole 19, zde si všimneme pouze dějů souvisejících se silovým působením a nazývaných souhrnně konáním **práce**.

Působíme-li na těleso určitou silou (silami) tak, že velikost jeho rychlosti přitom roste, roste i jeho kinetická energie ($=\frac{1}{2}mv^2$). A naopak, jestliže se těleso vlivem výsledné síly zpomaluje, klesá i jeho kinetická energie. V takových případech říkáme, že *síla koná na částici (soustavě částic či tělese) práci W*.

Formálnějším způsobem můžeme definovat práci takto: Kinetická energie částice se vlivem silového působení jejího okolí obecně mění. Říkáme, že síly působící na částici **konají práci**. Jestliže síla $\boldsymbol{F}$ zmenšila (nezměnila, zvětšila) kinetickou energii částice, říkáme, že vykonala kladnou (nulovou, zápornou) práci, případně říkáme, že síla práci koná (nekoná, spotřebovává) a pak udáváme už jen velikost práce v joulech, bez znaménka. (Je-li například $W = -6{,}0\,\mathrm{J}$, můžeme říci, že síla *spotřebovala* práci 6,0 J.)

V nejširším smyslu představuje „práce“ tu část energie, kterou těleso získává prostřednictvím silového působení jeho okolí. Proces, při němž k takovému přenosu dochází, nazýváme obecně „konáním práce“. Práce je skalární veličinou a měříme ji ve stejných jednotkách jako energii.

Slovo „přenos“ může být někdy matoucí, není-li správně pochopena jeho souvislost se změnami energie tělesa a jeho okolí. Zatím známe přenos *hmoty* – substance, která se zachovává, nevzniká ani nezaniká a může se jen přemísťovat v prostoru. Hovoříme-li však o přenosu energie, neznamená to, že se na těleso nebo z tělesa do okolí přenáší nějaký „materiál“. Analogii bychom mohli hledat spíše v proceduře elektronického převodu peněz mezi dvěma bankovními účty: údaj na jednom bankovním účtu vzroste, zatímco na druhém poklesne, a přitom se mezi účty nepřemisťuje nic „hmatatelného“. Uvědomme si také, že slovo „práce“ ve fyzice nemá svůj obvyklý význam, podle nějž je prací jakákoli tělesná či duševní činnost. Kdybychom například silně tlačili na stěnu, unaví nás udržovat svaly napjaté. V obvyklém smyslu tedy „pracujeme“. Nedochází však ke změně energie stěny a to znamená, že síla našich svalů nekoná ve smyslu předchozí definice žádnou práci. (Ostatně stát delší dobu v pozoru je dost vyčerpávající, i když se člověk přitom navenek ani nepohne. *Fyzikální práce* je prostě něco jiného než *fyziologická námaha*.)

7.3 PRÁCE A KINETICKÁ ENERGIE

Pokusme se nyní formulovat vztah mezi prací, kterou síla $\boldsymbol{F}$ vykonala na studovaném objektu, a změnou jeho kinetické energie. Kinetickou energii částice či bodového objektu jsme již jednoduše a jasně definovali. Mění-li se velikost rychlosti částice, mění se podle této jednoduché definice i její kinetická energie. Ke změně rychlosti částice však nemůže dojít jinak než působením síly $\boldsymbol{F}$. Je proto zcela přirozené prohlásit, že změna kinetické energie částice ΔE_k je rovna práci W vykonané silou $\boldsymbol{F}$:

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W \quad \text{(vztah mezi prací a kinetickou energií).} \qquad (7.4)$$

Symbolem $E_{k,i}$ jsme označili počáteční kinetickou energii částice ($=\frac{1}{2}mv_0^2$) a $E_{k,f}$ představuje její výslednou kinetickou energii ($\frac{1}{2}mv^2$). Později uvidíme, že vztah (7.4), který vlastně *definuje* práci síly $\boldsymbol{F}$, lze přirozeně zobecnit i na případy, kdy na částici působí více sil. Znak $\boldsymbol{F}$ pak bude symbolizovat jejich výslednici.

Rovnost (7.4) můžeme přepsat ve tvaru

$$E_{k,f} = E_{k,i} + W. \qquad (7.5)$$

Vztahy (7.4) a (7.5) představují ekvivalentní formulace **vztahu mezi prací a kinetickou energií**.

Při jejich používání je třeba mít neustále na paměti, že byly formulovány pro částici nebo tzv. bodový objekt a jejich platnost je také tímto předpokladem omezena.

Zkusme posoudit, jakým způsobem může dojít k porušení jejich platnosti, budeme-li uvažovat o zcela libovolném tělese. U takového obecného objektu musíme především respektovat, že se jeho různé části pohybují různými rychlostmi. Stačí si představit rotující nebo deformující se těleso. Pro výpočet jeho kinetické energie samozřejmě nemůžeme použít vztahu (7.1), ale musíme kinetické energie jednotlivých částí nějak sečíst. Poté, co se nám podaří kinetickou energii obecného tělesa vyjádřit, přijdou na řadu úvahy o jejích změnách prostřednictvím silového působení, tj. při procesu „konání práce“. Je zřejmé, že na tomto procesu se budou podílet nejen *vnější* síly, jimiž na těleso působí jeho okolí, ale i síly vzájemného působení jednotlivých částí tělesa, tzv. síly *vnitřní*. Později uvidíme, že práci vnitřních sil určitého typu (gravitačních, elektrostatických, sil pnutí apod.) je často možné a dokonce vhodné považovat za určitý typ energie tělesa. Vztahy (7.4) a (7.5) v takových případech platit nebudou, neboť práce W vykonaná *vnější* silou $\boldsymbol{F}$ přispěje nejen ke změně kinetické energie tělesa, ale i ke změně ostatních „druhů“ energie. Uveďme příklad: uvažujme o bruslaři, který se odstrčil od mantinelu, nebo o plavci, který se při obrátce odrazil od stěny bazénu. Bruslařovy dlaně či plavcova chodidla, na něž bezprostředně působí tlaková síla stěny (vnější síla), jsou během odrazu v klidu. Můžeme tedy usuzovat, že tlaková síla stěny nekoná práci. A přesto se kinetická energie sportovce změní. K této změně přispívá práce (vnitřních) sil svalstva, kterou můžeme interpretovat jako jeden z druhů energie tělesa. Podobná situace vzniká třeba při odrazu míče od stěny či od podlahy. Můžeme tedy vyslovit předběžný závěr:

Mění-li se vlivem působící síly i energie tělesa jiného typu než kinetická, pak vztahy (7.4) *a* (7.5) *nemusejí platit.*

Samostatnou úvahu si zaslouží případy, kdy na pohybující se těleso působí síly tření. Právem si můžeme klást otázku, zda v takových případech zůstanou vztahy (7.4) a (7.5) v platnosti, či nikoliv. Z experimentu totiž víme, že se těleso při působení třecích sil zahřívá. Se vzrůstem jeho teploty celkem přirozeně spojujeme další druh jeho energie, tzv. vnitřní energii. Tato veličina velmi úzce souvisí s mikrostrukturou tělesa, konkrétně s náhodným pohybem jeho atomů či molekul a jejich vzájemnými vazbami. O mechanismu třecích sil již leccos víme z kap. 6, a tak si umíme představit, že mikroskopické narušení materiálu troucích se ploch je doprovázeno změnami či uvolněním vazební energie mezi povrchovými atomy či molekulami a odpovídajícím zvýšením jejich kinetické energie. V makroskopickém měřítku se to projeví jako zvýšení teploty tělesa. Pro naše další úvahy zahrnující působení sil tření je však podstatné, že i přes zdánlivé komplikace s vnitřní energií můžeme vztahů (7.4) a (7.5) využívat. Mechanismus třecích sil sice souvisí výhradně s mikroskopickou strukturou objektů, avšak nakonec je přece jen možné vyjádřit třecí síly mezi nimi *makroskopickým* silovým zákonem $F_\mathrm{d} = f_\mathrm{d} N$, obsahujícím empiricky definovaný koeficient tření.

O dynamické třecí síle v souvislosti se změnami energie budeme podrobněji uvažovat v kap. 8 a o vnitřních přeměnách energie se zmíníme v kap. 9.

KONTROLA 1: Částice se pohybuje po ose x. Rozhodněte, zda se její kinetické energie zvýší, sníží, nebo se zachová, změní-li se rychlost částice (a) z $-3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ na $-2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, (b) z $-2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ na $2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (c) Pro každou z uvedených situací rozhodněte, zda je práce vykonaná silami působícími na částici kladná, záporná, nebo nulová.

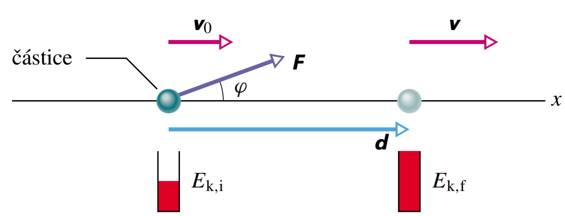
Práce síly

Uvedeme nyní do souvislosti změnu kinetické energie objektu ΔE_k se silou $\boldsymbol{F}$, která tuto změnu způsobila. Všimneme si nejprve situace, kdy sledovaným objektem je částice. Jediným typem energie, který tomuto nejjednoduššímu objektu přísluší, je energie kinetická. Na obr. 7.2 se částice pohybuje podél osy x po vodorovné dokonale hladké podlaze. Působí na ni stálá síla $\boldsymbol{F}$, která svírá s její trajektorií úhel φ. Zrychlení částice podél osy x je dáno vodorovnou složkou této síly $F\cos\varphi$. Rychlost částice a tedy i její kinetická energie se mění. Počáteční rychlost označme $\boldsymbol{v}_0$. Působení síly sledujeme v průběhu posunutí částice o vektor $\boldsymbol{d}$. Velikost v výsledné rychlosti částice $\boldsymbol{v}$ lze určit pomocí vztahu (2.16)

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x d. \tag{7.6}$$

Vynásobením obou stran rovnice (7.6) hmotností částice m a úpravou dostaneme

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = ma_x d. \tag{7.7}$$



Obr. 7.2 Na částici působí stálá síla $\boldsymbol{F}$, která svírá s vektorem $\boldsymbol{d}$ posunutí částice úhel φ. Rychlost částice se změní z $\boldsymbol{v}_0$ na $\boldsymbol{v}$. „Měrka kinetické energie“ ukazuje, že došlo ke změně kinetické energie částice z hodnoty $E_\mathrm{k,i}$ na hodnotu $E_\mathrm{k,f}$.

Na levé straně rovnosti (7.7) vystupuje rozdíl kinetických energií $E_\mathrm{k,f}$ $(= \frac{1}{2}mv^2)$ a $E_\mathrm{k,i}$ $(= \frac{1}{2}mv_0^2)$ příslušných koncovému a počátečnímu pohybovému stavu částice. Tento rozdíl představuje změnu kinetické energie částice vyvolanou působením síly $\boldsymbol{F}$ podél úseku trajektorie spojujícího počáteční a koncovou polohu částice. Náhradou součinu ma_x výrazem $F\cos\varphi$ (v souladu s platností druhého Newtonova zákona) dostaneme

$$\Delta E_k = Fd\cos\varphi. \tag{7.8}$$

Porovnáme-li nyní vztahy (7.8) a (7.4), vidíme, že pravá strana rovnosti (7.8) vyjadřuje práci W, kterou vykonala síla $\boldsymbol{F}$ při přemístění částice z počátečního do koncového stavu. Můžeme tedy psát

$$W = Fd\cos\varphi \quad \text{(práce konstantní síly).} \tag{7.9}$$

Je-li úhel φ menší než 90°, je práce W kladná a kinetická energie částice *roste*. Je-li φ větší než 90° (až do 180°), je práce W záporná a kinetická energie částice klesá. (Pro $\varphi = 90°$ je $W = 0$ a kinetická energie částice se nemění.) Síla $\boldsymbol{F}$ samozřejmě není v uvažovaném případě jedinou silou působící na částici. Pohyb částice je totiž přímočarý a jeho směr není shodný se směrem síly $\boldsymbol{F}$. Je proto zřejmé, že na částici nutně působí ještě alespoň jedna další síla, která kompenzuje průmět síly $\boldsymbol{F}$ do osy y. Celkovou práci dvou kompenzujících se sil však můžeme zcela jistě pokládat za nulovou.

Ze vztahu (7.9) je zřejmé, že kromě jednotky joule můžeme v soustavě SI používat také jednotku Newton·metr (N·m). Odpovídající jednotkou v britském systému jednotek je stopa·libra (ft·lb). Vztah (7.2) tedy můžeme ještě doplnit takto:

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}} = 1\,\mathrm{N{\cdot}m} = 0{,}738\,\mathrm{ft{\cdot}lb}. \tag{7.10}$$

Pravá strana rovnosti (7.9) představuje výraz pro skalární součin $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{d}$ vektorů $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{d}$. Vektorový zápis vztahu (7.9) má tedy tvar

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{d} \quad \text{(práce konstantní síly).} \tag{7.11}$$

(V tomto místě textu jsme poprvé použili skalárního součinu. Pro zopakování je vhodné připomenout si čl. 3.7.) Vztah (7.11) je zvláště užitečný, jsou-li vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{d}$ zapsány pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy souřadnic.

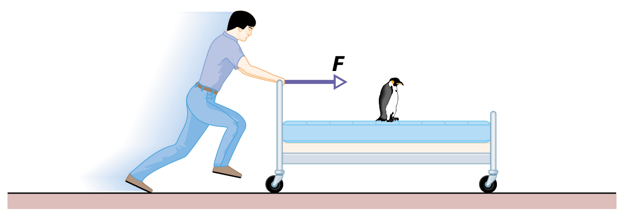
Vztahy (7.9) a (7.11) vyjadřují práci *konstantní* síly $\boldsymbol{F}$ působící na *částici* nebo *bodový objekt*. Jejich platnost však lze rozšířit i na případ konstantní síly působící na libovolné těleso, budeme-li symbolem $\boldsymbol{d}$ rozumět posunutí *působiště* síly $\boldsymbol{F}$. Práce síly $\boldsymbol{F}$ vykonaná na tělese pak bude opět dána vztahy (7.9), resp. (7.11), nebude však již obecně rovna změně kinetické energie uvažovaného tělesa.

Zdůrazněme ještě jednu důležitou možnost zobecnění vztahů (7.9) a (7.11). Přestože jsme je odvodili pro částici, která se pohybuje přímočaře, zůstanou v případě konstantní síly v platnosti i při pohybu po libovolné křivce. Budeme se o tom moci přesvědčit v čl. 7.5, kde se budeme zabývat výpočtem práce zcela obecně.

Úvahy týkající se práce síly působící na těleso můžeme prozatím shrnout takto:

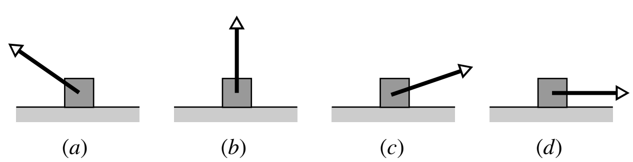
> Práce stálé síly $\boldsymbol{F}$ působící na dané těleso v bodě, jehož posunutí je $\boldsymbol{d}$, je dána vztahy (7.9) a (7.11). V případě, že tělesem je částice nebo bodový objekt, je tato práce rovna změně jeho kinetické energie.

Na obr. 7.3 je například vyobrazen student, jak pohání postel při školních závodech o nejrychlejšího běžce s postelí. Vyjadřují vztahy (7.9) a (7.11) práci vykonanou silou, jíž působí student na postel, je-li tato síla konstantní? Uvedených vztahů pro výpočet práce samozřejmě použít můžeme. Snadno se přesvědčíme, že větší část této práce, ne však všechna, skutečně přispívá ke změně kinetické energie postele i s tučňákem, který se na ní veze. Jistá malá část je však potřebná pro urychlení rotačního pohybu koleček. Jestliže považujeme tento příspěvek za zanedbatelný, můžeme postel považovat za bodový objekt a použít i vztahů (7.4) a (7.5).



Obr. 7.3 Závody s postelemi. Pro výpočet práce, kterou vykoná student, stačí nahradit postel hmotným bodem.

KONTROLA 2: Obrázek ukazuje čtyři možnosti působení síly na kostku, která klouže po vodorovné dokonale hladké podložce směrem vpravo. Velikosti sil jsou stejné, různé orientace jsou schematicky vyznačeny v obrázcích. Uspořádejte obrázky podle práce (sestupně), kterou působící síla vykoná při posunutí kostky o vzdálenost d.



Práce vykonaná několika silami

Působí-li na částici několik sil $\boldsymbol{F}_j$, jejichž výslednice je konstantní, můžeme jejich celkovou práci určit tak, že ve vztahu (7.11) nahradíme výraz $\boldsymbol{F}$ touto výslednicí $\sum_j \boldsymbol{F}_j$, tj.

$$\sum_j \boldsymbol{F}_j = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots, \qquad (7.12)$$

kde $\boldsymbol{F}_j$ jsou jednotlivé síly.

$$W = \left(\sum_j \boldsymbol{F}_j\right) \cdot \boldsymbol{d} \qquad (7.13)$$

je tedy práce vykonaná výslednicí sil při posunutí $\boldsymbol{d}$ částice. Jsou-li konstantní i jednotlivé síly $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, …, můžeme vztah (7.13) přepsat pomocí rov. (7.12) ve tvaru

$$W = \boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{d} + \boldsymbol{F}_2 \cdot \boldsymbol{d} + \boldsymbol{F}_3 \cdot \boldsymbol{d} + \ldots =$$
$$= W_1 + W_2 + W_3 + \ldots \quad \text{(celková práce)}. \qquad (7.14)$$

Tento vztah vyjadřuje skutečnost, že celková práce vykonaná na částici je součtem prací vykonaných jednotlivými silami, které na ni působí. Vztah (7.4) nyní můžeme přepsat takto:

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots. \qquad (7.15)$$

Změna ΔE_k kinetické energie částice je tedy rovna celkové práci vykonané všemi silami, které na částici působí.

PŘÍKLAD 7.2

Na obr. 7.4a jsou nakresleni dva průmysloví špioni, kteří sunou sejf o hmotnosti 225 kg po přímce do vzdálenosti 8,5 m k přistavenému nákladnímu autu. (Zpočátku byl sejf v klidu.) Špion 001 působí tlakovou silou $\boldsymbol{F}_1$ o velikosti 12,0 N, která svírá s vodorovnou rovinou úhel 30° a míří dolů. Špion 002 působí na sejf tahovou silou $\boldsymbol{F}_2$ o velikosti 10,0 N směrem vzhůru pod úhlem 40° vzhledem k vodorovné rovině. Sejf klouže po podlaze bez tření.

(a) Jakou celkovou práci vykonají síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ při posunutí sejfu o 8,5 m?

ŘEŠENÍ: Na obr. 7.4b je silový diagram sil zkonstruovaný pro sejf, který aproximujeme částicí. Celkovou práci sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ určíme tak, že vypočteme práci každé z nich a získané hodnoty sečteme. Podle vztahu (7.9) je práce síly $\boldsymbol{F}_1$ rovna

$$W_1 = F_1 d \cos\varphi_1 = (12{,}0\,\mathrm{N})(8{,}50\,\mathrm{m})\cos 30^\circ =$$
$$= 88{,}33\,\mathrm{J},$$

práce síly $\boldsymbol{F}_2$ je

$$W_2 = F_2 d \cos\varphi_2 = (10{,}0\,\mathrm{N})(8{,}50\,\mathrm{m})\cos 40^\circ = 65{,}11\,\mathrm{J}.$$

Podle (7.14) je celková práce W dána jejich součtem

$$W = W_1 + W_2 = 88{,}33\,\mathrm{J} + 65{,}11\,\mathrm{J} =$$
$$= 153{,}4\,\mathrm{J} \doteq 153\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při posunutí sejfu o 8,5 m tedy špioni vykonají práci 153 J. O tuto hodnotu se zvýší kinetická energie sejfu.

(b) Jakou práci W_g vykoná při posunutí $\boldsymbol{d}$ tíhová síla $\boldsymbol{G}$ a jaká je práce W_N normálové síly $\boldsymbol{N}$, jíž působí na sejf podlaha?

ŘEŠENÍ: Síly $\boldsymbol{G}$ a $\boldsymbol{N}$ jsou kolmé k posunutí. Podle vztahu (7.9) je

$$W_g = mgd \cdot \cos 90^\circ = mgd \cdot 0 = 0 \qquad \text{(Odpověď)}$$

a

$$W_N = Nd \cdot \cos 90^\circ = Nd \cdot 0 = 0.$$

Práce vykonaná každou ze sil $\boldsymbol{G}$ a $\boldsymbol{N}$ je nulová. Působení těchto sil při posunutí sejfu o vektor $\boldsymbol{d}$ nevede ke změně jeho kinetické energie.

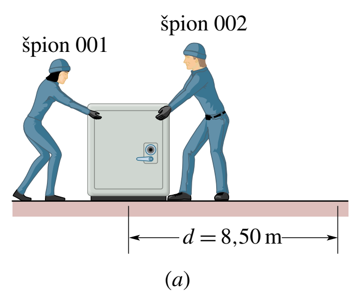
(c) Sejf byl zpočátku v klidu. Jak velká je jeho rychlost na konci posunutí?

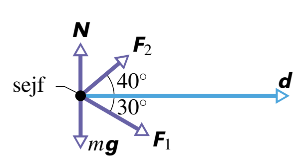
ŘEŠENÍ: Změna velikosti rychlosti sejfu souvisí se změnou jeho kinetické energie, a tedy i s celkovou prací vykonanou silami, které na sejf působí. Spojením vztahů (7.4) a (7.1) dostaneme

$$W = E_{k,f} - E_{k,i} = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2.$$

Počáteční rychlost je nulová, celková práce W je rovna 153 J. Řešením předchozí rovnice vzhledem k neznámé v dostaneme po dosazení zadaných údajů

$$v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2(153{,}4\,\mathrm{J})}{(225\,\mathrm{kg})}} =$$
$$= 1{,}17\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

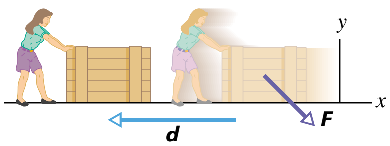




Obr. 7.4 Příklad 7.2. (a) Dva špioni posouvají sejf. (b) Silový diagram s vyznačením posunutí $\boldsymbol{d}$.

PŘÍKLAD 7.3

Ujíždějící bedna švestek klouže po vodorovné podlaze směrem k ženě, která se ji snaží zbrzdit tak, že ji odtlačuje silou $\boldsymbol{F} = (2{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (-6{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}$ a ustupuje před ní (obr. 7.5). Bedna se při tom posune o vektor $\boldsymbol{d} = (-3{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{i}$.



Obr. 7.5 Příklad 7.3. Brzdění bedny silou $\boldsymbol{F}$ při posunutí $\boldsymbol{d}$.

(a) Jakou práci vykonala síla $\boldsymbol{F}$ při posunutí $\boldsymbol{d}$?

ŘEŠENÍ: Podle vztahu (7.11) je hledaná práce rovna

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{d} = [(2{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (-6{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}]\cdot[(-3{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{i}].$$

Ze všech skalárních součinů navzájem kolmých jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ jsou pouze tři nenulové, konkrétně $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}$ (viz článek 3.7). Dostáváme tedy

$$W = (2{,}0)(-3{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} + (-6{,}0\,\mathrm{N})(-3{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} =$$
$$= (-6{,}0\,\mathrm{J})(1) + 0 = -6{,}0\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Síla $\boldsymbol{F}$ vykoná práci $-6{,}0\,\mathrm{J}$ a kinetická energie bedny o $6{,}0\,\mathrm{J}$ klesne.

(b) Jaká je kinetická energie bedny na konci posunutí, měla-li na začátku hodnotu 10 J?

ŘEŠENÍ: Užitím vztahu (7.5) pro hodnoty $E_{\mathrm{k,i}} = 10\,\mathrm{J}$ a $W = -6{,}0\,\mathrm{J}$ dostaneme

$$E_{\mathrm{k,f}} = E_{\mathrm{k,i}} + W = 10\,\mathrm{J} + (-6{,}0\,\mathrm{J}) = 4{,}0\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

7.4 PRÁCE TÍHOVÉ SÍLY

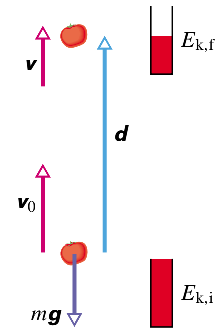
Nyní se pokusíme zjistit, jakou práci koná síla zcela určitého typu. Konkrétně půjde o sílu tíhovou. Rajské jablíčko o hmotnosti m na obr. 7.6, které lze považovat za bodový objekt, vyhodíme svisle vzhůru počáteční rychlostí o velikosti v_0 vzhledem k Zemi. Má tedy počáteční kinetickou energii $E_{\mathrm{k,i}} = \frac{1}{2}mv_0^2$. Během výstupu se jeho pohyb působením tíhové síly $m\boldsymbol{g}$ zpomaluje a kinetická energie klesá. Experiment potvrzuje, že je-li tíhová síla jedinou silou, která na jablíčko působí (odporová síla vzduchu je nějakým způsobem eliminována), pak jedině práce tíhové síly přispívá ke změně jeho kinetické energie. Abychom tuto práci W_{g} určili, dosadíme za F do vztahu (7.9) velikost tíhové síly mg. Pak

$$W_{\mathrm{g}} = mgd\cos\varphi \qquad \text{(práce tíhové síly)}. \qquad (7.16)$$

Jestliže sledovaná částice stoupá, jako je tomu v našem případě, míří tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ proti posunutí $\boldsymbol{d}$ (obr. 7.6). Pak je $\varphi = 180^\circ$ a

$$W_{\mathrm{g}} = mgd\cdot\cos 180^\circ = mgd\cdot(-1) = -mgd. \qquad (7.17)$$

Znaménko minus signalizuje, že kinetická energie stoupající částice klesne působením tíhové síly po dráze d o hodnotu mgd. To je zcela v souhlasu se skutečností, že se pohyb částice zpomaluje.



Obr. 7.6 Rajské jablíčko o hmotnosti m (bodový objekt) je vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$. Vlivem tíhové síly $m\boldsymbol{g}$ se během posunutí $\boldsymbol{d}$ jeho pohyb zpomalí na rychlost $\boldsymbol{v}$. „Energiová odměrka“ znázorňuje výslednou změnu kinetické energie jablíčka z počáteční hodnoty $E_{\mathrm{k,i}} = \frac{1}{2}mv_0^2$ na hodnotu $E_{\mathrm{k,f}} = \frac{1}{2}mv^2$.

Poté, co částice dosáhla maximální výšky a padá zpět dolů, je úhel φ mezi tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$ a posunutím $\boldsymbol{d}$ nulový. Pak platí

$$W_{\mathrm{g}} = mgd\cdot\cos(0^\circ) = mgd\cdot(+1) = +mgd. \qquad (7.18)$$

Znaménko plus nás informuje, že nyní kinetická energie objektu vzrostla. Výsledek je opět v souhlasu se skutečností, neboť velikost rychlosti tělesa při pádu roste. (Ve skutečnosti se přesvědčíme v kapitole 8, že při stoupání či pádu tělesa v tíhovém poli Země nestačí brát v úvahu změny kinetické energie jen tělesa samotného, nýbrž je třeba uvažovat o soustavě těleso + Země. Bez přítomnosti Země by slova „stoupání“ a „klesání“ samozřejmě pozbyla významu.)

Práce při stoupání a klesání tělesa

Představme si nyní, že na bodový objekt působíme silou $\boldsymbol{F}$ a zvedáme jej. Při jeho posunutí směrem vzhůru koná síla $\boldsymbol{F}$ kladnou práci W_a, zatímco tíhová síla koná práci zápornou, W_{g}. To znamená, že síla $\boldsymbol{F}$ se „snaží“ zvýšit kinetickou energii objektu, působení síly tíhové ji naopak snižuje.

Vztah (7.15) umožňuje vyjádřit změnu kinetické energie tělesa způsobenou oběma uvažovanými silami:

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W_a + W_g, \tag{7.19}$$

kde $E_{k,f}$, resp. $E_{k,i}$ je kinetická energie tělesa na konci, resp. na počátku posunutí. Tento vztah platí i v případě, že těleso klesá. Působením tíhové síly se však nyní kinetická energie tělesa zvyšuje, zatímco působení síly $\boldsymbol{F}$ vede k jejímu poklesu (síla $\boldsymbol{F}$ směřuje stále vzhůru).

Obvyklá situace nastává, je-li objekt v klidu na začátku i na konci posunutí (například zvedneme-li knihu z podlahy a položíme ji na polici). Pak jsou hodnoty $E_{k,i}$ i $E_{k,f}$ nulové a vztah (7.19) se zjednoduší do tvaru

$$W_a + W_g = 0,$$

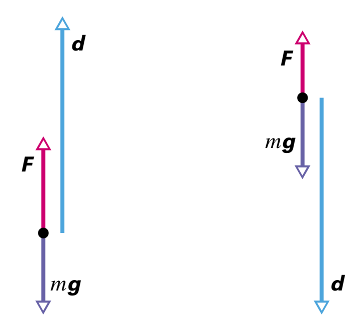
tj.

$$W_a = -W_g. \tag{7.20}$$

Stejný výsledek dostaneme i při nenulových, avšak shodných hodnotách $E_{k,i}$ a $E_{k,f}$. Má-li tedy těleso na počátku i na konci posunutí stejnou kinetickou energii, je práce vykonaná silou $\boldsymbol{F}$ při tomto posunutí rovna záporně vzaté práci vykonané tíhovou silou. Síla $\boldsymbol{F}$ vyvolá stejně velkou změnu kinetické energie tělesa jako síla tíhová, avšak opačného znaménka. Užitím (7.16) můžeme vztah (7.20) přepsat do tvaru

$$W_a = -mgd\cos\varphi \quad \text{(práce při vzestupu a pádu tělesa při } E_{k,i} = E_{k,f}\text{)}, \tag{7.21}$$

přičemž φ je úhel mezi tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$ a posunutím $\boldsymbol{d}$. Míří-li vektor posunutí svisle vzhůru (obr. 7.7a), je $\varphi = 180°$ a práce vykonaná silou $\boldsymbol{F}$ je mgd. Při svislém posunutí směrem dolů (obr. 7.7b) je $\varphi = 0°$ a práce této síly je $-mgd$.



(*a*) (*b*)

Obr. 7.7 Na těleso působí tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ a síla $\boldsymbol{F}$. (a) Těleso stoupá. Jeho posunutí $\boldsymbol{d}$ svírá úhel $\varphi = 180°$ s tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$. Síla $\boldsymbol{F}$ koná kladnou práci. (b) Těleso klesá. Úhel mezi posunutím $\boldsymbol{d}$ a tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$ je $\varphi = 0°$. Síla $\boldsymbol{F}$ koná zápornou práci.

Vztahy (7.20) a (7.21) jsou použitelné pro stoupající i klesající těleso, které je na počátku i na konci posunutí v klidu. Jejich platnost je nezávislá na konkrétním průběhu velikosti síly $\boldsymbol{F}$ během pohybu. Když například Vasilij Aleksejev zvedal nad hlavu rekordní činku 2 500 N, musela se síla, kterou na ni během tohoto úkonu působil, výrazně měnit. Činka ovšem byla na začátku i na konci celé akce v klidu. Vzpěrač tedy nepochybně vykonal práci danou vztahy (7.20) a (7.21), kde mg představuje zátěž, kterou zvedl, a d velikost jejího posunutí.

Pomocí postroje zvedá Paul Anderson 30 osob o celkové váze 2 400 lb.

PŘÍKLAD 7.4

Ještě jednou se vraťme k výkonům Vasilije Aleksejeva a Paula Andersona.

(a) Aleksejev zvedl činku o váze 2 500 N do výšky 2,0 m. Jakou práci přitom vykonala tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ působící na činku?

ŘEŠENÍ: Velikost tíhové síly $m\boldsymbol{g}$ je mg. Úhel φ mezi vektorem tíhové síly a vektorem posunutí $\boldsymbol{d}$ má hodnotu 180°. Ze vztahu (7.16) vyplývá, že práce tíhové síly je

$$W_g = mgd\cos\varphi = (2\,500\,\mathrm{N})(2{,}0\,\mathrm{m})\cos 180° = $$
$$= -5\,000\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jakou práci vykonala síla, jíž působil na činku Aleksejev?

ŘEŠENÍ: Protože byla činka v klidu na počátku i na konci úkonu, můžeme použít vztah (7.20) a dostaneme

$$W_{VA} = -W_g = +5\,000\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jakou práci vykonala síla, kterou působil Aleksejev na činku, když ji držel nad hlavou?

ŘEŠENÍ: Když vzpěrač držel činku nad hlavou, byla v klidu. Její posunutí bylo nulové a podle (7.9) byla tedy nulová i práce působící síly (i když držet činku bylo jistě velmi únavné).

(d) Jakou práci vykonala síla, jíž působil Paul Anderson při zvednutí zátěže 27 900 N o 1 cm?

ŘEŠENÍ: Užitím vztahu (7.21) a hodnot $mg = 27\,900\,\mathrm{N}$ a $d = 1{,}0\,\mathrm{cm}$ dostaneme

$$W_{\mathrm{PA}} = -mgd\cos\varphi = -mgd\cos 180^\circ = \\ = -(27\,900\,\mathrm{N})(0{,}01\,\mathrm{m})(-1) = 280\,\mathrm{J}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Andersonův výkon vyžadoval sice obrovskou sílu, ale vykonaná práce byla díky velmi malému posunutí nákladu pouhých 280 J.

PŘÍKLAD 7.5

Bedna, která byla zpočátku v klidu, je tažena na laně směrem vzhůru po dokonale hladké šikmé rampě. Pohyb tažného lana se zastavil poté, co bedna urazila vzdálenost $L = 5{,}70\,\mathrm{m}$ a zvedla se tak do výšky $h = 2{,}50\,\mathrm{m}$ nad počáteční úroveň (obr. 7.8a).

(a) Jakou práci přitom vykonala tíhová síla?

ŘEŠENÍ: Hledanou práci vypočteme podle vztahu (7.16) pro velikost posunutí $d = L$. Úhel mezi tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$ a posunutím je $\theta + 90^\circ$ (viz silový diagram na obr. 7.8b). Dostáváme

$$W_{\mathrm{g}} = mgL\cos(\theta + 90^\circ) = -mgL\sin\theta.$$

Z obr. 7.8a vidíme, že $L\sin\theta$ je právě výška h, o kterou se bedna zvedla. Je tedy

$$W_{\mathrm{g}} = -mgh. \tag{7.22}$$

Znamená to, že práce vykonaná tíhovou silou závisí pouze na posunutí bedny ve svislém směru, zatímco vodorovné posunutí není rozhodující. (K tomuto závěru se ještě vrátíme v kapitole 8.) Dosazením zadaných údajů do rov. (7.22) dostaneme

$$W_{\mathrm{g}} = -(15{,}0\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(2{,}50\,\mathrm{m}) = \\ = -368\,\mathrm{J}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jakou práci vykonala tahová síla lana $\boldsymbol{T}$?

ŘEŠENÍ: Bedna je na začátku i na konci posunutí v klidu, změna její kinetické energie ΔE_{k} je tedy nulová. Podle (7.15) je pak

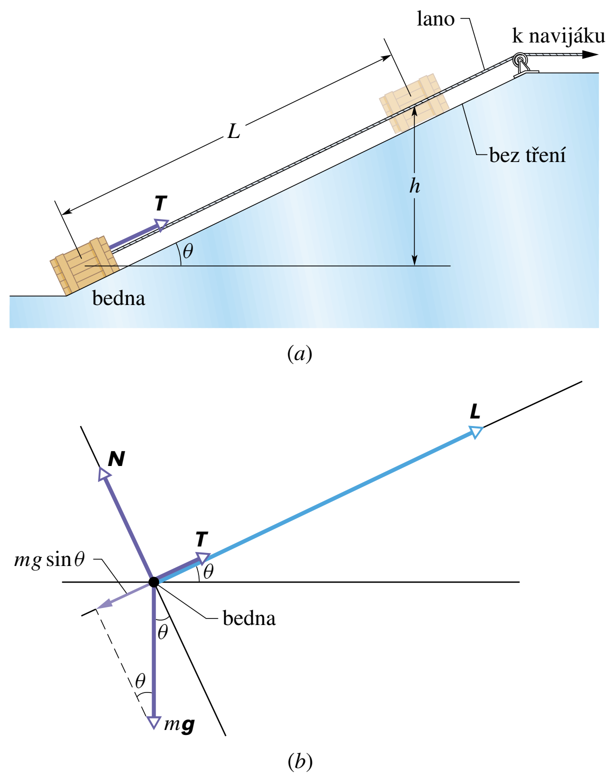
$$\Delta E_{\mathrm{k}} = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots. \tag{7.23}$$

Vidíme, že celková práce všech sil působících na bednu musí být nulová. Kromě tíhové síly působí na bednu pouze dvě další síly: tahová síla lana $\boldsymbol{T}$ a normálová síla podložky $\boldsymbol{N}$. Síla $\boldsymbol{N}$ je kolmá k posunutí a proto nekoná práci. Označíme-li W_T práci tahové síly lana, dostáváme užitím vztahu (7.23)

$$0 = W_{\mathrm{g}} + W_T.$$

Dosazením $W_{\mathrm{g}} = -368\,\mathrm{J}$ získáme hledanou práci W_T:

$$W_T = 368\,\mathrm{J}. \quad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 7.8 Příklad 7.5. (a) Bedna je tažena po dokonale hladké rampě. Tahová síla lana je s rampou rovnoběžná. (b) Silový diagram bedny s vyznačením všech sil, které na ni působí. Vyznačeno je i posunutí $\boldsymbol{L}$.

KONTROLA 3: Představme si, že jsme bednu z příkladu 7.5 vytáhli do stejné výšky h, avšak po delší rampě. (a) Je práce síly $\boldsymbol{T}$ nyní větší, menší, či stejná jako v př. 7.5? (b) Rozhodněte, zda je velikost síly $\boldsymbol{T}$ větší, menší, či stejná jako v př. 7.5.

PŘÍKLAD 7.6

Kabina výtahu o hmotnosti 500 kg klesá rychlostí o velikosti $v_{\mathrm{i}} = 4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Tažné lano začne najednou klouzat a pokles kabiny se urychluje, přičemž $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}/5$ (obr. 7.9a).

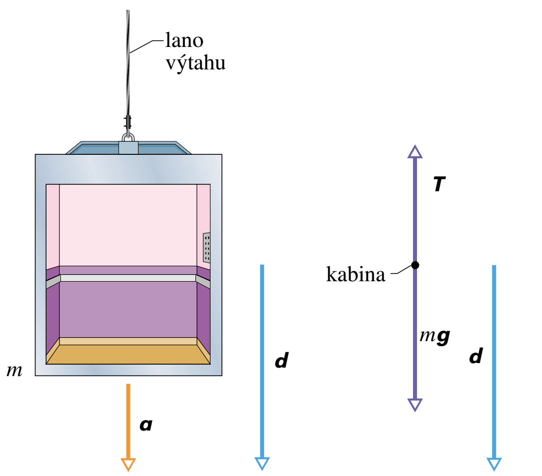
(a) Jakou práci vykoná tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ působící na padající kabinu při posunutí o velikosti $d = 12\,\mathrm{m}$?

ŘEŠENÍ: Silový diagram kabiny při poklesu o 12 m je znázorněn na obr. 7.9b. Úhel mezi posunutím $\boldsymbol{d}$ a tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$ je 0°. Pomocí rov. (7.16) dostaneme

$$W_1 = mgd\cos 0° = (500\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(12\,\mathrm{m})(1) = \\ = 5{,}88{\cdot}10^4\,\mathrm{J} \doteq 5{,}9{\cdot}10^4\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jakou práci vykoná při témže posunutí kabiny tahová síla lana?

ŘEŠENÍ: Situace se liší od př. 7.4 a 7.5 tím, že kinetická energie kabiny na začátku a na konci posunutí není stejná. Rovnic (7.20) a (7.21) nelze použít: práce vykonaná silou $\boldsymbol{T}$ není rovna záporně vzaté práci tíhové síly.



Obr. 7.9 Příklad 7.6. Kabina výtahu, klesající rychlostí o velikosti v_i, se najednou začne urychlovat směrem dolů. (a) Kabina se posune o vektor $\boldsymbol{d}$ se zrychlením $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}/5$. (b) Silový diagram kabiny s vyznačením posunutí.

Práci W_2 síly $\boldsymbol{T}$ musíme určit pomocí vztahu (7.9) ($W = Fd\cos\varphi$). Nejprve zjistíme velikost síly $\boldsymbol{T}$. Užitím druhého Newtonova zákona pro pohyb kabiny dostáváme

$$\sum_j F_j = T - mg = ma.$$

Protože zrychlení $\boldsymbol{a}$ má velikost $g/5$ a míří dolů, je

$$T = m(g+a) = m(g - g/5) = \\ = (500\,\mathrm{kg})(\tfrac{4}{5})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = 3\,920\,\mathrm{N}.$$

Pro výpočet práce použijeme nyní vztahu (7.9). Úhel mezi silou $\boldsymbol{T}$ a posunutím kabiny $\boldsymbol{d}$ je 180°. Síla $\boldsymbol{T}$ má velikost 3 920 N, velikost posunutí je 12 m. Dostáváme

$$W_2 = Td\cos 180° = (3\,920\,\mathrm{N})(12\,\mathrm{m})(-1) = \\ = -4{,}70{\cdot}10^4\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jaká je celková práce všech sil působících na kabinu?

ŘEŠENÍ: Podle (7.14) je celková práce algebraickým součtem prací obou sil:

$$W = W_1 + W_2 = (5{,}88{\cdot}10^4\,\mathrm{J}) - (4{,}70{\cdot}10^4\,\mathrm{J}) = \\ = 1{,}18{\cdot}10^4\,\mathrm{J} \doteq 1{,}2{\cdot}10^4\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Během posunutí kabiny o 12 m se její kinetická energie zvýší o $1{,}2{\cdot}10^4$ J.

Práci W můžeme určit i jinak. Užitím druhého Newtonova zákona zjistíme nejprve výslednici sil působících na kabinu:

$$\sum F = ma = (500\,\mathrm{kg})\left(-\frac{9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}{5}\right) = -980\,\mathrm{N}.$$

Výslednice míří dolů a svírá s posunutím úhel 0°. Práce, kterou vykoná, je

$$W = (980\,\mathrm{N})(12\,\mathrm{m})\cos 0° = \\ = 1{,}18{\cdot}10^4\,\mathrm{J} \doteq 1{,}2{\cdot}10^4\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(d) Jaká je kinetická energie kabiny na konci posunutí?

ŘEŠENÍ: Kinetická energie na začátku posunutí, tj. při rychlosti o velikosti $v_\mathrm{i} = 4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, je

$$E_{\mathrm{k,i}} = \tfrac{1}{2}mv_\mathrm{i}^2 = \tfrac{1}{2}(500\,\mathrm{kg})(4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 = 4\,000\,\mathrm{J}.$$

Kinetická energie $E_{\mathrm{k,f}}$ na konci posunutí je dána vztahem (7.5):

$$E_{\mathrm{k,f}} = E_{\mathrm{k,i}} + W = 4\,000\,\mathrm{J} + 1{,}18{\cdot}10^4\,\mathrm{J} = \\ = 1{,}58{\cdot}10^4\,\mathrm{J} \doteq 1{,}6{\cdot}10^4\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(e) Jaká je velikost rychlosti v_f na konci posunutí?

ŘEŠENÍ: Z (7.1) dostaneme

$$E_{\mathrm{k,f}} = \tfrac{1}{2}mv_\mathrm{f}^2,$$

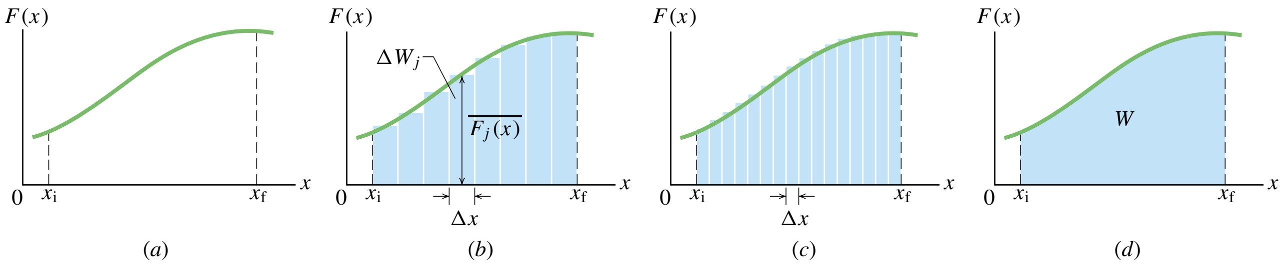
odkud pro v_f máme

$$v_\mathrm{f} = \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{k,f}}}{m}} = \sqrt{\frac{2(1{,}58{\cdot}10^4\,\mathrm{J})}{(500\,\mathrm{kg})}} = \\ = 7{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

7.5 PRÁCE PROMĚNNÉ SÍLY

Jednorozměrný případ

Vraťme se k situaci na obr. 7.2. Předpokládejme však nyní, že síla $\boldsymbol{F}$, která působí na částici a koná při jejím pohybu jistou práci, směřuje podél osy x a její velikost se mění s polohou částice. Síla je tedy *proměnná*. V uvažovaném



Obr. 7.10 (a) Graf obecné závislosti síly působící na částici na její poloze. Částice se pohybuje po přímce (osa x), její poloha je popsána souřadnicí x v intervalu mezi počátečním a koncovým bodem x_i, resp. x_f. Síla je rovnoběžná s osou x. (b) Obrázek (a) s vyznačením rozdělení plochy pod grafem funkce $F(x)$ na úzké proužky. (c) Jemnější dělení než na obr. (b). (d) Limitní případ. Práce vykonaná působící silou je dána vztahem (7.27) a geometricky reprezentována vybarvenou plochou, omezenou osou x a grafem funkce $F(x)$ mezi hodnotami x_i a x_f.

speciálním případě se však mění pouze její velikost, zatímco její směr je stálý. Velikost síly navíc závisí pouze na souřadnici x, určující polohu částice, a není explicitní funkcí času.

Takový jednorozměrný příklad proměnné síly znázorňuje obr. 7.10. Jak určíme práci této síly při přesunutí částice z počáteční polohy o souřadnici x_i do polohy x_f? Vztah (7.9) použít nemůžeme, neboť platí jen pro konstantní sílu $\boldsymbol{F}$. Výpočet vyžaduje nový přístup: rozdělíme celkové posunutí částice na velký počet intervalů o šířce Δx. Zvolme tuto šířku natolik malou, abychom funkci $F(x)$ mohli v každém z intervalů považovat za konstantní. Nechť $\overline{F_j(x)}$ je střední hodnota veličiny $F(x)$ v j-tém intervalu.

Elementární práci ΔW_j vykonanou silou $\boldsymbol{F}$ v j-tém intervalu již vztahem (7.9) můžeme vyjádřit:

$$\Delta W_j \approx \overline{F_j(x)}\Delta x. \qquad (7.24)$$

V grafu na obr. 7.10b je $\overline{F_j(x)}$ výška j-tého proužku a Δx jeho šířka. Elementární práce ΔW_j je číselně rovna obsahu proužku.

Celkovou práci W síly $\boldsymbol{F}$ působící na částici při jejím přemístění z polohy x_i do polohy x_f vyjádříme přibližně jako součet obsahů všech proužků ležících mezi x_i a x_f. Je tedy

$$W = \sum \Delta W_j \approx \sum \overline{F_j(x)}\Delta x. \qquad (7.25)$$

Vztah (7.25) je přibližný, neboť přerušovaná modrá čára tvořená horními základnami pravoúhlých proužků v obrázku 7.10b pouze aproximuje skutečnou křivku $F(x)$.

Aproximaci můžeme zlepšit, zmenšíme-li šířku Δx a zvýšíme tak počet proužků, jako je tomu na obr. 7.10c. V limitě se šířka proužků blíží nulové hodnotě a počet proužků roste do nekonečna. Získáváme tak přesný výsledek

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \overline{F_j(x)}\Delta x. \qquad (7.26)$$

Tato limita představuje integrál z funkce $F(x)$ v mezích x_i a x_f. Vztah (7.26) má tedy tvar

$$W = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} F(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(práce proměnné síly)}. \qquad (7.27)$$

Známe-li funkci $F(x)$, dosadíme ji do integrálu (7.27), opatříme jej mezemi a provedeme integraci. Získáme tak hledanou práci W. (V dod. E je uveden soupis nejznámějších integrálů.) Geometricky je práce dána obsahem plochy omezené grafem funkce $F(x)$ a osou x v intervalu s krajními body x_i a x_f (v obr. 7.10 vyznačeno barevně).

Trojrozměrný případ

Uvažujme nyní o částici, na niž působí obecně zadaná síla

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}, \qquad (7.28)$$

jejíž složky F_x, F_y, F_z mohou být závislé na poloze částice (jsou funkcemi této polohy). Označme elementární posunutí částice jako

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\,\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\,\mathrm{d}y + \boldsymbol{k}\,\mathrm{d}z. \qquad (7.29)$$

Elementární práce $\mathrm{d}W$, kterou síla $\boldsymbol{F}$ vykoná při posunutí částice o $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, je podle vztahu (7.11) rovna

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z. \qquad (7.30)$$

Celková práce W, vykonaná silou $\boldsymbol{F}$ při přesunutí částice z počáteční polohy $\boldsymbol{r}_\mathrm{i}$ o souřadnicích $(x_\mathrm{i}, y_\mathrm{i}, z_\mathrm{i})$ do koncové polohy $\boldsymbol{r}_\mathrm{f}$ o souřadnicích $(x_\mathrm{f}, y_\mathrm{f}, z_\mathrm{f})$, je pak vyjádřena *křivkovým* integrálem

$$W = \int_{\mathscr{C}} \mathrm{d}W = \int_{\mathscr{C}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathscr{C}} (F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z), \qquad (7.31)$$

kde $\mathscr{C}$ je křivka, po níž se částice pohybuje mezi body o polohových vektorech $\boldsymbol{r}_i$ a $\boldsymbol{r}_f$.* Má-li síla $\boldsymbol{F}$ nenulovou pouze x-ovou složku, jsou výrazy obsahující F_y a F_z nulové a vztah (7.31) přejde na tvar (7.27).

Vztah mezi prací proměnné síly a změnou kinetické energie

Vztahem (7.27) je dána práce proměnné síly působící na částici v jednorozměrném případě. Přesvědčíme se, že jedná-li se o výslednici sil, je tato práce podle očekávání rovna změně kinetické energie částice.

Uvažujme o částici s hmotností m, pohybující se po ose x. Na částici působí výsledná síla $F(x)$ směřující podél osy x. Práce vykonaná touto silou při přesunu částice z počáteční polohy x_i do koncové x_f je podle vztahu (7.27) rovna

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_f} ma\,dx. \qquad (7.32)$$

Použili jsme druhého Newtonova zákona a nahradili výslednou sílu $F(x)$ součinem ma. Výraz $ma\,dx$ za integrálem v (7.32) lze přepsat ve tvaru

$$ma\,dx = m\frac{dv}{dt}\,dx. \qquad (7.33)$$

Podle pravidla o derivaci složené funkce platí

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v \qquad (7.34)$$

a v rov. (7.33) lze psát

$$ma\,dx = m\frac{dv}{dx}v\,dx = mv\,dv. \qquad (7.35)$$

Dosazením z rov. (7.35) do (7.32) dostáváme

$$W = \int_{v_i}^{v_f} mv\,dv = m\int_{v_i}^{v_f} v\,dv = \\ = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2. \qquad (7.36)$$

* Praktický výpočet integrálu (7.31), takzvaného **křivkového integrálu druhého typu**, lze snadno provést, známe-li závislost polohového vektoru částice na čase $\boldsymbol{r}(t)$. Pak lze psát $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,dt$ a

$$W = \int_{t_i}^{t_f} (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v})\,dt,$$

kde t_i a t_f představují okamžiky, v nichž se částice nachází v počáteční a koncové poloze.

Uvědomme si, že při záměně proměnné x novou proměnnou v musíme provést i odpovídající záměnu mezí integrálu. Hmotnost m jsme mohli vytknout před integrál proto, že ji považujeme za konstantní.

Ve výsledku na pravé straně (7.36) poznáváme rozdíl kinetických energií částice v koncovém a počátečním pohybovém stavu. Můžeme proto opět psát známý vztah mezi prací a kinetickou energií

$$W = E_{k,f} - E_{k,i} = \Delta E_k.$$

PŘÍKLAD 7.7

Síla $\boldsymbol{F} = (3x\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (4\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}$, kde x je dáno v metrech, působí na částici pohybující se v rovině. Počáteční a koncová poloha částice jsou určeny souřadnicemi (2 m, 3 m) a (3 m, 0 m). Jakou práci vykoná síla $\boldsymbol{F}$? Rozhodněte, zda se velikost rychlosti částice zvětší, zmenší, či zůstane beze změny.

ŘEŠENÍ: Užitím vztahu (7.31) dostáváme

$$W = \int_{\mathscr{C}} (3x\,dx + 4\,dy) = \int_{\mathscr{C}} 3x\,dx + \int_{\mathscr{C}} 4\,dy,$$

kde $\mathscr{C}$ je křivka, po které se částice pohybuje. Vzhledem k tomu, že x-ová složka síly $\boldsymbol{F}$ nezávisí na souřadnici y a y-ová složka nezávisí na x, můžeme psát

$$\int_{\mathscr{C}} 3x\,dx = \int_{x_i}^{x_f} 3x\,dx = \int_2^3 3x\,dx = 3\int_2^3 x\,dx,$$

$$\int_{\mathscr{C}} 4\,dy = \int_{y_i}^{y_f} 4\,dy = \int_3^0 4\,dy = 4\int_3^0 dy.$$

Integrály můžeme vyhledat v dod. E. Dostaneme

$$W = 3[\tfrac{1}{2}x^2]_2^3 + 4[y]_3^0 = \tfrac{3}{2}[3^2 - 2^2] + 4[0-3] = \\ = -4{,}5\,\mathrm{J} \doteq -5\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

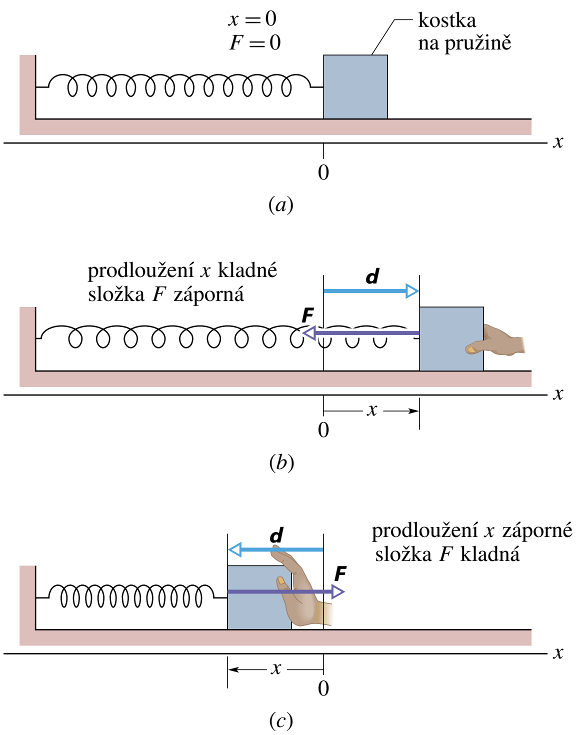
Záporný výsledek ukazuje, že kinetická energie částice, a tedy i velikost její rychlosti, klesne.

7.6 PRÁCE PRUŽNÉ SÍLY

V tomto článku se budeme zabývat výpočtem práce, kterou koná proměnná síla speciálního typu, tzv. **pružná síla**. Jedná se o sílu, jíž na částici působí natažená nebo stlačená pružina. Řada silových zákonů v přírodě má stejný matematický zápis jako zákon pro pružnou sílu. Rozbor tohoto konkrétního případu nám tedy umožní učinit si představu o celé skupině dalších sil s analogickým vyjádřením.

Pružná síla

Pružina na obr. 7.11a je v *nenapjatém stavu*, tj. není protažena ani stlačena. Jeden její konec je upevněn a s druhým, volným koncem je spojen bodový objekt, řekněme malá kostka. Na obr. 7.11b napínáme pružinu tak, že kostku táhneme směrem vpravo. Naopak, podle zákona akce a reakce táhne pružina kostku směrem vlevo „ve snaze“ obnovit nenapjatý stav. (Sílu pružiny proto někdy nazýváme *vratnou silou*.) Na obr. 7.11c stlačujeme pružinu tak, že kostku posouváme vlevo. Pružina naopak tlačí kostku vpravo, aby došlo k obnovení nenapjatého stavu.



Obr. 7.11 (a) Pružina v nenapjatém stavu. Počátek osy x je zvolen v poloze volného konce nenapjaté pružiny. K volnému konci je připojena malá kostka. (b) Kostka se posune o vektor $\boldsymbol{d}$ a pružina se prodlouží o délku x. Všimněte si vyznačeného směru vratné síly $\boldsymbol{F}$, jíž působí pružina na kostku. (c) Pružina je stlačena o délku x. Opět si všimněte vyznačené vratné síly.

V celé řadě praktických případů je vratná síla pružiny $\boldsymbol{F}$ v dobrém přiblížení úměrná jejímu prodloužení, tj. posunutí $\boldsymbol{d}$ volného konce pružiny vůči jeho poloze v nenapjatém stavu. *Síla pružiny* je tedy dána vztahem

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{d} \qquad \text{(Hookův zákon)}, \qquad (7.37)$$

známým pod názvem **Hookův zákon** (anglický vědec Robert Hooke patří k nejznámějším fyzikům druhé poloviny 17. století). Znaménko minus ve vztahu (7.37) upozorňuje, že síla pružiny má vždy opačný směr než posunutí jejího volného konce.

Konstanta k se nazývá **tuhostí pružiny** a je skutečně mírou toho, jak je pružina „tuhá“. Větší hodnota k znamená tužší pružinu, tj. větší pružnou sílu při daném prodloužení. Jednotkou tuhosti v soustavě SI je newton na metr ($\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$).

Osa x na obr. 7.11 je zvolena rovnoběžně s pružinou, její počátek ($x = 0$) splývá s polohou volného konce pružiny v nenapjatém stavu. Pro toto běžné uspořádání má vztah (7.37) tvar

$$F = -kx \qquad \text{(Hookův zákon)}. \qquad (7.38)$$

Symbolem F je v předchozím vztahu označena x-ová složka síly $\boldsymbol{F}$, zbývající složky jsou trvale nulové. Všimněte si, že pružná síla je proměnná, závisí na poloze volného konce pružiny. Podobně jako v čl. 7.5 lze psát $F = F(x)$. Uvědomte si také, že Hookův zákon představuje lineární závislost veličiny F na proměnné x.

Práce pružné síly

V dalších úvahách zanedbáme tření mezi kostkou a podložkou a budeme předpokládat, že pružina má ve srovnání s kostkou zanedbatelnou hmotnost (*nehmotná* pružina) a řídí se přesně Hookovým zákonem (*ideální* pružina). Představme si, že jsme do kostky prudce udeřili směrem vpravo a udělili jí tak jistou kinetickou energii. Kostka se začne pohybovat směrem vpravo. Pružná síla $\boldsymbol{F}$ její pohyb zpomaluje a kinetická energie kostky klesá. Experimentálně lze ověřit, že při splnění předpokladů o vlastnostech pružiny a podložky je změna kinetické energie kostky určena výhradně prací pružné síly $\boldsymbol{F}$. K výpočtu této práce musíme ovšem použít vztahu (7.27), neboť pružná síla je proměnná a řídí se silovým zákonem (7.38). Přesune-li se kostka z polohy x_i do polohy x_f, vykoná pružná síla práci

$$W_\mathrm{p} = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} F\,\mathrm{d}x = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} (-kx)\,\mathrm{d}x = -k\int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} x\,\mathrm{d}x =$$
$$= (-\tfrac{1}{2}k)[x^2]_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} = (-\tfrac{1}{2}k)(x_\mathrm{f}^2 - x_\mathrm{i}^2), \qquad (7.39)$$

tj.

$$W_\mathrm{p} = \tfrac{1}{2}kx_\mathrm{i}^2 - \tfrac{1}{2}kx_\mathrm{f}^2 \qquad \text{(práce pružné síly)}. \qquad (7.40)$$

Práce W_p pružné síly může být jak kladná, tak záporná a souvisí s celkovou změnou kinetické energie kostky při jejím přemístění z polohy x_i do polohy x_f. Pro $x_i = 0$ obvykle značíme $x_f = x$. Ze vztahu (7.40) pak plyne

$$W_p = -\tfrac{1}{2}kx^2 \qquad \text{(práce pružné síly).} \qquad (7.41)$$

V dalším myšleném experimentu si představme, že posouváme kostku podél osy x a přitom na ni stále působíme silou $\boldsymbol{F}_a$. Síla $\boldsymbol{F}_a$ koná práci W_a a pružná síla práci W_p. Podle (7.15) je změna kinetické energie kostky dána prací obou těchto sil, tj.

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W_a + W_p, \qquad (7.42)$$

kde $E_{k,f}$ a $E_{k,i}$ značí kinetickou energii na konci a na počátku posunutí. Je-li rychlost kostky na počátku i na konci posunutí nulová, jsou hodnoty $E_{k,f}$ i $E_{k,i}$ nulové a vztah (7.42) se zjednoduší na tvar

$$W_a + W_p = 0,$$

tj.

$$W_a = -W_p. \qquad (7.43)$$

Tento výsledek znamená, že práce vykonaná silou $\boldsymbol{F}_a$ je rovna záporně vzaté práci pružné síly.

Všimněte si, že délka pružiny přímo nevystupuje ani ve vyjádření pružné síly ((7.37) a (7.38)), ani ve vztazích pro její práci ((7.40) a (7.41)). Je však jedním z faktorů, které určují tuhost pružiny k a v uvedených vztazích je tedy obsažena „skrytě“, implicitně.

PŘÍKLAD 7.8

Abychom pružinu na obr. 7.11b udrželi protaženou o 12 mm, musíme na kostku, uchycenou na jejím volném konci, působit silou $\boldsymbol{F}_a$ o velikosti 4,9 N.

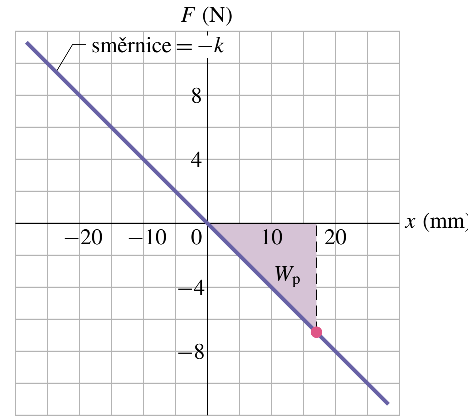
(a) Jaká je tuhost pružiny?

ŘEŠENÍ: Protažená pružina působí na kostku silou $F = -4{,}9\,\text{N}$. Pro hodnotu $x = 12\,\text{mm}$ dostaneme ze vztahu (7.38)

$$k = -\frac{F}{x} = -\frac{(-4{,}9\,\text{N})}{(12\cdot10^{-3}\,\text{m})} = 408\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1} \doteq 410\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Znovu si uvědomte, že k určení tuhosti k není třeba znát délku pružiny. Grafické znázornění závislosti (7.38) pro tuto pružinu je na obr. 7.12. Grafem je přímka se směrnicí $-410\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.

(b) Jakou silou bude působit pružina na kostku, jestliže ji protáhneme o 17 mm?



Obr. 7.12 Graf závislosti pružné síly na prodloužení pružiny v jednorozměrném případě (příklad 7.8). Pružina vyhovuje Hookovu zákonu (vztahy (7.37) a (7.38)). Její tuhost je $k = 410\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$. Význam červeně vyznačeného bodu grafu a vybarvené plochy je objasněn v příkladu 7.8 (b, c).

ŘEŠENÍ: Ze vztahu (7.38) plyne

$$F = -kx = -(408\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1})(17\cdot10^{-3}\,\text{m}) = -6{,}9\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Bod vyznačený v grafu na obr. 7.12 odpovídá vypočtené síle a příslušnému posunutí x. Všimněte si, že posunutí x je kladné, zatímco hodnota F je záporná, právě tak, jak to vyžaduje vztah (7.38).

(c) Jakou práci vykoná pružná síla při protažení pružiny z nenapjatého stavu o 17 mm (úloha (b))?

ŘEŠENÍ: Vzhledem k tomu, že pružina byla zpočátku v nenapjatém stavu, použijeme vztahu (7.41):

$$W_p = -\tfrac{1}{2}kx^2 = -\tfrac{1}{2}(408\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1})(17\cdot10^{-3}\,\text{m})^2 = -5{,}9\cdot10^{-2}\,\text{J} = -59\,\text{mJ}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Barevně vyznačená plocha v obr. 7.12 představuje velikost vypočtené práce. Tato práce je záporná, neboť pružná síla a posunutí kostky mají v dané úloze opačný směr. Kdybychom pružinu místo protažení o 17 mm o stejnou délku stlačili, byla by práce vykonaná pružnou silou stejná.

(d) Pružinu stlačenou o 17 mm uvolňujeme, až se kostka vrátí do polohy $x = 0$ (obnoví se nenapjatý stav pružiny). Poté pružinu stlačíme o 12 mm. Jakou práci vykonala pružná síla při celkovém posunutí kostky?

ŘEŠENÍ: V popsaném případě platí: $x_i = +17\,\text{mm}$ (v počátečním stavu je pružina napjatá) a $x_f = -12\,\text{mm}$ (v koncovém stavu je pružina stlačená). Ze vztahu (7.40) dostáváme

$$W_s = \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2 = \tfrac{1}{2}k(x_i^2 - x_f^2) = \tfrac{1}{2}(408\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1})[(17\cdot10^{-3}\,\text{m})^2 - (-12\cdot10^{-3}\,\text{m})^2] = 0{,}030\,\text{J} = 30\,\text{mJ}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Celková práce vykonaná pružnou silou je kladná. Kladná práce při posunutí kostky z polohy $x_i = +17$ mm do polohy $x = 0$ byla větší než absolutní hodnota záporné práce vykonané při posunutí kostky z polohy $x = 0$ do polohy $x_f = -12$ mm.

KONTROLA 4: Pro soustavu pružina + kostka znázorněnou na obr. 7.11 uvažujte o třech situacích s různými počátečními a koncovými polohami kostky (x_i, x_f) a v každé z nich rozhodněte, zda je práce pružné síly kladná, záporná, nebo nulová: (a) (−3 cm, 2 cm), (b) (2 cm, 3 cm), (c) (−2 cm, 2 cm).

PŘÍKLAD 7.9

Kostka o hmotnosti 5,7 kg klouže po vodorovném dokonale hladkém stole konstantní rychlostí o velikosti $1{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Narazí na volný konec pružiny (obr. 7.13) a stlačuje ji. V určitém okamžiku je rychlost kostky nulová. Vypočtěte délku d, o kterou je pružina v tomto okamžiku stlačena. Tuhost pružiny je $k = 1\,500\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$.

ŘEŠENÍ: Podle vztahu (7.41) je práce vykonaná silou, jíž *působí pružina* na kostku, při stlačení pružiny o d rovna

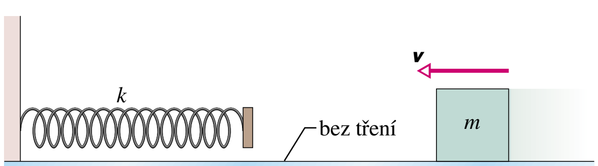
$$W_p = -\tfrac{1}{2}kd^2.$$

Změna kinetické energie kostky od okamžiku jejího nárazu na pružinu do okamžiku, kdy je její rychlost nulová, je

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = 0 - \tfrac{1}{2}mv^2.$$

Podle vztahu (7.4) mezi prací a kinetickou energií jsou si tyto veličiny rovny. Jejich porovnáním a řešením získané rovnice vzhledem k neznámé d dostaneme:

$$d = v\sqrt{\frac{m}{k}} = (1{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\sqrt{\frac{(5{,}7\,\mathrm{kg})}{(1\,500\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}})}} =$$
$$= 7{,}4{\cdot}10^{-2}\,\mathrm{m} = 7{,}4\,\mathrm{cm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 7.13 Příklad 7.9. Kostka se pohybuje směrem k pružině rychlostí $\boldsymbol{v}$, narazí na ni a stlačuje ji. V okamžiku, kdy je rychlost kostky nulová, je pružina stlačena o délku d.

RADY A NÁMĚTY

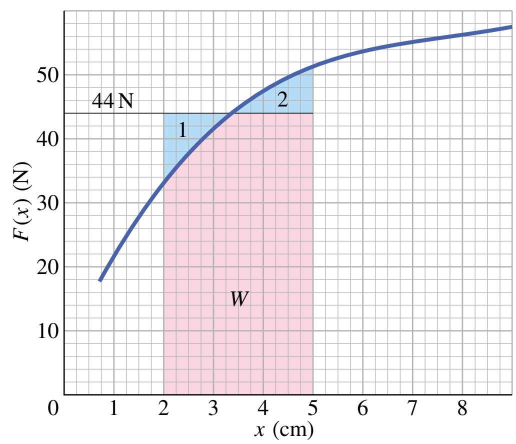
Bod 7.1: *Derivace a integrál, směrnice a plochy*

Pro zadanou funkci $y = F(x)$ umíme vypočítat hodnotu její derivace v libovolném bodě x i hodnotu jejího určitého integrálu v daných mezích proměnné x. Není-li funkce zadána analyticky (vzorcem), nýbrž grafem, lze zjišťovat hodnoty derivace i určitého integrálu graficky. Způsob grafického určení derivace byl vyložen v bodě 2.5. Proto si nyní všimneme jen grafické metody nalezení hodnoty určitého integrálu.

Na obr. 7.14 je znázorněn graf jisté funkce $F(x)$. Řekněme, že tato funkce představuje závislost x-ové složky síly, která působí na částici pohybující se po ose x, na (x-ové) souřadnici částice. Zaměříme se na grafické určení práce, kterou síla vykoná při posunutí částice z počáteční polohy $x_i = 2{,}0$ cm do koncové polohy $x_f = 5{,}0$ cm. Podle vztahu (7.27) lze tuto práci vyjádřit integrálem

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx,$$

jehož hodnota je rovna obsahu vybarvené plochy ležící pod křivkou grafu a mezi zadanými krajními polohami x_i a x_f.



Obr. 7.14 Graf síly $F(x)$ v jednorozměrném případě. Vybarvená plocha pod křivkou (její obsah představuje práci síly F) je nahrazena obdélníkem vytvořeným vyjmutím plochy 2 a přidáním plochy 1, jejichž obsahy jsou přibližně shodné.

Tuto plochu lze přibližně nahradit obdélníkem, který vznikne doplněním obrázku o vodorovnou přímku, vedenou v takové poloze, aby obsahy plošek označených „1“ a „2“ byly shodné. Vyslovenému požadavku celkem dobře vyhovuje hodnota $F = 44$ N. Odpovídající vodorovná přímka je v obr. 7.14 rovněž vyznačena. Obsah „náhradního“ obdélníka ($= W$) je

$$W = \text{výška} \cdot \text{základna} = (44\,\mathrm{N})(5{,}0\,\mathrm{cm} - 2{,}0\,\mathrm{cm}) =$$
$$= 132\,\mathrm{N{\cdot}cm} \doteq 1{,}3\,\mathrm{N{\cdot}m} = 1{,}3\,\mathrm{J}.$$

Obsah plochy představující práci W můžeme určit také tak, že spočítáme všechny čtverečky, které leží pod křivkou grafu ve vybarvené části plochy. Je jich asi 260 a každý z nich představuje (2 N)(0,25 cm) = 0,5 N·cm. Práce W má tedy hodnotu

$$W = (260\,\text{čtverečků})\left(\frac{0{,}5\,\text{N·cm}}{1\,\text{čtvereček}}\right) = 130\,\text{N·cm} = 1{,}3\,\text{J},$$

stejně jako při výpočtu obsahu obdélníka z délek jeho stran. *Pamatujte*: V dvojrozměrném grafickém znázornění funkce jedné proměnné je derivace určena směrnicí grafu a integrál obsahem plochy pod křivkou grafu.

7.7 VÝKON

Na stavbě je třeba zvedat balíky cihel z chodníku na střechu budovy. Na staveništi je k dispozici naviják. Není obtížné spočítat práci, kterou musí při každém vyzvednutí nákladu vykonat síla působící na naviják. Je zde však ještě jeden problém: majiteli stavební firmy jde také o to, jak *rychle* bude tato práce vykonána. Za přijatelnou považuje dobu nejvýše 5 minut. Stihne se to?

Mírou toho, jak „rychle" koná určitá síla práci, je **výkon**. Vykoná-li síla $\boldsymbol{F}$ práci ΔW za dobu Δt, je její **průměrný výkon** v daném časovém intervalu definován poměrem

$$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad \text{(průměrný výkon).} \qquad (7.44)$$

Okamžitý výkon P odpovídá „okamžité rychlosti" konání práce a je tedy limitním případem průměrného výkonu pro $\Delta t \to 0$:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(okamžitý výkon).} \qquad (7.45)$$

Jednotka výkonu v soustavě SI je joule za sekundu. Tato jednotka se užívá tak často, že dostala samostatný název. Nazývá se **watt** (W) podle Jamese Watta, jenž se v historii zasloužil o velmi výrazné zdokonalení činnosti parních strojů. V britském systému je jednotkou výkonu stopa·libra za sekundu. Někdy se užívá i jednotky zvané koňská síla. Některé vztahy mezi jednotkami výkonu:

$$1\,\text{watt} = 1\,\text{W} = 1\,\text{J·s}^{-1} = 0{,}738\,\text{ft·lb·s}^{-1} \qquad (7.46)$$

a

$$\text{koňská síla} = 1\,\text{HP} = 550\,\text{ft·lb·s}^{-1} = 746\,\text{W}. \qquad (7.47)$$

Ze vztahu (7.44) vidíme, že práci lze vyjádřit jako součin výkonu a času a získat tak její běžně užívanou praktickou jednotku, kilowatthodinu. Platí

$$1\,\text{kilowatthodina} = 1\,\text{kW·h} = (10^3\,\text{W})(3\,600\,\text{s}) = = 3{,}60 \cdot 10^6\,\text{J} = 3{,}6\,\text{MJ}. \qquad (7.48)$$

Někdo si možná při vyslovení slov watt nebo kilowatthodina vybaví spíše elektrické jednotky. Jedná se však o jednotku výkonu a jednotku energie, používané naprosto obecně. Kdybychom třeba učebnici, kterou právě držíme v ruce, zvedli z podlahy a položili ji na stůl, mohli bychom vykonanou práci klidně zapsat údajem $4 \cdot 10^{-6}$ kW·h (nebo lépe 4 mW·h).

Výkon můžeme také vyjádřit pomocí síly, která působí na částici a koná tak práci, a rychlosti částice. Předpokládejme, že se částice pohybuje po ose x a působí na ni síla $\boldsymbol{F}$, která s osou x svírá s úhel φ. Ze vztahu (7.45) dostáváme

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{F\cos\varphi\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F\cos\varphi\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right),$$

tj.

$$P = Fv\cos\varphi. \qquad (7.49)$$

Po úpravě pravé strany rovnosti (7.49) do tvaru skalárního součinu $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$ můžeme psát

$$P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \qquad \text{(okamžitý výkon).} \qquad (7.50)$$

Dejme tomu, že tahač na obr. 7.15 působí na naložený přívěs silou $\boldsymbol{F}$. Rychlost přívěsu v daném okamžiku je $\boldsymbol{v}$. Okamžitý výkon síly $\boldsymbol{F}$, vyjádřený vztahy (7.49) a (7.50), udává, jak „rychle" koná síla $\boldsymbol{F}$ práci právě v tomto okamžiku. Za přijatelné lze považovat i to, budeme-li místo o výkonu síly hovořit o „výkonu tahače". Musíme však mít stále na mysli, o co skutečně jde: výkon je „rychlost", s jakou síla koná práci.

Obr. 7.15 Výkon síly, jíž působí tahač na přívěs s nákladem, je „rychlost", s jakou tato síla koná práci.

PŘÍKLAD 7.10

V obr. 7.16 jsou vyznačeny síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ působící na krabici, která klouže po dokonale hladké vodorovné podlaze směrem vpravo. Síla $\boldsymbol{F}_1$ je vodorovná a má velikost 2,0 N, síla $\boldsymbol{F}_2$ je od podlahy odkloněna o 60° a její velikost je 4,0 N. Rychlost krabice má v určitém okamžiku velikost $v = 3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

(a) Jaký je výkon každé z obou sil v tomto okamžiku? Jaký je jejich celkový výkon? Interpretujte získanou hodnotu celkového okamžitého výkonu.

ŘEŠENÍ: Výkon jednotlivých sil zjistíme pomocí vztahu (7.49). Síla $\boldsymbol{F}_1$ svírá s rychlostí $\boldsymbol{v}$ úhel $\varphi_1 = 180°$, takže je

$$P_1 = F_1 v \cos\varphi_1 = (2{,}0\,\mathrm{N})(3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\cos 180° = \\ = -6{,}0\,\mathrm{J{\cdot}s^{-1}} = -6{,}0\,\mathrm{W}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tento výsledek ukazuje, že síla $\boldsymbol{F}_1$ *spotřebovává* práci „s rychlostí“ 6,0 joulů za sekundu neboli s výkonem 6,0 W. Úhel mezi silou $\boldsymbol{F}_2$ a rychlostí $\boldsymbol{v}$ je $\varphi_2 = 60°$. Platí tedy

$$P_2 = F_2 v \cos\varphi_2 = (4{,}0\,\mathrm{N})(3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\cos 60° = \\ = 6{,}0\,\mathrm{W}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Z výsledku plyne, že síla $\boldsymbol{F}_2$ *koná* (kladnou) práci s výkonem 6,0 W.

Celkový výkon je součtem obou získaných hodnot:

$$P_{\mathrm{celk}} = P_1 + P_2 = -6{,}0\,\mathrm{W} + 6{,}0\,\mathrm{W} = 0. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Celkový okamžitý výkon sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ je v daném okamžiku t nulový. To znamená, že elementární práce dW vykonaná oběma silami společně v časovém intervalu dt od okamžiku t do okamžiku $t+\mathrm{d}t$ je nulová. Výslednice sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ nepřispívá v daném okamžiku ke změně kinetické energie krabice. Ze skutečnosti, že hodnota $P_{\mathrm{celk}} = P_1 + P_2$ je *v daném okamžiku* nulová, nelze činit žádné další závěry. Soustřeďme se však na zadání úlohy pozorněji. Kromě zadaných sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ působí na krabici samozřejmě ještě tíhová síla $\boldsymbol{G}$ a tlaková síla podlahy $\boldsymbol{N}$. Ty jsou trvale kolmé k posunutí krabice, a proto nekonají práci. Ke změně kinetické energie krabice tedy přispívá jen práce sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$.

Výsledná síla působící na krabici je

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{G} + \boldsymbol{N}.$$

Zvolme soustavu souřadnic tak, že osa x je vodorovná a míří vpravo a osa y směřuje svisle vzhůru. Pro složky výsledné síly dostaneme

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_1\cos\varphi_1 + F_2\cos\varphi_2 = \\ &= (2{,}0\,\mathrm{N})\cos 180° + (4{,}0\,\mathrm{N})\cos 60° = \\ &= (-2{,}0 + 4{,}0\cdot 0{,}5)\,\mathrm{N} = 0,\\ \sum F_y &= F_2\sin\varphi_2 - mg + N = \\ &= (4{,}0\,\mathrm{N})\cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - mg + N.\end{aligned}$$

Z rovnice pro x-ovou složku plyne $a_x = 0$. Vzhledem k tomu, že je pohyb krabice vázán na vodorovnou podlahu, platí také $a_y = 0$ (vazební podmínka). Z rovnice pro y-ovou složku výsledné síly lze pak díky vazební podmínce určit tlakovou sílu podložky

$$N = mg - (4{,}0\,\mathrm{N})\cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Celkově je $\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$. Rychlost krabice $\boldsymbol{v}$ je tedy konstantní, stejně jako její kinetická energie. Celkový výkon P_{celk} sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ je tedy nulový trvale, nejen v jediném okamžiku zmiňovaném v zadání úlohy.

(b) Řešte úlohu (a) znovu za předpokladu, že velikost síly $\boldsymbol{F}_2$ je 6,0 N.

ŘEŠENÍ: Pro výkon síly $\boldsymbol{F}_2$ nyní dostáváme

$$P_2 = F_2 v \cos\varphi_2 = (6{,}0\,\mathrm{N})(3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\cos 60° = \\ = 9{,}0\,\mathrm{W}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

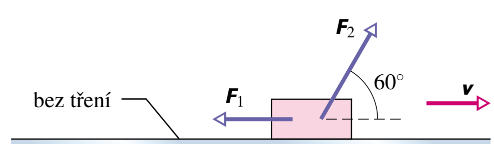
Výkon síly $\boldsymbol{F}_1$ jsme určili už v úloze (a) a jeho hodnota je

$$P_1 = -6{,}0\,\mathrm{W}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Celkový výkon je tedy

$$P_{\mathrm{celk}} = P_1 + P_2 = -6{,}0\,\mathrm{W} + 9{,}0\,\mathrm{W} = \\ = 3{,}0\,\mathrm{W}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kladná hodnota celkového výkonu znamená, že kinetická energie i velikost rychlosti krabice v daném okamžiku rostou. Ze vztahu (7.50) a ze skutečnosti, že síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ jsou konstantní, plyne, že v daném okamžiku roste i jejich celkový okamžitý výkon P_{celk}. Ten nabývá vypočtené hodnoty 3,0 W právě jen v okamžiku, kdy je velikost rychlosti krabice rovna $3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.



Obr. 7.16 Příklad 7.10. Síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ působí na krabici, která klouže směrem vpravo po dokonale hladké podlaze. Rychlost krabice je $\boldsymbol{v}$.

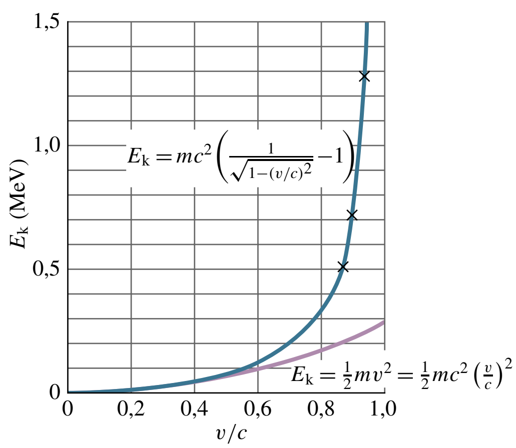
KONTROLA 5: Kostka je uvázána na provaze a pohybuje se rovnoměrně po kružnici, v jejímž středu je druhý konec provazu upevněn. Rozhodněte, zda je výkon tahové síly provazu kladný, záporný, nebo nulový.

7.8 KINETICKÁ ENERGIE PŘI VYSOKÝCH RYCHLOSTECH

V čl. 4.10 jsme se dověděli, že pro částice pohybující se rychlostmi blízkými rychlosti světla newtonovská mechanika selhává a musí být nahrazena Einsteinovou speciální teorií relativity. Jedním z důsledků této skutečnosti je, že již nemůžeme vyjadřovat kinetickou energii ve tvaru $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Musíme použít relativistického vztahu

$$E_k = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right), \tag{7.51}$$

kde c je rychlost světla ve vakuu.



Obr. 7.17 Graf relativistického a klasického vyjádření kinetické energie elektronu (viz (7.51), resp. (7.1)) v závislosti na podílu v/c, kde v je velikost rychlosti elektronu a c je rychlost světla ve vakuu. Všimněte si, že tyto dvě křivky při nízkých rychlostech splývají. Při zvyšující se rychlosti v se však jejich odchylka výrazně zvětšuje. Experimentální body (označené křížkem $\times$) dokumentují souhlas relativistické křivky s experimentem při vysokých rychlostech. Od nerelativistické křivky se experimentální hodnoty výrazně odchylují.

Obr. 7.17 ukazuje, že tyto dvě formule, které jsou zcela odlišné již na první pohled, dávají skutečně při vysokých rychlostech výrazně různé výsledky. Experiment potvrzuje mimo veškerou pochybnost, že relativistický výraz (7.51) je správný na rozdíl od výrazu klasického (7.1). Při nízkých rychlostech však výsledky obou vzorců prakticky splývají. Speciálně pro $v = 0$ dávají oba vztahy nulovou hodnotu kinetické energie.

Všechny relativistické formule musí při nízkých rychlostech přejít na odpovídající klasický tvar. Ukážeme si to na příkladu vztahu (7.51), který pro snažší porovnání se vztahem (7.1) ještě upravíme:

$$E_k = mc^2\left[(1-\beta^2)^{-1/2} - 1\right]. \tag{7.52}$$

Pro zjednodušení jsme místo podílu v/c použili bezrozměrového parametru β.

Při velmi malých rychlostech je $v \ll c$, odkud $\beta \ll 1$. Funkci $(1-\beta^2)^{-1/2}$ tedy můžeme rozvinout pomocí binomické věty (bod 7.2) a dostaneme

$$(1-\beta^2)^{-1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}\beta^2 + \ldots, \tag{7.53}$$

Dosazení rozvoje (7.53) do (7.52) vede k výsledku

$$E_k = mc^2\left[\left(1 + \tfrac{1}{2}\beta^2 + \ldots\right) - 1\right]. \tag{7.54}$$

Pro velmi malé hodnoty β rychle klesá velikost členů zastoupených tečkami. Součet v kulaté závorce tedy můžeme s jistou malou chybou nahradit prvními dvěma členy a psát

$$E_k \approx mc^2\left[\left(1 + \tfrac{1}{2}\beta^2\right) - 1\right],$$

nebo, při zpětném dosazení $\beta = \frac{v}{c}$,

$$E_k \approx mc^2\left(\tfrac{1}{2}\beta^2\right) = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

Tento výsledek potvrzuje naše očekávání.

RADY A NÁMĚTY

Bod 7.2: *Aproximace pomocí binomické věty*

Často potřebujeme najít přibližnou hodnotu veličiny $(a+b)^n$ za předpokladu, že $b \ll a$. Nejjednodušší je vyjádřit tento výraz ve tvaru konst $\cdot (1+x)^n$, kde x je bezrozměrová veličina mnohem menší než jednička. Můžeme psát

$$(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = (a^n)(1+x)^n,$$

kde $(1+x)^n$ je potřebný výraz s bezrozměrovou proměnnou $x = \frac{b}{a}$. Mocninu $(1+x)^n$ můžeme rozepsat pomocí binomické věty s tím, že vezmeme v úvahu jen tolik členů, kolik je při dané přesnosti úlohy třeba. (Takové rozhodování ovšem vyžaduje jistou zkušenost.)

Binomická věta, uvedená v dod. E, má tvar

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots. \tag{7.55}$$

Vykřičníky ve vztahu (7.55) představují faktoriály, tj. postupné násobení celých čísel vzniklých z dané hodnoty n odečítáním jednotky. Například $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Výpočet faktoriálů můžete pravděpodobně provádět i na své kalkulačce.

V předchozím textu jsme použili binomického rozvoje v rov. (7.53) pro $x = -\beta^2$ a $n = -\frac{1}{2}$.

Pro procvičení vypočtěte hodnotu $(1+0{,}045)^{-2{,}3}$ jak na kalkulačce, tak použitím rozvoje (7.55), v němž dosadíte $x = 0{,}045$ a $n = -2{,}3$. Vypočtěte si různé členy rozvoje, abyste se přesvědčili o jejich rychlém poklesu.

7.9 VZTAŽNÉ SOUSTAVY

Připomeňme, že Newtonovy zákony platí v inerciálních vztažných soustavách. Tyto preferované vztažné soustavy jsou spojeny s volnými částicemi a navzájem se pohybují rovnoměrně přímočaře.

V případě některých fyzikálních veličin naměří pozorovatelé v různých inerciálních vztažných soustavách tytéž hodnoty. V newtonovské mechanice jsou těmito *invariantními* veličinami síla, hmotnost, zrychlení, čas. Jestliže například jeden z pozorovatelů v inerciální vztažné soustavě zjistí, že hmotnost určité částice je 3,15 kg, je jisté, že pozorovatelé ve všech ostatních inerciálních soustavách naměří stejnou hodnotu. Jiné fyzikální veličiny, například posunutí částice nebo její rychlost, nabývají pro pozorovatele v různých inerciálních vztažných soustavách různých hodnot. Tyto veličiny *nejsou* invariantní.

Jestliže tedy posunutí částice závisí na volbě vztažné soustavy, bude na ní závislá i práce sil, které na částici působí, neboť práce ($W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{d}$) je pomocí posunutí definována. Uvažujme například o částici, která se pohybuje podél společného směru osy x tří různých vztažných soustav. Dejme tomu, že její posunutí je v jedné vztažné soustavě $+2{,}47$ m, v jiné je nulové a v další třeba $-3{,}64$ m. Předpokládejme, že na částici působí ve směru jejího pohybu síla $\boldsymbol{F}$. Protože je síla $\boldsymbol{F}$ ve všech třech soustavách stejná (je invariantní), je zřejmé, že její práce měřená pozorovatelem v první soustavě je kladná, v druhé nulová a ve třetí záporná. Co můžeme usoudit o kinetické energii částice? Protože rychlost částice závisí na volbě vztažné soustavy, bude na ní záviset i kinetická energie ($E_k = \frac{1}{2}mv^2$), která je pomocí rychlosti definována. Znamená to snad, že vztah mezi prací a kinetickou energií je chybný?

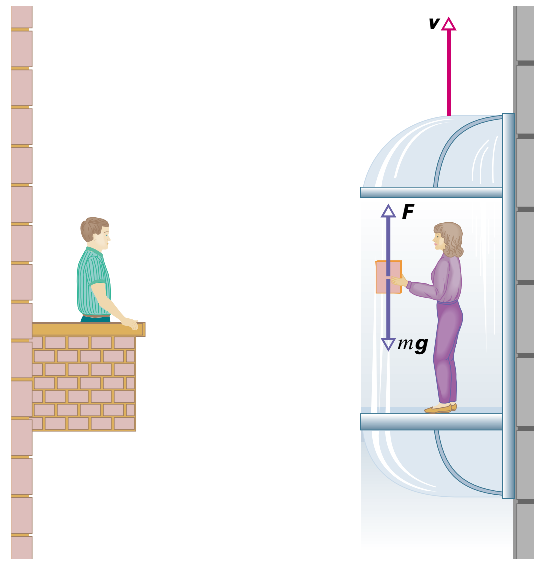
V průběhu doby, která uplynula od Galileiových experimentů až po Einsteinovy objevy, dospěli fyzikové k přesvědčení, že platí tzv. **princip invariance**:

> Fyzikální zákony musí mít stejný tvar ve všech inerciálních vztažných soustavách.

Některé *fyzikální veličiny* nabývají sice v různých vztažných soustavách různých hodnot, avšak volba vztažné soustavy nemůže ovlivnit platnost *fyzikálních zákonů*. Intuitivně cítíme, že v tomto formálním tvrzení o invarianci je skryta skutečnost, že dva různí pozorovatelé, kteří budou studovat tutéž událost, musí dojít k závěru, že příroda funguje pro oba naprosto stejně.

Mezi zákony, kterých se princip invariance týká, patří i vztah mezi prací a kinetickou energií. Přestože se hodnoty práce naměřené různými pozorovateli budou lišit, stejně jako hodnoty kinetické energie, budou pozorovatelé zjišťovat, že vztah mezi prací a kinetickou energií platí ve vztažné soustavě každého z nich. Zaměřme se na jednoduchý příklad.

Na obr. 7.18 sledujeme Soňu, jak stoupá v kabině výtahu vzhůru stálou rychlostí a v ruce drží knihu. Štěpán stojí na balkoně a pozoruje, že kabina stoupla do výšky h. Posuďte platnost vztahu mezi prací a kinetickou energií z hlediska obou pozorovatelů, kteří sledují pohyb knihy.



Obr. 7.18 Soňa jede ve výtahu vzhůru a drží knihu. Štěpán ji pozoruje. Každý z nich sleduje ve své vztažné soustavě pohyb knihy a zkoumá platnost vztahu mezi prací a kinetickou energií.

1. *Sonin komentář.* „Mou vztažnou soustavou je kabina výtahu. Na knihu působí moje ruka silou, která směřuje svisle vzhůru. Tato síla však nekoná práci, protože kniha je v mé vztažné soustavě v klidu. Ze stejného důvodu nekoná práci ani tíhová síla, jíž působí na knihu Země. Celková práce všech sil působících na knihu je tedy nulová. V souhlasu se vztahem mezi prací a kinetickou energií se kinetická energie knihy nemění. To je přesně to, co pozoruji: kinetická energie knihy je v mé vztažné soustavě nulová a zachovává se. Všechno je tedy v pořádku.“

2. *Štěpánův komentář.* „Mou vztažnou soustavou je balkon. Vidím, že Soňa působí na knihu silou $\boldsymbol{F}$. Vzhledem k mé vztažné soustavě se působiště této síly pohybuje a práce, kterou síla $\boldsymbol{F}$ vykoná při zvednutí knihy do výšky h, je Fh. Protože se kniha pohybuje rovnoměrně přímočaře, musí síla $\boldsymbol{F}$ kompenzovat sílu tíhovou, takže platí $Fh = +mgh$. Vím také, že i tíhová síla, působící na knihu, koná práci. Její hodnota je $-mgh$. Celková práce, kterou vykonají síly

působící na knihu při jejím posunutí do výšky h, je nulová. Ve shodě se vztahem mezi prací a kinetickou energií je kinetická energie knihy neměnná. A právě to pozoruji. V mé vztažné soustavě je kinetická energie knihy konstantní a má hodnotu $\frac{1}{2}mv^2$. Všechno souhlasí."

I když Soňa a Štěpán nezaznamenají shodné výsledky při měření posunutí knihy či její kinetické energie, každý z nich dospívá k závěru, že v jeho vztažné soustavě platí rovnost mezi prací všech sil působících na knihu a změnou její kinetické energie.

Není podstatné, jakou (inerciální) vztažnou soustavu si zvolíme pro řešení úlohy, jestliže (1) si dobře uvědomíme a zapamatujeme, jakou konkrétní soustavu jsme si zvolili, a (2) při řešení úlohy používáme stále tutéž vztažnou soustavu.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Kinetická energie

Kinetická energie E_k částice o hmotnosti m, která se pohybuje velmi malou rychlostí $\boldsymbol{v}$ ve srovnání s rychlostí světla, je

$$E_k = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad \text{(kinetická energie).} \tag{7.1}$$

Práce

Práce W každé ze sil působících na daný objekt přispívá ke změně jeho energie. Je-li práce vykonaná určitou silou kladná (síla práci *koná*), je odpovídající příspěvek ke změně energie objektu *přírůstkem*, je-li záporná (síla práci *spotřebovává*), dochází k *úbytku* energie objektu.

Práce a kinetická energie

Jsou-li podmínky při působení síly na daný objekt takové, že se může měnit pouze jeho kinetická energie, můžeme tuto změnu ΔE_k vyjádřit vztahem

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W \qquad \text{(vztah mezi prací a kinetickou energií),} \tag{7.4}$$

kde $E_{k,i}$ je počáteční kinetická energie objektu a $E_{k,f}$ je jeho kinetická energie poté, co síla vykonala práci W. Rovnost (7.4) je vhodné přepsat do tvaru

$$E_{k,f} = E_{k,i} + W. \tag{7.5}$$

Práce konstantní síly

Práce, kterou vykoná konstantní síla $\boldsymbol{F}$ působící na částici při jejím posunutí $\boldsymbol{d}$, je

$$W = Fd\cos\varphi = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{d} \qquad \text{(práce konstantní síly),} \tag{7.9, 7.11}$$

kde φ je konstantní úhel mezi vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{d}$. Působí-li na částici více sil $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, …, jejichž výslednice je konstantní, je jejich výsledná práce

$$W = \left(\sum_j \boldsymbol{F}_j\right)\cdot\boldsymbol{d} \qquad \text{(práce konstantní výslednice sil).} \tag{7.13}$$

Tato práce je rovna součtu prací vykonaných jednotlivými silami. Jsou-li tyto síly rovněž konstantní, platí

$$\begin{aligned} W &= \boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{d} + \boldsymbol{F}_2\cdot\boldsymbol{d} + \boldsymbol{F}_3\cdot\boldsymbol{d} + \ldots = \\ &= W_1 + W_2 + W_3 + \ldots \qquad \text{(celková práce).} \end{aligned} \tag{7.14}$$

Dosazením výrazu pro celkovou práci do vztahu mezi prací a kinetickou energií můžeme vyjádřit změnu kinetické energie částice jako celkovou práci všech sil, které na částici působí:

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots. \tag{7.15}$$

Práce tíhové síly

Tíhová síla $m\boldsymbol{g}$, působící na částici o hmotnosti m, vykoná při posunutí částice o vektor $\boldsymbol{d}$ práci

$$W_g = mgd\cos\varphi, \tag{7.16}$$

kde φ je úhel mezi tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$ a vektorem posunutí $\boldsymbol{d}$.

Práce při vzestupu a poklesu tělesa

Působí-li na částici v blízkosti povrchu Země kromě tíhové síly ještě další síla $\boldsymbol{F}_a$ (či síly o výslednici $\boldsymbol{F}_a$), určuje celková práce těchto sil W_a spolu s prací síly tíhové W_g změnu kinetické energie částice

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W_a + W_g. \tag{7.19}$$

Změní-li se výška částice nad povrchem Země beze změny její kinetické energie, zjednoduší se vztah (7.19) takto:

$$W_a = -W_g. \tag{7.20}$$

Práce síly $\boldsymbol{F}_a$ a práce tíhové síly se tedy v takovém případě liší pouze znaménkem. Přírůstek kinetické energie částice daný působením síly $\boldsymbol{F}_a$ je roven úbytku, který způsobila síla tíhová.

Práce proměnné síly

Síla $\boldsymbol{F}$, která působí na částici při jejím pohybu po křivce $\mathscr{C}$ z počátečního bodu $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ do koncového bodu $\boldsymbol{r}_f = (x_f, y_f, z_f)$, může obecně záviset na poloze částice. Práce takové síly je dána křivkovým integrálem

$$W = \int_{\mathscr{C}} (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) = \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\,dt. \tag{7.31}$$

Okamžiky t_i a t_f odpovídají počátečnímu a koncovému bodu křivky $\mathscr{C}$.

V jednorozměrném případě se vztah (7.31) zjednoduší na tvar

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx. \qquad (7.27)$$

Pružná síla

Pro pružnou sílu platí

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{d} \qquad \text{(Hookův zákon)}, \qquad (7.37)$$

kde $\boldsymbol{d}$ je posunutí volného konce pružiny z **nenapjatého stavu** (pružina v tomto stavu není natažena ani stlačena) a k je **tuhost** pružiny. Zvolíme-li osu x podél pružiny a počátek ztotožníme s polohou jejího volného konce v nenapjatém stavu, lze vztah (7.37) přepsat ve tvaru

$$F = -kx \qquad \text{(Hookův zákon)}. \qquad (7.38)$$

Práce pružné síly

Přesune-li se těleso připevněné k volnému konci pružiny z počáteční polohy x_i do koncové polohy x_f, vykoná pružná síla práci

$$W_p = \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2. \qquad (7.40)$$

Pro $x_i = 0$ a $x_f = x$ je

$$W_p = -\tfrac{1}{2}kx^2. \qquad (7.41)$$

Výkon

Výkon síly je „*rychlost*“, s jakou tato síla koná práci. Vykoná-li síla v časovém intervalu Δt práci ΔW, je *průměrný výkon* v tomto časovém intervalu definován poměrem

$$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \qquad (7.44)$$

Okamžitý výkon síly $\boldsymbol{F}$ je „okamžitá rychlost“ konání práce

$$P = \frac{dW}{dt}. \qquad (7.45)$$

Svírá-li síla $\boldsymbol{F}$ s trajektorií částice úhel φ, je okamžitý výkon roven

$$P = Fv\cos\varphi = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}, \qquad (7.49, 7.50)$$

kde $\boldsymbol{v}$ je okamžitá rychlost částice.

Relativistická kinetické energie

Kinetickou energii objektu pohybujícího se rychlostí blízkou rychlosti světla c je třeba počítat z relativistického vztahu

$$E_k = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right). \qquad (7.51)$$

Tento vztah přejde na tvar (7.1) v případě, že v je mnohem menší než c.

Princip invariance

Některé veličiny (např. hmotnost, síla, zrychlení a čas v newtonovské mechanice) jsou *invariantní*. To znamená, že při jejich měření v různých inerciálních vztažných soustavách zaznamenáváme stejné hodnoty. Jiné veličiny (například rychlost, kinetická energie, práce) mají v různých vztažných soustavách různé hodnoty. Fyzikální *zákony* však mají stejný *tvar* ve všech inerciálních vztažných soustavách. Tuto skutečnost nazýváme **principem invariance**.

OTÁZKY

1. Uspořádejte následující rychlosti tak, aby odpovídající hodnoty kinetické energie byly řazeny sestupně: (a) $\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$, (b) $\boldsymbol{v} = -4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$, (c) $\boldsymbol{v} = -3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$, (d) $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$, (e) $\boldsymbol{v} = 5\boldsymbol{i}$ a (f) $v = 5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, svírá-li vektor rychlosti s vodorovnou rovinou úhel 30°.

2. Rozhodněte, zda kinetická energie částice roste, klesá, či zůstává neměnná, platí-li pro rychlost částice (a) $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i}$, (b) $v = -4t$, $t > 0$.

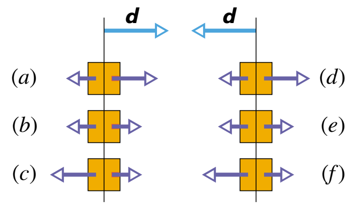
3. Rozhodněte, zda kinetická energie částice roste, klesá, či zůstává neměnná, platí-li pro polohu částice (a) $x = 4t^2 - 2$, (b) $x = -3t + 14$, (c) $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i} - 3t\boldsymbol{j}$, (d) $\boldsymbol{r} = (2t^2 - 3)\boldsymbol{i} + (4t - 2)\boldsymbol{j}$. Ve všech případech je $t > 0$.

4. Na částici působí síla $\boldsymbol{F}$ ve směru osy x. Částice se posune po ose x o 5 m. Můžeme pro výpočet práce, kterou síla vykonala, použít vztahů (7.9) a (7.11), je-li její velikost (v newtonech) (a) $F = 3$, (b) $F = 2x$, (c) $F = 2t$?

5. Rozhodněte, zda práce vykonaná silou $\boldsymbol{F}$ při posunutí částice o vektor $\boldsymbol{d}$ je v následujících případech kladná, či záporná: (a) úhel mezi vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{d}$ je 30°, (b) úhel mezi vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{d}$ je 100°, (c) $\boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{d} = -4\boldsymbol{i}$.

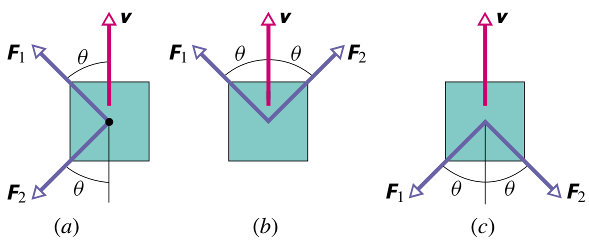
6. Částice o hmotnosti 5 kg se pohybuje rovnoměrně po kružnici rychlostí o velikosti $4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Jakou práci vykoná dostředivá síla působící na částici (a) v libovolně zvoleném časovém intervalu, (b) během jednoho oběhu částice?

7. Na obr. 7.19 vidíme šest situací, v nichž na krabici pohybující se po vodorovné dokonale hladké podložce působí současně dvě síly. Jedna z nich směřuje vpravo, druhá vlevo. Síly mají velikosti 1 N, resp. 2 N, a v obrázku jsou znázorněny vektory různých délek. V jednotlivých případech rozhodněte, zda je práce výslednice obou sil při posunutí krabice o vyznačený vektor $\boldsymbol{d}$ kladná, záporná, či nulová.



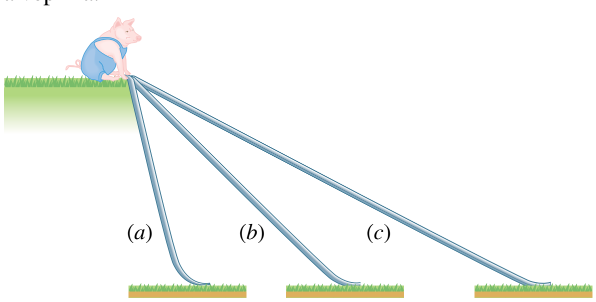
Obr. 7.19 Otázka 7

8. Na obr. 7.20 jsou v pohledu shora zobrazeny tři situace, kdy na krabici působí dvě síly ($\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$) stejných velikostí. Síly svírají s rychlostí krabice stálé úhly. Rozhodněte, zda celková práce, kterou síly konají při pohybu krabice, je kladná, záporná, či nulová.



Obr. 7.20 Otázka 8

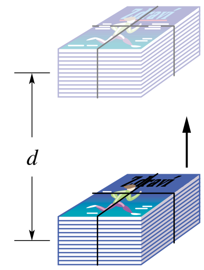
9. Vepřík na obr. 7.21 může sklouznout po jedné ze tří dokonale hladkých skluzavek. Uspořádejte skluzavky sestupně podle velikosti práce, kterou při takové jízdě vykoná tíhová síla působící na vepříka.



Obr. 7.21 Otázka 9

10. Představme si poměrně absurdní situaci. Ulovili jsme pásovce a chceme jej zvednout na mořský útes. Rozhodněte, zda práce vykonaná silou, kterou při tom na pásovce působíme, závisí (a) na jeho hmotnosti, (b) na tíhové síle, kterou na něj působí Země, (c) na výšce útesu, (d) na době, během níž pásovce zvedneme, (e) na tom, zda pásovce vychylujeme do stran, nebo jej zvedáme přímo vzhůru.

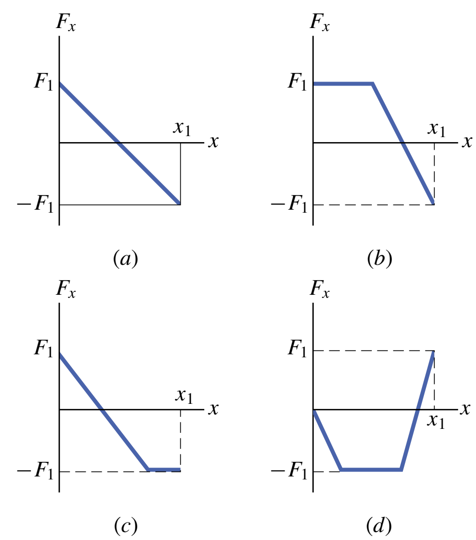
11. Obr. 7.22 zachycuje balík časopisů, který je třeba zvednout do výšky d. Balík zvedáme tahem za provaz, jímž je ovázán. V tabulce je uvedeno šest dvojic hodnot udávajících velikost rychlosti balíku (v metrech za sekundu) v_0, resp. v na počátku, resp. na konci jeho posunutí o svislou vzdálenost d. Uspořádejte tyto dvojice sestupně podle práce vykonané tahovou silou provazu při daném posunutí.



	a	b	c	d	e	f
$v =$	0	2	2	2	0	1
$v_0 =$	0	2	0	1	2	2

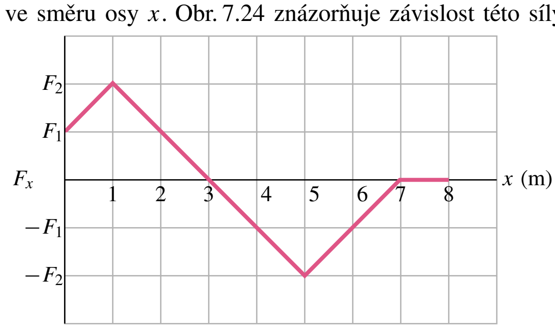
Obr. 7.22 Otázka 11

12. Na obr. 7.23 jsou znázorněny čtyři grafy závislosti proměnné síly $\boldsymbol{F}$, působící na částici pohybující se podél osy x, na poloze této částice. Poloha je určena souřadnicí x, síla $\boldsymbol{F}$ má směr osy x. Stupnice na odpovídajících si osách grafů jsou stejné. Seřaďte grafy sestupně podle hodnoty práce, kterou síla $\boldsymbol{F}$ vykonala při posunutí částice z polohy $x = 0$ do polohy x_1.



Obr. 7.23 Otázka 12

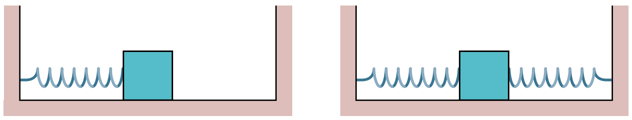
13. Síla $\boldsymbol{F}$ rovnoběžná s osou x působí na částici pohybující se ve směru osy x. Obr. 7.24 znázorňuje závislost této síly na



Obr. 7.24 Otázka 13

poloze částice, zadané souřadnicí x. V počáteční poloze $x = 0$ byla částice v klidu. Jaká je její poloha v okamžiku, kdy má (a) největší kinetickou energii, (b) největší rychlost, (c) nulovou rychlost? (d) Jaký je směr pohybu částice při jejím průchodu bodem o souřadnici $x = 6\,\mathrm{m}$?

14. Kostka je upevněna k volnému konci nenapjaté pružiny podle obr. 7.25a. Tuhost pružiny k je taková, že při posunutí kostky o vektor $\boldsymbol{d}$ vpravo vykoná pružná síla práci W_1. Velikost pružné síly na konci posunutí je F_1. Kostku připojíme na opačné straně ještě k druhé, stejné pružině, podle obr. 7.25b. Vzdálenost uchycení pružin je zvolena tak, aby ve výchozím stavu byly obě nenapjaté. Kostku posuneme opět o vektor $\boldsymbol{d}$. (a) Jaká je velikost výslednice sil, jimiž na kostku působí obě pružiny? (b) Jakou práci vykonaly pružné síly?

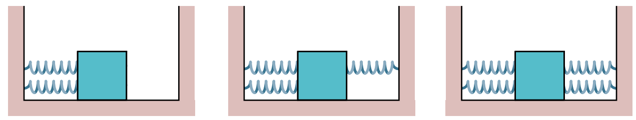


(*a*) (*b*)

Obr. 7.25 Otázka 14

15. Pružina A je tužší než pružina B, tj. $k_A > k_B$. Pružiny stlačujeme působením vnější síly tak, že (a) docílíme jejich stejného stlačení, (b) obě pružiny stlačujeme stejně velkými vnějšími silami. V každém z případů (a) a (b) rozhodněte, která z pružných sil $\boldsymbol{F}_A$, $\boldsymbol{F}_B$ vykonala větší práci.

16. Na obr. 7.26 jsou znázorněny tři situace. V každé z nich je kostka připojena ke stejným pružinám. V okamžiku, kdy je kostka uprostřed, jsou pružiny nenapjaté. Seřaďte situace sestupně podle velikosti výsledné síly, která bude působit na kostku posunutou o vzdálenost d (a) vpravo, (b) vlevo. Seřaďte situace sestupně podle celkové práce pružných sil působících na kostku posunutou o vzdálenost d (a) vpravo, (b) vlevo.



(1) (2) (3)

Obr. 7.26 Otázka 16

17. Jakým násobkem tuhosti pružiny je tuhost každé z pružin, které vzniknou rozpůlením pružiny původní? (*Tip*: Uvažte, jaké protažení každé z polovičních pružin způsobí vnější síla o dané velikosti.)

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 7.1 Kinetická energie

1C. Jaká je kinetická energie rakety Saturn V, spojené s kosmickou stanicí Apollo, je-li jejich celková hmotnost $2{,}9\cdot10^5\,\mathrm{kg}$ a dosáhnou-li společné rychlosti $11{,}2\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$?

2C. Volný elektron (hmotnost $m = 9{,}11\cdot10^{-31}\,\mathrm{kg}$) v mědi má při nejnižší dosažitelné teplotě kinetickou energii $6{,}7\cdot10^{-19}\,\mathrm{J}$. Jak velká je jeho rychlost?

3C. Určete kinetickou energii následujících objektů, pohybujících se danou rychlostí: (a) fotbalový obránce o hmotnosti 110 kg, který běží rychlostí 8,1 m/s, (b) kulka o hmotnosti 4,2 g letící rychlostí 950 m/s, (c) letadlová loď *Nimitz* o výtlaku 91 400 tun při rychlosti 32 uzlů (1 uzel $\doteq 0{,}51\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$).

4C. Dne 10. srpna 1972 proletěl atmosférou nad východním územím USA a Kanady velký meteorit. Odrážel se od horní vrstvy atmosféry, asi jako když se kamenem hází žabičky po vodě. Ohnivá koule na obloze byla tak jasná, že byla vidět i ve dne (obr. 7.27). Hmotnost meteoritu byla asi $4\cdot10^6\,\mathrm{kg}$, velikost jeho rychlosti zhruba $15\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Kdyby meteorit vstoupil do atmosféry ve svislém směru, dosáhl by povrchu Země s přibližně nezměněnou rychlostí. (a) Vypočtěte ztrátu energie meteoritu (v joulech) při jeho zabrzdění po kolmém dopadu na povrch Země. (b) Vyjádřete tuto energii jako násobek energie uvolněné při výbuchu jedné megatuny TNT, která činí $4{,}2\cdot10^{15}\,\mathrm{J}$. (c) Energie uvolněná při výbuchu atomové bomby svržené na Hirošimu byla ekvivalentní 13 kilotunám TNT. Kolika „hirošimským bombám“ odpovídá srážka meteoritu se Zemí?

Obr. 7.27 Cvičení 4. Velký meteorit prolétá atmosférou nad pohořím (vpravo nahoře).

5C. Výbuch na zemském povrchu zanechá kráter, jehož průměr je úměrný třetí odmocnině z energie, která se při tom uvolnila. Při výbuchu jedné megatuny TNT vznikne kráter o průměru 1 km. Pod Huronským jezerem v Michiganu byl objeven starý kráter o průměru 50 km. Jaká byla kinetická energie tělesa, které kráter vytvořilo, vyjádřená (a) v megatunách TNT, (b) v jednotkách odpovídajících ekvivalentu hirošimské bomby (cvič. 4)? (Takový dopad meteoritu nebo komety mohl významně ovlivnit pozemské podnebí či přispět k vyhynutí dinosaurů i jiných forem života.)

6Ú. Proton (hmotnost $m = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ kg) prochází *lineárním urychlovačem* se zrychlením o velikosti $3{,}6\cdot 10^{15}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Počáteční rychlost protonu byla $2{,}4\cdot 10^{7}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Jaká je velikost jeho rychlosti poté, co prošel vzdálenost 3,5 cm? (b) Jaký je přírůstek jeho kinetické energie v elektronvoltech?

7Ú. Otec běží o závod se svým synem. Kinetická energie otce je ve srovnání se synem poloviční, hmotnost dvojnásobná. Jestliže otec zvýší svou rychlost o $1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, bude mít stejnou kinetickou energii jako syn. Určete velikost počáteční rychlosti otce i syna.

8Ú. Jaká je kinetická energie Země při jejím oběhu kolem Slunce? (Potřebné číselné údaje vyhledejte v dodatku C.)

ODST. 7.3 Práce a kinetická energie

9C. Objekt o hmotnosti 102 kg se pohybuje po vodorovné přímce a je brzděn se zpožděním $2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Jeho počáteční rychlost má velikost $53\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Jaká je velikost brzdící síly? (b) Jakou vzdálenost těleso urazí, než se zastaví? (c) Jakou práci vykoná brzdná síla? (d) Zodpovězte otázky (a) až (c) pro případ, že zpoždění je $4{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

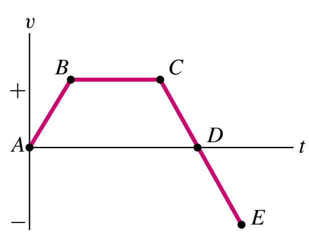
10C. Dělník vleče bednu o hmotnosti 50 kg po dokonale hladké vodorovné podlaze. Působí na ni při tom silou o velikosti 210 N pod úhlem 20° vzhledem k podlaze. Zjistěte, jakou práci vykonaly při posunutí bedny o 3,0 m následující síly: (a) síla, kterou působí na bednu dělník, (b) tíhová síla, (c) tlaková síla, jíž působí na bednu podlaha. (d) Jaká je celková práce všech sil působících na bednu?

11C. Plovoucí ledová kra je hnána proudem vody podél pobřeží. Proud na ni působí silou $\boldsymbol{F} = (210\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} - (150\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}$. Jakou práci vykoná tato síla při posunutí kry o vektor $\boldsymbol{d} = (15\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} - (12\,\mathrm{m})\boldsymbol{j}$?

12C. Částice se posune po přímce o vektor $\boldsymbol{d} = (8\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j}$. Jedna ze sil, které na částici působí, je $\boldsymbol{F} = (2\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} - (4\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}$. Pro jaké hodnoty c je práce této síly při posunutí $\boldsymbol{d}$ (a) nulová, (b) kladná, (c) záporná?

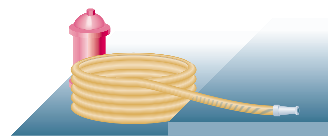
13C. Proton, který byl zpočátku v klidu, byl v cyklotronu urychlen na výslednou rychlost o velikosti $3{,}0\cdot 10^{6}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Jakou práci (v elektronvoltech) při tom vykonala elektrická síla, která proton urychlila? (I když velikost zadané rychlosti činí již 1 % rychlosti světla, nepočítejte s relativistickou opravou.)

14C. Na částici pohybující se po přímce působí jediná síla. Obr. 7.28 ukazuje časovou závislost rychlosti částice. Určete znaménko (plus, resp. minus) práce, kterou tato síla vykoná v každém z časových intervalů AB, BC, CD a DE.



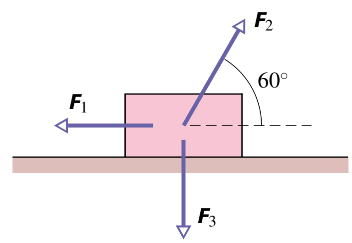
Obr. 7.28 Cvičení 14

15C. Dvanáctimetrovou požární hadici (obr. 7.29) rozvíjíme tak, že její konec s tryskou táhneme po dokonale hladké podlaze stálou rychlostí o velikosti $2{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Hmotnost jednoho metru hadice je 0,25 kg (její délková hustota tedy je $0{,}25\,\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$). Jakou práci vykoná síla působící na hadici při jejím rozvíjení do okamžiku, kdy je celá hadice v pohybu?



Obr. 7.29 Cvičení 15

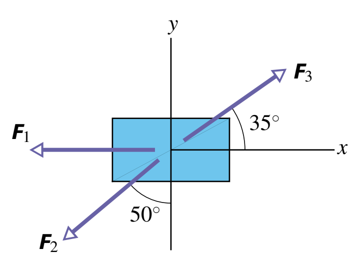
16Ú. Na obr. 7.30 jsou znázorněny tři síly působící na kufr, který se posune o 3,00 m vlevo po dokonale hladké podlaze. Velikosti sil jsou $F_1 = 5{,}00\,\mathrm{N}$, $F_2 = 9{,}00\,\mathrm{N}$ a $F_3 = 3{,}00\,\mathrm{N}$. (a) Jaká je celková práce těchto sil při uvedeném posunutí kufru? (b) Rozhodněte, zda kinetická energie kufru vzroste, nebo poklesne.



Obr. 7.30 Úloha 16

17Ú. Síla $\boldsymbol{F}$ působí na částici o hmotnosti 3,0 kg tak, že její poloha závisí na čase vztahem $x = 3{,}0t - 4{,}0t^2 + 1{,}0t^3$. Souřadnice x je zadána v metrech a čas t v sekundách. Určete práci síly $\boldsymbol{F}$ v časovém intervalu od $t = 0$ do $t = 4{,}0$ s. (*Tip*: Určete rychlost částice v obou okamžicích.)

18Ú. Obr. 7.31 představuje pohled shora na nádobu pohybující se po dokonale hladké podlaze, na kterou působí tři síly. Nádoba byla zpočátku v klidu. Velikosti sil jsou $F_1 = 3{,}00\,\mathrm{N}$, $F_2 = 4{,}00\,\mathrm{N}$ a $F_3 = 10{,}00\,\mathrm{N}$. Jakou celkovou práci tyto síly vykonají při posunutí nádoby o 4,00 m od okamžiku, kdy se dala do pohybu?



Obr. 7.31 Úloha 18

19Ú. Na částici o hmotnosti 2,0 kg působí stálá síla o velikosti 10 N, která svírá se směrem kladné osy x úhel 150°

(měřeno v kladném smyslu, tj. proti směru otáčení hodinových ručiček). Jakou práci vykoná tato síla při posunutí částice z počátku soustavy souřadnic do bodu o polohovém vektoru $(2{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} - (4{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{j}$?

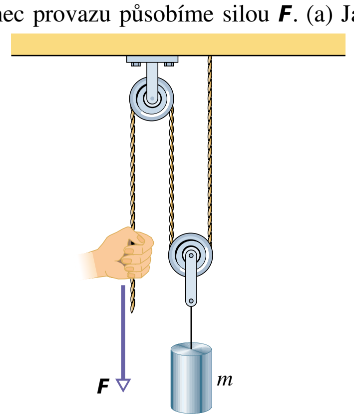
ODST. 7.4 Práce tíhové síly

20C. (a) Při úpravách montrealského velodromu v roce 1975 bylo třeba vycentrovat jeho střechu vážící 41 000 tun. K tomu bylo nutné ji nadzvednout asi o 10 cm. Jakou práci při tom vykonaly síly, které střechu zvedaly? (b) V roce 1960 prý paní Maxwell Rogersová z Tampy na Floridě dokázala nadzvednout jeden konec auta, které spadlo na jejího syna poté, co selhal zvedák. Připusťme, že v takovém šoku byla skutečně schopna nadzvednout automobil o váze 16 000 N silou o velikosti 4 000 N asi o 5 cm. Jakou práci tato síla vykonala?

21C. Dělník tlačí bednu o hmotnosti 25,0 kg vzhůru po dokonale hladké nakloněné rovině o úhlu sklonu 25,0°. Působí na ni při tom silou o velikosti 209 N, která je rovnoběžná s nakloněnou rovinou. Vypočtěte práci, kterou při posunutí bedny o 1,50 m vykonají síly působící na bednu: (a) síla, kterou působí dělník, (b) tíhová síla, (c) normálová (tlaková) síla nakloněné roviny. (d) Jaká je celková práce, kterou vykonaly síly působící na bednu?

22C. Kostka ledu o hmotnosti 45 kg klouže dolů po nakloněné rovině dlouhé 1,5 m a vysoké 0,91 m. Dělník tlačí kostku silou směřující vzhůru podél nakloněné roviny tak, aby klesala stálou rychlostí. (a) Jakou silou působí dělník na kostku? Určete práci, kterou vykonají síly působící na kostku: (b) síla, kterou působí dělník, (c) tíhová síla, (d) normálová síla, jíž působí na kostku povrch nakloněné roviny, (e) výsledná síla.

23C. Na obr. 7.32 je znázorněno zařízení s volnou kladkou: provaz je veden přes dvě nehmotné kladky, které se mohou otáčet bez tření. Na volné kladce visí nádoba o hmotnosti $m = 20\,\mathrm{kg}$, na volný konec provazu působíme silou $\boldsymbol{F}$. (a) Jak velká musí být síla $\boldsymbol{F}$, máme-li nádobu zvedat stálou rychlostí? (b) O jakou vzdálenost musíme posunout volný konec provazu, chceme-li nádobu zvednout o 2,0 cm? Určete, jakou práci vykonají při tomto posunutí následující síly: (c) síla $\boldsymbol{F}$, (d) tíhová síla působící na nádobu. (*Tip*: Provaz vedený přes kladku podle obrázku na ni působí celkovou silou, jejíž velikost je rovna dvojnásobku velikosti tahové síly provazu.)



Obr. 7.32 Cvičení 23

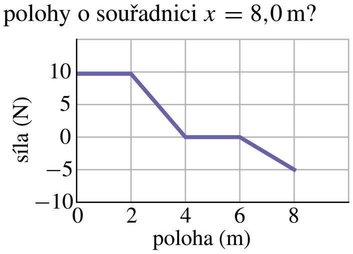
24Ú. Helikoptéra zvedala 72 kg astronauta na laně z hladiny oceánu do výšky 15 m se zrychlením $g/10$. Určete práci, kterou při tom vykonaly síly působící na astronauta: (a) síla, kterou působila helikoptéra, (b) tíhová síla. Jakou (c) kinetickou energii a (d) rychlost astronaut získal?

25Ú. Kostku o hmotnosti M, která byla zpočátku v klidu, spouštíme na laně svisle dolů se zrychlením $g/4$. Jakou práci vykonala (a) tahová síla lana, (b) tíhová síla, do okamžiku, kdy kostka poklesla o vzdálenost d? (c) Jaká je v tomto okamžiku kinetická energie kostky a (d) její rychlost?

26Ú. Speleologická záchranná četa zvedá zraněného průzkumníka ze zborcené jeskyně přímo vzhůru na laně navíjeném pomocí motoru. Akce má tři fáze, z nichž každá vyžaduje zvednutí člověka o svislou vzdálenost 10,0 m: (1) Člověk, který byl zpočátku v klidu, je zvedán s jistým zrychlením, až dosáhne rychlosti o velikosti $5{,}00\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (2) Další zdvih se děje stálou rychlostí, jíž bylo dosaženo v předchozí fázi. (3) Následuje rovnoměrně zpožděný pohyb až do zastavení. Jakou práci vykoná v každé fázi pohybu síla, jíž působí na speleologa tažné lano?

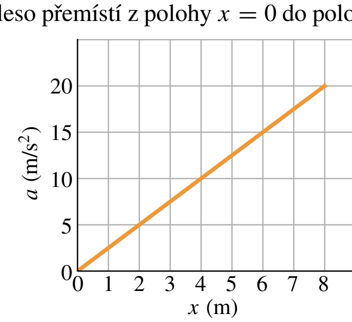
ODST. 7.5 Práce proměnné síly

27C. Kostka o hmotnosti 5,0 kg se pohybuje přímočaře po dokonale hladké vodorovné rovině. Na kostku působí síla, jejíž závislost na poloze kostky je znázorněna na obr. 7.33. Jakou práci vykoná tato síla při přemístění kostky z počátku soustavy souřadnic do polohy o souřadnici $x = 8{,}0\,\mathrm{m}$?



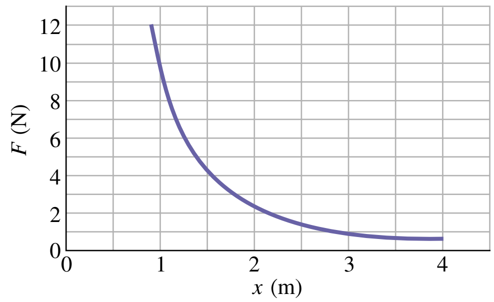
Obr. 7.33 Cvičení 27

28C. Těleso o hmotnosti 10 kg se pohybuje po ose x. Závislost jeho zrychlení na poloze je znázorněna na obr. 7.34. Jaká je celková práce vykonaná silami, které udělují tělesu toto zrychlení, jestliže se těleso přemístí z polohy $x = 0$ do polohy $x = 8{,}0\,\mathrm{m}$?



Obr. 7.34 Cvičení 28

29Ú. (a) Na částici pohybující se po ose x působí ve směru této osy síla, jejíž závislost na poloze částice je znázorněna v grafu 7.35. Odhadněte práci této síly při přemístění částice z polohy $x = 1\,\mathrm{m}$ do polohy $x = 3\,\mathrm{m}$. Zjemněte použitou metodu tak, abyste si udělali představu, jak blízko se vám podařilo přiblížit se přesné hodnotě 6 J. (b) Rovnice znázorněné křivky má tvar $F = ax^{-2}$, kde $a = 9\,\mathrm{N{\cdot}m^2}$. Vypočtěte hledanou práci pomocí integrace.



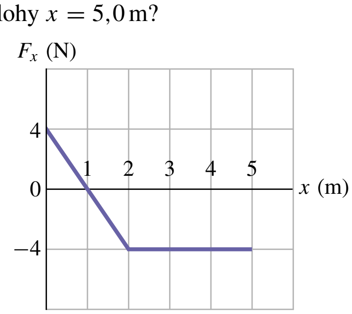
Obr. 7.35 Úloha 29

30Ú. Na částici působí síla $F = F_0(\frac{x}{x_0} - 1)$. Určete práci této síly při přemístění částice z polohy $x = 0$ do polohy $x = 2x_0$ (a) přibližně z grafu závislosti $F(x)$, (b) integrací funkce $F(x)$ v daných mezích proměnné x.

31Ú. Jakou práci vykoná síla $\boldsymbol{F} = (2x\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (3\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}$ působící na částici při jejím posunutí z polohy $\boldsymbol{r}_\mathrm{i} = (2\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} + (3\,\mathrm{m})\boldsymbol{j}$ do polohy $\boldsymbol{r}_\mathrm{f} = -(4\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} - (3\,\mathrm{m})\boldsymbol{j}$?

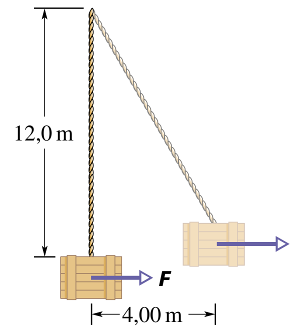
32Ú. Síla $\boldsymbol{F}$ působí na částici pohybující se podél osy x. Síla má směr kladně orientované osy x a závislost její velikosti na poloze částice je popsána funkcí $F(x) = 10 \exp(-x/2{,}0)\,\mathrm{N}$, kde proměnná x je zadávána v metrech. Určete práci síly $\boldsymbol{F}$ při posunutí částice z počátku osy x do polohy o souřadnici $x = 2{,}0\,\mathrm{m}$ (a) jako obsah plochy pod grafem funkce $F(x)$, (b) výpočtem pomocí integrálu.

33Ú. Na těleso o hmotnosti 2,0 kg působí při jeho pohybu podél osy x jediná síla. Její závislost na poloze tělesa je znázorněna na obr. 7.36. Rychlost tělesa v bodě $x = 0$ je $v_x = 4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Jaká je kinetická energie tělesa v bodě $x = 3\,\mathrm{m}$? (b) V jaké poloze x má těleso kinetickou energii 8 J? (c) Jaká je největší kinetická energie, které těleso dosáhne během pohybu z polohy $x = 0$ do polohy $x = 5{,}0\,\mathrm{m}$?



Obr. 7.36 Úloha 33

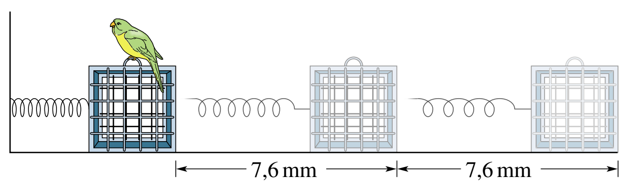
34Ú. Bedna o hmotnosti 230 kg visí na konci lana o délce 12,0 m. Na bednu začneme působit ve vodorovném směru silou $\boldsymbol{F}$ o proměnné velikosti a posuneme ji o 4,00 m ve vodorovném směru, jak ukazuje obr. 7.37. (a) Jaká je velikost síly $\boldsymbol{F}$ v koncové poloze bedny? (b) Jakou celkovou práci vykonaly síly působící na bednu při jejím posunutí? (c) Jakou práci vykonala tíhová síla a (d) tahová síla lana? (e) Za předpokladu, že bedna byla zpočátku v klidu, určete pomocí výsledků (b), (c) a (d) práci síly $\boldsymbol{F}$. (f) Vysvětlete, proč práce síly $\boldsymbol{F}$ není rovna součinu velikosti vodorovného posunutí bedny a velikosti síly $\boldsymbol{F}$ zjištěné v části (a) této úlohy?



Obr. 7.37 Úloha 34

ODST. 7.6 Práce pružné síly

35C. Ke konci pružiny o tuhosti $15\,\mathrm{N{\cdot}cm^{-1}}$ je připevněna klec (obr. 7.38). (a) Jakou práci vykoná síla, jíž působí pružina na klec, při stlačení o 7,6 mm z výchozího nenapjatého stavu? (b) Jakou práci vykoná při dalším stlačení o 7,6 mm?

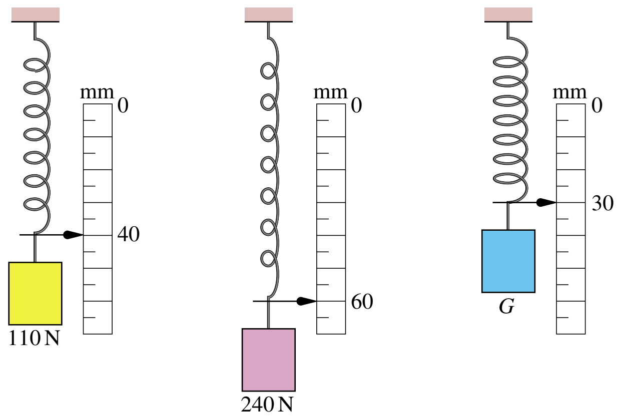


Obr. 7.38 Cvičení 35

36C. Studenti MIT (Massachusetts Institute of Technology, jedna z renomovaných univerzit v USA) obývající dvě sousední budovy studentské koleje East Campus zorganizovali jednou v rámci obvyklých studentských recesí bitvu, při níž používali praků vyrobených z chirurgických hadic, uchycených v okenních rámech. Míč naplněný obarvenou vodou vložili do „kapsy“ praku, připevněné k hadici. Hadici pak napjali přes celou šířku pokoje, uvolnili a míč tak vymrštili proti soupeřům bydlícím v protilehlé budově. Předpokládejme, že se napjatá hadice řídí Hookovým zákonem a že její tuhost je $100\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. Jakou práci vykoná pružná síla, jíž působí hadice na kapsu s míčem, od okamžiku uvolnění hadice protažené o 5,00 m do okamžiku vymrštění míče, kdy je již hadice v nenapjatém stavu?

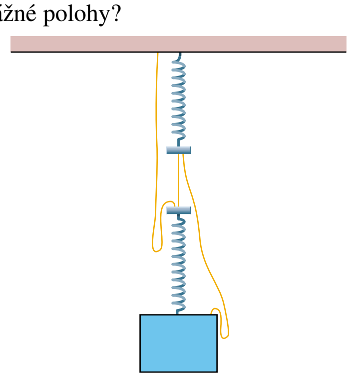
37Ú. Těleso o hmotnosti 2,0 kg se pohybuje po ose x. x-ová složka jediné síly, která na těleso působí, je tvaru $F_x = -6x\,\mathrm{N}$. Souřadnice x je zadána v metrech. Rychlost tělesa v bodě o souřadnici $x = 3{,}0\,\mathrm{m}$ je $v_x = 8{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Jaká je rychlost tělesa v poloze $x = 4{,}0\,\mathrm{m}$? (b) V jaké poloze má těleso rychlost $v_x = 5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$?

38Ú. Pružinový siloměr má stupnici cejchovanou v milimetrech. Na siloměr zavěšujeme postupně tři různá závaží (obr. 7.39). (a) Jakou hodnotu ukáže ukazatel siloměru na stupnici, jestliže závaží sejmeme? (b) Jaká je velikost tíhové síly G?



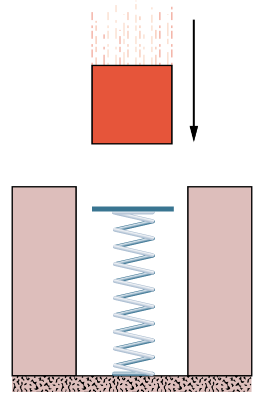
Obr. 7.39 Úloha 38

39Ú. Na obr. 7.40 jsou znázorněny dvě stejné pružiny spojené krátkým vláknem o délce 10 cm. Délka každé z pružin v nenapjatém stavu je 50 cm a tuhost 500 $\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. Horní pružina je připevněna ke stropu, na volném konci dolní pružiny visí krabice o váze 100 N. Další dvě ohebná vlákna, každé o délce 85 cm (v dobrém přiblížení neměnné) jsou k soustavě připojena podle obrázku. Krátké vlákno přepálíme, takže krabice zůstane zavěšena pouze na pružinách a dlouhých vláknech a začne se pohybovat. Vlivem odporové síly prostředí se krabice nakonec zastaví v nové rovnovážné poloze. (a) Rozhodněte, zda tato poloha bude ležet nad, či pod původní rovnovážnou polohou, kterou zaujímala krabice před přepálením krátkého vlákna a (b) určete, jak daleko bude od ní vzdálena. (c) Jakou celkovou práci vykonaly pružné síly obou pružin v časovém intervalu mezi přepálením vlákna a ustálením nové rovnovážné polohy?



Obr. 7.40 Úloha 39

40Ú. Kostka o hmotnosti 250 g dopadne na svislou pružinu o tuhosti $k = 2{,}5\,\mathrm{N{\cdot}cm^{-1}}$ (obr. 7.41) a pevně se s ní spojí. Soustava začne kmitat. V okamžiku, kdy kostka poprvé dosáhne bodu obratu, je stlačení pružiny $d = 12\,\mathrm{cm}$. Určete, jakou práci vykonaly do tohoto okamžiku následující síly působící na kostku: (a) tíhová síla, (b) pružná síla. (c) Jaká byla rychlost kostky bezprostředně před dopadem na pružinu? (Třecí a odporové síly považujeme za zanedbatelné.) (d) Jaké by bylo maximální stlačení pružiny při dvojnásobné rychlosti dopadu kostky?



Obr. 7.41 Úloha 40

ODST. 7.7 Výkon

41C. Plně zatížená kabina výtahu má hmotnost $3{,}0\cdot10^3\,\mathrm{kg}$ a stoupá stálou rychlostí. Za 23 s urazí 210 m. Jaký je průměrný výkon tahové síly lana kabiny?

42C. Lyžařský výtah vytáhne 100 lyžařů, z nichž každý má hmotnost průměrně 70 kg, do výšky 150 m za 60 s. Rychlost pohybu je konstantní. Jaký je průměrný výkon tažné síly výtahu?

43C. Kabina nákladní zdviže má hmotnost 4 500 kg, nejvyšší povolená hmotnost nákladu je 1 800 kg. Jaký musí být výkon tahové síly lana zdviže, zvedá-li se plně naložená kabina stálou rychlostí 3,80 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$?

44C. (a) Určete okamžitý výkon síly $\boldsymbol{F} = (4{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} - (2{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{j} + (9{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{k}$ působící na částici, v okamžiku, kdy je její rychlost $\boldsymbol{v} = -(2{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} + (4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{k}$. (b) Předpokládejme, že v jiném okamžiku má rychlost částice nenulový průmět pouze do směru vektoru $\boldsymbol{j}$ a že síla $\boldsymbol{F}$ zůstala nezměněna. Jaká je nyní rychlost částice, je-li okamžitý výkon síly $-12\,\mathrm{W}$?

45Ú. Kostka o hmotnosti 100 kg je tažena stálou rychlostí o velikosti 5,0 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ po dokonale hladké podlaze silou $\boldsymbol{F}$ o velikosti 122 N. Síla svírá s podlahou úhel 37° a je orientován směrem vzhůru. Jaký je výkon síly $\boldsymbol{F}$?

46Ú. Kůň táhne vozík silou o velikosti 180 N svírající s vodorovnou rovinou úhel +30°. Jedou stálou rychlostí o velikosti 10 $\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. (a) Jakou práci vykoná tažná síla během 10 min jízdy? (b) Jaký je průměrný výkon této síly (ve wattech a v jednotkách HP)?

47Ú. Těleso o hmotnosti 2,0 kg, které bylo zpočátku v klidu, se začne pohybovat rovnoměrně zrychleně a během 3,0 s dosáhne rychlosti o velikosti 10 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Jakou práci vykoná výsledná urychlující síla během uvedených 3,0 s? Jaký je okamžitý výkon této síly (b) na konci uvedeného časového intervalu a (c) na konci jeho první poloviny?

48Ú. Síla o velikosti 5,0 N začne působit na těleso o hmotnosti 15 kg, které je zpočátku v klidu. Určete (a) práci, kterou tato síla vykoná během první, druhé a třetí sekundy od počátku pohybu, a (b) okamžitý výkon síly na konci třetí sekundy.

49Ú. Kabina plně naložené nákladní zdviže má hmotnost 1 200 kg. Kabinu je třeba zvednout do výšky 54 m za 3,0 min. Protizávaží má hmotnost pouze 950 kg, takže motor zdviže musí napomáhat k vyvažování kabiny. Jaký musí být průměrný výkon (v jednotkách HP) tažné síly motoru, který působí na kabinu prostřednictvím tažného lana?

50Ú. Síla, kterou je třeba vléci loď, aby se pohybovala rovnoměrně, je úměrná okamžité rychlosti lodi. (Tato síla musí kompenzovat odporovou sílu vody.) Její výkon při rychlosti 4 km/h je 7,5 kW. Jaký okamžitý výkon tažné síly odpovídá rychlosti 12 km/h?

51Ú. Tělísko o hmotnosti 0,30 kg, které může klouzat po vodorovné dokonale hladké podložce, je připevněno k volnému konci pružiny o tuhosti $k = 500\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$, jejíž druhý konec je pevný. V okamžiku průchodu rovnovážnou polohou (v tomto okamžiku je pružná síla působící na tělísko nulová) má tělísko kinetickou energii 10 J. (a) Jaký je okamžitý výkon pružné síly při průchodu tělíska rovnovážnou polohou? (b) Jaký je okamžitý výkon pružné síly v okamžiku, kdy je pružina stlačena o 0,10 m a tělísko se vzdaluje od rovnovážné polohy?

ODST. 7.8 Kinetická energie při vysokých rychlostech

52C. Elektron urazí dráhu 5,1 cm za 0,25 ns. (a) Vyjádřete jeho rychlost v jednotkách rychlosti světla a (b) jeho kinetickou energii v elektronvoltech. (c) Jak velké chyby v procentech se dopustíme při výpočtu kinetické energie, použijeme-li klasickou formuli namísto relativistické?

53C. Vztah mezi prací a kinetickou energií lze použít pro částice s libovolnou rychlostí. Jakou práci (v elektronvoltech) je třeba vykonat při urychlení elektronu z klidu na rychlost o velikosti (a) $0{,}500c$, (b) $0{,}990c$, (c) $0{,}999c$?

54Ú. Elektron má rychlost o velikosti $0{,}999c$. (a) Jaká je jeho kinetická energie? (b) O kolik procent vzroste jeho kinetická energie, vzroste-li velikost rychlosti o 0,05 %?

PRO POČÍTAČ

55Ú. Síla $\boldsymbol{F} = (3{,}00\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (7{,}00\,\mathrm{N})\boldsymbol{j} + (7{,}00\,\mathrm{N})\boldsymbol{k}$ působí na těleso o hmotnosti 2,00 kg, které se posune z počáteční polohy $\boldsymbol{d}_\mathrm{i} = (3{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} - (2{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{j} + (5{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{k}$ do koncové polohy $\boldsymbol{d}_\mathrm{f} = -(5{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} + (4{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{j} + (7{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{k}$ za dobu 4,00 s. Určete (a) práci síly $\boldsymbol{F}$ v uvedeném časovém intervalu, (b) její průměrný výkon v tomto intervalu a (c) úhel mezi vektory $\boldsymbol{d}_\mathrm{i}$ a $\boldsymbol{d}_\mathrm{f}$.