

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY

VYUŽITÍ WOLFRAMU ALPHA V MATEMATICE

BAKLÁŘSKÁ PRÁCE

Gabriela Kaufnerová

Vedoucí práce: Mgr. Lukáš HONZÍK, Ph.D.

Plzeň, 2014

Prohlašuji, že jsem práci vypracoval(a) samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni dne

.....

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat vedoucímu bakalářské práce Mgr. Lukáš HONZÍK, Ph.D. za metodické vedení a věcné připomínky při zpracování bakalářské práce.

Abstrakt

Využití Wolframu Alpha v matematice

Tato bakalářská práce se zabývá využíváním Wolframu Alpha v matematice. Práci jsme rozdělili na teoretickou a praktickou část. V teoretické části jsme se zaměřili na popsání a vysvětlení zadávaných příkazů, které jsme využili v praktické části pro výpočet příkladů. Během řešení příkladů v praktické části jsme navrhovali způsoby řešení, které umožňuje Wolfram Alpha, a popisovali jeho výstupy. Navíc jsme přiblížili aplikace, které Wolfram Alpha nabízí při výpočtu.

Klíčová slova: Wolfram Alpha, matematika, algebra, graf

Abstract

Application of Wolfram Alpha in mathematic

This bachelor's thesis deals with the using of Wolfram Alpha in mathematics. This work is divided into two parts. The first is theoretical and the second is more practical part. We focused on describing and explaining assigned problems in the theoretical part that are used for the calculation of these problems in the practical part. During the calculation we suggested the way of solving that Wolfram Alpha helps and then we described the results. In addition we gave some ideas about applications which Wolfram Alpha offers during the calculation.

Key words: Wolfram Alpha, mathematics, algebra, graph

Obsah

Část I.....	3
Úvod	3
Část II	5
Teoretická část.....	5
1 Čísla	5
1.1 Celá čísla	5
1.2 Racionální čísla	6
1.3 Iracionální, algebraická a transcendentní čísla	7
1.4 Komplexní čísla.....	8
1.5 Intervaly.....	9
2 Vykreslování do grafu	10
2.1 Vykreslování funkcí	10
2.2 Vykreslování rovnic a nerovnic.....	12
2.3 3D grafy.....	14
2.4 Polární a parametrické grafy	15
3 Algebra.....	16
3.1 Rovnice.....	16
3.2 Polynomy.....	17
3.3 Racionální (lomená) funkce	19
3.4 Vektorová algebra.....	20
3.5 Matice a lineární algebra	21
3.6 Obory.....	25
Část III.....	26
Praktická část.....	26
4 Ukázka řešených příkladů.....	26

5 Aplikace Wolframu Alpha.....	46
Část IV.....	50
Závěr.....	50
Část V.....	52
Literatura.....	52
Seznam obrázků.....	53
Seznam příkladů.....	56

Část I

Úvod

V dnešní době patří Wolfram Alpha k revolučnímu typu výpočetně vědomostnímu nástroji, jenž není ještě ve finální podobě. Samotný autor se domnívá, že v konečné podobě nikdy nebude a stále bude na něm co vylepšovat. Vynalezl ho Stephen Wolfram ve své soukromé firmě Wolfram Research, jež sídlí v Champaign, Illinois v USA. Jeho oficiálně používanými názvy jsou Wolfram Alpha, WolframAlpha a Wolfram|Alpha, ale v rámci bakalářské práce budeme používat zkratku WA. Provoz byl zahájen 18. května 2009. Více informací lze čerpat z článků ze zdrojů [2] a [3].

WA je volně dostupný server na adrese <http://www.wolframalpha.com>, jenž mohou využívat všichni uživatelé. Funkce vhodné pouze pro registrované uživatele jsou vypnuty, a to tím, že jsou vyobrazeny v odstínech šedi a nelze na ně kliknout myší. Pokud se chceme stát členem WA, tak na výše uvedené adrese klikneme myší na tlačítko *Sign in* (Přihlásit se) a můžeme se zaregistrovat buď přes vlastní e-mailovou adresu nebo přes sociální síť facebook. Tím se nám zprovozní základní aplikace zdarma. Ale u aplikací, jež slouží k získávání podrobnějších informací, je zapotřebí určitých povolení. Chceme-li zprovoznit aplikaci *Step-by-step*, tak musíme potvrdit příchozí e-mail a navíc pro spuštění *CDF interactivity* je nutné nainstalovat do počítače Wolfram CDF Player. Funkce *Step-by-step* je zcela zdarma pro registrované uživatele, pokud ji budou využívat maximálně 2krát denně, ale *CDF interactivity* je zdarma pouze 7 dní.

Klimánek ([3], 2009) zaznamenal prohlášení Stephena Wolframa: „Před padesáti lety, když počítače byly novinkou, se lidé domnívali, že počítači položí jakoukoli faktickou otázku a ten jim na ní odpoví. Tak to ale nefungovalo. Počítače jsou sice schopny dělat spoustu pozoruhodných a překvapivých věcí, ale tohle ne. Já si ale vždycky myslel, že jednou to možné bude. A před několika lety jsem si uvědomil, že jsem konečně v situaci, kdy se do toho můžu pustit.“ Zde samotný autor vysvětluje motivaci pro tvorbu WA, který bude schopný zodpovědět většinu položených otázek z matematiky, chemie, fyziky, zeměpisu, ale také z vaření. Samotný WA má rozdělenou matematiku na elementární matematiku, čísla, vykreslování a zobrazování do grafu, algebru, výpočet a analyzování problému, geometrii, teorii čísel, diskretní matematiku, aplikovanou matematiku, ...

V bakalářské práci, již máme rozdělenou na teoretickou a praktickou část, se věnujeme využití WA v matematice. V teoretické části se zaměříme na podrobnější popis práce s WA v oblasti čísel, vykreslování do grafu a algebře. V praktické části řešíme příklady a popisujeme aplikace WA.

V první kapitole se věnujeme číslům a intervalům. Ve druhé kapitole se zabýváme vykreslováním funkcí, rovnic a nerovnic do grafů, jež mohou být 3D, polární, parametrické,... Ve třetí kapitole zkoumáme řešení rovnic, polynomů, racionálních (lomených) funkcí, vektorů, matic a oborů z oblasti algebry. Ve čtvrté kapitole představíme různé varianty řešení příkladů pomocí WA. V páté kapitole přiblížíme aplikace, jež WA nabízí v průběhu řešení příkladů. Na závěr zhodnotíme vhodnost využívání WA v matematice.

Část II

Teoretická část

1 Čísla

Celá, racionální, iracionální, algebraická, transcendentální a komplexní čísla a intervaly si podrobněji rozebereme v této kapitole, kde si ukážeme možné matematické operace s nimi.

1.1 Celá čísla

Ve WA můžeme určit vlastnosti celých čísel, jejich poslední číslici nebo jejich poslední nenulovou číslici a provádět s nimi přesné výpočty. Před prováděním matematických operací s celými čísly je potřeba znát jejich definiční obor. Hálek a Beránek ([4], s. 25) definují obor celých čísel: „Je tvořen čísly přirozenými, nulou a čísly opačnými k číslům přirozeným. Vyjadřuje je rozdíl $m - n$, kde $m \in N$, $n \in N$. Pro $m > n$ obdržíme přirozená čísla či kladná celá čísla /ozn. N či Z^+ /, pro $m = n$ nulu a pro $m < n$ záporná celá čísla /ozn. Z^- /.“

Vlastnosti celých čísel získáme pouhým zadáním celého čísla do příkazové řádky, a abychom mohli s nimi provádět aritmetické operace, tak napíšeme do řádky výpočetní operace v libovolném pořadí a řetězíme je s nimi. Výpočet poslední číslice celého čísla a poslední nenulové číslice získáme zadáním *last digit of a* a *last nonzero digit of a* (last = poslední, digit = číslice, of = z, nonzero = nenulové) do příkazové řádky, kde *a* je celé číslo. V obrázku 1. 1 vyobrazíme zadání předpisu pro výpočet poslední číslice.



Obrázek 1. 1: Celá čísla vstup

Z obrázku 1. 2 je vidět, že výstupem WA je číselný, obrazový a slovní výsledek.



Obrázek 1. 2: Celá čísla výstup

1.2 Racionální čísla

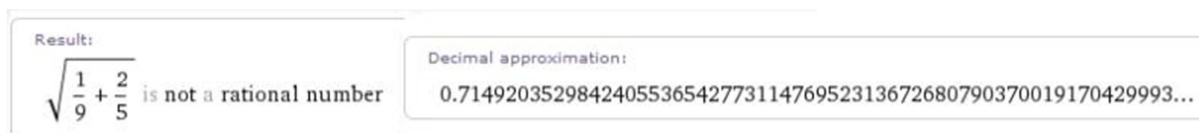
Ve WA můžeme určovat vlastnosti racionálních čísel, provádět s nimi přesné aritmetické výpočty a navíc je identifikovat, zda se jedná o racionální číslo. Abychom mohli počítat s racionálními čísly, tak je potřeba znát definici racionálního čísla. Hálek a Beránek ([4], s. 25) definují obor racionálních čísel: „Obor racionálních čísel je tvořen čísly celými a zlomky: abychom mohli hovořit o podílu kterýchkoliv dvou celých čísel, zavádíme zlomky tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$. Zlomek je přitom zaveden tak, že celá čísla se stávají jejich speciálním případem.“

Informace o vlastnostech racionálních čísel opatříme, tak že do příkazové řádky zadáme racionální číslo a zároveň s nimi můžeme provádět aritmetické výpočty, a to tak, že k nim připsáme do příkazové řádky výpočetní operace v libovolném pořadí a řetězíme je s nimi. K identifikaci racionálního čísla je zapotřebí předpis *Is c a rational number?* (is = je, a rational number = racionální číslo), kde c je obecné číslo, jak je představeno v obrázku 1. 3.



Obrázek 1. 3: Racionální číslo vstup

Výstupem zadaného příkladu ve WA je výsledek a popsání zadaného čísla v rámci desetinné soustavy, kde lze regulovat počet desetinných míst. Výstupem je větná odpověď, jež zní, že $\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{2}{5}}$ is not a rational number ($\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{2}{5}}$ není racionální číslo), což je patrné z obrázku 1. 4.



Obrázek 1. 4: Racionální číslo výstup

1.3 Iracionální, algebraická a transcendentní čísla

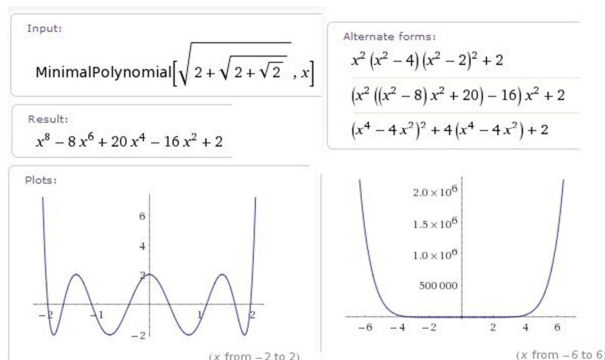
Iracionální čísla ve WA nabízejí stejné funkce jako racionální čísla. Rozdíl mezi nimi je, že iracionální čísla jsou neperiodické desetinné zlomky oproti racionálním číslům. Iracionální a racionální čísla se nazývají souhrnně reálná čísla společně s algebraickými a transcendentními čísly. Pro lepší představu je potřeba zavést definici algebraických a transcendentních čísel. Rektorys ([5], s. 5) definuje algebraická a transcendentní čísla: „Reálné číslo α se nazývá *algebraické*, je-li kořenem nějaké algebraické rovnice $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ s racionálními koeficienty a_1, a_2, \dots, a_n . Není-li α algebraické, nazývá se *transcendentní*. Transcendentní jsou např. čísla e, π .“

Algebraická a transcendentní čísla nabízejí stejné funkce jako racionální čísla, ale ve WA můžeme s algebraickými čísly navíc počítat minimální polynom. Pro výpočet minimálního polynomu algebraického čísla zadáme *minimal polynomial of a* (minimal = minimální, polynomial = polynom) do příkazové řádky, kde a je algebraické číslo. Obrázek 1. 5 nám vyobrazuje zadání předpisu pro výpočet minimálního polynomu algebraického čísla.



Obrázek 1. 5: Minimální polynom vstup

Z obrázku 1. 6 vyplývá, že ve výstupu WA je vstup, výsledek, alternativní formy předpisu a grafy. Alternativní formy předpisu uvádějí různé varianty předpisu polynomu, jenž je výsledkem zadaného příkladu, a grafy nám znázorňují minimální polynom v kartézské soustavě souřadné v intervalech $(-2, 2)$ a $(-6, 6)$.



Obrázek 1. 6: Minimální polynom výstup

1.4 Komplexní čísla

Ve WA můžeme provádět základní aritmetické operace s komplexními čísly, nacházet jejich kořeny, zjišťovat jejich n -té odmocniny a získávat řešení rovnic v oboru komplexních čísel. Pro lepší orientaci by bylo vhodné znát definici komplexního čísla. Hálek a Beránek ([4], s. 27) definují komplexní číslo: „Komplexním číslem rozumíme uspořádanou dvojici reálných čísel a, b . Zapisujeme je obvykle ve tvaru $a + bi$, kde a, b jsou reálná čísla a pro i , tzv. imaginární jednotku, platí $i^2 = -1$. Číslo a se nazývá reálná část, číslo b imaginární část komplexního čísla $a + bi$. Dvě komplexní čísla se sobě rovnají právě tehdy, mají-li stejnou reálnou a imaginární část.“

Aritmetické operace s komplexními čísly lze získat zadáním výpočetních operací v libovolném pořadí do příkazové řádky, kde je s nimi řetězíme. Pro určení komplexního kořene čísla, stačí zadat do příkazové řádky $a + bi$, kde a je reálná složka a bi je imaginární složka komplexního čísla. N -té odmocniny komplexních čísel dosáhneme napsáním předpisu *all dth roots of c* (all = všechny, root = odmocnina) do příkazové řádky, kde d je stupněm odmocniny a c je komplexní číslo. V obrázku 1. 7 znázorníme ukázkou předpisu pro výpočet všech pěti stupňů odmocnin z komplexního čísla $1 + i$.



Obrázek 1. 7: N -té odmocniny komplexního čísla vstup

Z níže uvedeného obrázku 1. 8 je patrné, že ve výsledku WA je pět komplexích kořenů, jež jsou vyobrazeny v grafu, kde osa x se nazývá reálná a osa y imaginární osa. Jinak se graf může nazývat rovina komplexních čísel nebo Gaussova rovina. Jednotlivé kořeny jsou v grafu vyznačeny červenými body.



Obrázek 1. 8: N -té odmocniny komplexního čísla výstup

1.5 Intervaly

Ve WA lze určovat vlastnosti jednoho nebo více intervalů. V případě jednání se o více intervalů, lze je srovnávat ve vlastnostech a na číselné ose. U určování vlastností jednoho intervalu zadáváme do příkazové řádky (a, b) , nebo *interval* (a, b) , kde a a b jsou reálná čísla a oválná závorka představuje otevřený interval. Zároveň můžeme určovat vlastnosti u uzavřených intervalů $[a, b]$ nebo u částečně uzavřených intervalů $(a, b]$ nebo $[a, b)$. Dále lze stanovit vlastnosti u více intervalů najednou napsáním předpisu *intervals* $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ do příkazové řádky, kde (a_1, b_1) až (a_n, b_n) jsou intervaly, jež se mezi sebou oddělují čárkou. Jako vhodnou ukázkou jsme zvolili vyobrazení dvou intervalů $[0, 1)$ a $(1, \infty)$ v obrázku 1. 9.



Obrázek 1. 9: Porovnávání intervalů vstup

Výstupem zadaného příkladu jsou vlastnosti a zobrazení obou intervalů na číselné ose, jak nám obrázek 1. 10 ukazuje. Interval $[0,1)$ je znázorněn modrou barvou a interval $(1, \infty)$ červenou barvou na číselné ose. Zároveň je 0 vyznačena plným kolečkem jako součást intervalu a 1 prázdným kolečkem jako vynechaný člen intervalu. Z vlastností lze vyčíst nerovnost, délku a topologie. *Inequality* (nerovnost) vyjadřuje interval formou nerovnice. *Length* (délka) vyjadřuje, zda se jedná o *bounded* (omezený) či *unbounded* (neomezený) interval a uvede jeho velikost. *Topology* (topologie) popisuje druh intervalu, například *closed* (uzavřený), *open* (otevřený), *left closed* (uzavřený z levé strany) a *right open* (otevřený z pravé strany) a naopak. Interval $[0,1)$ je popsán nerovnicí $0 \leq x < 1$, jehož délka je rovna 1, protože se jedná o omezený interval, jenž je z levé strany uzavřený a z pravé strany otevřený. Interval $(1, \infty)$ popisuje nerovnice $1 < x < \infty$, z čehož je patrné, že jeho délka je rovna ∞ , protože se jedná o neomezený interval, jenž je otevřený z obou stran.



Obrázek 1. 10: Porovnání intervalů výstup

2 Vykreslování do grafu

Ve vykreslování do grafu se věnujeme zobrazování funkcí, rovnic a nerovnic do různých grafů a podrobněji přiblížíme 3D, polární a parametrické grafy.

2.1 Vykreslování funkcí

Ve WA můžeme vyobrazit jednu nebo více funkcí najednou a zároveň jim zadávat rozsah proměnných v grafu, jenž má lineární, logaritmickou nebo logaritmicko-lineární stupnice. Funkci jedné proměnné můžeme vykreslit dvěma způsoby, buď *plot* $g(x)$ (plot = vykreslení) nebo *graph* $g(x)$ (graph = zobrazení), kde $g(x)$ je předpis funkce. V případě, že zadáváme rozsah proměnné, přidáváme za předpis funkce *from* $x = a$ *to* b (from = z) nebo jenom $x = a$ *to* b , kde x je proměnná funkce a a a b jsou čísla voleného rozsahu.

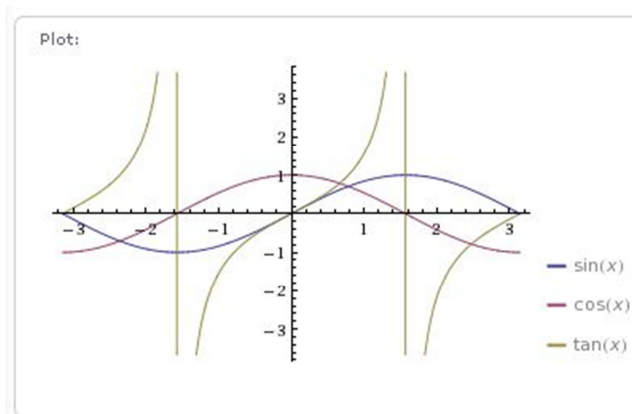
Pro vykreslení více funkcí o jedné proměnné, kde je zadaný rozsah nepovinný, napíšeme předpis *plot* $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ *from* $x = a$ *to* b nebo *plot* $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$, $x = a$ *to* b , kde $f_1(x)$ až $f_n(x)$ jsou funkce jedné proměnné, jež jsou mezi sebou odděleny čárkou, x je proměnná a a a b jsou čísla voleného rozsahu.¹ V obrázku 2. 1 ukážeme předpis pro zobrazení třech funkcí o jedné proměnné v rozsahu $< -\pi, \pi >$.



Obrázek 2. 1: Vykreslování více funkcí vstup

Níže uvedený obrázek 2. 2 nám poukazuje, že výstupem je graf, v němž jsou vyobrazeny všechny funkce v rovinné kartézské soustavě souřadnic na definičním oboru $< -\pi, \pi >$. Z grafu je dále znatelné, že $\sin x$ znázorněn modrou barvou, $\cos x$ červenou barvou a $\tan x$ s asymptotami žlutou barvou.

¹ V této kapitole se nebudeme dále zmiňovat za předpisem, že $f(x)$ je funkce jedné proměnné, kde x je proměnná funkce a a a b jsou čísla voleného rozsahu.



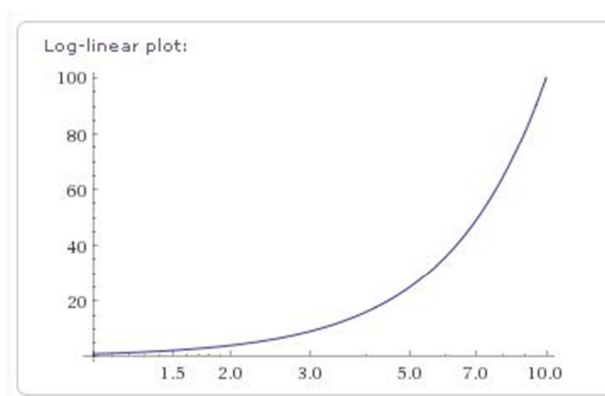
Obrázek 2. 2: Vykreslování více funkcí výstup

Pro zobrazení funkce jedné proměnné na logaritmické stupnici zadáváme předpis *log plot f(x) from x = a to b* nebo *log plot f(x), x = a to b*. Vyobrazení funkce jedné proměnné na logaritmicko-lineární stupnici získáme napsáním do příkazové řádky *log – linear plot f(x), x = 1 to b*, kde $f(x)$ je funkce, již musíme definovat na intervalu $\langle 1, b \rangle$, kde b je vhodně zvolené číslo pro lepší čitelnost grafu, jak je znázorněno v obrázku 2. 3. Rozsah se musí volit, protože logaritmus má definiční obor $\langle 1, +\infty \rangle$.



Obrázek 2. 3: Logaritmicko-lineární stupnice vstup

Obrázek 2. 4 nám ukazuje, že WA vygeneroval jako výstup graf s logaritmickou stupnicí na ose x a lineární stupnicí na ose y.



Obrázek 2. 4: Logaritmicko-lineární stupnice výstup

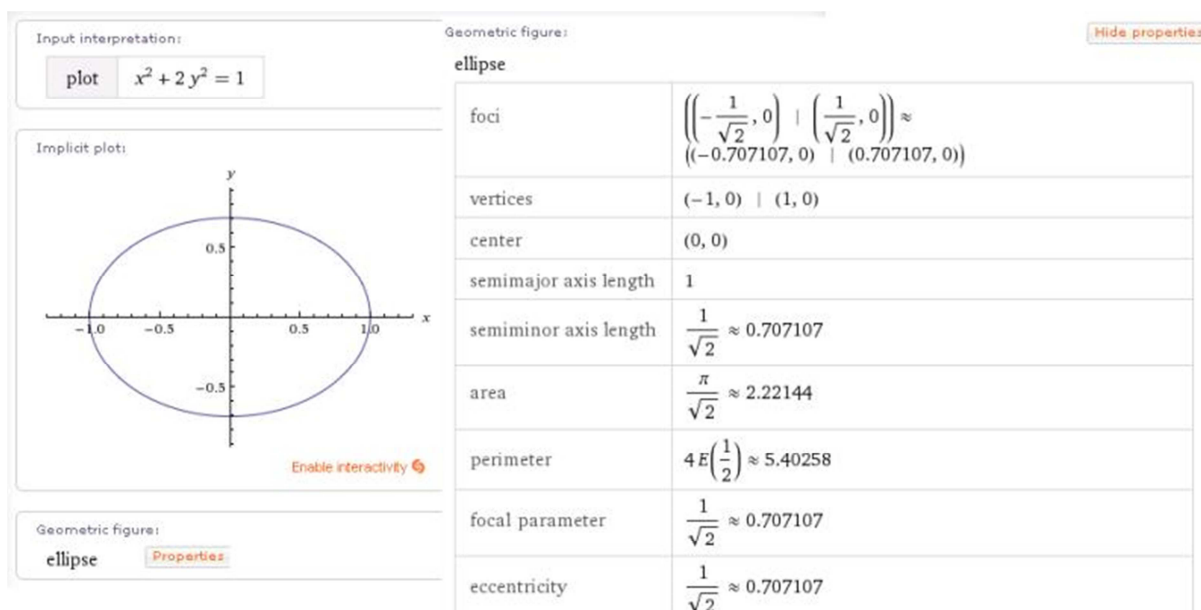
2.2 Vykreslování rovnic a nerovnic

Dále ve WA můžeme graficky řešit rovnice o více proměnných a kvadriky. Abychom získali grafické řešení rovnic o více proměnných, napíšeme do příkazové řádky `plot f(x1, x2, ..., xn) = 0`, kde $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ je předpis rovnice o více neznámých. V obrázku 2. 5 přestavíme zápis pro vykreslení rovnice dvou proměnných $x^2 + 2y^2 = 1$.



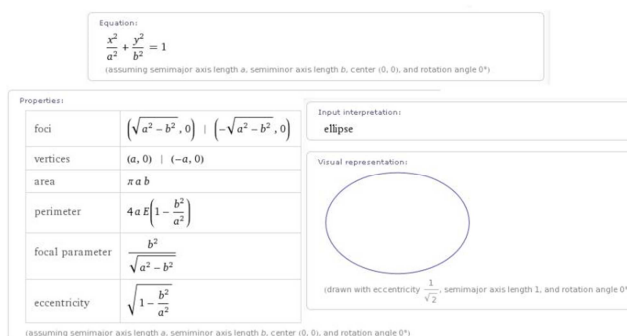
Obrázek 2. 5: Rovnice o více proměnných vstup

Výstupem WA je interpretovatelný předpis rovnice, její grafické řešení a název geometrického útvaru s vlastnostmi. Je velice zajímavé, že WA dokáže rozeznat, o jaký typ geometrického útvaru se jedná. Zároveň u geometrického útvaru můžeme vybrat funkci *Properties* (Vlastnosti), jež umožňuje získat informace o rovnici. Ze zadaného příkladu získáme informace o elipse, například *foci* (ohnisko), *vertices* (hlavní vrcholy), *center* (střed), *semimajor axis length* (délka hlavní poloosy), *semiminor axis length* (délka vedlejší poloosy), *area* (plocha), *perimeter* (obvod), *focal parameter* (ohnisková vzdálenost) a *eccentricity* (excentricita). Poznátky jsou představeny v obrázku 2. 6.



Obrázek 2. 6: Rovnice o více proměnných výstup

V případě řešení jiné rovnice se dvěma proměnnými, by WA pomocí funkce *Properties* zobrazil i jiné vypočitatelné vlastnosti. Dále WA umožňuje kliknout myší na název geometrického útvaru, jenž se přetransformuje do příkazové řádky a WA vyhledá obecné informace o kuželosečce.



Obrázek 2. 7: Elipsa výstup

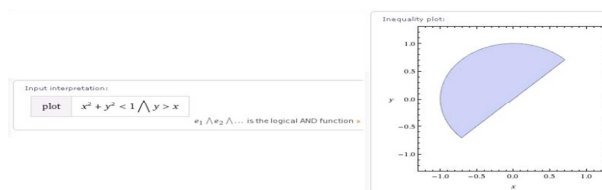
Obrázek 2. 7 nám definuje, že výstupem WA je vizuální representace, obecný předpis rovnice a vlastnosti, u nichž lze nastudovat obecné zadání předpisů pro jejich výpočet.

Dále lze ve WA graficky řešit nerovnice s více proměnnými. V případě grafického řešení dvou nerovnic o více neznámých zadáváme předpis do příkazové řádky $\text{plot } f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0 \text{ and } f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$, kde $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$ a $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$ jsou nerovnice o více neznámých. V obrázku 2.8 zobrazíme ukázkou přepisu pro výpočet dvou nerovnic $x^2 + y^2 < 1$ a $y > x$.



Obrázek 2. 8: Nerovnice vstup

Z obrázku 2. 9 vyplývá, že výstupem zadaného příkladu je vstup a grafické vyobrazení oblasti, jež splňuje stanovené podmínky dvou nerovností. Výsledek je znázorněn modrou barvou.



Obrázek 2. 9: Nerovnice výstup

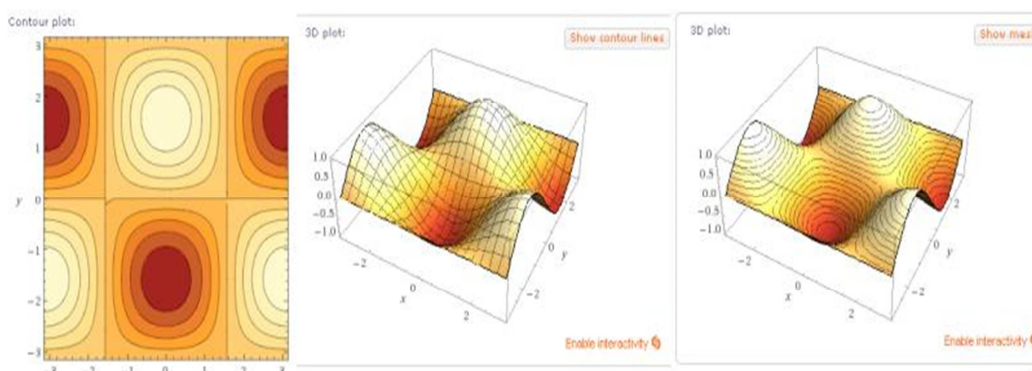
2.3 3D grafy

3D grafy se využívají pro vyobrazování funkcí s různými proměnnými a s možností volby jejich rozsahu. Pro jejich zobrazení zadáváme do příkazové řádky $\text{plot } f(x, y), x = a \text{ to } b, y = c \text{ to } d$, kde $f(x, y)$ je předpis funkce dvou proměnných x a y , kde a, b, c, d jsou jejich čísla voleného rozsahu. V obrázku 2. 10 jsme uvedli předpis pro vyobrazení funkcí $\cos x$ a $\sin y$, jež mají zvolený stejný rozsah $\langle -\pi, \pi \rangle$.

```
plot cos x sin y, x = -n to n, y = -n to n
```

Obrázek 2. 10: 3D vykreslování vstup

V obrázku 2. 11 ukážeme výstup WA, kde je půdorysový a 3D graf s barevnou škálou, jež umožňuje vnímat maxima, minima a různá zakřivení plochy spolu s pomocnými křivkami. U 3D grafu WA navíc nabízí funkce *Show mesh* (Zobrazení sítě) a *Show contour lines* (Zobrazení vrstevnic), jež zvolí druh křivky pro vykreslení. Dále je si možné všimnout, že WA nabízí u 3D vykreslování funkci *Enable interactivity* (Povolit interaktivní přístup) v rámci *CDF interactivity*, jež umožňuje dynamickou práci grafy.



Obrázek 2. 11: 3D vykreslování výstup

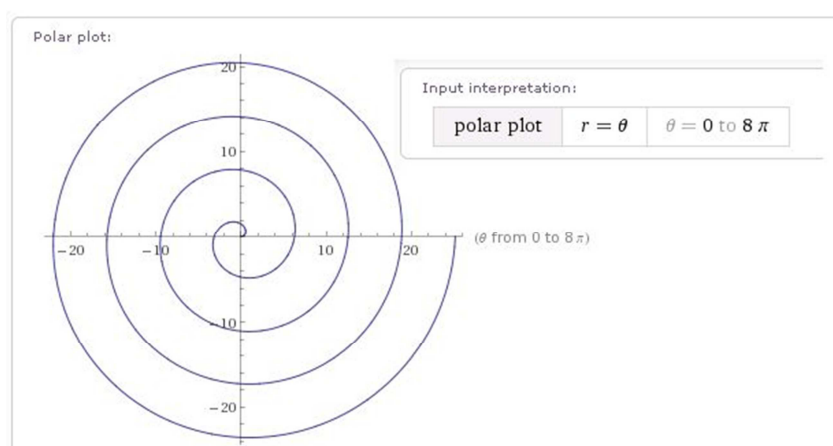
2.4 Polární a parametrické grafy

V polárním vykreslování lze vyobrazovat funkce v polárním grafu s možností volby rozsahu. Pro jejich znázornění zadáváme do příkazové řádky *polar plot* $r = x$, $x = a$ to b (polar = polární, plot = zakreslení), kde x je proměnná a a a b jsou čísla volitelného rozsahu, jak je uvedeno v obrázku 2. 12.



Obrázek 2. 12: Polární vykreslování vstup

Obrázek 2. 13 nám ukazuje, že výstupem WA je výklad vstupu a polární graf.



Obrázek 2. 13: Polární vykreslování výstup

V parametrických grafech můžeme vyobrazovat křivky ve WA, jež se zadávají v parametrickém vyjádření s možností volby rozsahu. Pro jejich zobrazení napíšeme *parametric plot* $(x(t), y(t)), t = a$ to b (parametric = parametrické), kde $x(t)$ a $y(t)$ jsou parametrické předpisy křivky pomocí parametru t , u něhož lze volit rozsah čísla a a b .

3 Algebra

Algebra je jednou z hlavních částí matematiky spolu s číselnou teorií, geometrií a analýzou. Má velice široký rozsah a mnoho variant řešení, protože patří mezi nejstarší disciplíny z matematiky. Algebra se rozděluje do odvětví, například rovnice, polynomy, racionální (lomené) funkce, vektorová algebra, matice, lineární algebra a obory ve WA.

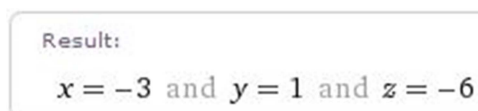
3.1 Rovnice

Ve WA lze řešit rovnice od lineárních až po trigonometrické s možností výběru oborů, v nichž budou hledané kořeny a jejich soustavy. Rovnici vyřešíme napsáním předpisu $\text{solve } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ (solve = řešení), kde $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ je rovnice. V případě hledání pouze reálných kořenů rovnice, zadáme za uvedený předpis výše *over the reals* (všechny reálné kořeny). Soustavu lineárních rovnic vyřešíme napsáním $\text{solve } f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ do příkazové řádky, kde $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ až $f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ jsou rovnice, jež jsou mezi sebou odděleny čárkou. V obrázku 3. 1 znázorníme ukázkou zadání pro výpočet soustavy lineárních rovnic $2x + y - z = 1, x - y - z = 2$ a $x + y - z = 4$.



Obrázek 3. 1: Soustava rovnic vstup

Ohledně zadaného příkladu se jedná o řešení tří rovnic v trojrozměrném prostoru, kde výsledkem je bod $B = [-3, 1, -6]$, jenž je jejich společným průsečíkem. Výsledek řešení soustavy tří lineárních rovnic lze vidět níže v obrázku 3. 2.



Obrázek 3. 2: Soustava rovnic výstup

3.2 Polynomy

Drábek a Hora ([7], s. 4) definují polynom n -tého stupně o jedné proměnné: „Budiž $(I, +, \cdot)$ obor integrity a n přirozené číslo. Funkci $f(x)$ definovanou předpisem $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, kde $a_n \neq 0$, nazýváme polynomem n -tého stupně o jedné proměnné x nad oborem integrity $(I, +, \cdot)$.“

Ve WA lze u polynomů vypočítat jeho stupeň, rozklad na kořenové činitele, největší společný dělitel, roznásobení kořenů do polynomického tvaru, doplnění na čtverec a provádět s nimi interpolaci. Pro určení stupně polynomu zadáme do příkazové řádky `deg $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$` (`deg` = zkratka pro stupeň (degree)), kde $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ je polynom.² Polynom lze rozložit na kořenové činitele napsáním `factor $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$` (`factor` = celočíselný dělitel).

Předpisem `gcd $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0, \dots, n_n x^n + n_{n-1} x^{n-1} + \dots + n_2 x^2 + n_1 x + n_0$` , kde `gcd` je zkratka pro *greatest common divisor* (největší společný dělitel), dosáhneme výpočtu největšího společného dělitele polynomů.

Ve WA můžeme využít i opačnou funkci rozkladu polynomu na kořenové činitele a to roznásobení kořenů polynomů, a to tím, že zadáme do řádky `expand $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0, \dots, n_n x^n + n_{n-1} x^{n-1} + \dots + n_2 x^2 + n_1 x + n_0$` (`expand` = rozšířit).

Dále lze provádět výpočet doplnění na čtverec ve WA, jenž získáme napsáním předpisu `complete the square $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$` (`complete the square` = doplnění na čtverec).

A nakonec si představíme výpočet interpolace polynomu ve WA, což je výpočet polynomu z naměřených nebo tabulkových hodnot funkce v určitých bodech intervalu, jež získáme zadáním `interpolating polynomial $\{a_1, f(a_1)\}, \{a_2, f(a_2)\}, \dots, \{a_n, f(a_n)\}$` (`interpolating` = interpolace, `polynomial` = polynom) do příkazové řádky, kde a_1 až a_n jsou

² V této kapitole se nebudeme dále zmiňovat za předpisem, že $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ je polynom.

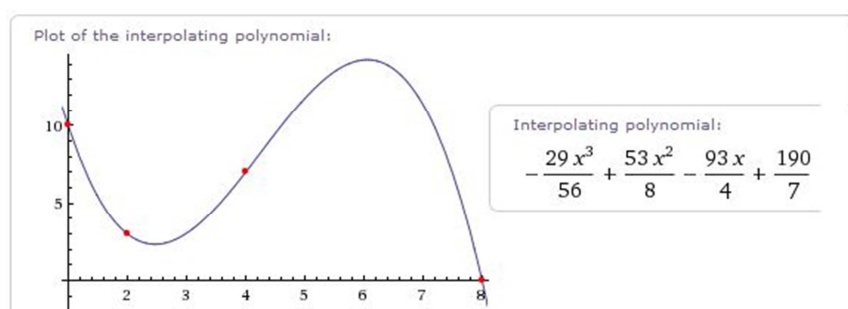
argumenty a $f(a_1)$ až $f(a_n)$ jsou funkční hodnota argumentu a . Vždy jedno měření je uvedeno ve složených závorkách, jež jsou mezi sebou odděleny čárkou, jak nám zobrazuje obrázek 3. 3.

interpolating polynomial {1,10},{2,3},{4,7},{8,0} ☆ =

Obrázek 3. 3: Interpolace polynomu vstup

Z obrázku 3. 4 vyplývá, že výstupem WA je vypočtený polynom z naměřených nebo tabulkových hodnot funkce a graf, v němž jsou červeně vyznačeny naměřené nebo tabulkové hodnoty a modře je znázorněn vypočtený polynom. Polynom vyšel

$$-\frac{29x^3}{56} + \frac{53x^2}{8} - \frac{93x}{4} + \frac{190}{7}.$$



Obrázek 3. 4: Interpolace polynomu výstup

3.3 Racionální (lomená) funkce

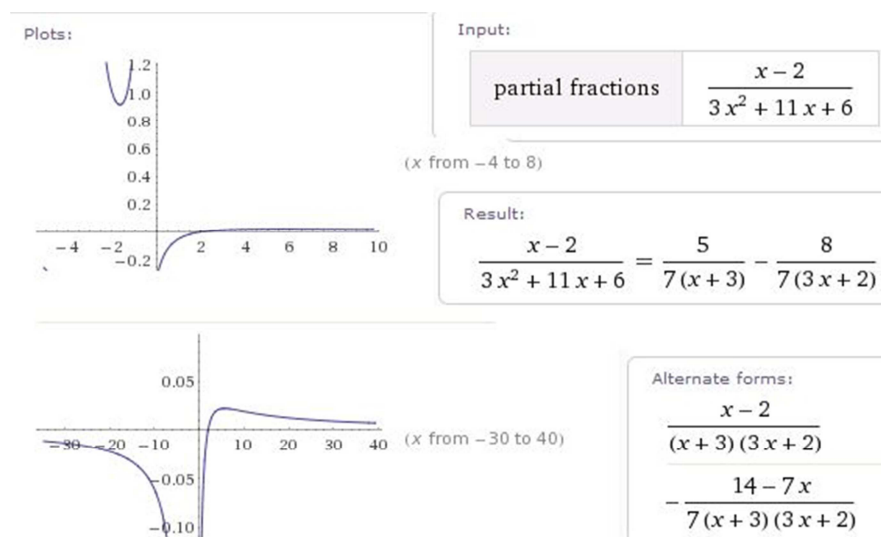
Fišnarová ([8], s. 11) definuje racionální (lomenou) funkci: „Nechť $P_n(x)$ je polynom stupně n a $Q_m(x)$ je polynom stupně m . Funkce tvaru $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ se nazývá racionální lomená funkce.“

Ve WA lze u racionálních funkcí vypočítat stupeň, rozklad na parciální zlomky a vyobrazit je v grafu. Výpočtu stupně racionální (lomené) funkce dosáhneme zadáním do příkazové řádky `deg $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$` a navíc pro znázornění do grafu napíšeme před její předpis příkaz `plot`. Rozklad na parciální zlomky provedeme zadáním `partial fractions $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$` (partial = parciální, fractions = zlomky) do příkazové řádky. V obrázku 3. 5 vyobrazíme ukázkou pro předpis výpočet parciálního zlomku $\frac{x-2}{3x^2+11x+6}$.



Obrázek 3. 5: Racionální funkce vstup

Výstupem WA je vstup, výsledek, alternativní formy zápisu a grafy, jak je znázorněno v obrázku 3.6. Výsledek vyšel $\frac{x-2}{3x^2+11x+6} = \frac{5}{7(x+3)} - \frac{8}{7(3x+2)}$.



Obrázek 3. 6: Racionální funkce výstup

3.4 Vektorová algebra

Vektory zadáváme do příkazové řádky ve tvaru aritmetického vektoru $vector \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ³ nebo $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, kde x_1 až x_n jsou jeho složky nebo je lze zapisovat formou vektoru lineárně kombinovaného jednotkovými vektory $(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n)$ nebo $vector \ x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, kde x_1 až x_n jsou opět jeho složkami, jež jsou lineárně kombinované s jednotkovými vektory e_1 až e_n . Většinou, když se nacházíme v E_3 ⁴ během výpočtů, nahrazujeme e_1 za i , e_2 za j a e_3 za k . Velikost (normu) vektoru určíme, pokud zadáme do příkazové řádky $norm \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, kde $norm$ je zkratka pro určení velikosti vektoru. Pro provedení aritmetických operací, například sčítání a odčítání, s vektory, jež lze vynásobit jakýmkoliv číslem, napíšeme do příkazové řádky $a\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \pm b\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ nebo $a(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) \pm b(y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n)$, kde a a b jsou čísla, jimiž násobíme vektory. Skalární součin lze vypočítat vložení mezi dva vektory v příkazové řádce symbol \cdot , jež zároveň slouží jako tečka za větou. Pro výpočet vektorového součinu, napíšeme mezi dva vektory slovo *cross* nebo symbol \times . Smíšený součin získáme zadáním předpisu $\{\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \ cross \{y_1, y_2, \dots, y_n\}\} \cdot \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$. V obrázku 3. 7 jsme uvedli ukázkou předpisu pro výpočet smíšeného součinu vektorů $(5,3,8)$, $(7,2,2)$ a $(2,5,9)$.

A screenshot of a command line interface showing the input for calculating the mixed product of three vectors. The text entered is `{{5, 3, 8} cross {7, 2, 2}}.{2, 5, 9}`. To the right of the input field, there are icons for a star and a red square with a white 'X'.

Obrázek 3. 7: Smíšený součin vstup

Obrázek 3. 8 nám poukazuje, že výstupem je pouze výklad vstupu a výsledek, jenž se rovná 111.

A screenshot showing the output of the command line calculation. It is divided into two sections: 'Input interpretation:' and 'Result:'. Under 'Input interpretation:', the text is `(5, 3, 8) × (7, 2, 2) · (2, 5, 9)`. Under 'Result:', the text is `111`.

Obrázek 3. 8: Smíšený součin výstup

³ Upozorňujeme, že aritmetický vektor se na rozdíl od českého zvyku píše do složených závorek, nikoliv do kulatých závorek.

⁴ Eukleidovským prostorem E_3 rozumíme afinní prostor A_3 , v jehož vektorovém zaměření V_3 je definován skalární součin.


3.5 Matice a lineární algebra

Bican ([9], s. 40) definuje matici: „Soubor

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

prvků z tělesa T nazýváme maticí typu (m, n) (nad tělesem T)“ V matici a lineární algebře se zaměříme na operace s maticemi, jejich řešení a diagonalizaci, determinanty, vlastní čísla a vektory, lineární nezávislost vektorů a maticový rozklad. Mezi operace s maticemi patří určení hodnoty matice, inverzní a adjungované matice a provádění s nimi základní aritmetické operace, například sčítání, odčítání, násobení a dělení.

Hodnotu matice určíme zadáním předpisu $rank\{A\}$ (rank = hodnota) do příkazové řádky, kde A je předpis matice⁵. Výpočtu inverzní matice lze dosáhnout třemi způsoby zadání do řádky $inv\{A\}$ nebo $inverse\{A\}$ a nebo $\{A\}^{-1}$ (inverse = inverzní). Adjungovanou a diagonální matici získáme zadáním předpisu $adjugate\{A\}$ (adjugate = adjungovaná) a $diagonalize\{A\}$ (diagonalize = diagonální). Soustavy rovnic, jež jsou reprezentovány formou maticového zápisu, lze řešit ve WA napsáním příkazu $row\ reduce\{A\}$ (row reduce = snižování řádků) do příkazové řádky. Zvolili jsme jako vhodnou ukázkou pro zadání výpočet soustavy rovnic v rámci maticového zápisu, kde předpis příkladu je vyznačen v obrázku 3. 9.

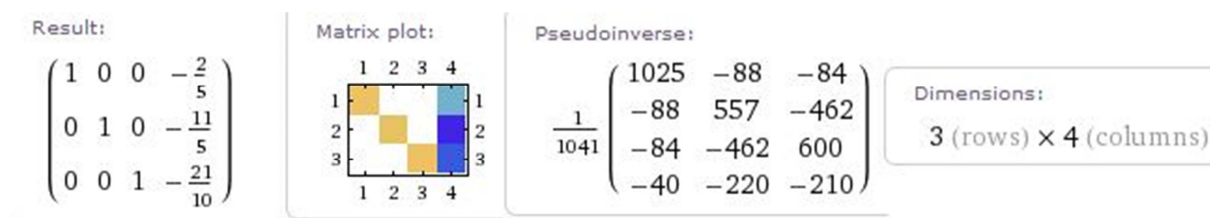


```
row reduce {{2,1,0,-3},{3,-1,0,1},{1,4,-2,-5}}
```

Obrázek 3. 9: Řešení soustavy rovnic maticově vstup

Výstupem WA je výsledek, dimenze, maticový graf a pseudoinverzní matice, což je znázorněno v obrázku 3. 10. Dimenze určuje velikost matice, jež má 3 rows (řádky) a 4 columns (sloupce). Maticový graf vyznačuje barevně hodnoty výsledné matice. Hnědá barva vystihuje jednotkovou matici ve výsledku a modrá barva vyznačuje řešení matice.

⁵ V této kapitole se nebudeme dále zmiňovat za předpisem, že A je předpis matice.



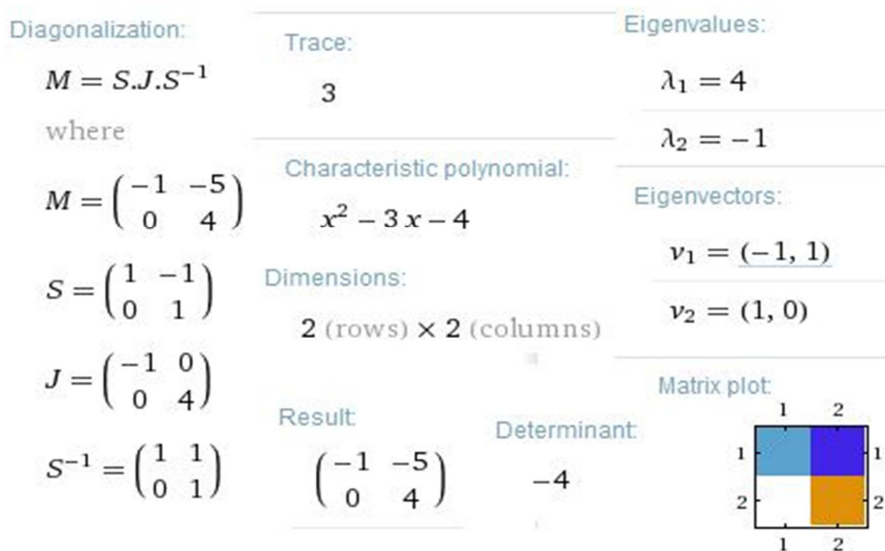
Obrázek 3. 10: Řešení soustavy rovnic maticově výstup

S maticemi lze ve WA provádět základní matematické operace, například sčítání, odčítání, násobení a dělení. Aritmetické operace s maticemi provádíme zadáním do příkazové řádky výpočetních operací a řetězíme je s nimi. V obrázku 3. 11 znázorníme ukázkou zadání předpisu pro výpočet třech matic $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

{{0,-1},{1,0}}.{{1,2},{3,4}}+{{2,-1},{-1,2}}
☆ =

Obrázek 3. 11: Matice vstup

Obrázek 3. 12 nám vypovídá, že výstupem WA je celá škála informací, například výsledek výpočtu, dimenze, maticový graf, charakteristický polynom, vlastní vektory, vlastní čísla, diagonalizace a součet hodnot na diagonále. Z čehož je patrné, že WA vygeneruje všechny možné informace, jež je schopný zpracovat, pokud nemá blíže specifikované zadání. Výpočet výše uvedených matic vyšel $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.



Obrázek 3. 12: Matice výstup

Determinanty můžeme ve WA řešit napsáním do příkazové řádky *determinant of {A}* nebo *det {A}*, kde *det* je zkratka pro determinant. Dále lze u matice vypočítat vlastní čísla, vlastní vektory a charakteristické polynomy. Vlastní čísla získáme napsáním do řádky *eigenvalues {A}* (*eigenvalues* = vlastní čísla) a pomocí předpisu *eigenvectors {A}* (*eigenvectors* = vlastní vektory) určíme vlastní vektory matice. Charakteristický polynom matice získáme, když napíšeme do příkazové řádky *characteristic polynomial {A}* (*characteristic polynomial* = charakteristický polynom). Abychom zjistili, zda jsou vektory lineárně nezávislé, zadáme do příkazové řádky příkaz *Are A linearly independent ?*, nebo *linear independence {A}* (*linear independence* = lineární nezávislost). Dále lze získat neznámou ve vektoru, jenž je součástí matice, napsáním *linear independence of {A s neznámou h}*, jak je uvedeno v obrázku 3. 13.



Obrázek 3. 13: Lineární nezávislost vstup

Ve výstupu WA je výsledkem větná odpověď: $(1, 3, -1)$, $(-1, -5, 5)$ and $(4, 7, h)$ are linearly independent when $h \neq 6$ ($(1, 3, -1)$, $(-1, -5, 5)$ a $(4, 7, h)$ jsou lineárně nezávislé, když $h \neq 6$), jak nám vypovídá obrázek 3. 14. Jinými slovy věta říká, že pokud dosadíme za neznámou hodnotu 6, bude vektor $(4, 7, 6)$ lineárně závislý na zbývajících dvou vektorech.

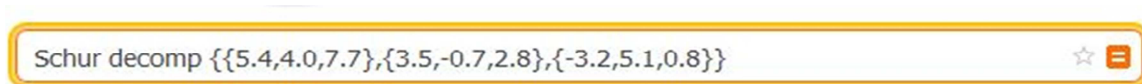


Obrázek 3. 14: Lineární nezávislost výstup

Na závěr podkapitoly 3. 5 Matice a lineární algebra si ukážeme, jak se provádí jednotlivé maticové rozklady ve WA. Dont ([10], s. 128) definuje LU rozklad: „Je-li $A \in C^{n \times n}$, pak LU rozkladem této matice rozumíme vyjádření A ve tvaru $A = LU$, kde $L, U \in C^{n \times n}$, L je dolní trojúhelníková, U je horní trojúhelníková matice.“ LU rozklad ve WA vypočítáme zadáním předpisu *LU decomposition of {A}* (*decomposition* = rozklad) do příkazové řádky.

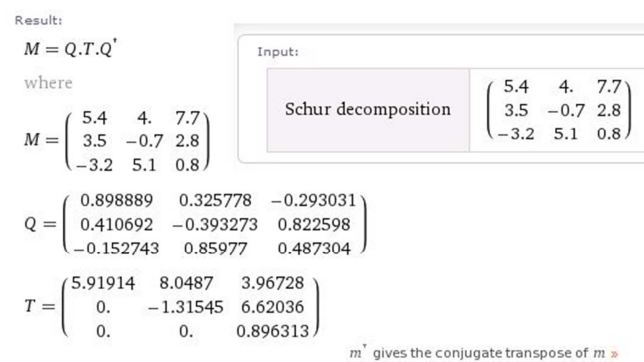
Dont ([10], s. 131) definuje QR rozklad: „Bud' $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, kde $m \geq n$. Potom existují matice $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tak, že sloupce matice Q jsou ortonormální, R je horní trojúhelníková, a $A = QR$. Je-li A reálná, lze matice Q, R volit reálné. Je-li $\text{hod } A = n$, pak lze matici R volit tak, že všechny její diagonální prvky jsou reálné a kladné – touto podmínkou jsou pak matice Q, R určeny jednoznačně.“ Abychom vypočetli QR rozklad ve WA, tak zadáváme příkaz *QR decomposition* { A }.

Neumannová ([11], s. 21) definuje Schurův rozklad: „Každou komplexní čtvercovou matici lze vyjádřit ve tvaru $A = UTU^*$, kde U je unitární a T (obecně komplexní) horní trojúhelníková matice.“ Schurova rozkladu ve WA dosáhneme napsáním předpisu *Schur decomp* { A }, kde *decomp* je zkratka pro *decomposition* (rozklad). Schurův rozklad je vhodný pro ukázkou zadávání příkazu v obrázku 3. 15.



Obrázek 3. 15: Schurův rozklad vstup

Ve výstupu WA je vstup a výsledek, jež jsou vyobrazeny v obrázku 3. 16. Ve výsledku se nacházejí matice Schurova rozkladu.



Obrázek 3. 16: Schurův rozklad výstup

Wikipedie ([12], 2001) definuje Jordanův rozklad: „Libovolnou čtvercovou matici $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ lze vyjádřit jako součin $A = XJX^{-1}$, kde matice X je regulární a matice J je blokově diagonální pro $i = 1, \dots, k$. Zřejmě platí $n_1 + \dots + n_k = n$. Rozklad $A = XJX^{-1}$ se nazývá Jordánův rozklad, matice J se nazývá Jordanův kanonický tvar (matice A), matice J_i se nazývá Jordanův blok.“ Jordanův rozklad vypočítáme ve WA pomocí zadání předpisu do příkazové řádky *Jordan decomp* { A }.

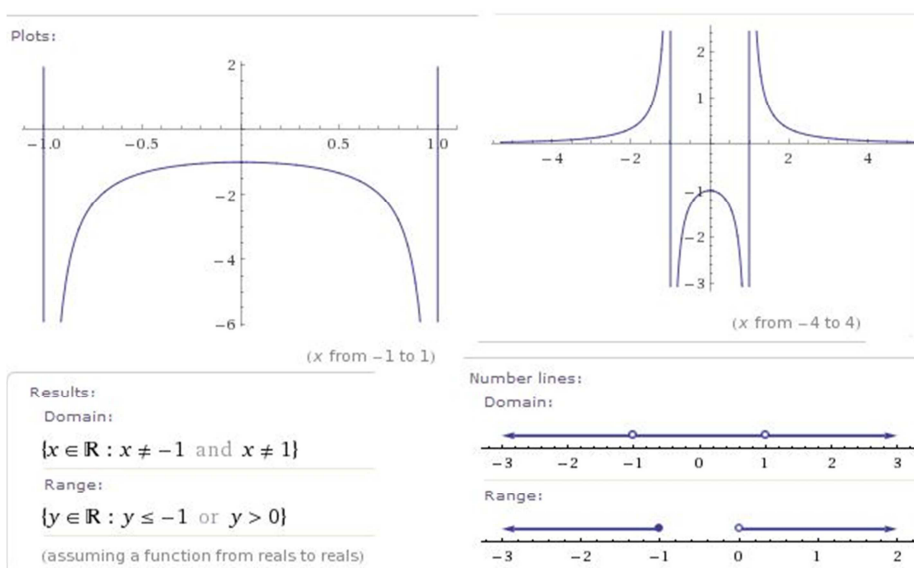
3.6 Obory

Ve WA můžeme určit definiční obor a obor hodnot. Pro určení definičního oboru a obor hodnot funkce zadáme do příkazové řádky *domain of $f(x)$* (domain = definiční obor) a *range of $f(x)$* (range = obor hodnot), kde $f(x)$ je předpis funkce. Zároveň lze určit definiční obor a obor hodnot najednou, a to tak, že napíšeme předpis *domain and range of $f(x)$* do příkazové řádky. V obrázku 3. 17 představíme určení definičního oboru a oboru hodnot funkce $\frac{x^2+1}{x^4-1}$.



Obrázek 3. 17: Obory vstup

Ze zadaného příkladu je výstupem WA výsledek, číselná osa a grafy, jak nám vyplývá z obrázku 3. 18. Z výsledku je patrné, že definiční obor jsou všechna reálná čísla kromě -1 a 1 a obor hodnot jsou všechna reálná čísla z intervalu $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. Zároveň je definiční obor a obor hodnot vyznačen na číselné ose, kde -1 a 1 nejsou součástí definičního oboru a proto jsou vyznačeny prázdnými kolečky. To samé platí i pro obor hodnot, protože -1 je součástí oboru hodnot a 0 nikoli, tak -1 je vyznačen plným kolečkem a 0 prázdným kolečkem. Dále ve výstupu jsou dva grafy, jež jsou znázorněny v rozsahu $(-1, 1)$ a $(-4, 4)$.



Obrázek 3. 18: Obory výstup

Část III

Praktická část

4 Ukázka řešených příkladů

Příklad 4. 1: Určení objemu čtyřstěnu

Zadání: „Určete objem čtyřstěnu, jehož stěny leží v rovinách $\alpha: x + y + z - 1 = 0$, $\beta: x - y - 1 = 0$, $\gamma: x - z - 1 = 0$, $\delta: z - 2 = 0$.“ ([13], s. 67)

Řešení: WA nám umožňuje řešit příklad pomocí smíšeného součinu nebo determinantu. Prvním krokem pro vyřešení příkladu je určení souřadnic jednotlivých vrcholů čtyřstěnu, a to $A \in \beta \cap \gamma \cap \delta$, $B \in \alpha \cap \gamma \cap \delta$, $C \in \alpha \cap \beta \cap \delta$ a $D \in \alpha \cap \beta \cap \gamma$, jak je uvedeno postupně v obrázcích 4. 1, 4. 2, 4. 3 a 4. 4.

solve $x-y-1=0, x-z-1=0, z-2=0$

Input interpretation:

	$x - y - 1 = 0$
solve	$x - z - 1 = 0$
	$z - 2 = 0$

Result:

$x = 3$ and $y = 2$ and $z = 2$

row reduce $\{\{1,-1,0,-1\},\{1,0,-1,-1\},\{0,0,1,-2\}\}$

Input:

row reduce	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
------------	--

Result:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
--

Obrázek 4. 1: Výpočet vrcholu A

solve $x+y+z-1=0, x-z-1=0, z-2=0$

Input interpretation:

	$x + y + z - 1 = 0$
solve	$x - z - 1 = 0$
	$z - 2 = 0$

Result:

$x = 3$ and $y = -4$ and $z = 2$

row reduce $\{\{1,1,1,-1\},\{1,0,-1,-1\},\{0,0,1,-2\}\}$

Input:

row reduce	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
------------	---

Result:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Obrázek 4. 2: Výpočet vrcholu B

solve $x+y+z-1=0, x-y-1=0, z-2=0$

Input interpretation:

	$x + y + z - 1 = 0$
solve	$x - y - 1 = 0$
	$z - 2 = 0$

Result:

$x = 0$ and $y = -1$ and $z = 2$

row reduce $\{\{1,1,1,-1\},\{1,-1,0,-1\},\{0,0,1,-2\}\}$

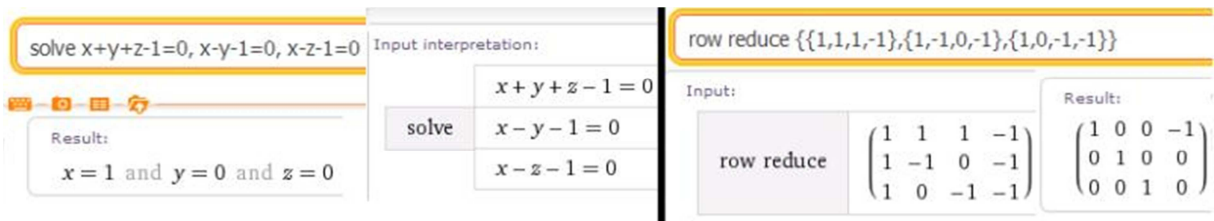
Input:

row reduce	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
------------	---

Result:

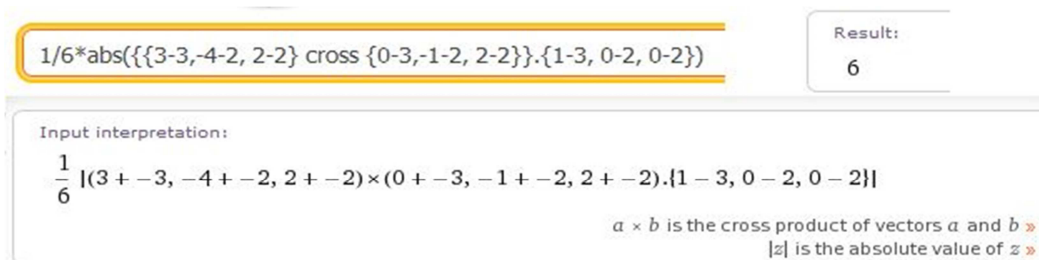
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
--

Obrázek 4. 3: Výpočet vrcholu C



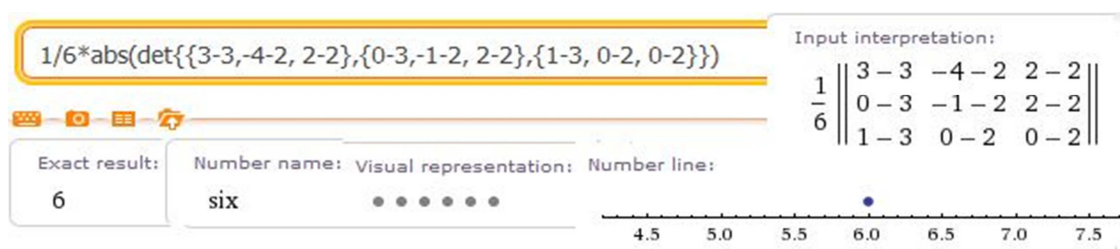
Obrázek 4. 4: Výpočet vrcholu D

Výše uvedené obrázky 4. 1 až 4. 4 nám naznačují, že souřadnice vrcholů čtyřstěnu lze získat ve WA dvěma způsoby, a to pomocí funkce *solve* nebo *row reduce*. V rámci funkce *solve* řešíme přímo soustavu třech rovnic o třech neznámých a u funkce *row reduce* řešíme soustavu třech rovnic o třech neznámých formou maticového zápisu. Z výstupu WA získáme vypočtené souřadnice vrcholů čtyřstěnu $A = [3, 2, 2]$, $B = [3, -4, 2]$, $C = [0, -1, 2]$ a $D = [1, 0, 0]$. WA nám nabízí dvě možnosti, jak pokračovat v řešení příkladu, což jsme zaznamenali již výše. První možností je smíšený součin, kde pro výpočet objemu čtyřstěnu ABCD pak platí $V_{\text{čtyřstěn}} = \frac{1}{6} |((B - A) \times (C - A)) \cdot (D - A)|$, jenž je vyobrazen v obrázku 4. 5.



Obrázek 4. 5: Výpočet objemu čtyřstěnu pomocí smíšeného součinu

Druhou možností je determinant, kde pro výpočet objemu čtyřstěnu ABCD pak platí $V_{\text{čtyřstěn}} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} B - A \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix}$, jenž je znázorněn v obrázku 4. 6.



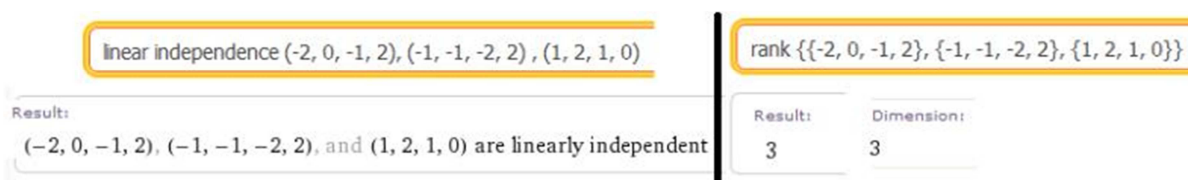
Obrázek 4. 6: Výpočet objemu čtyřstěnu pomocí determinantu

Z obrázků 4. 5 a 4. 6 vyplývá, že objem čtyřstěnu ABCD vyšel 6. Výpočet objemu čtyřstěnu pomocí WA je mnohem rychlejší než ruční výpočet, v případě složitějších příkladů. Obě dvě metody výpočtu jsou přibližně stejně náročné na využití WA. Akorát u aplikace determinant je výstup mnohem obsáhlejší o vyobrazení na číselné ose, vizuální prezentaci a slovní vyjádření výsledku.

Příklad 4. 2: Určení vzdálenosti přímky p a roviny q v eukleidovském prostoru E_4

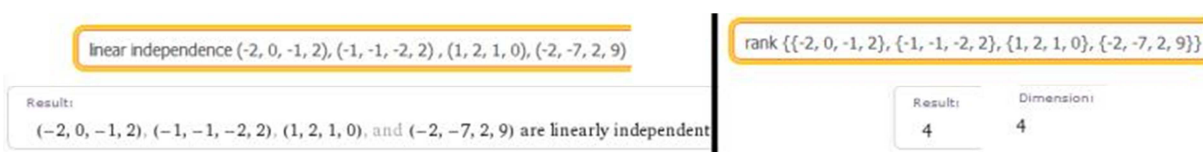
Zadání: „Určete vzdálenost přímky p a roviny q v eukleidovském prostoru E_4 , kde $p = \{A, \vec{u}\}$, $A = [0, 3, -2, -5]$, $\vec{u} = (-2, 0, -1, 2)$; $q = \{B, \vec{v}, \vec{w}\}$, $B = [-2, -4, 0, 4]$, $\vec{v} = (-1, -1, -2, 2)$, $\vec{w} = (1, 2, 1, 0)$.“ ([13], s. 62)

Řešení: Nejprve vyšetříme vzájemnou polohu přímky p a roviny q v eukleidovském prostoru E_4 , protože vzdálenost mezi dvěma podprostory lze změřit pouze u podprostorů, jež jsou rovnoběžně disjunktní nebo mimoběžné, jak Lávička ([13], s. 61) udává ve větě: „Buďte E'_k, E''_l dva podprostory eukleidovského prostoru E_n , které nemají žádný společný bod. Potom vždy existují body $P \in E'_k$ a $Q \in E''_l$ takové, že přímka $p = \leftrightarrow PQ$ je kolmá na oba podprostory. Navíc platí: $\forall X \in E'_k, \forall Y \in E''_l$ je $|XY| = |PQ|$.“ Abychom určili vzájemnou polohu roviny a přímky ve WA, tak použijeme funkci *linear independence* nebo *rank*, kde výpočet je vyznačen v obrázku 4. 7.



Obrázek 4. 7: Výpočet vzájemné polohy I

Vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ jsou lineárně nezávislé, což znamená, že přímka p a rovina q nejsou rovnoběžné. Dále vytvoříme vektor $\vec{z} = B - A = (-2, -7, 2, 9)$ a určíme konkrétnější vzájemnou polohu přímky a roviny.



Obrázek 4. 8: Výpočet vzájemné polohy II

Z obrázku 4.8 vyčteme, že vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ a \vec{z} jsou lineárně nezávislé, což vyjadřuje o přímce p a rovině q , že jsou mimoběžné. Z čehož je patrné, že je splněná podmínka a můžeme určit body P a Q podle výše uvedené věty takové, že $P \in p, Q \in q, \leftrightarrow PQ$ je kolmá k přímce p a zároveň je $\leftrightarrow PQ$ kolmá k rovině q , kde vytvoříme vektor $\vec{d} = P - Q = ([0, 3, -2, -5] + t(-2, 0, -1, 2)) - ([-2, -4, 0, 4] + r(-1, -1, -2, 2) + s(1, 2, 1, 0)) = (2 - 2t + r - s, 7 + r - 2s, -2 - t + 2r - s, -9 + 2t - 2r)$, jenž musí být kolmý na přímkou p a rovinu q . Zároveň musí být také skalární součin roven nule $\vec{d} \cdot \vec{u} = 0, \vec{d} \cdot \vec{v} = 0$ a $\vec{d} \cdot \vec{w} = 0$. Celkově to vede příklad k řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých, jak nám vypovídá obrázek 4. 9.

Obrázek 4. 9: Výpočet soustavy tří rovnic

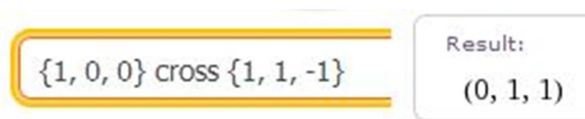
Ve WA můžeme vypočítat soustavu tří rovnic pomocí funkce *solve* nebo *row reduce*, kde řešením je $t = 1, r = -1, s = 1$. Po dosazení do předpisu pro přímku p a rovnici q určíme body $P = [-2, 3, -3, -3]$ a $Q = [0, -1, 3, 2]$, z nichž získáme výpočet vzdálenosti $v = |p, q| = |PQ| = 9$, jak je vyobrazeno v obrázku 4. 10.

Obrázek 4. 10: Výpočet vzdálenosti

Příklad 4. 3: Určení odchylky přímky p a roviny q v eukleidovském prostoru E_3

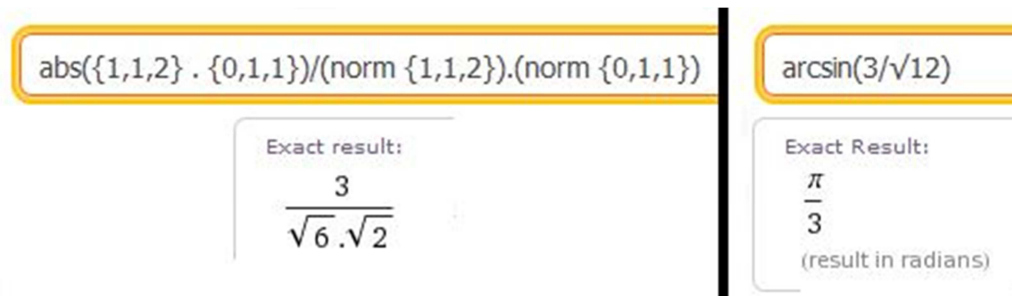
Zadání: „Určete odchylku přímky p a roviny q v eukleidovském prostoru E_3 , jestliže $p = \{A; \vec{u}\}$ a $q = \{B; \vec{v}, \vec{w}\}$, kde $A = [3, -1, 3], \vec{u} = (1, 1, 2), B = [2, 1, 1], \vec{v} = (1, 0, 0), \vec{w} = (1, 1, -1)$.“ ([13], s. 63)

Řešení: Prvně určíme normálový vektor $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ ze dvou směrových vektorů roviny q , což je uvedeno v obrázku 4. 11.



Obrázek 4. 11: Výpočet normy

V eukleidovském prostoru E_3 je rovina nadrovinou. Odchylku α určíme jako odchylku směrového vektoru přímky $\vec{u} = (1, 1, 2)$ a normálového vektoru roviny $\vec{n} = (0, 1, 1)$.



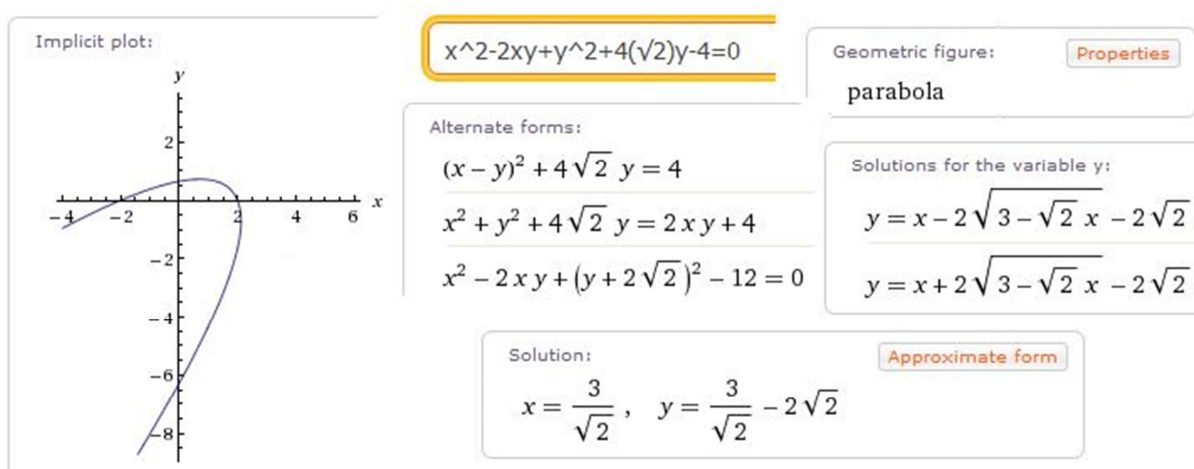
Obrázek 4. 12: Výpočet odchylky

Odchylka přímky p a roviny q je rovna $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Veškeré výpočty jsou zaznamenány v obrázku 4. 12.

Příklad 4. 4: Vyšetření kuželosečky $x^2 - 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}y - 4 = 0$

Zadání: „Vyšetřete následující kuželosečku: $x^2 - 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}y - 4 = 0$.“ ([14], G1 příklad 10. (44)).

Řešení: Zadaný příklad můžeme řešit dvěma způsoby. První způsob řešení příkladu spočívá v zadávání jakéhokoliv tvaru rovnice kuželosečky do příkazové řádky a WA vyřeší, o jaký typ kuželosečky se jedná. První způsob řešení zadaného příkladu je vyznačen v obrázku 4. 13.



Obrázek 4. 13: Výpočet kuželosečky

Z výsledku je zřejmé, že vyšetřená kuželosečka je parabola. Ve výstupu WA při vyšetření kuželosečky se nachází graf, alternativní formy předpisu, vyjádření x a y, vyjádření y pomocí proměnné x a geometrický útvar. V geometrickém útvaru nám WA nabízí funkci *Properties*, na niž můžeme kliknout myší, a zobrazí se nám informace o *focus* (ohnisku), *vertex* (vrcholu), *semi-axis length* (délce poloosy), *focal parameter* (parametru), *eccentricity* (excentricitě) a *directrix* (řídící přímce), jak je představeno v obrázku 4. 14.

Geometric figure:
parabola

focus	$(\sqrt{2}, 0) \approx (1.41421, 0)$
vertex	$\left(\frac{5}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \approx (1.76777, 0.353553)$
semi-axis length	$\frac{1}{2}$
focal parameter	1
eccentricity	1
directrix	$y = 2\sqrt{2} - x$

Obrázek 4. 14: Vlastnosti paraboly

Dále WA nabízí v geometrickém útvaru možnost kliknout myší na název kuželosečky a ten se přetransformuje do příkazové řádky a WA vyhledá obecné informace o kuželosečce.

Assuming "parabola" is a geometric object | Use as a plane curve or a periodical or a word or a species specification instead

Equation forms:

$$(y - y_0)^2 = 4a(x - x_0)$$


$$-4ax + 4ax_0 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 = 0$$

(assuming rotation angle 0°)

Eccentricity:
1
(assuming focus (f_x, f_y) and rotation angle 0°)

parabola

Visual representation:

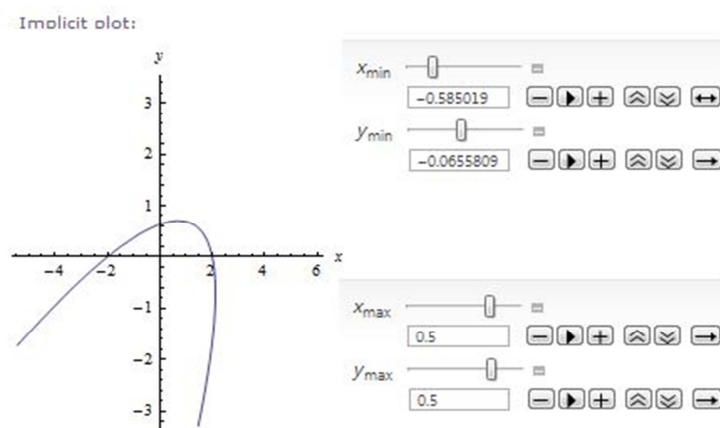


(drawn with rotation angle 0°)

Obrázek 4. 15: Obecné informace o parabole

Ve výše uvedeném obrázku 4. 15 je vidět, že WA nabízí hned pod příkazovou řádkou, z jaké oblasti chceme získat informace o parabole. V samotné ukázce jsou vyobrazeny informace o geometrickém útvaru a zároveň WA umožňuje získat obecné informace v odvětví, například *plane curve* (rovinné křivky), *periodical* (časopisu), *word* (slova), *species specification* (specifikace druhu).

Dále v grafu ve výstupu WA můžeme myší kliknout na funkci *Enable interactivity* (Povolit interaktivní přístup), čímž se spustí operace *CDF interactivity*, jež umožňuje libovolně pohybovat s grafem.



Obrázek 4. 16: Operace s grafem

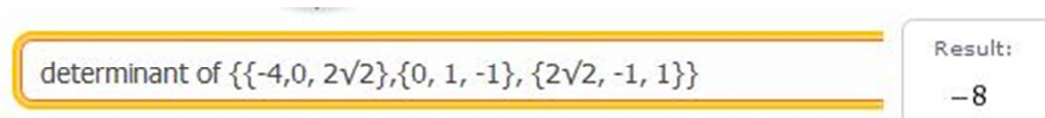
Z obrázku 4. 16 je znatelné, že lze libovolně pohybovat s kladnými i zápornými poloosami x a y pomocí tlačítek, například *Step Backward* (Krok zpět), *Play* (Přehrát), *Step Forward* (Krok vpřed), *Faster* (Rychleji), *Slower* (Pomaleji), *Forward and Backward* (Sem a tam).

Druhý způsob řešení příkladu je složitější, protože se postupuje stejně jako při počítání příkladu na papír, kdy se snažíme rovnici kuželosečky převést na kanonickou rovnici a zjistit, o jaký typ kuželosečky se jedná. Obecnou rovnici kuželosečky lze zapsat maticově ve tvaru $k: x^T A x + 2\mathbf{a}^T x + a = 0$, kde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \neq 0$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{pmatrix}$,

$$a = a_{00}; \quad \text{resp.} \quad \text{ve tvaru} \quad k: (1, x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

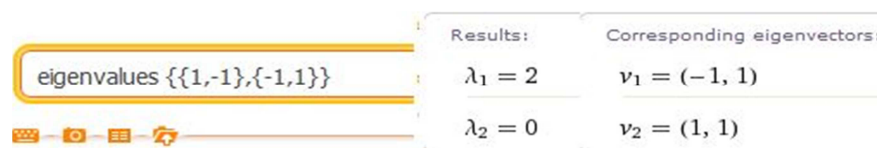
kde $\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ je předpis matice C . Nejprve určíme determinant matice C

kuželosečky, abychom rozhodli o regularitě. První krok výpočtu u druhého způsobu řešení zadaného příkladu je vyznačen v obrázku 4. 17.



Obrázek 4. 17: Výpočet regularity

Z výstupu WA je znatelné, že $\det(C) = -8$. Z výsledku vyplývá, že matice je regulární a jedná se tedy o regulární kuželosečku. Dále určíme matici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, vektor $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ a vlastní čísla a vlastní vektory z matice A.

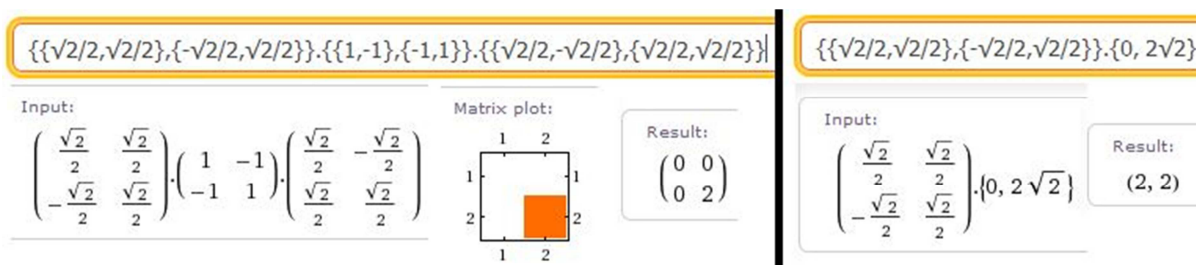


Obrázek 4. 18: Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů

Z výše uvedeného obrázku 4. 18 vyplývá, že ve výsledku jsou dvě různá vlastní čísla $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 0$ a k nim přiřazeny jejich vlastní vektory $v_1 = (-1, 1)$ a $v_2 = (1, 1)$, jež převedeme na jednotkové vlastní vektory $v_1^* = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ a $v_2^* = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Díky nimž

můžeme vytvořit matici rotace $R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, jež je zapotřebí k otočení kuželosečky

kolem počátku a vhodné translace $B = R^T A R$ a $b = R^T a$ na tvar rovnice, z nichž lze určit, o jaký typ kuželosečky se jedná.



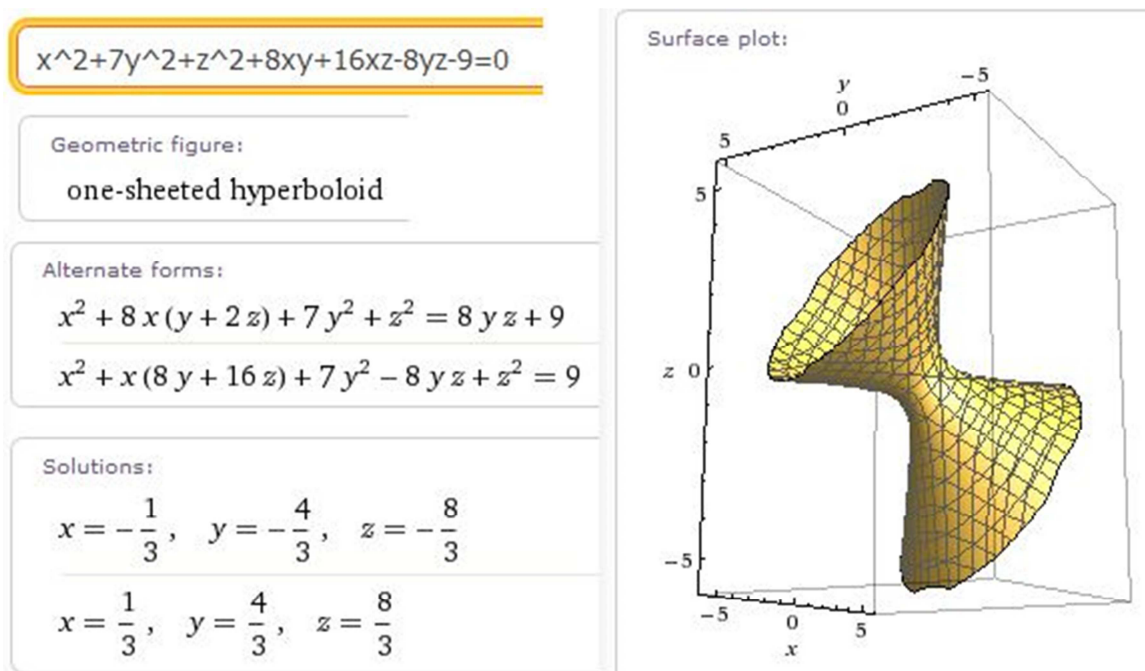
Obrázek 4. 19: Výpočet matice B a vektoru b

V levé části výše uvedeného obrázku 4. 19 je vypočtena matice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a v pravé části je vypočten vektor $b = (2, 2)$, jež jsou základem pro výpočet rovnice kuželosečky v nové soustavě souřadnic: $2y'^2 + 4y' + 4x' - 4 = 0$, z níž určíme, že se jedná o parabolu.

Příklad 4. 5: Vyšetření kvadriky $x^2 + 7y^2 + z^2 + 8xy + 16xz - 8yz - 9 = 0$

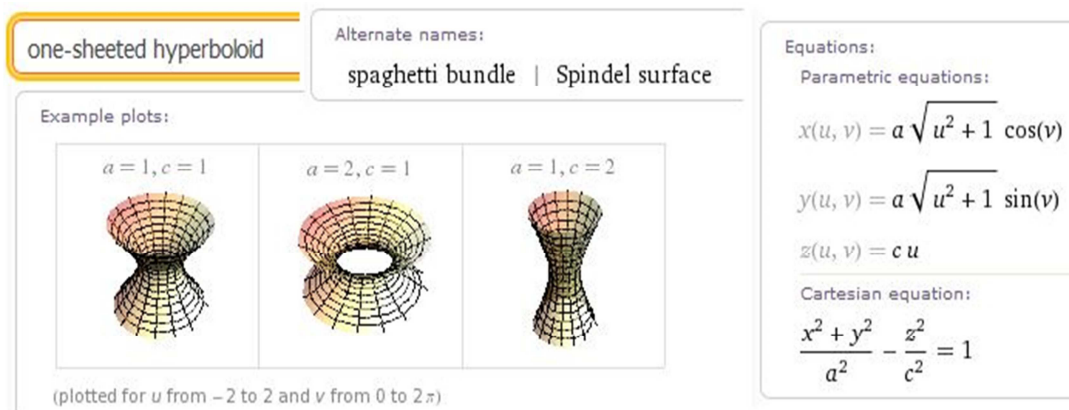
Zadání: „Vyšetřete následující kvadriku $x^2 + 7y^2 + z^2 + 8xy + 16xz - 8yz - 9 = 0$.“ ([15], s. 1)

Řešení: Opět se nabízí dva způsoby řešení příkladu, kde prvním způsobem řešení je zadávání jakéhokoliv předpisu kvadriky do příkazové řádky ve WA a vyřeší, o jaký typ kvadriky se jedná.



Obrázek 4. 20: Vyšetření kvadriky

Je znatelné z obrázku 4. 20, že výsledkem vyšetření kvadriky je jednodílný rotační hyperboloid. Ve výstupu WA se nachází alternativní formy předpisu, řešení, geometrický útvar a graf. Zároveň můžeme opět myší kliknout na název v geometrickém útvaru, jenž se přetransformuje do příkazové řádky ve WA, a dostaneme všeobecné informace o jednodílném rotačním hyperboloidu, jak nám vypovídá obrázek 4. 21.

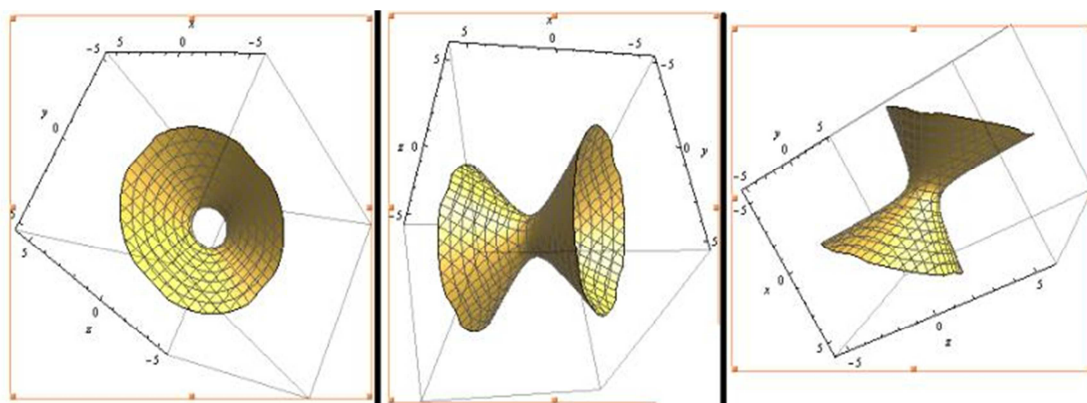


Assuming "one-sheeted hyperboloid" is a mathematical surface | Use as referring to a mathematical definition instead

Obrázek 4. 21: Obecné informace o jednodílném rotačním hyperboloidu

Všeobecné informace o jednodílném rotačním hyperboloidu získáme z výstupu WA, v němž jsou alternativní názvy kvadriky, například *spaghetti bundle*, *spindel surface*, ukázky grafů v různé poloze a předpisy rovnic, například *parametric equations* (parametrické rovnice), *cartesian equation* (středová rovnice).

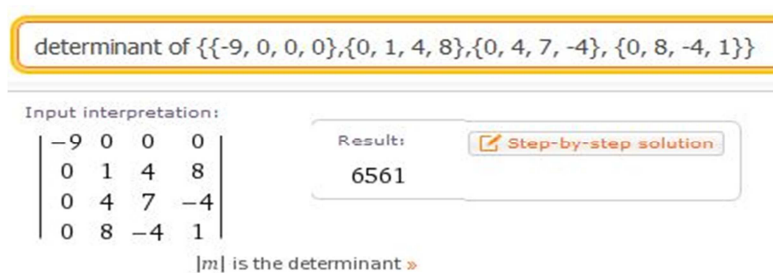
Dále WA nabízí ve výstupu u grafu funkci *Enable interactivity* (Povolit interaktivní přístup), která nám umožňuje graf libovolně natáčet, jak nám vyobrazuje obrázek 4. 22.



Obrázek 4. 22: Operace s grafem

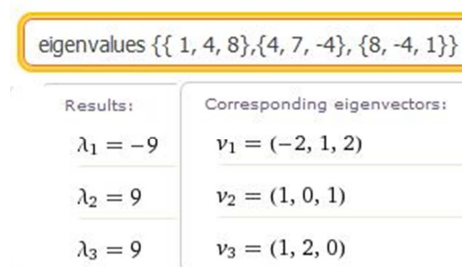
Druhý způsob vyšetření kvadriky je o něco složitější a časově náročnější než první způsob, z důvodu potřeby určitých znalostí z matematiky. Každou kvadriku $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + 2a_{03}x_3 + a_{00} = 0$ lze zapsat maticově $x^T Ax + 2a^T x + a = 0$, kde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \neq 0$, $a = \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ a_{03} \end{pmatrix}$, $a = a_{00}$ a $C = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ nazýváme maticí kvadriky.

Když vypočteme determinant matice C, tak částečně rozhodneme o typu kvadriky.



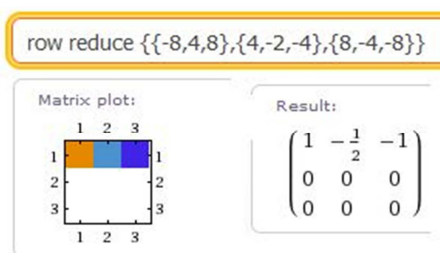
Obrázek 4. 23: Výpočet determinantu

Obrázek 4. 23 nám vyjadřuje, že determinant matice C vyšel 6561, z čehož vyplývá, že hovoříme o tzv. regulární kvadrice. Navíc ve výstupu je ještě vstup, kde můžeme myšlí rozšířit *|m| is the determinat* a kliknout na funkci *Definition*, jež otevře nové okno v prohlížeči a dostaneme se do WolframMathWorld, což je webová stránka s rozsáhlými matematickými informacemi. Dále určíme matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ a vektor $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a z uvedené matice pomocí WA vypočteme vlastní čísla a vlastní vektory, jak nám vyjadřuje v obrázku 4. 24.



Obrázek 4. 24: Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů I

Výsledkem WA jsou vlastní čísla $\lambda_1 = -9, \lambda_2 = 9$ a $\lambda_3 = 9$ a k nim přiřazeny jejich vlastní vektory $v_1 = (-2, 1, 2), v_2 = (1, 0, 1)$ a $v_3 = (1, 2, 0)$. U dvojnásobného vlastního čísla se volí vektor v_2 libovolně, ale vhodně pro další zpracování, a vektor v_3 se musí zvolit tak aby $v_3 \perp v_1$ a $v_3 \perp v_2 \Rightarrow \vec{v}_3 = \vec{v}_2 \times \vec{v}_1$. Z výše uvedeného obrázku 4. 24 je vidět, že WA zvolil nepříliš vhodný vektor v_2 pro další zpracování, proto do předpisu $A - \lambda I$ dosadíme $\lambda = 9$ a budeme řešit matici $\begin{pmatrix} -8 & 4 & 8 \\ 4 & -2 & -4 \\ 8 & -4 & -8 \end{pmatrix}$ pomocí funkce *row reduce*.



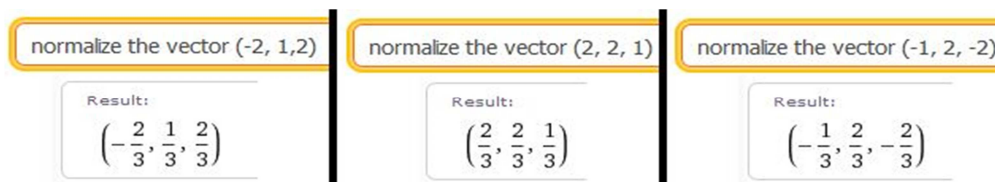
Obrázek 4. 25: Výpočet matice

Z obrázku 4. 25 vyplývá, že vektor v_1 vyšel $(-2, 1, 2)$ a vektor v_2 jsme si mohli zvolit $(2, 2, 1)$, protože druhý řádek byl nulový. Vektor v_3 vypočteme vektorovým součinem vektorů v_1 a v_2 .



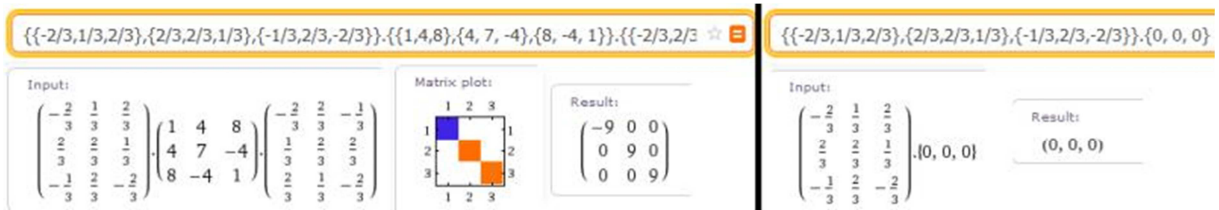
Obrázek 4. 26: Výpočet vektorového součinu

Vektor v_3 vyšel $(-3, 6, -6) = (-1, 2, -2)$, jak je znázorněno výše v obrázku 4. 26. Dále z uvedených vektorů v_1, v_2 a v_3 vytvoříme jednotkové vlastní vektory.



Obrázek 4. 27: Výpočet jednotkových vlastních vektorů

Obrázek 4. 27 vyjadřuje jednotkové vlastní vektory $v_1^* = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $v_2^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ a $v_3^* = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, z nichž vytvoříme matici rotace $R = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ a transformovanou matici $R^T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, jež slouží pro otočení a následující posunutí kvadriky podle předpisu $B = R^T A R$ a $b = R^T a$, abychom rozeznali typ kvadriky se jedná.



Obrázek 4. 28: Výpočet kvadriky

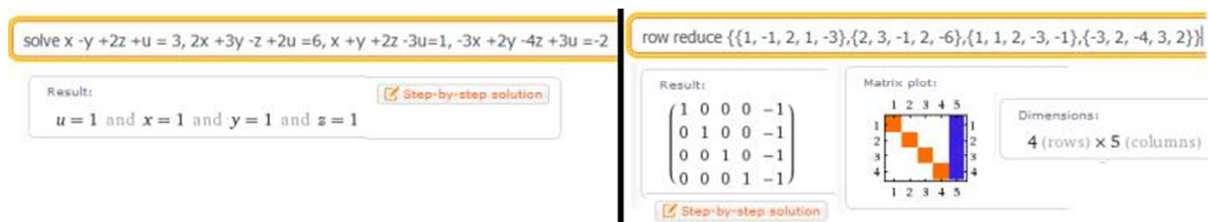
Z výsledku v levé části obrázku 4. 28 je patrné, že vyšla matice $B = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

a vektor $b = (0, 0, 0)$, jež jsou základem pro určení kanonického tvaru rovnice $-9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 9 = 0$. Z předpisu uvedené kanonické rovnice je patrné, že hledaná kvadrika je jednodílný rotační hyperboloid.

Příklad 4. 6: Určení všech řešení soustavy lineárních rovnic I

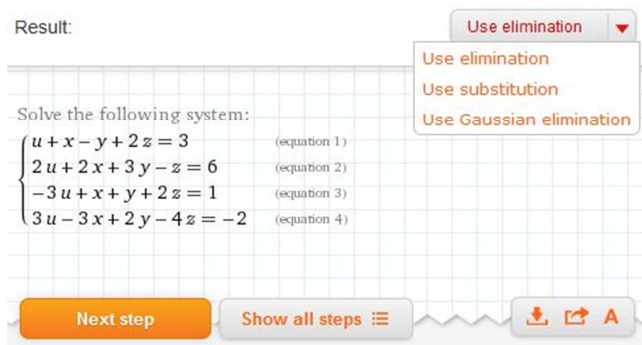
Zadání: „Určete všechna řešení soustavy lineárních rovnic $x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3$, $2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6$, $x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1$, $-3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -2$.“ ([14], LA příklad 7. 1. (2))

Řešení: Soustavu lineárních rovnic můžeme ve WA řešit buď pomocí funkce *solve* nebo *row reduce*.



Obrázek 4.29: Výpočet soustavy lineárních rovnic I

Z obrázku 4. 29 vyplývá, že soustava má právě jedno řešení $X = [1, 1, 1, 1]^T$.



Obrázek 4. 30: Ukázka řešení krok za krokem

V případě řešení soustavy lineárních rovnic, lze použít funkci *Step-by-step solution* (Řešení krok za krokem), jež nabízí řešení soustavy pomocí metod *elimination* (eliminace), *substitution* (substituce) a *Gaussian elimination* (Gaussovou eliminační) metodou. Dále si můžeme nechat *next step* (postupně odkrývat jednotlivé kroky) a nebo *show all steps* (zobrazit najednou). Všechny možnosti, jež nám WA nabízí v rámci řešení příkladů pomocí funkce *Step-by-step solution*, jsou zobrazeny v obrázku 4. 30.

Příklad 4. 7: Určení všech řešení soustavy lineárních rovnic II

Zadání: „Určete všechna řešení soustavy lineárních rovnic $x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -5$, $2x_1 + 4x_2 - 11x_3 + 13x_4 = -13$, $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 4$, $-3x_1 - 6x_2 + 13x_3 - 9x_4 + 7x_5 = 30$, $-2x_1 - 4x_2 + 9x_3 - 11x_4 - 7x_5 = 20$.“ ([14], LA příklad 7. 1. (3))

Řešení: Zadanou soustavu lineárních rovnic lze řešit pouze pomocí funkce *row reduce*, protože WA má potíže vyřešit soustavu pěti a více lineárních rovnic s pěti a více proměnnými pomocí funkce *solve*.

The screenshot shows the WolframAlpha interface. At the top, the input is: `solve x +2y -4z +3u +w =-5, 2x +4y -11z +13u=-13, x +2y -3z +2u +7w =4, -3x -6y + 13x_3 - 9x_4 + 7x_5 = 30, -2x_1 - 4x_2 + 9x_3 - 11x_4 - 7x_5 = 20`. Below this, it says "Using closest Wolfram|Alpha interpretation: $-3x -6y +13z -9u +7w =30$ ". A note says "More interpretations: $-2x -4y +9z -11u -7w =20$ ". The main input is: `row reduce {{1, 2, -4, 3, 1, 5},{2, 4, -11,13, 0, 13},{1, 2, -3, 2, 7, -4},{-3, -6, 13, -9, 7, 30},{-2, -4, 9, -11, -7, 20}}`. The result is a matrix:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 108 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
. Dimensions are given as "5 (rows) x 6 (columns)". A "Matrix plot" shows a 5x6 grid with colored cells representing the matrix entries.

Obrázek 4. 31: Výpočet soustavy lineárních rovnic II

Obrázek 4. 31 nám vyjadřuje, že řešení příkladu pomocí funkce *solve* nelze, protože WA má problém s množstvím proměnných oproti funkci *row reduce*. Soustava má nekonečně mnoho řešení $X = [-108, 0, -35, -14, 5]^T + t(-2, 1, 0, 0, 0)^T$, kde $t \in R$.

Příklad 4. 8: Určení vlastních čísel, vlastních vektorů, Jordanův kanonický tvar J matice a ověření rovnosti $A = TJT^{-1}$

Zadání: „Určete vlastní čísla, vlastní vektory a Jordanův kanonický tvar J matice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Ověřte, že platí rovnost $A = TJT^{-1}$.“ ([14], LA příklad 9. 1. (12))

Řešení: Během řešení zadaného příkladu určíme nejdřív vlastní čísla a vlastní vektory pomocí funkce *eigenvalues* a *eigenvectors*.

eigenvalues {{-5, 1, 0, 0}, {-4, 2, 2, -1}, {6, -6, -5, 1}, {0, 3, 2, -4}}		eigenvectors {{-5, 1, 0, 0}, {-4, 2, 2, -1}, {6, -6, -5, 1}, {0, 3, 2, -4}}	
Results:	Corresponding eigenvectors:	Results:	Corresponding eigenvalues:
$\lambda_1 = -3$	$v_1 = (1, 2, 0, 6)$	$v_1 = (1, 2, 0, 6)$	$\lambda_1 = -3$
$\lambda_2 = -3$	$v_2 = (-1, -2, 3, 0)$	$v_2 = (-1, -2, 3, 0)$	$\lambda_2 = -3$
$\lambda_3 = -3$	$v_3 = (0, 0, 0, 0)$	$v_3 = (0, 0, 0, 0)$	$\lambda_3 = -3$
$\lambda_4 = -3$	$v_4 = (0, 0, 0, 0)$	$v_4 = (0, 0, 0, 0)$	$\lambda_4 = -3$

Obrázek 4. 32: Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů II

Z výše uvedeného obrázku 4. 32 je zřejmé, že nám vyšlo čtyřnásobné vlastní číslo $\lambda_{1,2,3,4} = -3$ a k nim libovolně přiřazené lineární kombinace vlastních vektorů $v_1 = (1, 2, 0, 6)$, $v_2 = (-1, -2, 3, 0)$, $v_3 = (0, 0, 0, 0)$ a $v_4 = (0, 0, 0, 0)$. Dále si můžeme povšimnout, že WA nabízí ve výsledku vlastních čísel i výsledek vlastních vektorů a naopak, protože WA má v sobě zabudovanou vzájemnou propojenost výstupů. V dalším kroku vypočteme Jordanův kanonický tvar J matice a zároveň ověříme, zda platí rovnost $A = TJT^{-1}$, akorát WA používá jiné označení $M = SJS^{-1}$.

Jordan decomp {{-5, 1, 0, 0}, {-4, 2, 2, -1}, {6, -6, -5, 1}, {0, 3, 2, -4}}

Result:

$$M = SJS^{-1} \quad M = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

where

Obrázek 4. 33: Výpočet Jordanovi matice a ověření

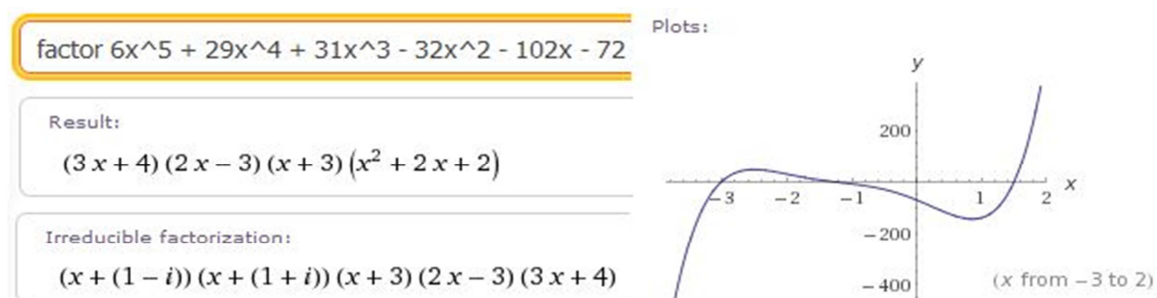
Z obrázku 4. 33 je patrné, že rovnost platí a Jordanova matice vyšla

$$J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Příklad 4. 9: Určení všech kořenů polynomu a ověření roznásobením všech kořenů

Zadání: „Určeme všechny kořeny polynomu $f(x) = 6x^5 + 29x^4 + 31x^3 - 32x^2 - 102x - 72$, jestliže je známo, že některé z jeho kořenů jsou celočíselné, resp. Racionální (a neceločíselné).“ ([7], s. 57)

Řešení: Pro určení všech kořenů polynomu ve WA použijeme funkci *factor*, jež provede rozklad polynomu na kořenové činitele, jak je uvedeno v obrázku 4. 34.



Obrázek 4. 34: Výpočet kořenů polynomu

Z výsledku je patrné, že polynom lze rozložit na $f(x) = (3x + 4) \cdot (2x - 3) \cdot (x + 3) \cdot (x^2 + 2x + 2)$, kde $g(x) = (x^2 + 2x + 2)$ má kořeny $-1 \pm i$. Z čehož můžeme vyčíst, že má dva racionální kořeny $\frac{3}{2}$ a $-\frac{4}{3}$, dva komplexně sdružené kořeny $-1 \pm i$ a celočíselný kořen -3 . Kdybychom chtěli provést opačný výpočet, tedy roznásobení kořenů polynomu, tak použijeme ve WA funkci *expand*, jak nám vyjadřuje obrázek 4. 35.



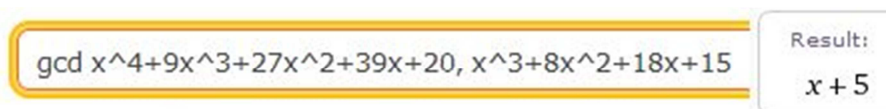
Obrázek 4. 35: Výpočet polynomu

Vlivem opačnému výpočtu lze ověřit správnost určení všech kořenů polynomu.

Příklad 4. 10: Nalezení největšího společného dělitele polynomů

Zadání: „Nad oborem integrity polynomů jedné proměnné nad komutativním tělesem $(Q; +, \cdot)$ najděte největší společný dělitel polynomů $f(x) = x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 39x + 20$, $g(x) = x^3 + 8x^2 + 18x + 15$.“ ([16], s. 35)

Řešení: Chceme-li nalézt největšího společného dělitele polynomů, využijeme ve WA funkci *gcd*.



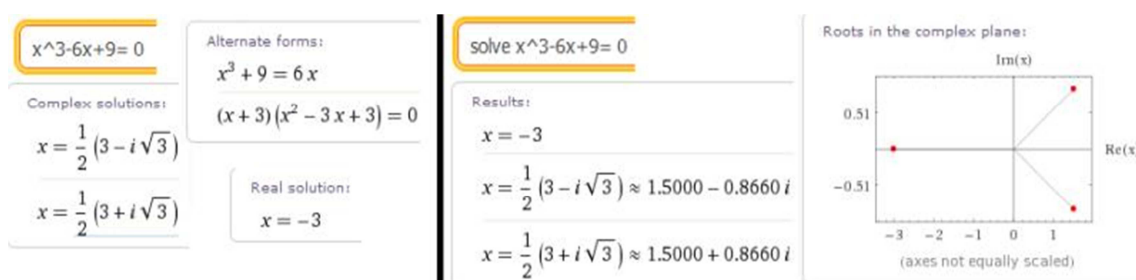
Obrázek 4. 36: Výpočet největšího společného dělitele polynomů

Obrázek 4. 36 nám vyjadřuje, že výsledek největší společný dělitel vyšel $D[f(x), g(x)] = x + 5$.

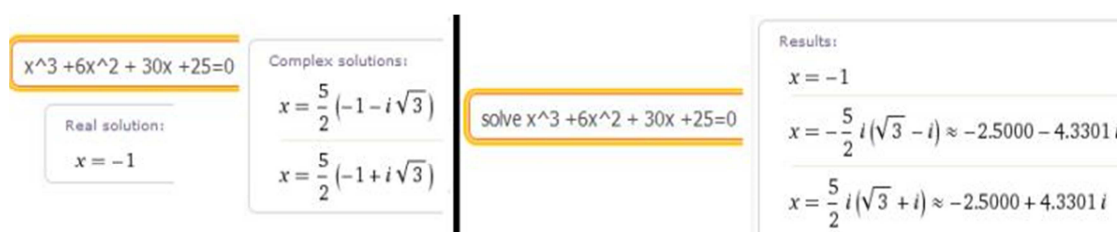
Příklad 4. 11: Řešení kubických rovnic

Zadání: „Řešte kubické rovnice a) $x^3 - 6x + 9 = 0$, b) $x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0$, c) $x^3 + 9x^2 + 19x + 11 = 0$, d) $x^3 + 3x + 8 = 0$.“ ([7], s. 90)

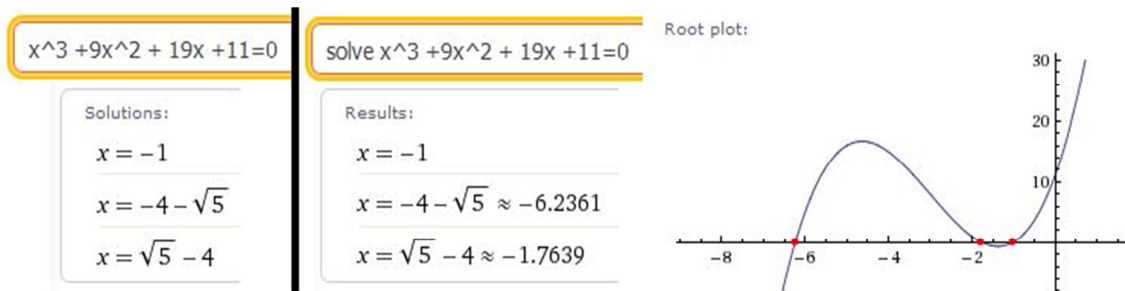
Řešení: Abychom mohli vyřešit rovnice ve WA, tak stačí zadat předpisy rovnic do příkazové řádky nebo použít funkci *solve*. Obě dvě varianty jsou výhodné. Výpočet všech rovnic jsme uvedli postupně v obrázku 4. 37, 4. 38, 4. 39 a 4. 40.



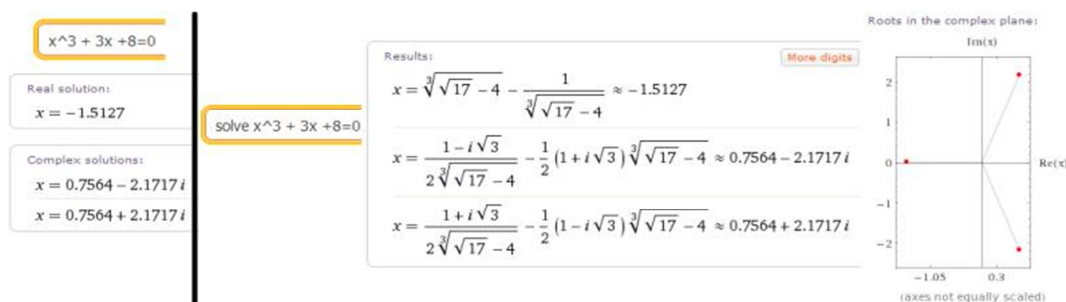
Obrázek 4. 37: Výpočet kubické rovnice I



Obrázek 4. 38: Výpočet kubické rovnice II



Obrázek 4. 39: Výpočet kubické rovnice III



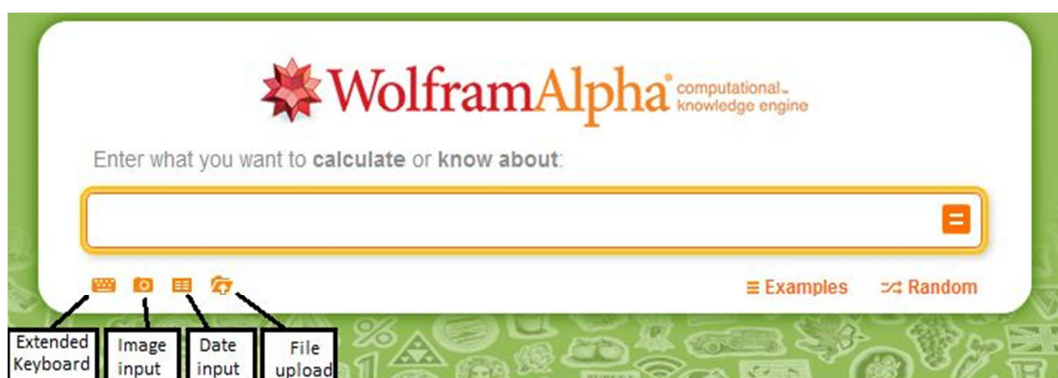
Obrázek 4. 40: Výpočet kubické rovnice IV

Z výše uvedených výstupů vyplývá, že když řešíme kubické rovnice funkcí *solve*, tak dostaneme pouze výsledek. Ale když zadáme rovnici do příkazové řádky bez jakékoliv funkce, tak dostaneme ve výstupu navíc rozdělení kořenů podle oboru. Rovnice $x^3 - 6x + 9 = 0$ má jeden celočíselný kořen -3 a dva komplexně sdružené kořeny $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Rovnice $x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0$ má opět jeden celočíselný kořen -1 a dva komplexně sdružené kořeny $-\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Rovnice $x^3 + 9x^2 + 19x + 11 = 0$ má jeden celočíselný kořen -1 a dva reálné kořeny $-4 - \sqrt{5}$ a $\sqrt{5} - 4$. Rovnice $x^3 + 3x + 8 = 0$ má jeden reálný kořen $-1,5127$ a dva komplexně sdružené kořeny $0,7564 \pm 2,1717i$.

5 Aplikace Wolfram Alpha

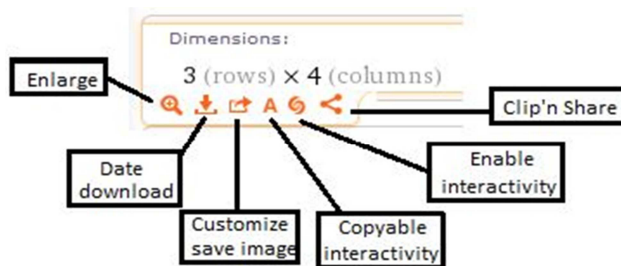
V předchozích kapitolách jsme především používali příkazovou řádku pro vyřešení příkladů, ale když jsme nevěděli správné zadání příkazu, tak jsme klikli myší na tlačítko *Examples* (Příklady) a WA se přetransformuje do oblasti *Examples by Topic*. Tam klikneme na obrázek *Mathematics* a můžeme si najít potřebné informace pro zadávání předpisu a zároveň vyzkoušet ukázky příkladů. Dále vedle tlačítka *Examples* se nachází tlačítko *Random* (Namátkový výběr), jež po kliknutí myší vybírá náhodné zadání ukázkových příkladů do příkazové řádky.

Na druhé straně od tlačítek *Examples* a *Random* pod příkazovou řádkou jsou umístěny další interaktivní vstupy, například *Extended Keyboard* (Rozšířená klávesnice), *Image input* (Obrázkový vstup), *Date input* (Datový vstup) a *File upload* (Souborové nahrávání), jak je představeno v obrázku 5. 1. Navíc jsou použitelné pouze pro registrované uživatele zcela zdarma.



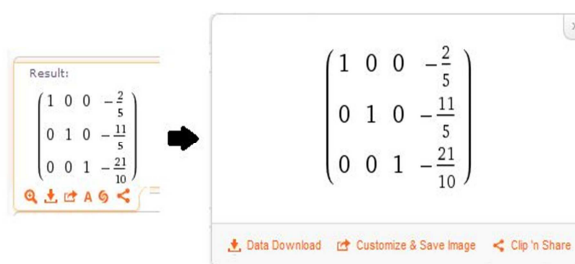
Obrázek 5. 1: Úvodní stránka

U každého výstupového výklenku nabízí WA operace, například *Enlarge* (Zvětšení), *Date download* (Stahování dat), *Customize & save image* (Upravování dle potřeby a ukládání obrázku), *Copyable plaintext* (Překopírování na jednoduchý text), *Enable interactivity* (Povolit interaktivní přístup) a *Clip'n Share* (Přetvoření výsledku pro sdílení). V obrázku 5.2 jsou vyobrazeny všechny operace, jež se nacházejí ve spodní levé části u výstupových výklenků.



Obrázek 5. 2: Operace s výstupy

Operace *Enlarge*, *Data download*, *Customize & save image*, *Enable interactivity* jsou povolené pouze pro registrované uživatele kromě *Copyable plaintext* a *Clip'n Share*, které mohou využívat všichni uživatelé. Pouze po kliknutí na operaci *Enable interactivity* se spustí funkce *CDF interactivity*, jež je zdarma přístupná registrovaným uživatelům pouze tři dny. Umožňuje interaktivní ovládání, 3D rotace a animace, jež jsme již představili v předchozí kapitole. Operace *Enlarge* funguje na principu lupy, jež je ukázána v obrázku 5. 3.



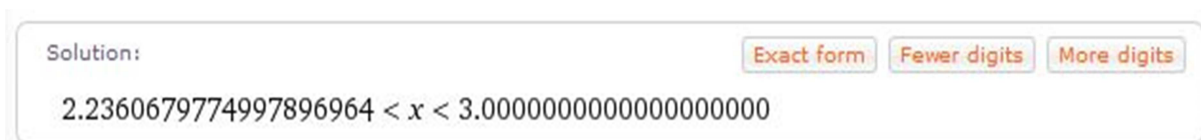
Obrázek 5. 3: Zvětšení

Pokud je výstupem neceločíselný výsledek, tak WA nabízí dvě varianty zápisu výsledku. V případě jednoho zápisu nám tlačítko v pravém horním rohu nabízí druhou variantu zápisu, jež je vyznačen v obrázku 5. 4. Rozdělují se na *Exact forms* (Přesné zápisy) a *Approximate forms* (Přibližné zápisy), jež mohou používat všichni.



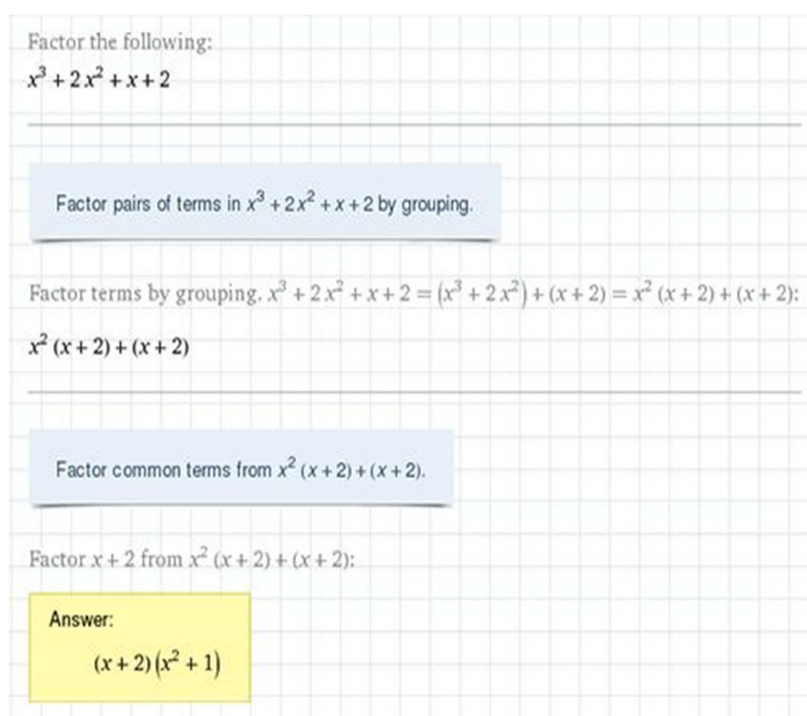
Obrázek 5. 4: Formy zápisu

U některých neceločíselných zápisů, jež jsou ve formě přibližného předpisu, WA nabízí navíc operaci *More digits* (Více cifer). Po kliknutí myši na uvedené tlačítko se počet cifer za desetinou čárkou zvýší a zároveň v pravém horním rohu přibude další tlačítko s operací *Fewer digits* (Méně cifer), jež po kliknutí snižuje počet cifer za desetinou čárkou. Dané operace jsou vyobrazeny v obrázku 5. 5.



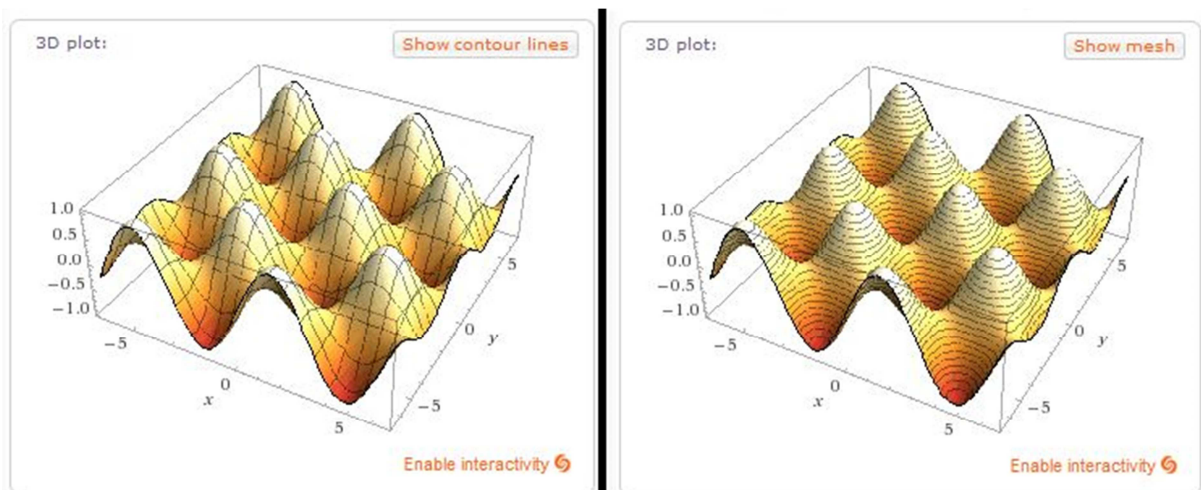
Obrázek 5. 5: Podrobnější forma zápisu

Jedna z důležitých funkcí je *Step-by-step solution* (Řešení krok za krokem), jež je představen v obrázku 5. 6. Funkce nám umožňuje pozorovat mezikroky, jež udělá WA během řešení příkladu a dopracuje se k výsledku. U jednotlivých kroků jsou i vysvětleny postupy a výsledek je označen ve žlutém obrazci. Používá se v oborech, například lineární algebra, trigonometrie a číselná teorie. Je zcela zdarma pro registrované uživatele, pokud ji budou využívat maximálně 2krát denně.



Obrázek 5. 6: Ukázka řešení krok za krokem

Ve WA lze u některých výstupů kliknout na text *Documentation* (Dokumentace), *Properties* (Vlastnosti) a *Definition* (Definice), díky čemuž se otevře nové okno, v němž jsou uvedeny požadované informace k danému textu. Dále WA nabízí u 3D grafů dvě varianty vykreslování křivek, jež volíme kliknutím myši v horním pravém rohu na tlačítko *Show contour lines* (Zobrazení vrstevnic) nebo *Show mesh* (Zobrazení sítě) ve výstupu, jak vyplývá z obrázku 5. 7.



Obrázek 5. 7: Vykreslování křivek

Část IV

Závěr

Cílem této práce bylo popsat využívání Wolframu Alpha v matematice. Práci jsme měli rozdělenou na teoretickou a praktickou část, kde teoretická část nám sloužila jako podklad pro vypracování praktické části. V teoretické části jsme se věnovali popisu čísel, vykreslování do grafu a algebře a v praktické části jsme si ukázali řešení příkladů různými způsoby v rámci WA. Navíc jsme popsali aplikace, jež WA nabízí v průběhu řešení příkladů.

Čísla, vykreslování do grafů a algebra jsou součástí teoretické části, kde jsme je popsali v prvních třech kapitolách. V nichž byly představeny a vysvětleny zápisy, jež se zadávají do příkazové řádky pro řešení příkladů v praktické části. U každé zkoumané části jsme uvedli vždy jednu ukázkou vstupu a výstupu pro lepší vysvětlení.

Ve čtvrté kapitole jsme představili řešení příkladů více způsoby. V průběhu prozkoumávání nás velice potěšilo, že WA je schopný rozeznat kuželosečku a kvadriku z obecného předpisu, aniž bychom je museli převést na kanonickou rovnici. Ve čtvrté kapitole Ukázka řešených příkladů jsme u příkladů 4. 4 a 4. 5 uvedli oba způsoby řešení pro porovnání náročnosti. V případě zadávání obecného předpisu kuželosečky nebo kvadriky do příkazové řádky je výpočet mnohem rychlejší a snadnější než kdybychom museli převést kuželosečku nebo kvadriku na kanonickou rovnici a určit o jaký typ se jedná. U druhého způsobu musíme mít určité matematické znalosti o převodu, protože WA vypočte jenom předpis matice B a vektoru b a my si musíme sami složit kanonickou rovnici a určit o jaký typ se jedná oproti prvnímu způsobu, v němž vypíše do výstupu název, alternativní formy předpisu a zobrazí kuželosečku nebo kvadriku do grafu. V průběhu řešení druhým způsobem jsme počítali vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory, kde bylo zapotřebí vhodného zvolení vektorů pro další zpracování, ale WA zvolil nevhodnou kombinaci. Z čehož vyplývá, že musíme mít stále na paměti, že se jedná pouze o vyhledávač, jenž provádí standartní operace. Dále jsme se věnovali řešení soustav lineárních rovnic pomocí funkce *solve* a *row reduce*. Funkce *row reduce* neměla žádný problém s větším počtem proměnných oproti funkci *solve*. WA má problém s řešením soustav lineárních rovnic pomocí této funkce, protože dokáže zpracovat maximálně soustavu čtyř rovnic se čtyřmi proměnnými. Na daný problém jsme poukázali ve čtvrté

kapitole Ukázka řešených příkladů u příkladů 4. 6 a 4. 7. Při prozkoumávání rovnic, polynomů a racionálně (lomených) funkcí jsme nenalezli žádné nedostatky.

V poslední kapitole jsme se zaměřili na aplikace WA, jež nabízí v průběhu řešení příkladů. Aplikaci *Examples* je vhodná pro vyhledávání potřebných předpisů. V rámci bakalářské práce jsme ji nespočetněkrát využili. Mohou ji využívat i neregistrovaní uživatelé. Mezi nejefektivnější aplikace dle našeho názoru patří *CDF interactivity* a *Step-by-step solution*. Funkce *CDF interactivity* umožňuje interaktivně ovládat, animovat a natáčet grafy do různých poloh. Během řešení příkladů je vhodné používat funkci *Step-by-step solution*, protože velice přehledně a kvalitně vysvětlí, jak se dostal WA k výsledku. Někdy nabízí i více variant postupů. Obě dvě funkce jsou pouze přístupné pro registrované uživatele a to ještě omezeně. Před spuštěním funkce *CDF interactivity* je potřeba několika potvrzení přes email a instalace Wolframu CDF Playeru.

Můžeme prohlásit, že Wolfram Alpha je vhodným nástrojem pro řešení příkladů z matematiky, když jsme v průběhu prozkoumávání objevili drobné nedostatky, o nichž jsme se zmínili výše. Velice snadno a efektivně vyřeší zadané příklady pomocí předpisů, jež jsou potřebné k získání požadovaného výsledku. Zároveň se nám zamlouvají aplikace WA, jež umožňují lépe manipulovat s WA. WA lze využívat ke vzdělávání, protože nám dovolí v průběhu řešení příkladků použít funkci *Step-by-step solution* s komentáři, co zrovna udělal v daném kroku.

Část V

Literatura

- [1] WOLFRAM, Stephen. *WolframAlpha: computational knowledge engine* [online]. Wolfram Alpha LLC – A Wolfram Research Company: ©2013 [cit. 2014-02-18]. Dostupné z: <http://www.wolframalpha.com/>
- [2] Wolfram Alpha. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001. Poslední změna 4.03.2013 22:19 [cit. 2013-05-08]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Wolfram_Alpha
- [3] KLIMÁNEK, Oldřich. Wolfram Alpha: Revoluční typ vyhledávače spuštěn. *COMPUTERWORLD: Internet a komunikace* [online]. 2009, s. 1 [cit. 2014-02-18]. Dostupné z: <http://computerworld.cz/internet-a-komunikace/wolfram-alpha-revolucni-typ-vyhledavace-spusten-4045>
- [4] HÁLEK, Jiří a Jaroslav BERÁNEK. *Úvod do studia matematických disciplín*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 1991. ISBN 80-210-0348-0.
- [5] REKTORYS, Karel. *Přehled užití matematiky I*. 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000. ISBN 80-7196-180-9.
- [6] KAŇKA, Miloš. *Sbírka řešených příkladů z matematiky: pro studenty vysokých škol*. 1. vyd. Praha: Ekopress, 2009. ISBN 978-80-86929-53-8.
- [7] DRÁBEK, Jaroslav a Jaroslav HORA. *Algebra: polynomy a rovnice*. 1. vyd. V Plzni: Západočeská univerzita, 2001, 125 s. ISBN 80-708-2787-4.
- [8] FIŠNAROVÁ. *Polynomy a racionální lomené funkce* [online]. Brno, 2010 [cit. 2014-02-18]. Dostupné z: <http://user.mendelu.cz/fisnarov/zvm/prednasky/polynomy.pdf>. Prezentace. Mendelova univerzita v Brně.
- [9] BICAN, Ladislav. *Lineární algebra a geometrie*. Vyd. 2. Praha: Academia, 2009, 303 s. ISBN 978-80-200-1707-9.
- [10] Maticové rozklady. DONT, Miroslav. *Maticová analýza* [online]. Praha: ČVUT, 2011 [cit. 2014-02-18]. Dostupné z: <ftp://math.feld.cvut.cz/pub/dont/2009/kap4.pdf>
- [11] NEUMANNOVÁ. *Maticové rozklady* [online]. Brno, 2006 [cit. 2014-02-18]. Dostupné z: http://is.muni.cz/th/106508/prif_b/rozklady. Bakalářská práce. MASARYKOVA UNIVERZITA PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA.
- [12] Jordanův rozklad. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001, 15.1.2014 [cit. 2014-02-18]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Jordan%C5%AFv_rozklad
- [13] LÁVIČKA. *KMA/G1 GEOMETRIE I* [online]. Plzeň, 2008 [cit. 2014-02-18]. Dostupné z: http://home.zcu.cz/~lavicka/subjects/G1/texty/G1_texty.pdf. Pomocný učební text. Západočeský univerzita v Plzni.
- [14] TRIAL [online]. [cit. 2014-02-18]. Dostupné z: <http://trial.zcu.cz/>
- [15] *Cvičení 12* [online]. Plzeň, 2013 [cit. 2014-02-18]. Dostupné z: <http://home.zcu.cz/~rvyru/WWW-KMA/G1/priklady12.pdf>. Cvičení. Západočeská univerzita v Plzni.
- [16] DRÁBEK, Jaroslav. *Texty přednášek k předmětu KMT/ELA* [online]. Plzeň, 2007 [cit. 2014-02-21]. Dostupné z: www.kmt.zcu.cz/subjects/ela/kap4.doc. Učebnicový text. FPE ZČU.

Seznam obrázků

Obrázek 1. 1: Celá čísla vstup	5
Obrázek 1. 2: Celá čísla výstup	5
Obrázek 1. 3: Racionální číslo vstup	6
Obrázek 1. 4: Racionální číslo výstup	6
Obrázek 1. 5: Minimální polynom vstup	7
Obrázek 1. 6: Minimální polynom výstup	7
Obrázek 1. 7: N-té odmocniny komplexního čísla vstup	8
Obrázek 1. 8: N-té odmocniny komplexního čísla výstup	8
Obrázek 1. 9: Porovnávání intervalů vstup	9
Obrázek 1. 10: Porovnání intervalů výstup	9
Obrázek 2. 1: Vykreslování více funkcí vstup	10
Obrázek 2. 2: Vykreslování více funkcí výstup	11
Obrázek 2. 3: Logaritmicko-lineární stupnice vstup	11
Obrázek 2. 4: Logaritmicko-lineární stupnice výstup	11
Obrázek 2. 5: Rovnice o více proměnných vstup	12
Obrázek 2. 6: Rovnice o více proměnných výstup	12
Obrázek 2. 7: Elipsa výstup	13
Obrázek 2. 8: Nerovnice vstup	13
Obrázek 2. 9: Nerovnice výstup	13
Obrázek 2. 10: 3D vykreslování vstup	14
Obrázek 2. 11: 3D vykreslování výstup	14
Obrázek 2. 12: Polární vykreslování vstup	15
Obrázek 2. 13: Polární vykreslování výstup	15
Obrázek 3. 1: Soustava rovnic vstup	16
Obrázek 3. 2: Soustava rovnic výstup	16
Obrázek 3. 3: Interpolace polynomu vstup	18
Obrázek 3. 4: Interpolace polynomu výstup	18
Obrázek 3. 5: Racionální funkce vstup	19
Obrázek 3. 6: Racionální funkce výstup	19
Obrázek 3. 7: Smíšený součin vstup	20
Obrázek 3. 8: Smíšený součin výstup	20
Obrázek 3. 9: Řešení soustavy rovnic maticově vstup	21

Obrázek 3. 10: Řešení soustavy rovnic maticově výstup	22
Obrázek 3. 11: Matice vstup.....	22
Obrázek 3. 12: Matice výstup.....	22
Obrázek 3. 13: Lineární nezávislost vstup.....	23
Obrázek 3. 14: Lineární nezávislost výstup.....	23
Obrázek 3. 15: Schurův rozklad vstup.....	24
Obrázek 3. 16: Schurův rozklad výstup.....	24
Obrázek 3. 17: Obory vstup.....	25
Obrázek 3. 18: Obory výstup.....	25
Obrázek 4. 1: Výpočet vrcholu A.....	26
Obrázek 4. 2: Výpočet vrcholu B	26
Obrázek 4. 3: Výpočet vrcholu C	26
Obrázek 4. 4: Výpočet vrcholu D.....	27
Obrázek 4. 5: Výpočet objemu čtyřstěnu pomocí smíšeného součinu	27
Obrázek 4. 6: Výpočet objemu čtyřstěnu pomocí determinantu	27
Obrázek 4. 7: Výpočet vzájemné polohy I	28
Obrázek 4. 8: Výpočet vzájemné polohy II.....	28
Obrázek 4. 9: Výpočet soustavy tří rovnic	29
Obrázek 4. 10: Výpočet vzdálenosti.....	29
Obrázek 4. 11: Výpočet normy.....	30
Obrázek 4. 12: Výpočet odchylky	30
Obrázek 4. 13: Výpočet kuželosečky	31
Obrázek 4. 14: Vlastnosti paraboly	32
Obrázek 4. 15: Obecné informace o parabole	32
Obrázek 4. 16: Operace s grafem	33
Obrázek 4. 17: Výpočet regularity	33
Obrázek 4. 18: Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů.....	34
Obrázek 4. 19: Výpočet matice B a vektoru b.....	34
Obrázek 4. 20: Vyšetření kvadriky.....	35
Obrázek 4. 21: Obecné informace o jednodílném rotačním hyperboloidu	36
Obrázek 4. 22: Operace s grafem	36
Obrázek 4. 23: Výpočet determinantu	37
Obrázek 4. 24: Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů I	37
Obrázek 4. 25: Výpočet matice	38

Obrázek 4. 26: Výpočet vektorového součinu.....	38
Obrázek 4. 27: Výpočet jednotkových vlastních vektorů.....	38
Obrázek 4. 28: Výpočet kvadriky	39
Obrázek 4. 29: Výpočet soustavy lineárních rovnic I	40
Obrázek 4. 30: Ukázka řešení krok za krokem.....	40
Obrázek 4. 31: Výpočet soustavy lineárních rovnic II	41
Obrázek 4. 32: Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů II	42
Obrázek 4. 33: Výpočet Jordanovi matice a ověření.....	42
Obrázek 4. 34: Výpočet kořenů polynomu.....	43
Obrázek 4. 35: Výpočet polynomu.....	43
Obrázek 4. 36: Výpočet největšího společného dělitele polynomů.....	44
Obrázek 4. 37: Výpočet kubické rovnice I.....	44
Obrázek 4. 38: Výpočet kubické rovnice II.....	44
Obrázek 4. 39: Výpočet kubické rovnice III	45
Obrázek 4. 40: Výpočet kubické rovnice IV	45
Obrázek 5. 1: Úvodní stránka	46
Obrázek 5. 2: Operace s výstupy	47
Obrázek 5. 3: Zvětšení.....	47
Obrázek 5. 4: Formy zápisu.....	47
Obrázek 5. 5: Podrobnější forma zápisu.....	48
Obrázek 5. 6: Ukázka řešení krok za krokem.....	48
Obrázek 5. 7: Vykreslování křivek.....	49

Seznam příkladů

Příklad 4. 1: Určení objemu čtyřstěnu	26
Příklad 4. 2: Určení vzdálenosti přímky p a roviny q v eukleidovském prostoru E_4	28
Příklad 4. 3: Určení odchylky přímky p a roviny q v eukleidovském prostoru E_4	30
Příklad 4. 4: Vyšetření kuželosečky $x^2 - 2xy + y^2 + 42y - 4 = 0$	31
Příklad 4. 5: Vyšetření kvadriky $x^2 + 7y^2 + z^2 + 8xy + 16xz - 8yz - 9 = 0$	35
Příklad 4. 6: Určení všech řešení soustavy lineárních rovnic I	40
Příklad 4. 7: Určení všech řešení soustavy lineárních rovnic II	41
Příklad 4. 8: Určení vlastních čísel, vlastních vektorů, Jordanův kanonický tvar J matice a ověření rovnosti $A = TJT^{-1}$	42
Příklad 4. 9: Určení všech kořenů polynomu a ověření roznásobením všech kořenů	43
Příklad 4. 10: Nalezení největšího společného dělitele polynomů	44
Příklad 4. 11: Řešení kubických rovnic	44