38
Relativita

Dnešní dálková navigace soustavně sleduje a aktualizuje přesné polohy a rychlosti letadel. Systém navigačních družic NAVSTAR dovoluje určovat kdekoli na Zemi polohy s přesností asi 16 m a rychlosti s přesností asi 2 cm/s. Kdyby se však nepočítalo s relativistickými jevy, rychlosti by nemohly být určeny s větší přesností než asi 20 cm/s, což je pro moderní navigační systémy nedostatečné. Jak může něco tak abstraktního, jako je Einsteinova speciální teorie relativity, hrát roli při něčem tak praktickém, jako je navigace?

38.1 CO VŠECHNO PATŘÍ K RELATIVITĚ

Relativita se zabývá měřením událostí (něčeho, co se stalo nebo stane): kde a kdy se staly a jak jsou libovolné dvě události vzdáleny v prostoru a v čase. Dále se relativita stará o to, jak transformovat výsledky takových měření a jiná data mezi vztažnými soustavami, které se vzájemně pohybují. (Odtud název *relativita*.) O takových věcech jsme diskutovali v čl. 4.8 a 4.9.

Transformacím a pohybům vztažných soustav fyzikové roku 1905 dobře rozuměli a byla to pro ně vpodstatě rutinní záležitost. Tehdy Albert Einstein (obr. 38.1) uveřejnil svou **speciální teorii relativity**. Přívlastek *speciální* znamená, že teorie se zabývá pouze **inerciálními vztažnými soustavami**; ty se navzájem pohybují konstantními rychlostmi. (Einsteinova *obecná teorie relativity* se zabývá složitější situací, kdy se vztažné soustavy pohybují zrychleně; v této kapitole se výraz *relativita* vztahuje pouze k inerciálním vztažným soustavám.)

Obr. 38.1 Einstein na počátku 20. století, za svým stolem v patentovém úřadu v Bernu ve Švýcarsku. Byl zde zaměstnán v době, kdy publikoval svou speciální teorii relativity.

Einstein ohromil vědecký svět, když vyšel ze dvou drtivě prostých postulátů a ukázal, že dosavadní představy o relativitě byly mylné, ačkoli si na ně každý natolik zvykl, že působily jako nepochybný požadavek zdravého rozumu. Tento údajný zdravý rozum však byl odvozen ze zkušenosti, která se týkala pouze věcí, jež se pohybují dosti pomalu. Einsteinova relativita, která se ukázala být správná pro všechny možné rychlosti, předpověděla mnoho jevů, jež působily na první pohled bizarně, protože je nikdo nezakusil.

Einstein zejména ukázal, že prostor a čas jsou vzájemně provázány, že tedy čas dělící dvě události závisí na tom, jak daleko od sebe proběhly, a naopak. A toto provázání je různé pro různé pozorovatele, kteří se vzájemně pohybují. Jedním z důsledků je, že čas neběží jediným daným tempem, jako by s mechanickou pravidelností odtikával na nějakých perfektních dědečkových hodinkách, jimiž se řídí celý vesmír. Čas lze vlastně v jistém smyslu regulovat: relativní pohyb dokáže změnit tempo, jímž čas běží. Před rokem 1905 by si na to troufalo pomyslet snad jen několik snílků. Dnes jsou si tím jisti inženýři a vědci, protože jejich zkušenost se speciální relativitou nově zformovala jejich zdravý rozum.

Speciální relativita má pověst nesnadného tématu. Matematicky obtížná není, přinejmenším v podobě, jakou má v této knize. Její nesnadnost však tkví v tom, že je třeba velmi pozorně sledovat, *kdo* danou událost měří, *co* na ní měří a *jak* toto měření provádí. A to může být obtížné, protože výsledek někdy protiřečí zkušenosti. Než budete číst dál, může se vám hodit přehled některých poznatků ze speciální relativity, které už byly v této knize diskutovány. Vodítkem je tab. 38.1.

Tabulka 38.1 **Dřívější zmínky o relativitě**

ČLÁNEK	JMÉNO
4.10	Vzájemný pohyb při vysokých rychlostech
7.8	Kinetická energie při vysokých rychlostech
8.8	Hmotnost a energie
10.6	Jaderné reakce a radioaktivní rozpad

38.2 POSTULÁTY

Nyní probereme dva relativistické postuláty, na nichž je Einsteinova teorie založena.

Postulát relativity: Fyzikální zákony jsou stejné pro pozorovatele ve všech inerciálních vztažných soustavách. Žádná soustava není preferována.

Galilei předpokládal, že zákony *mechaniky* jsou stejné ve všech inerciálních vztažných soustavách. (Newtonův první pohybový zákon ve své historické formulaci je jedním z důležitých důsledků.) Einstein rozšířil tuto myšlenku, aby obsahovala *všechny* fyzikální zákony, zejména zákony elektromagnetismu a optiky. Postulát *neříká*, že měřené hodnoty všech fyzikálních veličin jsou stejné pro všechny inerciální pozorovatele; většinou tomu ani tak není. Stejné jsou *fyzikální zákony*, jimiž jsou výsledky měření vázány.

Postulát rychlosti světla: Rychlost světla ve vakuu má stejnou velikost c ve všech směrech a ve všech inerciálních vztažných soustavách, nezávislou na rychlosti zdroje.

Tento postulát můžeme formulovat také tak, že v přírodě existuje *mezní rychlost* c, jež je stejně velká ve všech směrech a ve všech inerciálních soustavách. Světlo se pohybuje touto mezní rychlostí stejně jako všechny částice o nulové hmotnosti. Dále žádná částice, která má nenulovou hmotnost, nemůže rychlosti c nikdy dosáhnout, i kdyby byla urychlována jakkoli dlouho. Ba ani žádná informace, ať už je přenášená jakkoli a čímkoli, nemůže letět rychleji než světlo. Pokud se něco pohybuje rychleji než světlo — třeba stín nebo světelná stopa na stínítku — pak na to nikdy nelze „zavěsit" nějakou informaci a poslat ji tak dál.

Oba postuláty byly vyčerpávajícím způsobem ověřovány a nebyly nalezeny žádné výjimky z jejich platnosti.

Mezní rychlost

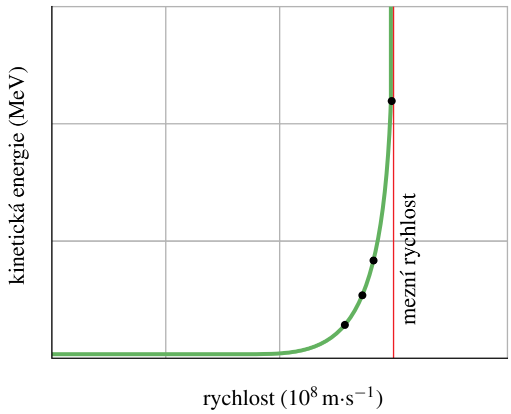
To, že opravdu existuje mez pro rychlost urychlovaných elektronů, ukázal roku 1964 experiment W. Bertozziho. Elektrony v něm byly urychlovány na různé měřené rychlosti (obr. 38.2) a byla také — nezávislou metodou — měřena jejich kinetická energie. Bertozzi zjistil, že když síla působící na velmi rychlý elektron roste, pak i měřená kinetická energie roste na velmi vysoké hodnoty, ale rychlost elektronu již podstatně nevzrůstá. Elektrony byly urychlovány nejméně na 0,999 999 999 95 rychlosti světla — tak blízko této rychlosti, jak jen bylo možné — ale pořád to byla rychlost menší než mezní rychlost.

Testování postulátu rychlosti světla

Je-li rychlost světla stejná ve všech inerciálních vztažných soustavách, znamená to, že rychlost světla emitovaného pohybujícím se zdrojem by měla být stejná jako rychlost světla, které emituje týž zdroj v klidu vzhledem k dané laboratoři. Tento požadavek byl přímo ověřován v experimentu, který se vyznačoval vysokou přesností. „Zdrojem světla" byl *neutrální pion* (symbol π^0), nestabilní částice s krátkou dobou života, která může vzniknout v důsledku srážek v urychlovači částic. Rozpadá se na dva γ-paprsky v procesu

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma. \tag{38.1}$$

Paprsky γ jsou součástí elektromagnetického spektra a splňují postulát rychlosti světla stejně jako viditelné světlo.



Obr. 38.2 Tečkami jsou vyznačeny naměřené hodnoty kinetické energie elektronu v závislosti na naměřené rychlosti elektronu. Ať dodáme elektronu (anebo libovolné jiné hmotné částici) kolik chceme energie, jeho rychlost nikdy nedosáhne ani nepřevýší mezní rychlost — rychlost světla. (Spojitá křivka ukazuje závislost podle Einsteinovy teorie relativity.)

V experimentu z roku 1964 fyzikové z CERNu, laboratoře částicové fyziky poblíž Ženevy, vytvořili svazek pionů pohybující se rychlostí $0{,}999\,75c$ vzhledem k laboratoři. Pak experimentátoři měřili rychlost γ-paprsků emitovaných těmito velmi rychle se pohybujícími zdroji. Zjistili, že rychlost světla emitovaného piony je stejně velká, jako byla v případě, kdy byly piony v laboratoři v klidu.

PŘÍKLAD 38.1

Lze ukázat, že elektron s kinetickou energií 20 GeV (mluvívá se o 20 GeV-elektronu) má rychlost $v = 0{,}999\,999\,999\,67c$. Zúčastní-li se takový elektron závodu se světelným pulzem se startem v okolí Slunce a s cílem u nejbližší hvězdy (Proxima Centauri, vzdálenost 4,3 světelné roky čili $4{,}0\cdot10^{16}$ m), s jakým časovým náskokem světelný pulz zvítězí?

ŘEŠENÍ: Je-li L vzdálenost hvězdy, je rozdíl časů putování

$$\Delta t = \frac{L}{v} - \frac{L}{c} = L\frac{c-v}{vc}.$$

Zde v je natolik blízké c, že můžeme ve jmenovateli výrazu (ne však v čitateli!) položit $v = c$. Pak dostaneme

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{L}{c}\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \\ &= \frac{(4{,}0\cdot10^{16}\ \mathrm{m})(1 - 0{,}999\,999\,999\,67)}{(3{,}0\cdot10^{8}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})} = \\ &= 0{,}044\ \mathrm{s} = 44\ \mathrm{ms}. \qquad \text{(Odpověď)}\end{aligned}$$

38.3 MĚŘENÍ UDÁLOSTÍ

Událost je něco, co se stalo nebo stane a čemu pozorovatel může připsat tři prostorové souřadnice (x, y, z) a jednu souřadnici časovou (t). Z ohromného počtu možných událostí uveďme (1) rozsvícení a zhasnutí malé žárovky, (2) srážku dvou částic, (3) průchod světelného pulzu vyznačeným bodem, (4) výbuch, (5) průchod hodinové ručičky přes rysku na obvodu hodin. Pozorovatel, který je vázán na jistou inerciální vztažnou soustavu, může události A připsat následující souřadnice:

Záznam události A	
Souřadnice	**Hodnota**
x	3,58 m
y	1,29 m
z	0 m
t	34,5 s

Protože v relativitě jsou prostor a čas vzájemně provázány, nazýváme tyto souřadnice společným názvem **prostoročasové souřadnice**. Souřadnicová soustava je dána v rámci vztažné soustavy pozorovatele.

Daná událost může být zaznamenána libovolným počtem pozorovatelů, kteří jsou spojeni s různými inerciálními vztažnými soustavami. Obecně vzato, různí pozorovatelé připíší téže události různé prostoročasové souřadnice. Upozorněme, že v žádném slova smyslu nelze říci, že událost „patří“ do určité vztažné inerciální soustavy. Událost je prostě něco, co se událo nebo udá, a kdokoli se na ni může v kterékoli vztažné soustavě dívat a připisovat jí prostoročasové souřadnice.

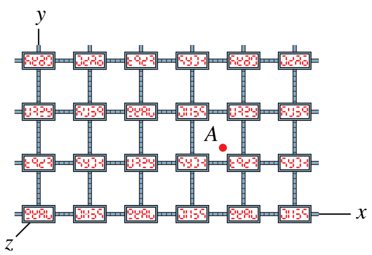
Takové připsání může ovšem narazit na praktickou potíž. Dejme tomu, že například 1 km od vás napravo praskne balon a 2 km od vás nalevo je odpálena raketa, přičemž obojí se stane v 9:00 dopoledne. Vy ale nezaznamenáte obě události přesně v 9:00 dopoledne, protože v tu dobu vás světlo od nich se šířící ještě nedostihlo. Protože světlo z odpálení rakety má delší cestu, dospěje k vašim očím později než světlo z prasknutí balonu, a tak se vám bude zdát, že k odpálení došlo později než k prasknutí. Chcete-li se dostat ke skutečnému času a připsat oběma událostem čas 9:00 dopoledne, musíte vypočítat doby putování světla a odečíst je od časů příchodu.

V složitějších případech může být tento postup velmi pracný a potřebovali bychom prostší metodu, která by automaticky vyloučila jakoukoli potřebu starat se o dobu cesty od události k pozorovateli. K tomu stačí si představit myšlenou mříž z měřicích tyčí osazenou hodinami a prostupující pozorovatelovu inerciální soustavu (mříž se pohybuje s pozorovatelem, jako by byla tuhým tělesem). Taková konstrukce může vypadat uměle, ale ušetří nás mnoha zmatků a výpočtů a dovolí nám nalézt prostorové souřadnice, časovou souřadnici a tím prostoročasové souřadnice, jak dále vyložíme.

1. **Prostorové souřadnice.** Představme si, že pozorovatelova souřadnicová soustava je prostoupena hustou trojrozměrnou mříží z měřicích tyčí, v níž každý soubor tyčí je rovnoběžný s jednou ze tří souřadnicových os. Tyto tyče umožňují určit souřadnice ve směru os. Je-li měřenou událostí například zapnutí malé žárovky, pak pozorovateli pro označení polohy této události stačí zaznamenat tři prostorové souřadnice v místě vzplanutí žárovky.

2. **Časová souřadnice.** Pro určení časové souřadnice si představme, že každý průsečík mříže měřicích tyčí je vybaven malými hodinami, na nichž může pozorovatel odečítat údaj ve chvíli, kdy byly osvětleny danou událostí. Obr. 38.3 zviditelňuje „prolézačku“ hodin a měřicích tyčí, jak jsme ji popsali.

Soubor hodin musí být správně synchronizován. Nestačí připravit soubor stejných hodin, nastavit na nich stejný čas a pak je roznést na určená místa. Nevíme například, zda pohybující se hodiny nezmění tempo svého chodu. (Ve skutečnosti je změní.) Musíme hodiny nejprve rozmístit a *potom* je synchronizovat.



Obr. 38.3 Řez trojrozměrným polem hodin a měřicích tyčí, kterými pozorovatel může přiřadit události její prostoročasové souřadnice. Záblesk světla (bod A) má souřadnice zhruba $x = 3{,}7$ tyčí, $y = 1{,}2$ tyčí, $z = 0$. Časovou souřadnici udávají ty hodiny, které jsou v daném okamžiku v těsné blízkosti události A.

Kdybychom znali způsob, jak posílat signály nekonečnou rychlostí, byla by synchronizace jednoduchá. Neznáme však signál, který by měl tuto vlastnost. Užijeme proto k našim synchronizujícím signálům světlo (které chápeme šíře tak, že zahrnuje celé elektromagnetické spektrum), protože víme, že ve vakuu se světlo šíří největší možnou rychlostí, mezní rychlostí c.

Uvedeme jeden z mnoha způsobů, jímž lze synchronizovat soubor hodin pomocí světelných signálů. Pozorovateli pomáhá velký počet spolupracovníků, z nichž každý se stará o jedny hodiny. Pozorovatel stojí v bodě, který byl zvolen jako počátek, a posílá světelný pulz v okamžiku, kdy na hodinách v počátku je údaj $t = 0$. Když světelný pulz dospěje ke kterémukoli pomocníkovi, ten nastaví na svých hodinách údaj $t = r/c$, kde r je vzdálenost mezi ním a počátkem. Tím jsou hodiny synchronizovány.

3. **Prostoročasové souřadnice.** Pozorovatel nyní může připsat každé události prostoročasové souřadnice, když prostě zaznamená čas na hodinách u dané události a polohu, jak ji udávají nejbližší měřicí tyče. Jde-li o dvě události, pozorovatel vypočte jejich časový rozdíl jako rozdíl časů na hodinách u daných událostí, a rozdílnost jejich poloh v prostoru určí pomocí rozdílů souřadnic na tyčích u těchto událostí. Tak se vyhneme nesnázím, které by v praxi přineslo čekání, až k pozorovateli dospějí signály od událostí, a následné počítání dob, po které tyto signály putovaly.

38.4 RELATIVITA SOUČASNOSTI

Předpokládejme, že jeden pozorovatel (Slávek) zjišťuje, že dvě nezávislé události (Rudá a Modrá) nastávají ve stejném čase. Dejme tomu, že další pozorovatel (Sylva), který se pohybuje konstantní rychlostí $\boldsymbol{v}$ vzhledem ke Slávkovi, zaznamenává tytéž události. Zjistí i Sylva, že události nastaly ve stejném čase?

Odpověď je v obecném případě záporná.

> Pokud se dva pozorovatelé vzájemně pohybují, pak se nebudou obecně shodovat v tom, které události jsou současné. Když je jeden pozorovatel označí za současné, pro druhého obecně současné nebudou, a opačně.

Nemůžeme říci, že jeden pozorovatel má pravdu a druhý se mýlí. Jejich pozorování mají stejnou platnost a není důvodu dávat některému z nich přednost.

Konstatování, že dva protichůdné výroky o téže věci mohou být správné, se zdá být podivným důsledkem Einsteinovy teorie. Ale již v kap. 18 jsme probírali jiný případ, kdy pohyb může ovlivnit měření, aniž to vede k rozporným výsledkům: u Dopplerova jevu závisí frekvence zvukové vlny na relativním pohybu pozorovatele a zdroje. Dva pozorovatelé, kteří se navzájem pohybují, mohou tedy naměřit rozdílné frekvence pro tutéž vlnu. A obě měření jsou správná.

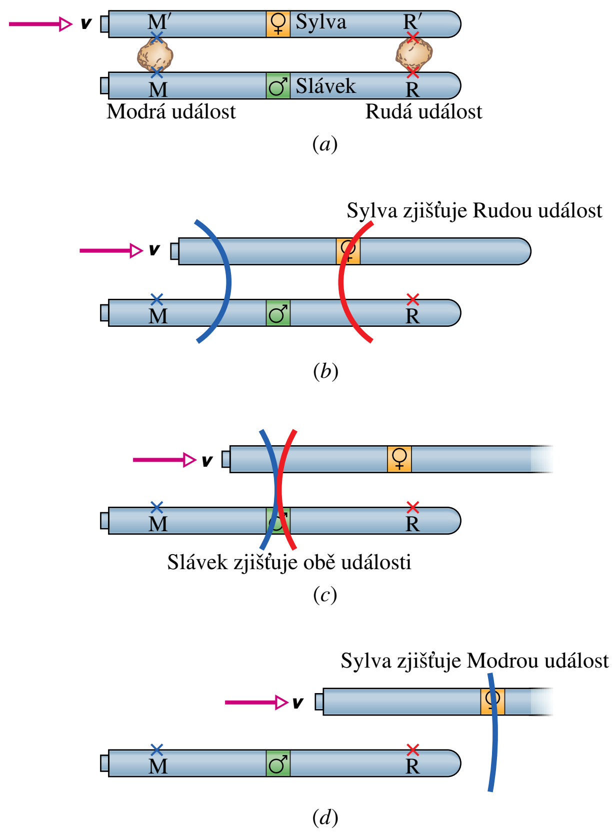
Uzavřeme:

> Současnost není absolutním pojmem, ale pojmem relativním, který závisí na vztažné soustavě, v níž pozorovatel stojí.

Je-li relativní rychlost pozorovatele mnohem menší než rychlost světla, pak měřené rozdíly současnosti pro různé pozorovatele jsou příliš malé, než abychom je zaznamenali. Tak je tomu ve všech zkušenostech z našeho běžného života, a proto působí relativita současnosti tak neobvykle.

Bližší pohled na současnost

Objasněme relativitu současnosti na příkladu, který je založen na postulátu relativity a netýká se přímo hodin či měřicích tyčí. Obr. 38.4 ukazuje dvě dlouhé kosmické lodě (KL Sylva a KL Slávek), které mohou sloužit jako inerciální vztažné soustavy pro pozorovatele Sylvu a Slávka. Oba pozorovatelé stojí uprostřed svých lodí. Lodě jsou situovány podél společné osy x, relativní rychlost Sylvy vůči Slávkovi je $\boldsymbol{v}$. Obr. 38.4a ukazuje lodě se dvěma pozorovateli, kteří se právě míjejí.



Obr. 38.4 Kosmické lodi Sylvy a Slávka a události ze Slávkova pohledu. Sylvina loď letí napravo rychlostí $\boldsymbol{v}$. (a) Rudá událost nastává v místech R, R′ a Modrá v místech M, M′. Každá z nich vysílá svou světelnou vlnu. (b) Sylva zjišťuje vlnu od Rudé události. (c) Slávek zjišťuje vlny od obou událostí současně. (d) Sylva zjišťuje vlnu od Modré události.

Do lodí narazí dva velké meteority, jeden z nich vyvolá červenou záři (událost Rudá) a druhý modrou záři (událost Modrá). Tyto události nebudou nutně současné. Každá událost zanechá trvalou stopu na obou lodích v místech R, R′ a M, M′.

Předpokládejme, že čela světelných vln šířících se z obou událostí dostihnou Slávka ve stejném čase, jak to ukazuje obr. 38.4c. Předpokládejme dále, že Slávek pak zjistí měřením, že se vskutku nacházel přesně uprostřed mezi stopami M a R na své lodi, když k oběma událostem došlo.

SLÁVEK řekne: Světlo z události Rudá a světlo z události Modrá mě dostihlo ve stejném čase. Ze stop na své lodi jsem zjistil, že jsem stál uprostřed mezi oběma místy, z nichž světlo vyšlo. Události Rudá a Modrá jsou tedy současnými událostmi.

Jak ale ukazuje zamyšlení nad obr. 38.4b, rozšiřující se čelo vlny z události Rudá dostihne Sylvu *dříve* než rozšiřující se čelo vlny z události Modrá.

SYLVA řekne: Světlo z události Rudá mě dostihlo dříve než světlo z události Modrá. Ze stop na své lodi jsem zjistila, že i já jsem stála uprostřed mezi oběma zdroji světla. Události tedy *nebyly* současné, událost Rudá předcházela události Modrá.

Tato hlášení spolu nesouhlasí. Přesto *oba* pozorovatelé mluví pravdu.

Dobře si povšimněme, že je pouze jedno čelo vlny, které se šíří z místa každé události, a že *toto čelo vlny se pohybuje stejnou rychlostí c v obou vztažných soustavách*, přesně tak, jak si to žádá postulát rychlosti světla.

Mohlo by se stát, že meteority by narazily do lodí takovým způsobem, že obě vzplanutí by pro Sylvu nastala současně. Kdyby tomu tak bylo, Slávek by je prohlásil za nesoučasná. Zkušenosti obou pozorovatelů jsou naprosto symetrické.

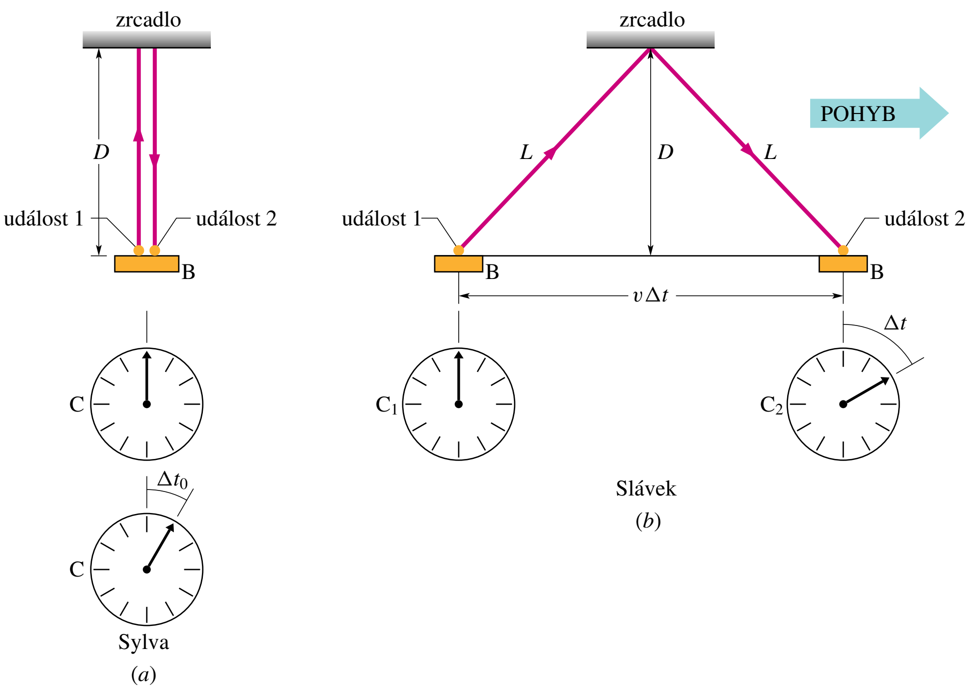
38.5 RELATIVITA ČASU

Jestliže pozorovatelé, kteří se vzájemně pohybují, měří časový interval (čili *časovou odlehlost*) mezi dvěma událostmi, dojdou obecně k rozdílným výsledkům. Proč? Protože prostorová odlehlost událostí může ovlivnit časový interval, který pozorovatelé měří.

Časový interval mezi dvěma událostmi závisí na tom, jak jsou od sebe prostorově vzdáleny, tj. jejich prostorové a časové odlehlosti jsou provázány.

V tomto odstavci diskutujeme uvedenou provázanost na speciálním příkladu, kdy *pro jednoho z obou pozorovatelů jsou obě události soumístné, tj. nastávají ve stejném místě*. Obecnějšími příklady se budeme zabývat až v čl. 38.7.

Obr. 38.5a ukazuje podstatu experimentu, který provádí Sylva, jež se svým vybavením jede vlakem konstantní rychlostí $\boldsymbol{v}$ vzhledem k nádraží. Světelný pulz opouští světelný zdroj B (událost 1), pohybuje se svisle vzhůru, zrcadlo jej odráží svisle dolů a nakonec je pulz opět zachycen



Obr. 38.5 (a) Sylva, sedící ve vlaku, měří dobu Δt_0 mezi událostmi 1 a 2 jedinými hodinami C ve vlaku. Údaj hodin je ukázán dvakrát: nejprve pro událost 1, pak pro 2. (b) Slávek, pozorující děj ze stanice, potřebuje dvoje synchronizované hodiny — C_1 pro událost 1 a C_2 pro událost 2. Naměří jimi dobu Δt.

u zdroje (událost 2). Sylva naměří určitý časový interval Δt_0 mezi dvěma událostmi, který je spojen se vzdáleností D od zdroje k zrcadlu vztahem

$$\Delta t_0 = \frac{2D}{c} \quad \text{(Sylva).} \tag{38.2}$$

V Sylvině vztažné soustavě dochází k těmto událostem v témže místě a ona potřebuje jen jedny hodiny C v tomto místě, aby změřila časový interval. Na obr. 38.5a jsou hodiny C nakresleny dvakrát, na počátku a na konci časového intervalu.

Uvažme nyní, jak tytéž události měří Slávek, který během průjezdu vlaku stojí na nádražním nástupišti. Protože Sylvino vybavení se během světelného pulzu pohybuje spolu s vlakem, Slávek vidí dráhu světla tak, jak je ukázána na obr. 38.5b. Pro něho dochází k oběma událostem v různých místech jeho vztažné soustavy. Chce-li tedy Slávek změřit časový interval mezi událostmi, musí užít *dvojích* synchronizovaných hodin, C_1 a C_2, z nichž každé jsou na místě jedné z událostí. Podle Einsteinova postulátu rychlosti světla se světlo šířilo stejnou rychlostí c pro Slávka i pro Sylvu. Pro Slávka však světlo urazilo vzdálenost $2L$ mezi událostmi 1 a 2. Časový interval, který Slávek mezi oběma událostmi naměřil, je

$$\Delta t = \frac{2L}{c} \quad \text{(Slávek),} \tag{38.3}$$

kde

$$L = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}v\Delta t\right)^2 + D^2}. \tag{38.4}$$

Podle rov. (38.2) můžeme L přepsat jako

$$L = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}v\Delta t\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}c\Delta t_0\right)^2}. \tag{38.5}$$

Vyloučíme-li L z rov. (38.3) a (38.5) a vypočteme-li Δt, dostáváme

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{38.6}$$

Rov. (38.6) nám umožňuje porovnat časové hodnoty Δt a Δt_0, jak je změřili Slávek a Sylva. Protože v musí být menší než c, musí být jmenovatel v rov. (38.6) menší než jedna. Proto Δt musí být větší než Δt_0: Slávek naměří *větší* časový interval mezi dvěma událostmi než Sylva. Slávek a Sylva změřili časový interval mezi *týmiž* dvěma událostmi, ale jejich vzájemný pohyb způsobil, že šlo o různá měření. Uzavíráme, že relativní pohyb může změnit *tempo* průběhu času mezi dvěma událostmi; klíčem k tomuto jevu je fakt, že rychlost světla je pro oba pozorovatele stejná.

Rozdíl mezi Slávkovým a Sylviným měřením vyjádříme užitím následující terminologie:

Nastávají-li dvě události na stejném místě v jisté inerciální vztažné soustavě, pak časový interval mezi nimi měřený v této soustavě se nazývá **vlastním časovým intervalem** nebo **vlastní dobou**. Měření odpovídajícího časového intervalu v jiné inerciální vztažné soustavě dá vždy výsledek, který je větší.

Sylva tedy měří vlastní časový interval a Slávek měří časový interval, který je větší. (Termín *vlastní* nesmíme chápat tak, že jiné měření dává nesprávný či nereálný výsledek.) Zvětšení časového intervalu mezi dvěma událostmi oproti vlastnímu intervalu nazýváme **dilatací času**. (Dilatace znamená prodloužení neboli roztažení; tudíž časový interval se prodlužuje neboli roztahuje.)

Bezrozměrový podíl v/c v rov. (38.6) značíme zpravidla jako β; nazývejme ho **rychlostním parametrem**. Je to tedy rychlost vyjádřená jako zlomek rychlosti světla. Bezrozměrovou převrácenou hodnotu odmocniny v rov. (38.6) značíme často jako γ a nazýváme **Lorentzovým faktorem**

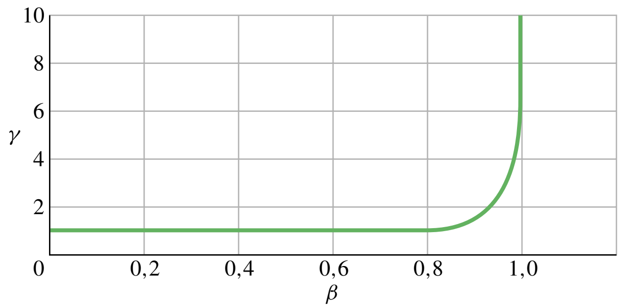
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{38.7}$$

S těmito označeními můžeme přepsat rov. (38.6) jako

$$\Delta t = \gamma\,\Delta t_0 \quad \text{(dilatace času).} \tag{38.8}$$

Rychlostní parametr β je vždy menší než jedna, a pokud v není rovno nule, je γ vždy větší než jedna. Rozdíl mezi γ a 1 však není výrazný, dokud neplatí $v > 0{,}1c$. Takže „stará relativita“ je docela dobře použitelná pro $v < 0{,}1c$, ale pro větší hodnoty v musíme užít speciální relativity. Jak ukazuje obr. 38.6, velikost γ prudce roste, když se β blíží jedné (čili v se blíží k c). Čím je tedy větší relativní rychlost mezi Sylvou a Slávkem, tím větší je časový interval měřený Slávkem, až pro dostatečně velkou rychlost se prodlouží téměř ve věčnost.

Můžete se ptát, co řekne Sylva na to, že Slávek naměřil větší časový interval, než jaký naměřila ona. Nebude to pro ni žádným překvapením, protože podle ní Slávek nesynchronizoval své hodiny C_1 a C_2, ačkoli tvrdí, že to učinil. Připomeňme, že pozorovatelé pohybující se vůči sobě se neshodují v tom, co je současné. Slávek tedy tvrdí, že obojí jeho hodiny ukazovaly současně stejný čas v době, kdy nastala událost 1. Podle Sylvy však byly Slávkovy hodiny C_2 nesprávně nastaveny. Když tedy na nich Slávek odečítal čas události 2, zaznamenal podle Sylvy příliš velký čas, a proto připsal oběma událostem větší časový interval než Sylva.



Obr. 38.6 Lorentzův faktor γ jako funkce rychlostního parametru $\beta = v/c$.

Dva testy dilatace času

1. **Mikroskopické hodiny.** Subatomární částice zvané *miony* jsou nestabilní. To znamená, že mion se v krátké době po svém vzniku *rozpadne* (přemění na částice jiných typů). *Doba života* mionu je časový interval mezi jeho vznikem (událost 1) a jeho rozpadem (událost 2). Jsou-li miony v klidu a jejich doby života jsou měřeny nehybnými hodinami (např. v laboratoři), pak jejich průměrná doba života je 2 200 µs. Je to vlastní časový interval, protože pro každý mion nastávají události 1 a 2 v témže místě ve vztažné soustavě mionu. Tento vlastní časový interval označíme Δt_0 a vztažnou soustavu, v níž bylo provedeno měření, nazveme *klidovou soustavou* mionu.

Pokud se však miony pohybují (např. vůči laboratoři), pak měření jejich dob života provedené laboratorními hodinami povede k větší (dilatované) průměrné době života. Pro potvrzení tohoto závěru byla provedena měření průměrné doby života mionů pohybujících se rychlostí $0{,}999\,4c$ vzhledem k laboratorním hodinám. Z rov. (38.7) s $\beta = 0{,}999\,4$ lze obdržet pro tuto rychlost Lorentzův faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}999\,4)^2}} = 28{,}87,$$

což je podstatně větší než jedna. Rov. (38.8) pak dává pro průměrnou dilatovanou dobu života

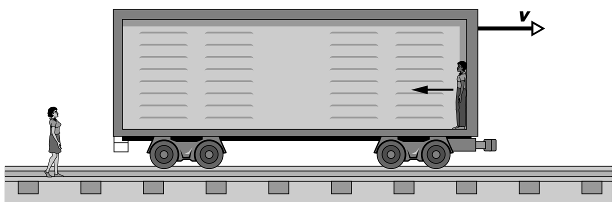
$$\Delta t = \gamma\,\Delta t_0 = (28{,}87)(2{,}200\,\mu\mathrm{s}) = 63{,}5\,\mu\mathrm{s}.$$

Skutečně pozorovaná hodnota potvrdila tento výsledek v mezích pozorovacích chyb.

2. **Makroskopické hodiny.** V říjnu 1977 Joseph Hafele a Richard Keating uskutečnili vskutku ohromující experiment. Nechali čtvery přenosné atomové hodiny dvakrát obletět kolem světa na komerčních leteckých linkách; každé z nich v jiném směru. Cílem bylo „testovat Einsteinovu teorii relativity pomocí makroskopických hodin“. Jak jsme právě viděli, předpověď časové dilatace podle Einsteinovy teorie byla potvrzena v mikroskopickém měřítku, ale něco docela jiného je vidět potvrzení na skutečných hodinách. Taková makroskopická měření byla umožněna pouze velmi vysokou přesností moderních atomových hodin. Hafele a Keating ověřili předpovědi teorie s přesností 10 %. (Einsteinova *obecná* teorie relativity, která předpovídá, že tempo chodu hodin je ovlivněno gravitací, hraje v daném experimentu rovněž roli.)

O několik let později fyzikové z univerzity v Marylandu provedli podobný experiment se zvýšenou přesností. Oblétali s atomovými hodinami Chesapeakskou zátoku stále dokola po dobu 15 h a podařilo se jim potvrdit předpověď časové dilatace s přesností lepší než 1 %. Když se dnes atomové hodiny přenášejí z jednoho místa na druhé kvůli kalibraci či z jiných důvodů, bere se vždy ohled na časovou dilataci způsobenou jejich pohybem.

KONTROLA 1: Stojíme u železničních kolejí, když nás náhle vyděsí relativistický nákladní vagon řítící se kolem nás, jak je ukázáno na obrázku. Ve vagonu je dobře vybavený hobo (americký železniční tulák) Jack, který posílá laserový pulz od přední k zadní stěně vagonu. (a) Dá naše měření rychlosti pulzu větší, menší, nebo stejný výsledek jako měření Jackovo? (b) Je Jackovo měření doby letu pulzu měřením vlastního času? (c) Jsou Jackova a naše měření doby letu pulzu spojena rov. (38.8)?



PŘÍKLAD 38.2

Váš hvězdolet míjí Zemi relativní rychlostí $0{,}999\,0c$. Po uplynutí 10,0 roků se zastavíte na pozorovatelně LP13 a pak cestujete zpět k Zemi stejnou relativní rychlostí. Cesta zabere dalších 10,0 roků (vašeho času). Jak dlouho trvá cesta podle měření vykonaných na Zemi? (Zanedbejte jakýkoli vliv způsobený zrychlením během zastavování a rozletu.)

ŘEŠENÍ: Začátek i konec cesty tam (Země – LP13) nastávají ve vaší vztažné soustavě, tj. ve vašem hvězdoletu, na stejném místě. Měříte tedy vlastní čas Δt_0 cesty, který je určen jako 10,0 y. Rov. (38.6) dává odpovídající čas Δt, jak je naměřen v pozemské vztažné soustavě

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{(10{,}0\,\mathrm{y})}{\sqrt{1-(0{,}999\,0c/c)^2}} = \\ = (22{,}37)(10{,}0\,\mathrm{y}) = 224\,\mathrm{y}.$$

Při cestě zpět (LP13 – Země) máme stejnou situaci a stejné údaje. Celková cesta tedy zabere 20 roků vašeho času, ale

$$\Delta t_{\mathrm{celk}} = 2(224\,\mathrm{y}) = 448\,\mathrm{y} \qquad \text{(Odpověď)}$$

pozemského času. Jinými slovy, zestárl jste o 20 let, zatímco Země zestárla o 448 let. Ačkoli nelze (pokud dnes víme) cestovat do minulosti, není vyloučeno cestování např. do budoucnosti Země pomocí velmi rychlého relativního pohybu, který změní tempo plynutí času.

PŘÍKLAD 38.3

Elementární částice nazvaná *kladný kaon* (K^+) má v klidu průměrnou dobu života 0,123 7 μs, tj. jedná se o dobu života měřenou v klidové soustavě kaonu. Vytvářejí-li se kladné kaony s rychlostí $0{,}990c$ vzhledem k laboratorní vztažné soustavě, jak daleko se v této soustavě během své doby života dostanou?

ŘEŠENÍ: V laboratorní soustavě je vzdálenost d uražená kaonem spojena s jeho rychlostí $v = 0{,}990c$ a dobou jeho letu Δt_{k} vztahem $d = v\Delta t_{\mathrm{k}}$. (Toto tvrzení není ovlivněno relativitou, protože všechny veličiny se měří v téže vztažné soustavě.) Kdybychom neužívali speciální relativity, doba letu by činila 0,123 7 μs, což je doba života částice, a tudíž jeho délka by byla

$$d = v\Delta t_{\mathrm{k}} = (0{,}990)(3{,}00\cdot 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})(1{,}237\cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}) = \\ = 36{,}7\,\mathrm{m} \quad \text{(chybná odpověď).}$$

Je však třeba užít speciální relativity a doba letu kaonu v laboratorní soustavě je jeho dilatovaná doba života Δt. Podle rov. (38.6) můžeme najít Δt ze znalosti vlastní doby života kaonu $\Delta t_0 = 0{,}123\,7\,\mu\mathrm{s}$ měřené v jeho klidové soustavě

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \\ = \frac{(0{,}123\,7\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s})}{\sqrt{1-(0{,}990c/c)^2}} = 8{,}769\cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}.$$

To je sedmkrát větší než vlastní doba života kaonu. (Tento výpočet přihlížel k relativitě, protože jsme museli přepočítat data z klidové soustavy částice do soustavy laboratorní.) Nyní najdeme délku cesty kaonu v laboratorní soustavě jako

$$d = v\Delta t = \\ = (0{,}990)(3{,}00\cdot 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})(8{,}769\cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}) = \\ = 260\,\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato vzdálenost je sedmkrát větší než podle naší první (nesprávné) odpovědi. Experimenty tohoto druhu, které ověřují speciální relativitu, jsou už po desetiletí pro fyzikální laboratoře rutinní záležitostí.

38.6 RELATIVITA DÉLKY

Chcete-li měřit délku tyče, která je vůči vám v klidu, můžete — až vám zbude čas — zaznamenat polohy jejich konců na dlouhém nehybném měřítku a oba údaje odečíst. Pokud se ale tyč pohybuje, musíte zaznamenat polohy koncových bodů *současně* (ve vaší vztažné soustavě). Jinak by se vaše měření nemohlo nazývat měřením délky. Obr. 38.7 naznačuje potíže, na něž narážíme, když chceme změřit délku pohybujícího se tučňáka zaznamenáním polohy jeho hrudi a zad v rozdílných časech. Protože současnost je relativní a ovlivňuje měření délky, je i délka relativní veličinou.

Nechť L_0 je délka tyče, kterou měříte, když je tyč v klidu (za předpokladu, že vy i tyč jste v téže vztažné soustavě, klidové soustavě tyče). Jestliže se naopak tyč vzhledem k vám pohybuje rychlostí v *ve směru délky tyče*, naměříte délku L danou vztahem

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2} = \frac{L_0}{\gamma} \quad \text{(kontrakce délky).} \quad (38.9)$$

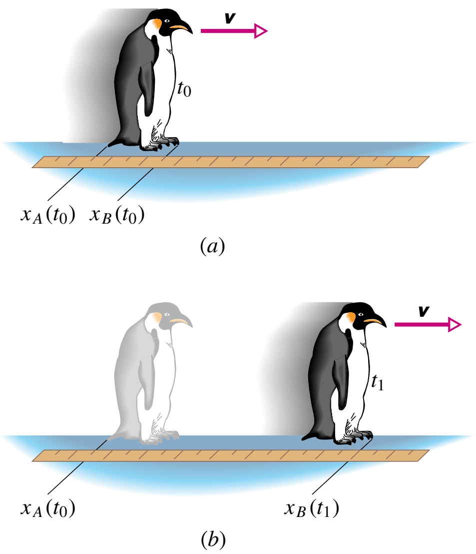
Protože Lorentzův faktor γ je při relativním pohybu vždy větší než jedna, je L vždy menší než L_0. Relativní pohyb způsobuje **kontrakci délky** a L se nazývá **kontrahovaná délka**. Protože γ s rychlostí v roste, roste s relativní rychlostí i kontrakce délky.

Délka objektu L_0 měřená v jeho klidové soustavě je **vlastní délka** čili **klidová délka**. Měření délky v každé vztažné soustavě, která koná relativní pohyb rovnoběžný s touto délkou, dává výsledek, který je vždy menší než vlastní délka.

Pozor: kontrakce délky nastává pouze ve směru relativního pohybu. Dodejme, že měřená délka nemusí být délkou objektu, jako je tyč či obruč. Může to být i délka (či vzdálenost) mezi dvěma objekty v téže klidové soustavě — například vzdálenost Slunce a blízké hvězdy (které jsou alespoň přibližně vůči sobě v klidu).

Zkracuje se objekt *opravdu*? Realita je založena na pozorováních a měřeních; jestliže výsledky vždy vzájemně souhlasí a nelze najít žádnou chybu, pak to, co bylo pozorováno a měřeno, je reálné. V tomto smyslu se objekt opravdu zkracuje. Přesněji bychom však mohli říci, že zkrácení objektu je *opravdu změřeno* — pohyb ovlivňuje měření a tím i realitu.

Musí blesková fotografie ukázat zkrácení objektu? Nikoli, protože není pořízena zachycením světla, které objekt emitoval v určitém okamžiku (současně). Zaznamenává světlo z objektu, které dospělo do kamery v okamžiku expozice filmu, bez ohledu na to, kdy bylo emitováno.



Obr. 38.7 Chceme-li měřit délku pohybujícího se tučňáka měřením polohy jeho hrudi a zad, musíme je měřit současně (v naší vztažné soustavě). Tak je tomu v (a), ale nikoli v (b).

Měříte-li zkrácenou délku, například délku tyče, co řekne o vašem měření pozorovatel pohybující se spolu s tyčí? Podle něho jste nezaznamenali polohu obou konců tyče současně. (Připomeňme, že pozorovatelé ve vzájemném pohybu se neshodují v tom, co je současné.) Z hlediska zmíněného pozorovatele jste nejprve zaznamenali polohu předního konce tyče a teprve o něco později polohu zadního konce. Proto jste změřili délku, která je menší než vlastní délka.

Odvození rov. (38.9)

Kontrakce délky přímo souvisí s dilatací času. Uvažujme ještě jednou naše dva pozorovatele. Sylva, která sedí ve vlaku projíždějícím nádražím, stejně jako Slávek, který stojí na nástupišti, chtějí změřit délku nástupiště. Slávek užije plátěného metru a zjistí délku L_0. Je to vlastní délka, protože nástupiště je vzhledem k němu v klidu. Slávek také zjišťuje, že Sylva ve vlaku projede kolem této délky za čas $\Delta t = L_0/v$, kde v je rychlost vlaku. Je tedy

$$L_0 = v\Delta t \qquad \text{(Slávek).} \tag{38.10}$$

Časový interval Δt není vlastním časovým intervalem, protože dvě události, které jej ohraničují (Sylvino míjení začátku a konce nástupiště), nastávají ve dvou různých místech a Slávek musí užít dvojích synchronizovaných hodin, aby interval Δt změřil.

Pro Sylvu se však nástupiště pohybuje. Zjišťuje, že obě události, které měřil Slávek, nastávají *v témže místě* v její vztažné soustavě. Může jim přiřadit čas pomocí jediných nehybných hodin, takže interval Δt_0, který měří, je vlastní časový interval. Pro ni je délka nástupiště L dána vztahem

$$L = v\Delta t_0 \qquad \text{(Sylva).} \tag{38.11}$$

Vydělíme-li rov. (38.11) rovnicí (38.10) a užijeme pro dilataci času rov. (38.8), dostaneme

$$\frac{L}{L_0} = \frac{v\Delta t_0}{v\Delta t} = \frac{1}{\gamma}$$

neboli

$$L = \frac{L_0}{\gamma}, \tag{38.12}$$

což je rov. (38.9) pro kontrakci délky.

PŘÍKLAD 38.4

Na obr. 38.8 se Sylva (v bodě A) a Slávkova kosmická loď (o vlastní délce $L_0 = 230\,\mathrm{m}$) míjejí konstantní relativní rychlostí v. Sylva měří časový interval 3,57 µs, po který ji loď míjí (od průchodu bodu B do průchodu bodu C). Jaký je rychlostní parametr β mezi Sylvou a lodí?

ŘEŠENÍ: Kdyby relativní rychlost v Slávka vzhledem k Sylvě byla menší než 0,1 c, mohli bychom na danou situaci pohlížet jako v kap. 2, kde jsme mluvili o kosmické lodi délky L a rychlosti v, jež míjí Sylvu za časový interval

$$\Delta t = \frac{L}{v}.$$

(Tento závěr nebere ohled na relativitu.)

Nyní však pravděpodobně jde o relativistický problém, kde $v > 0{,}1c$. V tomto případě víme, že délka L, kterou Sylva měří, není vlastní délka L_0 lodi, ale kontrahovaná délka, daná rov. (38.9)

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2}.$$

(Tento závěr zahrnuje relativitu, protože transformujeme data mezi Slávkovou a Sylvinou soustavou.) Podle Sylvy je nyní čas potřebný pro průlet dán vztahem

$$\Delta t = \frac{\text{zkrácená délka } L}{v} = \frac{L_0\sqrt{1-\beta^2}}{\beta c}.$$

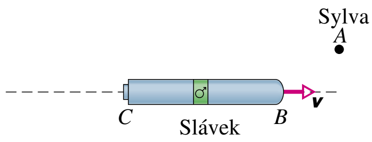
Vyjádříme-li odtud β a dosadíme dané údaje, nalézáme po jednoduchém výpočtu

$$\beta = \frac{L_0}{\sqrt{(c\Delta t)^2 + L_0^2}} =$$

$$= \frac{(230\,\mathrm{m})}{\sqrt{(3{,}00\cdot 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})^2(3{,}57\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s})^2 + (230\,\mathrm{m})^2}} =$$

$$= 0{,}210, \qquad \text{(Odpověď)}$$

takže relativní rychlost Sylvy vzhledem k lodi je 21 % rychlosti světla. Poznamenejme, že zde je důležitý pouze relativní pohyb Slávka a Sylvy; zda je někdo z nich v klidu např. vůči kosmodromu, není podstatné. Na obr. 38.8 bereme Sylvu jako nehybnou, ale mohli bychom považovat za nehybnou i loď, kdežto Sylva by kolem ní letěla. Na našich výsledcích by se nic nezměnilo.



Obr. 38.8 Příklad 38.4. Sylva měří, jak dlouho trvá lodi, když ji v bodě A míjí.

KONTROLA 2: V př. 38.4 měří Sylva dobu průletu kosmické lodě. Dělá-li to i Slávek, (a) je některé z měření měřením vlastního času? (b) Které měření dá menší výsledek?

PŘÍKLAD 38.5

Překvapila vás supernova a chcete uniknout explozi kosmickou lodí v naději, že prudce vyvržená hmota vás nedostihne. Váš Lorentzův faktor vzhledem k inerciální vztažné soustavě okolních hvězd je 22,4.

(a) Víte, že budete v bezpečí, až urazíte alespoň $9{,}00\cdot10^{16}$ m ve vztažné soustavě okolních hvězd. Jak dlouho poletíte vzhledem k této soustavě?

ŘEŠENÍ: Délka $L_0 = 9{,}00\cdot10^{16}$ m je vlastní délkou ve vztažné soustavě okolních hvězd, protože oba její konce jsou v této soustavě v klidu. Obr. 38.6 nám říká, že při tak velkém Lorentzově faktoru je vaše relativní rychlost vzhledem k hvězdám $v \doteq c$. V této aproximaci si proběhnutí délky L_0 žádá čas

$$\Delta t = \frac{L_0}{v} = \frac{L_0}{c} = \frac{(9{,}00\cdot10^{16}\ \mathrm{m})}{(3{,}00\cdot10^{8}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})} = $$
$$= 3{,}00\cdot10^{8}\ \mathrm{s} = 9{,}49\ \mathrm{y}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jak dlouho trvá tento únik pro vás (ve vaší vztažné soustavě)?

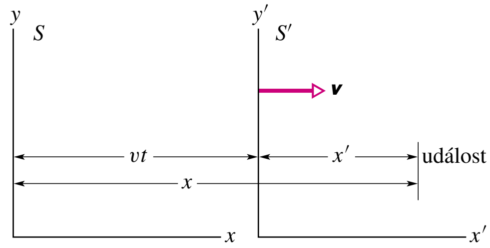
ŘEŠENÍ: Ve vaší vztažné soustavě je vzdálenost, kterou urazíte, kontrahovaná délka L. Ta vám uplývá relativní rychlostí $v \doteq c$. Rov. (38.9) nám říká, že $L = L_0/\gamma$. Takže čas, který změříte po průletu kontrahované délky, je

$$\Delta t_0 = \frac{L}{v} = \frac{L_0/\gamma}{v} = \frac{L_0}{c\gamma} = $$
$$= \frac{(9\cdot10^{16}\ \mathrm{m})}{(3{,}00\cdot10^{8}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})(22{,}4)} = $$
$$= 1{,}339\cdot10^{7}\ \mathrm{s} = 0{,}424\ \mathrm{y}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

To je vlastní čas, protože začátek a konec průletu nastává ve vaší vztažné soustavě (ve vaší kosmické lodi) ve stejném bodě. Můžete prověřit oprávněnost obou odpovědí, když je dosadíte do rov. (38.8) (pro časovou dilataci) a vypočtete γ.

38.7 LORENTZOVA TRANSFORMACE

Jak ukazuje obr. 38.9, inerciální vztažná soustava S' se pohybuje rychlostí v vzhledem k soustavě S ve společném kladném směru jejich vodorovných os, označených jako x a x'. Pozorovatel v S přiřazuje události prostoročasové souřadnice x, y, z, t a pozorovatel v S' jí přiřazuje souřadnice x', y', z', t'. Jak spolu oba soubory čísel souvisejí?



Obr. 38.9 Dvě inerciální vztažné soustavy: soustava S' má rychlost $\boldsymbol{v}$ vůči S.

Řekněme ihned (i když by si to žádalo důkaz), že souřadnice y a z ve směru kolmém k pohybu nejsou pohybem ovlivněny. Platí tedy $y = y'$ a $z = z'$. Dále se budeme zabývat jen vztahy mezi x a x' a mezi t a t'.

Galileovy transformační rovnice

Dokud Einstein nepublikoval speciální teorii relativity, předpokládalo se, že uvedené čtyři souřadnice spolu souvisejí *Galileovými transformačními rovnicemi*

$$x' = x - vt,$$
$$t' = t \qquad (38.13)$$

(Galileovy transformační rovnice; platné přibližně pro malé rychlosti).

Tyto rovnice jsou zapsány za předpokladu, že $t = t' = 0$ ve chvíli, kdy počátky S a S' splývají. Můžete ověřit první rovnici pomocí obr. 38.9. Druhá rovnice znamená, že čas běží pro pozorovatele v obou vztažných soustavách stejně. Před Einsteinem se to zdálo každému vědci tak zřejmě pravdivé, že se o tom ani nezmiňovali. Je-li rychlost v malá ve srovnání s c, slouží rov. (38.13) docela dobře.

Lorentzovy transformační rovnice

Uvedeme bez důkazu, že správné transformační rovnice, které zůstávají platné pro všechny rychlosti až po rychlost světla, mohou být odvozeny z relativistických postulátů. Výsledkem jsou **Lorentzovy transformační rovnice***:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt),\\ y' &= y,\\ z' &= z,\\ t' &= \gamma(t - vx/c^2) \end{aligned} \tag{38.14}$$

(Lorentzovy transformační rovnice; platí při všech rychlostech).

Povšimněme si, že prostorové hodnoty x a časové hodnoty t jsou vázány první a poslední rovnicí. Toto provázání prostoru a času je hlavním zvěstováním Einsteinovy teorie, jež mnozí z jeho současníků dlouho nechtěli uznat.

Na relativistické rovnice se klade formální požadavek, aby se redukovaly na obvyklé klasické rovnice, když c jde do nekonečna. Kdyby tedy byla rychlost světla nekonečně velká, byly by *všechny* konečné rychlosti „malé“ a klasické rovnice by nikdy nepřestaly platit. Položíme-li $c \to \infty$ v rov. (38.14), pak $\gamma \to 1$ a tyto rovnice se redukují — jak jsme očekávali — na Galileovy rovnice (38.13). Ověřte si to.

Rov. (38.14) jsou zapsány ve tvaru, který je užitečný, pokud známe x a t a chceme najít x' a t'. Můžeme však chtít i opak. Pak prostě rozřešíme rov. (38.14) pro x a t a obdržíme

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt'),\\ t &= \gamma(t' + vx'/c^2). \end{aligned} \tag{38.15}$$

Srovnání ukazuje, že ať už vyjdeme z rov. (38.14) nebo (38.15), dostaneme druhou soustavu záměnou čárkovaných a nečárkovaných souřadnic a obrácením znaménka relativní rychlosti v.

Rov. (38.14) a (38.15) spojují souřadnice jediné události, jak ji vidí oba pozorovatelé. Někdy se nezajímáme o souřadnice jediné události, ale o rozdíly souřadnic páru událostí. Označíme-li tedy naše události 1 a 2, chceme spojit

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{a} \quad \Delta t = t_2 - t_1,$$

jak je měří pozorovatel v S, a

$$\Delta x' = x_2' - x_1' \quad \text{a} \quad \Delta t' = t_2' - t_1',$$

jak je měří pozorovatel v S'.

* Můžete se divit, proč nemluvíme o *Einsteinových transformačních rovnicích* (a o *Einsteinově faktoru* γ). H. A. Lorentz fakticky odvodil tyto rovnice před Einsteinem, ale jak velký holandský fyzik sám velkoryse uznal, neprovedl zbývající smělý krok k uznání těchto rovnic za vyjádření skutečné povahy prostoru a času. Teprve taková interpretace, již poprvé provedl Einstein, je jádrem relativity.

Tab. 38.2 uvádí Lorentzovy rovnice v různých tvarech vhodných pro zkoumání páru událostí. Tyto rovnice byly odvozeny prostým dosazením rozdílů (jako Δx a $\Delta x'$) za čtyři proměnné v rov. (38.14) a (38.15).

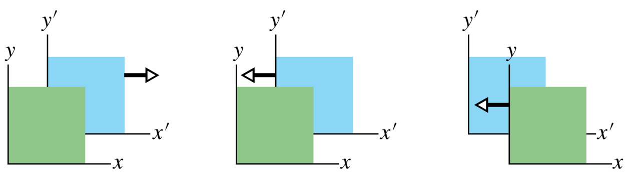
Tabulka 38.2 **Lorentzova transformace pro dvojici událostí**

(1) $\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$	(1′) $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$
(2) $\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)$	(2′) $\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2)$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Pozor: při dosazování hodnot rozdílů nesmíme poplést pořadí událostí, a pokud je některý z rozdílů záporný, nesmíme zapomenout na znaménko.

KONTROLA 3: Následující obrázek ukazuje tři situace, v nichž modrá vztažná soustava a zelená vztažná soustava se vzájemně pohybují podél společného směru svých os x a x', jak to vyjadřuje vektor rychlosti spojený s jednou ze soustav. Volme modrou soustavu jako nehybnou. Rozhodněte pak pro každou situaci, zda veličina v v rovnicích tab. 38.2 je kladná, nebo záporná.



(a) (b) (c)

38.8 NĚKTERÉ DŮSLEDKY LORENTZOVÝCH ROVNIC

Nyní užijeme transformačních rovnic tab. 38.2, abychom se ujistili o některých závěrech, ke kterým jsme dříve došli na základě argumentů přímo založených na postulátech.

Současnost

Vezměme rov. (2) z tab. 38.2

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right). \tag{38.16}$$

Nastanou-li dvě události v různých místech ve vztažné soustavě S' z obr. 38.9, pak $\Delta x'$ v této rovnici není nulové. Z toho plyne, že i když jsou události současné v S' (takže

$\Delta t' = 0$), nebudou současné v soustavě S. Časový interval mezi nimi v S bude

$$\Delta t = \gamma \frac{v \Delta x'}{c^2} \qquad \text{(současné události v } S'\text{)}.$$

To souhlasí s naším závěrem v čl. 38.4.

Dilatace času

Nyní předpokládejme, že obě události jsou soumístné, tj. nastávají v témže místě v S' (takže $\Delta x' = 0$), ale v různých časech (takže $\Delta t' \neq 0$). Rov. (38.16) se tedy redukuje na

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \qquad \text{(soumístné události v } S'\text{)}. \qquad (38.17)$$

Tím je potvrzena dilatace času. Protože obě události nastávají v témže místě v S', může být časový interval $\Delta t'$ mezi nimi měřen jedinými hodinami umístěnými v tomto místě. Za těchto podmínek je měřený interval vlastním časovým intervalem a můžeme jej označit jako Δt_0. Pak rov. (38.17) dává

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \qquad \text{(dilatace času)},$$

což je přesně rov. (38.8) pro dilataci času.

Kontrakce délky

Vezměme rov. (1′) z tab. 38.2:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v \Delta t). \qquad (38.18)$$

Leží-li tyč rovnoběžně s osami x, x' z obr. 38.9 a je-li v klidu ve vztažné soustavě S', může pozorovatel v S' měřit délku beze spěchu. Hodnota $\Delta x'$, kterou obdrží odečtením souřadnic koncových bodů tyče, bude vlastní délka L_0.

V soustavě S se tyč pohybuje. To znamená, že Δx můžeme považovat za délku tyče, pouze když jsou souřadnice koncových bodů změřeny *současně*, to jest je-li $\Delta t = 0$. Klademe-li $\Delta x' = L_0$, $\Delta x = L$ a $\Delta t = 0$ v rov. (38.18), dostáváme

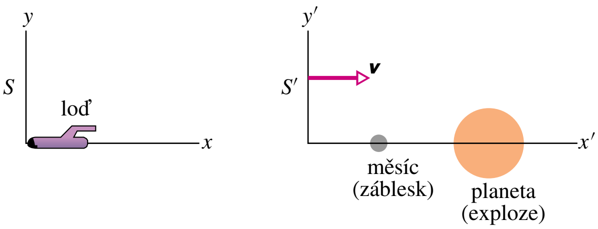
$$L = \frac{L_0}{\gamma} \qquad \text{(kontrakce délky)}, \qquad (38.19)$$

což je přesně rov. (38.9) pro kontrakci délky.

PŘÍKLAD 38.6

Ze Země byl vyslán hvězdolet, aby zkontroloval naši stanici na planetě P1407, jejíž měsíc obývá bojovná skupina Reptalů, kteří se k lidem často chovají nepřátelsky. Hvězdolet se pohybuje po přímce, a když mine planetu a měsíc, je z něho pozorován vysokoenergetický mikrovlnný záblesk na měsíční základně Reptalů a o 2,43 s později exploze na naší stanici, která je vzhledem ke vztažné soustavě hvězdoletu vzdálena $0{,}77 \cdot 10^8$ m od základny Reptalů. Snad Reptalové napadli naši stanici a posádka hvězdoletu by se měla připravit na boj s nimi.

(a) Rychlost hvězdoletu vzhledem k planetě a měsíci je $0{,}980c$. Jaká je vzdálenost mezi zábleskem a explozí a časový interval mezi nimi změřený v inerciální soustavě planeta + měsíc (a tudíž odpovídající posádce stanice a základny)?



Obr. 38.10 Příklad 38.6. Planeta a její měsíc stojící vůči vztažné soustavě S' se pohybují rychlostí v vzhledem ke kosmické lodi, která stojí vůči systému S.

ŘEŠENÍ: Situace je znázorněna na obr. 38.10, kde soustava hvězdoletu S je považována za nehybnou a soustava planeta+ + měsíc S' se vůči ní pohybuje kladnou rychlostí (doprava). (Tato volba není nutná — mohli bychom volit za nehybnou i soustavu planeta + měsíc. Pak bychom $\boldsymbol{v}$ v obr. 38.10 spojili se soustavou S a orientovali doleva; v by pak bylo zápornou veličinou. Výsledek by zůstal stejný.) Označme indexy (e) a (z) explozi a záblesk.

Je třeba si uvědomit, že údaje v zadání $\Delta T = 2{,}43$ s, $\Delta X = 0{,}77 \cdot 10^8$ m nejsou časovým ani prostorovým intervalem mezi událostmi (z) a (e). ΔT představuje dobu, která uplynula na kosmické lodi od přijetí informace o záblesku na měsíci do přijetí informace o explozi na planetě, přičemž tyto informace se od svých zdrojů šířily rychlostí světla. ΔX je vzdálenost od měsíce k planetě ve vztažné soustavě spojené s lodí. Události (z) a (e) však nemusely nastat současně, a proto vzdálenost mezi nimi může být jiná.

Musíme tedy nejprve najít časový interval Δt a vzdálenost Δx mezi událostmi (z) a (e). Tyto veličiny souvisejí s veličinami ΔX a ΔT vztahy

$$\Delta X = \Delta x - v \Delta t, \qquad \Delta T = \Delta t + \frac{\Delta x}{c},$$

které v podstatě vyjadřují, že dráha = rychlost · čas pro rovnoměrný a přímočarý pohyb planety a světelného signálu vyslaného z ní v době exploze. Dosazením do těchto vztahů a vyřešením rovnic dostáváme

$$\Delta x = x_e - x_z = +4{,}00 \cdot 10^8 \text{ m}$$

a

$$\Delta t = t_e - t_z = +1{,}10 \text{ s}.$$

Zde Δx je kladná veličina, protože v obr. 38.10 je souřadnice exploze x_e větší než souřadnice x_z pro blýsknutí; Δt je rovněž kladná veličina, protože čas exploze t_e je větší (pozdější) než čas t_z záblesku.

Hodnoty $\Delta x'$ a $\Delta t'$ obdržíme transformováním dat soustavy S do soustavy S' planeta — měsíc. Protože uvažujeme pár událostí, bereme transformační rovnice z tab. 38.2, a to (1′) a (2′):

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \tag{38.20}$$

a

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right). \tag{38.21}$$

Zde $v = +0{,}980c$ a Lorentzův faktor je

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(+0{,}980c/c)^2}} = 5{,}025\,2.$$

Rov. (38.20) tedy dává

$$\begin{aligned}\Delta x' &= (5{,}025\,2)[(4{,}00\cdot10^8\ \mathrm{m} - \\ &\quad - (+0{,}980)(3{,}00\cdot10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})(1{,}10\ \mathrm{s}))] = \\ &= 3{,}85\cdot10^8\ \mathrm{m} \qquad \text{(Odpověď)}\end{aligned}$$

a rov. (38.21) dává

$$\begin{aligned}\Delta t' &= (5{,}025\,2)\bigg((1{,}10\ \mathrm{s}) - \\ &\quad - \frac{(+0{,}980)(3{,}00\cdot10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})(4{,}00\cdot10^8\ \mathrm{m})}{(3{,}00\cdot10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^2}\bigg) = \\ &= -1{,}04\ \mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}\end{aligned}$$

(b) Jaký je význam znaménka minus ve vypočtené hodnotě $\Delta t'$?

ŘEŠENÍ: Zopakujme, jak jsme původně definovali časový interval mezi zábleskem a explozí: $\Delta t = t_e - t_z = +1{,}10$ s. Abychom byli v souladu s volbou označení, naše definice $\Delta t'$ musí být $t'_e - t'_z$; zjistili jsme tedy, že

$$\Delta t' = t'_e - t'_z = -1{,}04\ \mathrm{s}.$$

To znamená, že $t'_z > t'_e$; tedy ve vztažné soustavě planeta — měsíc nastal záblesk 1,04 s *po* explozi, nikoli 1,10 s *před* explozí, jak bylo pozorováno v soustavě hvězdoletu.

(c) Mohl záblesk způsobit explozi, nebo mohla exploze způsobit záblesk?

ŘEŠENÍ: Pořadí událostí měřených ve vztažné soustavě planeta — měsíc je opačné, než jak bylo změřeno v soustavě hvězdoletu. Tak či onak, kdyby mezi oběma událostmi byla příčinná souvislost, musela by se od jedné události přenést informace, aby způsobila druhou. Najděme předpokládanou rychlost informace. V soustavě hvězdoletu je tato rychlost

$$v_{\text{info}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(4{,}00\cdot10^8\ \mathrm{m})}{(1{,}10\ \mathrm{s})} = 3{,}64\cdot10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

avšak tato rychlost je nemožná, protože převyšuje c. V soustavě planeta — měsíc je tato rychlost $3{,}70\cdot10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, což je rovněž nemožné. Žádná z událostí nemohla tedy způsobit druhou; jsou to tedy příčinně *nespojené* události. Posádka hvězdoletu proto nemusí proti Reptalům zakročit.

PŘÍKLAD 38.7

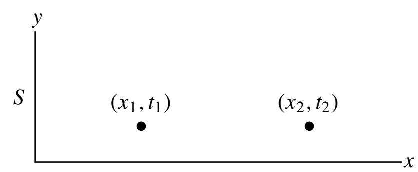
Obr. 38.11 ukazuje inerciální vztažnou soustavu S, v níž událost 1 (auto odmrští kámen, souřadnice x_1 a t_1) způsobuje událost 2 (kámen vás zasáhne, souřadnice x_2 a t_2). Existuje jiná inerciální soustava, v níž měření těchto událostí jim dá opačné pořadí v čase, takže následek bude předcházet příčině? Můžete pak být obviněn, že jste pozdější událost způsobil?

ŘEŠENÍ: Abychom našli časový rozdíl $\Delta t'$ páru událostí v soustavě S', známe-li data soustavy S, užijeme rov. (2′) tab. 38.2

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right). \tag{38.22}$$

Zopakujme, že v je relativní rychlost S vůči S'. Pokládáme soustavu S za nehybnou; S' má pak rychlost v.

Nechť $\Delta t = t_2 - t_1$. Pak Δt je kladná veličina, a máme-li se držet zvoleného označení, musíme klást $\Delta x = x_2 - x_1$ a $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Jak předpokládá obr. 38.11, Δx je kladná veličina, protože $x_2 > x_1$.



Obr. 38.11 Příklad 38.7. Událost 1 (příčina) s prostoročasovými souřadnicemi (x_1, t_1) vyvolá událost 2 (důsledek) o prostoročasových souřadnicích (x_2, t_2). Může být v nějaké jiné vztažné soustavě časové pořadí příčina–důsledek obrácené?

Zajímá nás, zda $\Delta t'$ může být záporná veličina, což by znamenalo, že čas t'_1 události 1 je pozdější (a tedy větší) než čas t'_2 události 2. Z rov. (38.22) vidíme, že $\Delta t'$ může být záporné, pouze když

$$\frac{v\Delta x}{c^2} > \Delta t.$$

Tato podmínka může být nahrazena ekvivalentním vyjádřením

$$\frac{\Delta x/\Delta t}{c}\,\frac{v}{c} > 1.$$

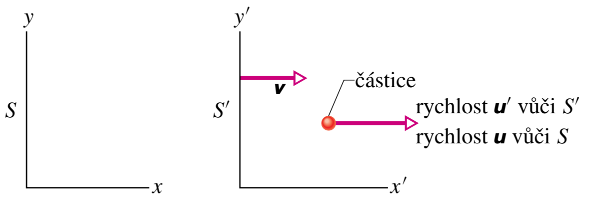
Poměr $\Delta x/\Delta t$ je rychlost, s níž se informace (zde přenášená kamenem) pohybuje od události 1, aby způsobila událost 2. Tato rychlost nemůže přesáhnout c. (Informace se může šířit rychlostí c, je-li přenášena světlem, kámen se ovšem pohybuje pomaleji.) Takže $(\Delta x/\Delta t)/c$ může být nanejvýš 1 a v/c

nemůže být rovno ani větší než 1. Levá strana dané nerovnosti musí být tedy menší než 1 a nerovnost tedy nemůže být splněna.

Takže neexistuje žádná soustava S', v níž by událost 2 předcházela svou příčinu, událost 1. Obecněji, ačkoli pořadí příčinně nespojených událostí může být v relativitě někdy obráceno (jako je tomu v př. 38.6), události představující příčinu a následek nemohou být nikdy takto přehozeny.

38.9 RELATIVISTICKÉ SKLÁDÁNÍ RYCHLOSTÍ

Chceme nyní užít Lorentzových transformačních rovnic ke srovnání rychlostí jedné a téže pohybující se částice, jak je změří dva pozorovatelé v různých inerciálních vztažných soustavách S a S'. Předpokládáme stále, že S' se pohybuje vzhledem k S rychlostí v.



Obr. 38.12 Vztažná soustava S' se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$ vůči soustavě S. Částice má rychlost $\boldsymbol{u}'$ vůči soustavě S' a rychlost $\boldsymbol{u}$ vůči soustavě S.

Omezme se na případ, kdy se částice pohybuje stálou rychlostí rovnoběžně s osami x a x', jako je tomu na obr. 38.12. Nechť částice během svého pohybu vyšle dva signály. Každý pozorovatel změří prostorový a časový interval mezi těmito dvěma událostmi. Provedená čtyři měření jsou spojena rovnicemi 1 a 2 z tab. 38.2.

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t'),$$
$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right).$$

Dělíme-li první z těchto rovnic druhou, dostáváme

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\Delta t' + v\Delta x'/c^2}.$$

Dělíme-li čitatele i jmenovatele pravé strany $\Delta t'$, obdržíme

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x'/\Delta t' + v}{1 + v(\Delta x'/\Delta t')/c^2}.$$

V limitě je však $\Delta x/\Delta t$ právě rychlost u částice měřená v S a $\Delta x'/\Delta t'$ rychlost u' částice měřená v S'. Tak konečně dostaneme

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad \text{(relativistické skládání rychlostí),} \qquad (38.23)$$

což je relativistický transformační vztah pro rychlost. S jiným označením jsme diskutovali tuto rovnici v čl. 4.10. Možná si ho znovu přečtete a zvláště si pak prostudujete př. 4.15 a 4.16. Když v rov. (38.23) formálně položíme $c \to \infty$, redukuje se na klasickou neboli galileovskou rovnici pro skládání (sčítání) rychlostí

$$u = u' + v \quad \text{(klasické skládání rychlostí).} \qquad (38.24)$$

38.10 DOPPLERŮV JEV PRO SVĚTLO

V čl. 18.8 jsme diskutovali Dopplerův jev (posuv naměřené frekvence) pro zvukové vlny šířící se ve vzduchu. Pro takové vlny závisí Dopplerův jev na dvou rychlostech. Jsou to rychlosti zdroje a pozorovatele vzhledem ke vzduchu, který je prostředím přenášejícím vlny.

Jinak je tomu se světelnými vlnami, protože ty (jako elektromagnetické vlny vůbec) nepotřebují žádné prostředí a mohou se šířit i ve vakuu. Pro světelné vlny ve vakuu závisí Dopplerův jev jen na jedné rychlosti — na relativní rychlosti $\boldsymbol{v}$ zdroje vůči detektoru, jak je měřena ze vztažné soustavy kteréhokoli z nich. Nechť f_0 je **vlastní frekvence** zdroje, to jest frekvence, kterou měří pozorovatel v klidové soustavě zdroje. Nechť f je frekvence měřená pozorovatelem, který se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$ vzhledem k této klidové soustavě. Je-li rychlost $\boldsymbol{v}$ namířena směrem od zdroje, je

$$f = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad \text{(zdroj a detektor se vzájemně vzdalují),} \qquad (38.25)$$

kde $\beta = v/c$. Je-li rychlost $\boldsymbol{v}$ namířena směrem ke zdroji, musíme změnit znaménka před oběma symboly β v rov. (38.25).

Podle rov. (38.25), pokud vzdálenost mezi zdrojem a detektorem roste, je naměřená frekvence menší než vlastní frekvence f_0. Zopakujme, že $f = c/\lambda$, kde λ je vlnová délka světla. Vidíme tedy, že zmenšení frekvence odpovídá zvětšení vlnové délky. V čl. 18.9 jsme takový vzrůst vlnové délky nazvali *rudým posuvem* (protože rudá část viditelného světla má největší vlnovou délku). Podobně, pokud se vzdálenost zdroj — detektor zmenšuje, je f větší než f_0; to odpovídá zmenšení vlnové délky, to jest *modrému posuvu*.

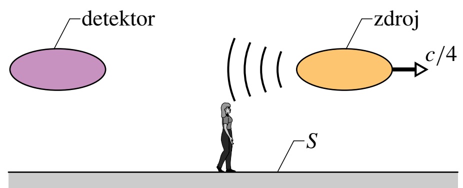
Pro malé rychlosti ($\beta \ll 1$) můžeme rov. (38.25) rozepsat podle mocnin β a aproximovat jako

$$f = f_0\left(1 - \beta + \tfrac{1}{2}\beta^2\right) \quad \text{(pro malé rychlosti).} \qquad (38.26)$$

Odpovídající vzorec pro zvukové či jakékoli jiné vlny s výjimkou světelných má v dané aproximaci stejné první dva členy (kde β je podíl rychlosti detektoru a rychlosti vlnění), ale rozdílný koeficient ve třetím členu. Relativistický vliv se tedy projevuje až ve členu úměrném β^2.

Jak jsme krátce diskutovali v kap. 18, policejní radarové zařízení užívá Dopplerova jevu pro mikrovlny. Zdroj v tomto zařízení emituje mikrovlnný signál o jisté frekvenci f_0 vzhledem k silnici. Auto, které se pohybuje ve směru k zařízení, přijímá mikrovlnný signál, jehož frekvence je posunuta Dopplerovým jevem k frekvenci f v rov. (38.25) (s opačným znaménkem β). Auto odrazí vlnu zpět k radarovému zařízení. Protože auto se pohybuje k radaru, detektor zařízení přijímá odražený signál, jehož frekvence je dále posunuta. Zařízení porovnává naměřenou frekvenci s frekvencí f_0 a počítá rychlost auta.

KONTROLA 4: Obrázek ukazuje zdroj, který emituje světlo o vlastní frekvenci f_0 během pohybu doprava s rychlostí $c/4$ měřenou ze vztažné soustavy S. Obrázek dále ukazuje detektor světla, který měří frekvenci $f > f_0$ pro emitované světlo. (a) Pohybuje se detektor doleva, či doprava? (b) Je rychlost detektoru měřená ze vztažné soustavy S větší, menší, nebo rovna $c/4$?



Příčný Dopplerův jev

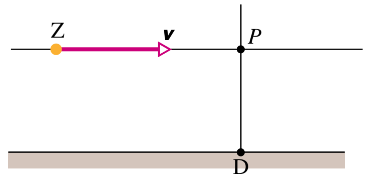
Zatím jsme zde i v kap. 18 diskutovali Dopplerův jev pouze pro situace, v nichž se zdroj a detektor pohybovaly ve směru k sobě či od sebe. Obr. 38.13 ukazuje odlišné uspořádání, v němž zdroj Z míjí detektor D. Když Z dosáhne bodu P, je jeho rychlost kolmá na spojnici Z a D a v tomto okamžiku se zdroj bodu D neblíží ani nevzdaluje. Podle nerelativistické fyziky (tj. při malých rychlostech zdroje) pak D při registraci vln emitovaných v bodě P měří stejnou frekvenci (bez Dopplerova jevu), jakou emituje zdroj. Při vysoké rychlosti zdroje se však i zde projevuje Dopplerův jev, kterému říkáme *příčný Dopplerův jev**. Světlo frekvence f_0 emitované v bodě P přijme detektor D s frekvencí f rovnou

$$f = f_0\sqrt{1-\beta^2} \quad \text{(příčný Dopplerův jev).} \qquad (38.27)$$

Pro malé rychlosti zdroje ($\beta \ll 1$) můžeme rov. (38.27) rozvinout do mocninné řady podle β a aproximovat jako

$$f = f_0\left(1 - \tfrac{1}{2}\beta^2\right) \quad \text{(pro malé rychlosti).} \qquad (38.28)$$

První člen je shodný s tím, co bychom dostali v nerelativistické fyzice, takže relativistický jev pro zdroje pohybující se vysokými rychlostmi opět vzniká až ve členu úměrném β^2.



Obr. 38.13 Zdroj světla Z letí rychlostí $\boldsymbol{v}$ kolem detektoru D. Podle speciální teorie relativity nastane příčný Dopplerův jev, když zdroj prochází bodem P. Jeho rychlost je tam kolmá na spojnici ZD. Podle klasické teorie by Dopplerův jev v takovém případě nastat neměl.

Policejní radarové zařízení může v principu určit rychlost auta i v případě, že dráha radarového pulzu je kolmá (příčná) k dráze auta. Ovšem rov. (38.25) nám říká, že vzhledem k malé hodnotě β je relativistický člen $\beta^2/2$ v příčném Dopplerově jevu i u rychlých aut nesmírně malý. Je tedy $f \approx f_0$ a radarové zařízení vypočte nulovou rychlost. Proto se policisté vždy snaží vyslat radarový pulz podél dráhy auta, aby dostali Dopplerův jev, který odpovídá skutečné rychlosti auta. Každá odchylka od přímého směru působí ve prospěch motoristy, protože měřenou rychlost zmenšuje.

Příčný Dopplerův jev je fakticky dalším testem dilatace času. Přepíšeme-li rov. (38.27) zavedením periody T kmitů emitované světelné vlny namísto její frekvence, máme (protože $T = 1/f$)

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma T_0, \qquad (38.29)$$

* Příčný Dopplerův jev je univerzálním projevem dilatace času, takže rov. (38.27) a (38.28) platí pro libovolné vlny v situaci, kdy pozorovatel je v klidu vůči prostředí, v němž se vlny šíří, a zdroj se pohybuje relativistickou rychlostí. Platí to tedy i pro zvukové vlny, pohybuje-li se jejich zdroj dostatečně rychle, aby byl jev vůbec patrný. Obdobně i pro „podélný“ Dopplerův jev lze uvážením dilatace času obdržet univerzální vzorce pro změnu frekvence jakéhokoli vlnění, vyvolanou pohybem zdroje nebo pozorovatele vůči prostředí, v němž se vlnění šíří. Pro světelné vlny pak v těchto vzorcích klademe $w = c$, kde w je rychlost vlnění v daném prostředí. V důsledku relativistických postulátů výsledná rov. (38.25) již nezávisí ani na volbě vztažné soustavy ani na tom, zda se pohybuje zdroj či pozorovatel. Zvídavý čtenář má v této chvíli dostatek znalostí, aby se o tom sám přesvědčil.

kde $T_0 = 1/f_0$ je **vlastní perioda**. Jak ukazuje srovnání s rov. (38.8), je rov. (38.29) prostě vztahem pro časovou dilataci, protože perioda je časový interval.

Navigační systém NAVSTAR

Každá družice systému NAVSTAR nepřetržitě vysílá rádiové signály, které udávají její polohu, s frekvencí, jež je určována a udržována přesnými atomovými hodinami. Je-li signál zachycen např. detektorem v letadle, je jeho frekvence posunuta Dopplerovým jevem. Zaznamenáváme-li zároveň signály vysílané z různých družic NAVSTARu, je detektor schopen určit směr ke každé družici a směr její rychlosti. Z Dopplerova posunu pro signál pak detektor určuje rychlost letadla.

Užijme hrubých odhadů, abychom ukázali, jak to funguje. Rychlost družice NAVSTARu vzhledem ke středu Země je v poměru $1{,}0 \cdot 10^4\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Příslušné β je okolo $3{,}0 \cdot 10^{-5}$. Člen $\beta^2/2$ v rov. (38.26) a (38.28) (tj. relativistický člen) je tedy asi $4{,}5 \cdot 10^{-10}$. Jinými slovy, relativita mění Dopplerův jev měřeného signálu v poměru $4{,}5 : 10^{10}$, což zdánlivě sotva stojí za pozornost.

A přece je to důležité. Atomové hodiny na družicích jsou tak přesné, že kolísání frekvence družicového signálu činí pouze $2 : 10^{12}$. Z rov. (38.28) vidíme, že β (a tedy v) závisí na odmocnině z f/f_0. Uvedené kolísání frekvence hodin způsobuje tedy kolísání

$$\sqrt{2 \cdot 10^{-12}} = 1{,}4 \cdot 10^{-6}$$

pro měřenou hodnotu relativní rychlosti mezi družicí a letadlem.

Protože v je dáno hlavně velkou rychlostí družice $1{,}0 \cdot 10^4\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, znamená to, že rychlost letadla může být určena s přesností asi

$$(1{,}4 \cdot 10^{-6})(1{,}0 \cdot 10^4\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}) = 1{,}4\,\mathrm{cm \cdot s^{-1}}.$$

Předpokládejme, že letadlo letí hodinu (3 600 s). Známe-li jeho rychlost s přesností $1{,}4\,\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$, můžeme jeho polohu po uplynutí hodiny předpovědět s přesností

$$(0{,}014\,\mathrm{m \cdot s^{-1}})(3\,600\,\mathrm{s}) = 50\,\mathrm{m},$$

což je pro moderní navigaci přijatelné.

Kdyby se nepřihlíželo k relativistickým jevům, nemohla by být rychlost letadla známa s menší neurčitostí než $21\,\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$ a jeho poloha po hodině letu by nemohla být předpovězena lépe než s chybou 760 m.

38.11 NOVÝ POHLED NA HYBNOST

Nechť řada pozorovatelů, každý ve své inerciální soustavě, pozoruje izolovanou srážku dvou částic. Podle klasické mechaniky, jak jsme již viděli, všichni zjišťují, že platí zákon zachování hybnosti, i když naměří různé rychlosti srážejících se částic. To znamená, že podle všech pozorovatelů je hybnost systému částic stejná, jako byla před srážkou.

Jak tuto situaci ovlivní relativita? Zjišťujeme, že budeme-li i nadále definovat hybnost $\boldsymbol{p}$ jako $m\boldsymbol{v}$, tedy jako součin hmotnosti m a rychlosti, pak se hybnost pro všechny inerciální pozorovatele *nezachová*. Máme dvě možnosti: (1) vzdát se zákona zachování hybnosti nebo (2) uvážit, zda nelze definovat hybnost částice nějak jinak, aby zákon zachování hybnosti zůstal v platnosti. Zvolíme si druhou cestu.

Uvažujme částici, která se pohybuje konstantní rychlostí v ve směru osy x. Klasicky má její hybnost velikost

$$p = mv = m\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{(klasická hybnost)}, \tag{38.30}$$

kde Δx je vzdálenost, kterou částice urazí za čas Δt.

Abychom našli relativistický výraz pro hybnost, vyjdeme z nové definice

$$p = m\frac{\Delta x}{\Delta t_0}.$$

Zde Δx je stále vzdálenost, kterou urazí pohybující se částice, jak ji vidí pozorovatel, vůči němuž se pohybuje. Avšak Δt_0 je čas, který částice potřebuje na proběhnutí oné vzdálenosti nikoli tak, jak jej měří pozorovatel sledující pohybující se částici ze svého stanoviště, ale jak jej měří pozorovatel pohybující se spolu s ní. Protože částice je vzhledem k tomuto druhému pozorovateli v klidu, je čas, který měří, vlastním časem Δt_0.

Užijeme-li vzorce pro dilataci času (rov. (38.8)), můžeme psát

$$p = m\frac{\Delta x}{\Delta t_0} = m\frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = m\frac{\Delta x}{\Delta t}\gamma.$$

Ale protože $\Delta x/\Delta t$ je právě rychlost částice v, platí

$$p = \gamma m v \quad \text{(hybnost)}. \tag{38.31}$$

Povšimněme si, že od klasické definice podle rov. (38.30) se rov. (38.31) liší jen Lorentzovým faktorem γ. Tento rozdíl je však důležitý: na rozdíl od klasické hybnosti se relativistická hybnost blíží k nekonečné hodnotě, když v se blíží k c.

Veličina m je zde hmotnost měřená v klidové soustavě. Někteří autoři ji proto označují jako m_0 a nazývají *klidovou hmotností*, zatímco γm_0 označují jako m a nazývají *relativistickou hmotností*. Klasický vztah pro hybnost pak zůstává formálně zachován, rozumíme-li pod m relativistickou hmotnost závislou na použité vztažné soustavě. Tato terminologie převládá v naší učebnicové literatuře, zatímco ve fyzice elementárních částic je běžnější terminologie a symbolika, které se přidržujeme zde.

Definici danou rov. (38.31) můžeme zobecnit do vektorového tvaru:

$$\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v} \quad \text{(hybnost).} \qquad (38.32)$$

Tuto definici jsme uvedli v čl. 9.4 bez zdůvodnění jako předzvěst věcí, s nimiž se setkáme. Dodejme bez důkazu, že přijmeme-li definici hybnosti danou rov. (38.32), můžeme užívat zákona zachování hybnosti i pro libovolně vysoké rychlosti částic.

38.12 NOVÝ POHLED NA ENERGII

V čl. 7.8 jsme bez dalšího rozboru uvedli relativistický výraz pro kinetickou energii částice

$$E_\mathrm{k} = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1 \right).$$

Tento výraz nyní můžeme přepsat jako

$$E_\mathrm{k} = mc^2(\gamma - 1) \quad \text{(kinetická energie).} \qquad (38.33)$$

V čl. 7.8 jsme ukázali, že — ač se to může zdát nečekané — tento výraz se redukuje na obvyklé klasické $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$ při malých rychlostech. Dodejme, že rov. (38.33) můžeme odvodit úplně stejně jako klasický výraz pro kinetickou energii: Kinetická energie je rovna práci, kterou je potřeba dodat pro urychlení částice z klidu na uvažovanou rychlost. Všimněme si některých důsledků rov. (38.33).

Celková energie

Začneme tím, že definujeme *celkovou energii* E částice jako γmc^2. S pomocí rov. (38.33) pak můžeme psát

$$E = \gamma mc^2 = mc^2 + E_\mathrm{k} \quad \text{(celková energie jediné částice).} \qquad (38.34)$$

Interpretujeme rov. (38.34) jako vyjádření faktu, že celková energie E pohybující se částice se skládá z členu mc^2, který nazveme **klidovou energií** částice, a z členu E_k, což je její kinetická energie. V tab. 8.1 najdeme klidové energie některých částic a jiných objektů. Například klidová energie elektronu je 0,511 MeV a protonu 938 MeV.

Celková energie systému částic je

$$E = \sum_{j=1}^{n} E_j = \sum_{j=1}^{n} (\gamma_j m_j c^2) = \sum_{j=1}^{n} m_j c^2 + \sum_{j=1}^{n} E_{\mathrm{k},j}$$
$$\text{(celková energie systému částic).} \qquad (38.35)$$

Zákon zachování energie se v relativitě vyjádří takto:

> Pro izolovaný systém částic zůstává celková energie E, která je definována rov. (38.35), konstantní bez ohledu na to, jaké interakce se mezi částicemi odehrávají.

Při každé izolované reakci či srážkovém procesu, který zahrnuje dvě nebo více částic, musí být tedy celková energie systému před procesem stejná jako po něm. Během procesu se může měnit klidová energie interagujících částic, ale pak se musí měnit i jejich energie kinetická tak, aby se celková energie nezměnila.

Úvahy tohoto druhu souvisejí s proslulým Einsteinovým vztahem $E = mc^2$ (rov. (38.34) pro $E_\mathrm{k} = 0$), ze kterého plyne, že klidová energie může být přeměněna na jiné formy energie. A obráceně, všechny reakce — ať již chemické či jaderné — při nichž se energie uvolňuje či pohlcuje, zahrnují odpovídající změnu klidové energie složek reakce. Vztah $E = mc^2$ jsme detailně prodiskutovali v čl. 8.8.

Hybnost a kinetická energie

V klasické mechanice je hybnost částice rovna $p = mv$ a její kinetická energie je $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$. Vyloučíme-li z těchto dvou rovnic v, dostaneme přímý vztah mezi hybností a kinetickou energií

$$p^2 = 2E_\mathrm{k}m \quad \text{(klasicky).} \qquad (38.36)$$

Podobný vztah můžeme najít i v relativitě vyloučením v z relativistické definice hybnosti (rov. (38.31)) a z relativistické definice kinetické energie (rov. (38.33)). Po krátkém výpočtu pak dostaneme

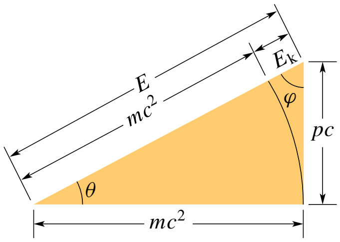
$$(pc)^2 = E_\mathrm{k}^2 + 2E_\mathrm{k}mc^2. \qquad (38.37)$$

Pomocí rov. (38.34) můžeme přepsat rov. (38.37) do podoby vztahu mezi hybností p a celkovou energií E částice

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2. \qquad (38.38)$$

Pravoúhlý trojúhelník z obr. 38.14 nám pomůže, abychom si tento užitečný vztah zapamatovali. Můžeme také ukázat, že v něm platí

$$\sin\theta = \beta \quad \text{a} \quad \sin\varphi = 1/\gamma. \tag{38.39}$$



Obr. 38.14 Užitečná mnemotechnická pomůcka pro relativistický vztah mezi celkovou energií E, klidovou energií mc^2, kinetickou energií E_k a velikostí hybnosti p.

Z rov. (38.38) vidíme, že součin pc má stejný rozměr jako energie E; jednotku hybnosti p tedy můžeme vyjádřit jako jednotku energie dělenou c. V částicové fyzice se také většinou hybnost částic udává v jednotkách MeV/c nebo GeV/c.

KONTROLA 5: Jsou (a) kinetická energie, (b) celková energie 1 GeV elektronu větší, menší, nebo stejné jako energie 1 GeV protonu?

PŘÍKLAD 38.8

(a) Jaká je celková energie E elektronu s kinetickou energií $E_k = 2{,}53$ MeV?

ŘEŠENÍ: Pro celkovou energii platí (rov. (38.34))

$$E = mc^2 + E_k.$$

Z tab. 8.1 najdeme pro elektron $mc^2 = 0{,}511$ MeV, takže

$$E = (0{,}511\,\text{MeV} + 2{,}53\,\text{MeV}) = 3{,}04\,\text{MeV}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je hybnost p elektronu?

ŘEŠENÍ: Z rov. (38.38)

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

můžeme po dosazení psát

$$(3{,}04\,\text{MeV})^2 = (pc)^2 + (0{,}511\,\text{MeV})^2.$$

Pak

$$pc = \sqrt{(3{,}04\,\text{MeV})^2 - (0{,}511\,\text{MeV})^2} = 3{,}00\,\text{MeV},$$

a udáváme-li hybnost v jednotkách energie dělené c, máme

$$p = 3{,}00\,\text{MeV}/c. \quad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jaký je Lorentzův faktor γ pro uvažovaný elektron?

ŘEŠENÍ: Z rov. (38.34) máme

$$E = \gamma mc^2.$$

Pro $E = 3{,}04$ MeV a $m = 9{,}11\cdot10^{-31}$ kg pak je

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{(3{,}04\cdot10^6\,\text{eV})(1{,}6\cdot10^{-19}\,\text{J/eV})}{(9{,}11\cdot10^{-31}\,\text{kg})(3{,}0\cdot10^8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2} =$$
$$= 5{,}93. \quad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 38.9

Nejenergetičtější proton, jaký byl kdy zjištěn v kosmických paprscích, měl ohromující kinetickou energii $3{,}0\cdot10^{20}$ eV (tato energie by stačila ohřát lžičku čaje o několik stupňů).

(a) Vypočtěte Lorentzův faktor γ a rychlost v protonu.

ŘEŠENÍ: Řešíme rov. (38.33) pro γ a dostáváme

$$\gamma = \frac{E_k + mc^2}{mc^2} = \frac{E_k}{mc^2} + 1 = \frac{(3{,}0\cdot10^{20}\,\text{eV})}{(938\cdot10^6\,\text{eV})} + 1 =$$
$$= 3{,}198\cdot10^{11} \doteq 3{,}2\cdot10^{11}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Zde jsme užili jako klidovou energii protonu 938 MeV.

Tato vypočtená hodnota pro γ je tak velká, že k nalezení v nemůžeme užít definice γ z rov. (38.7). Zkuste to: kalkulačka vám sdělí, že β je prakticky rovno 1, a tudíž v je prakticky rovno c. Fakticky je v téměř rovno c, ale my potřebujeme přesnější odpověď a tu můžeme dostat, když nejprve vyřešíme rov. (38.7) pro $1-\beta$. Nejprve pišme:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}} \approx \frac{1}{\sqrt{2(1-\beta)}},$$

kde jsme užili toho, že β je natolik blízké jedničce, že $1+\beta$ je velmi blízké dvěma. Řešení pro $1-\beta$ pak dává

$$1-\beta = \frac{1}{2\gamma^2} = \frac{1}{2(3{,}198\cdot10^{11})^2} = 4{,}9\cdot10^{-24} \doteq 5\cdot10^{-24}.$$

Je tedy

$$\beta = 1 - 5\cdot10^{-24},$$

a protože $v = \beta c$, je

$$v \approx 0{,}999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,995c. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Předpokládejme, že proton se pohybuje po dráze $9{,}8\cdot10^4$ světelných roků, což je průměr naší Galaxie. Za jak dlouho asi proton urazí tuto dráhu z hlediska společné vztažné soustavy Země + Galaxie?

ŘEŠENÍ: Právě jsme viděli, že *ultrarelativistický* proton se pohybuje rychlostí jen nepatrně menší než c. Průměr Galaxie proletí světlo za $9{,}8\cdot10^4$ roků a protonu to bude trvat skoro stejnou dobu. Cesta protonu z naší vztažné soustavy Země + + Mléčná dráha trvá tedy

$$\Delta t = 9{,}8\cdot10^4\ \text{y}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jak dlouho trvá cesta z hlediska klidové soustavy protonu?

ŘEŠENÍ: Protože začátek i konec cesty nastal v klidové vztažné soustavě protonu v témže místě, totiž v místě, kde byl samotný proton, hledáme vlastní čas cesty. Můžeme užít vzorec pro dilataci času (rov. (38.8)) a transformovat Δt ze soustavy Země + Mléčná dráha do klidové soustavy protonu

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{(9{,}8\cdot 10^4\ \mathrm{y})}{(3{,}198\cdot 10^{11})} = \\ = 3{,}06\cdot 10^{-7}\ \mathrm{y} = 9{,}7\ \mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

V naší soustavě trvá cesta 98 000 roků. V soustavě protonu trvá 9,7 s! Jak jsme slíbili na začátku této kapitoly, relativní pohyb může změnit tempo, jímž plyne čas, a zde podáváme extrémní příklad.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Postuláty

Speciální teorie relativity je založena na dvou postulátech:

1. Zákony fyziky jsou stejné pro pozorovatele ve všech inerciálních vztažných soustavách. Žádná soustava není preferována.
2. Rychlost světla ve vakuu má stejnou hodnotu c ve všech směrech ve všech inerciálních vztažných soustavách, a to nezávisle na rychlosti zdroje.

Rychlost světla c ve vakuu je největší rychlost, jaké může dosáhnout cokoli, co přenáší energii či informaci.

Souřadnice události

Tři prostorové souřadnice a jedna časová souřadnice určují *událost*. Jedním z úkolů speciální teorie relativity je určit souvislost mezi souřadnicemi, jak je událostem připisují dva pozorovatelé, kteří se vzájemně pohybují rovnoměrně a přímočaře.

Současné události

Jestliže se dva pozorovatelé vůči sobě pohybují, nebudou obecně souhlasit v tom, zda dvě události jsou současné. Jestliže jeden pozorovatel zjišťuje, že dvě události v různých místech jsou současné, druhý to popírá, a naopak. Současnost *není* absolutním pojmem, ale pojmem relativním, závislým na pohybu pozorovatele. Relativita současnosti je přímým důsledkem konečnosti mezní rychlosti c.

Dilatace času

Jestliže dvě po sobě jsoucí události nastávají v témže místě v inerciální vztažné soustavě (jsou v ní soumístné), pak časový interval mezi nimi Δt, měřený na jediných hodinách v místě, kde události nastaly, nazýváme *vlastní čas* mezi událostmi. *Pozorovatelé v soustavách, které se vůči této soustavě pohybují, naměří pro tuto dobu větší hodnotu.* Pro pozorovatele pohybujícího se relativní rychlostí v je měřený časový interval

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\,\Delta t_0 \qquad \text{(dilatace času).} \qquad (38.6\text{–}38.8)$$

Zde $\beta = v/c$ je *rychlostní parametr* a $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ je *Lorentzův faktor*. Důležitým důsledkem dilatace času je to, že pohybující se hodiny jdou pomaleji z hlediska měření pozorovatele, který je v klidu.

Kontrakce délky

Délka L_0 objektu měřená pozorovatelem v inerciální vztažné soustavě, v níž je objekt v klidu, se nazývá jeho *vlastní délka*. *Pozorovatelé v soustavách, které se vůči této soustavě pohybují rovnoběžně s danou délkou, naměří kratší délku.* Pro pozorovatele, který se pohybuje relativní rychlostí v, je měřená délka

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2} = \frac{L_0}{\gamma} \qquad \text{(kontrakce délky).} \qquad (38.9)$$

Lorentzova transformace

Rovnice *Lorentzovy transformace* spojují prostoročasové souřadnice události, jak je vidí pozorovatelé ve dvou inerciálních soustavách S a S', kde S' se pohybuje relativně k S rychlostí v v kladném směru os x a x'. Čtyři souřadnice jsou spojeny vztahy

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt),\\ y' &= y,\\ z' &= z,\\ t' &= \gamma(t - vx/c^2) \end{aligned} \qquad (38.14)$$

(Lorentzovy transformační rovnice; platí pro všechny rychlosti).

Relativistické skládání rychlostí

Pohybuje-li se částice rychlostí u' v kladném směru x' v inerciální vztažné soustavě S', která se sama pohybuje rychlostí v ve směru osy x další inerciální soustavy S, pak výsledná rychlost u částice měřená v S je

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \qquad \text{(relativistické rychlosti).} \qquad (38.23)$$

Relativistický Dopplerův jev

Pohybuje-li se zdroj emitující světelné vlny o frekvenci f_0 směrem od detektoru relativní rychlostí $\boldsymbol{v}$, pak frekvence f měřená detektorem je

$$f = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \qquad \text{(zdroj a detektor se vzájemně vzdalují).} \qquad (38.25)$$

Příčný Dopplerův jev

Je-li relativní pohyb zdroje kolmý na spojnici zdroj — detektor, má dopplerovský vzorec tvar

$$f = f_0\sqrt{1-\beta^2}. \tag{38.27}$$

Tento *příčný Dopplerův jev* je dán dilatací času.

Hybnost a energie

Definice hybnosti $\boldsymbol{p}$, kinetické energie E_k a celkové energie E platné při všech možných rychlostech jsou

$$\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v} \quad \text{(hybnost)}, \tag{38.32}$$

$$E_\text{k} = mc^2(\gamma - 1) \quad \text{(kinetická energie)}, \tag{38.33}$$

$$E = \gamma mc^2 = mc^2 + E_\text{k} \quad \text{(celková energie jediné částice)}. \tag{38.34}$$

Při těchto definicích nabývá princip zachování celkové energie pro systém částic tvar

$$E = \sum_{j=1}^{n} E_j = \sum_{j=1}^{n}(\gamma_j m_j c^2) = \sum_{j=1}^{n} m_j c^2 + \sum_{j=1}^{n} E_{\text{k}\,j} \quad \text{(celková energie systému částic)}. \tag{38.35}$$

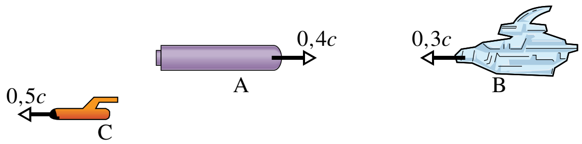
Často jsou užitečné dva další vztahy pro energii, odvoditelné z rov. (38.22), (38.33) a (38.34)

$$(pc)^2 = E_\text{k}^2 + 2E_\text{k}mc^2, \tag{38.37}$$

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2. \tag{38.38}$$

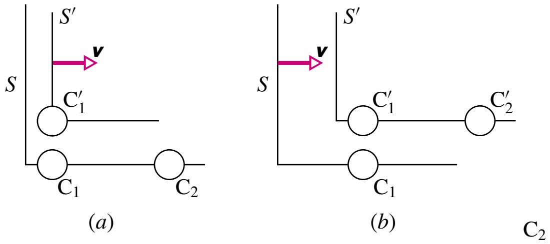
OTÁZKY

1. Na obr. 38.15 vysílá kosmická loď A laserový pulz k lodi B, která jí letí vstříc, zatímco výzvědná loď C se vzdaluje. Napsané rychlosti lodí jsou měřeny v téže vztažné soustavě. Seřaďte lodě podle velikosti rychlosti pulzu, jak ji naměří na každé lodi.



Obr. 38.15 Otázky 1 a 10

2. Obr. 38.16a ukazuje dvoje hodiny v nehybné soustavě S (v této soustavě jsou synchronizovány) a jedny hodiny v pohybující se soustavě S'. Hodiny C_1 a C'_1 ukazují v okamžiku, kdy se míjejí, nulu. Když se míjejí hodiny C'_1 a C_2, které hodiny (a) ukazují menší údaj, (b) měří vlastní čas?

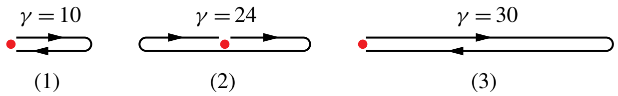


Obr. 38.16 Otázky 2 a 3

3. Obr. 38.16b ukazuje dvoje hodiny v nehybné soustavě S' (v této soustavě jsou synchronizovány) a jedny hodiny v pohybující se soustavě S. Hodiny C_1 a C'_1 ukazují v okamžiku, kdy se míjejí, nulu. Když se míjejí hodiny C_1 a C'_2, které hodiny (a) ukazují menší údaj, (b) měří vlastní čas?

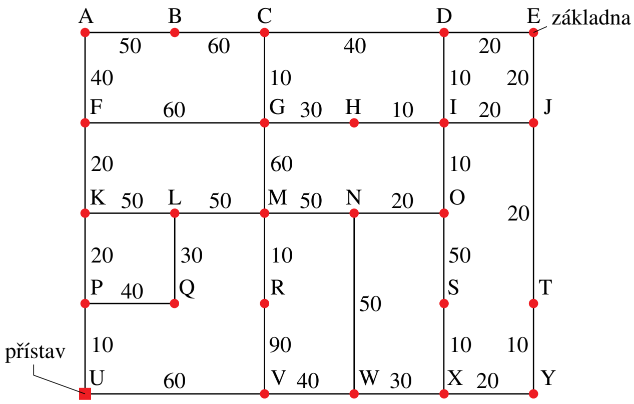
4. Slávek opouští Venuši na kosmické lodi letící na Mars a míjí Sylvu, která žije na Zemi, relativní rychlostí $0{,}5c$. (a) Oba měří dobu letu Venuše – Mars. Kdo měří vlastní čas: Slávek, Sylva, nebo oba? (b) Během cesty Slávek posílá světelný pulz k Marsu. Oba měří dobu letu pulzu. Kdo měří vlastní čas?

5. Obr. 38.17 ukazuje tři situace, v nichž hvězdolet míjí Zemi (tečka) a potom podnikne let s obratem, který jej vrací zpět k Zemi. Každé lodi je přiřazen jistý Lorentzův faktor. V klidové soustavě Země jsou vzdálenosti cest dány takto: cesta (1), $2D$; cesta (2), $4D$; cesta (3), $6D$. Bez psaných výpočtů a při zanedbání časů potřebných ke změně rychlostí seřaďte situace podle cestovních dob, jak se jeví v klidové soustavě (a) Země, (b) hvězdoletu. (*Tip*: Viz př. 38.5.)



Obr. 38.17 Otázka 5

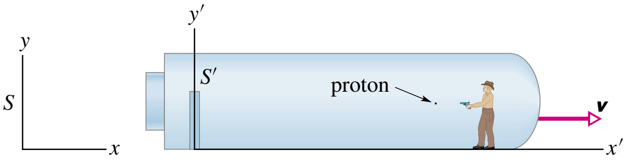
6. Obr. 38.18 je mapa cestovních linek, které jsou v mezihvězdné oblasti povoleny tamní vládou. Každá linka (mezi dvěma uzly označenými písmeny) má připsánu maximální hodnotu faktoru γ, který je na ní povolen. V klidové soustavě uzlů



Obr. 38.18 Otázka 6

jsou vzdálenosti sousedních uzlů L, nebo $2L$. (a) Najděte cestu z Přístavu na Základnu, která minimalizuje váš cestovní čas (při zanedbání času potřebného ke změně γ). (*Tip*: Viz př. 38.5.) Kdo změří (b) menší čas, (c) menší délku této cesty: vy, nebo ten, kdo je vzhledem k uzlům v klidu?

7. Obr. 38.19 ukazuje kosmickou loď (spojenou s palubní vztažnou soustavou S'), která nás míjí (naše vztažná soustava je S).



Obr. 38.19 Otázka 7

Proton je vystřelen téměř světelnou rychlostí podél osy lodě zepředu dozadu. (a) Je prostorový rozdíl $\Delta x'$ mezi místem vystřelení protonu a místem jeho dopadu na zadní stěnu kladný, nebo záporný? (b) Je časový rozdíl $\Delta t'$ mezi těmito událostmi kladná, nebo záporná veličina?

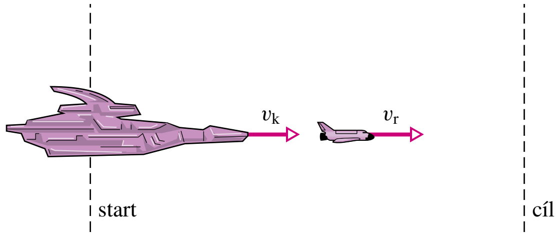
8. (a) Nechť pozorovatel na obr. 38.9 v soustavě S' měří dvě události nastávající v témže místě (dejme tomu v x'), ale nikoli v témže čase. Je možné, aby je pozorovatel v soustavě S zjistil ve stejném místě? (b) Nastávají-li dvě události současně v témže místě pro jednoho pozorovatele, budou současné pro všechny ostatní pozorovatele? (c) Nastanou v témže místě pro všechny ostatní pozorovatele?

9. Obr. 38.20 ukazuje hvězdolet a asteroid. Ve čtyřech situacích jsou zadány rychlosti hvězdoletu vzhledem k nám (nacházíme se na průzkumné kosmické lodi) a rychlosti asteroidu vzhledem k hvězdoletu: (a) $+0{,}4c$, $+0{,}4c$; (b) $+0{,}5c$, $+0{,}3c$; (c) $+0{,}9c$, $-0{,}1c$; (d) $+0{,}3c$, $+0{,}5c$. Bez psaných výpočtů seřaďte situace sestupně podle velikosti relativní rychlosti asteroidu vzhledem k nám.

Obr. 38.20 Otázka 9

10. Kosmické lodě A a B na obr. 38.15 se pohybují přímo proti sobě; všechny uvažované rychlosti jsou měřeny v téže vztažné soustavě. Je rychlost lodě A vzhledem k lodi B větší, menší, nebo rovna $0{,}7c$?

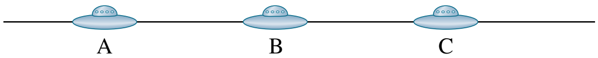
11. Obr. 38.21 ukazuje jeden ze dvou kosmických křižníků, které spolu soutěží. Každý křižník dospěje na startovní čáru a vypustí raketu, která se pohybuje k cílové čáře. Jako hodnotitelé soutěže jste nehybní vzhledem ke startovní i cílové čáře. Rychlosti v_k křižníků vzhledem k vám a rychlosti v_r raket vzhledem k jejich křižníkům jsou: (1) $0{,}70c$, $0{,}40c$; (2) $0{,}40c$, $0{,}70c$; (3) $0{,}20c$, $0{,}90c$; (4) $0{,}50c$, $0{,}60c$. Všechny následující „výpočty" provádějte bez papíru, jenom „z hlavy". Seřaďte rakety sestupně (a) podle velikosti jejich relativní rychlosti vzhledem k vám, (b) podle vzdáleností, které jejich piloti měří od startovní k cílové čáře. (c) Každý křižník posílá své raketě signál s frekvencí f_0, měřeno na palubě křižníku. Seřaďte rakety sestupně podle velikosti pozorovaných frekvencí.



Obr. 38.21 Otázka 11

12. Jste na palubě hvězdoletu a přijímáte signály ze čtyř raket, které se pohybují přímo od vás, nebo přímo k vám. Signály mají stejnou vlastní frekvenci f_0. Rychlost a směr (obojí relativně k vám) raket jsou: (a) $0{,}3c$ k vám; (b) $0{,}6c$ k vám; (c) $0{,}3c$ od vás; (d) $0{,}6c$ od vás. Seřaďte rakety sestupně podle frekvencí, které jste zaznamenali.

13. Obr. 38.22 ukazuje tři kosmické lodě, které se pohybují doprava, nebo doleva podle zakreslené osy. Všechny emitují mikrovlnné signály o téže vlastní frekvenci f_0. Loď C deteguje signál od lodě A s frekvencí $f_1 > f_0$. Loď A deteguje signál od lodě B s frekvencí $f_2 < f_0$. Je frekvence signálu z lodě B detegovaná lodí C menší než f_0, větší než f_1, nebo leží mezi f_0 a f_1?



Obr. 38.22 Otázka 13

14. Klidová a celková energie tří částic, vyjádřeny pomocí jisté základní jednotky A, jsou: (1) A, $2A$; (2) A, $3A$; (3) $3A$, $4A$. Bez psaných výpočtů seřaďte částice sestupně podle (a) jejich hmotnosti, (b) jejich kinetické energie, (c) jejich Lorentzova faktoru, (d) jejich rychlosti.

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 38.2 Postuláty

1C. Jaký zlomek rychlosti světla představuje každá z následujících rychlostí (tj. jaký je rychlostní parametr β)? (a) Typická rychlost posunu kontinentů (3 cm/rok). (b) Rychlostní limit na dálnici (120 km/h). (c) Nadzvukové letadlo 2,5 machů (1 200 km/h). (d) Úniková rychlost z povrchu Země. (e) Typická rychlost kosmologického vzdalování kvazarů ($3{,}0 \cdot 10^4$ km/s).

2C. I když odhlédneme od jevů způsobených rotací a oběhem Země, není laboratorní soustava přesně vzato inerciální, protože částice, která je do ní vložena s nulovou rychlostí, nezůstane obecně v klidu a začne padat. Často ovšem události probíhají tak rychle, že můžeme gravitační zrychlení ignorovat a považovat danou soustavu za inerciální. Uvažujme například elektron s rychlostí $v = 0{,}992c$, který vletěl vodorovně do laboratorní komory a proletěl vzdálenost 20 cm. (a) Jak dlouho tato cesta trvala? (b) O kolik během letu elektron spadl? Co můžete říci o přijatelnosti laboratoře jakožto inerciálního systému v tomto případě?

3Ú. Najděte rychlost částice, která se na dráze dlouhé 6,0 světelných roků opozdí o 2,0 roky za světlem.

ODST. 38.5 Relativita času

4C. Jaký musí být rychlostní parametr β, je-li Lorentzův faktor γ roven (a) 1,01, (b) 10,0, (c) 100, (d) 1 000?

5C. Střední doba života nehybných mionů byla naměřena jako 2,2 μs. Střední doba života velmi rychlých mionů ve výtrysku kosmických paprsků pozorovaná ze Země byla naměřena jako 16 μs. Najděte rychlost těchto kosmických mionů vzhledem k Zemi.

6Ú. Nestabilní vysokoenergetická částice vstupuje do detektoru a proběhne úsek 1,05 mm, než se rozpadne. Její rychlost vzhledem k detektoru je $0{,}992c$. Jaká je její doba života, tj. jak dlouho by částice setrvala v detektoru do rozpadu, kdyby v něm byla v klidu?

7Ú. Srážkou vysokoenergetické částice kosmického záření s atomovým jádrem vznikl ve vysokých vrstvách zemské atmosféry pion. Ten pak letěl k Zemi rychlostí $0{,}99c$. Ve vztažné soustavě, v níž jsou piony v klidu, je průměrná doba jejich života do rozpadu 26 ns. Měříme-li v soustavě spojené se Zemí, jak dlouho se průměrně takový pion bude pohybovat atmosférou, než se rozpadne?

8Ú. Chcete podniknout cestu kosmické lodi ze Země a vrátit se zpět. Budete se 6 měsíců pohybovat konstantní rychlostí po přímce, načež se stejnou konstantní rychlostí vrátíte. Po návratu se chcete ocitnout na Zemi, na níž zatím uběhlo tisíc let. (a) Jak rychle musíte letět? (b) Záleží na tom, zda se pohybujete po přímce? Kdybyste například cestoval rok po kružnici, uběhlo by i potom do vašeho návratu 1 000 let na pozemských hodinách?

ODST. 38.6 Relativita délky

9C. Tyč leží rovnoběžně s osou x vztažné soustavy S a pohybuje se podél ní rychlostí $0{,}630c$. Její klidová délka je 1,70 m. Jaká bude její délka měřená v soustavě S?

10C. Pozorovatel zjistil, že délka kosmické lodě je přesně rovna polovině její klidové délky. (a) Jaká je rychlost lodě v jeho soustavě? (b) Kolikrát pomaleji jdou hodiny v lodi ve srovnání s hodinami pozorovatele?

11C. Metrová tyč v soustavě S' svírá s osou x' úhel 30°. Pohybuje-li se tato soustava rovnoběžně s osou x rychlostí $0{,}90c$ vzhledem k soustavě S, jaká je délka tyče měřená v S?

12C. Elektron s $\beta = 0{,}999\,987$ se pohybuje podél osy vakuové trubice, která má délku 3,00 m, jak ji měří v laboratoři pozorovatel S, který je vzhledem k trubici v klidu. Pozorovatel S', který je v klidu vzhledem k elektronu, však zjišťuje, že trubice se pohybuje rychlostí $v = \beta c$. Jakou délku trubice pozorovatel S' naměří?

13C. Klidový poloměr Země je 6 378 km a rychlost, s níž obíhá okolo Slunce, má velikost 30 km/s. Dejme tomu, že se Země pohybuje touto rychlostí kolem pozorovatele. Jak se pro tohoto pozorovatele zkrátí poloměr Země ve směru pohybu?

14C. Kosmická loď klidové délky 130 m se pohybuje kolem výzkumné stanice rychlostí $0{,}740c$. (a) Jaká je délka lodě měřená ze stanice? (b) Jaký časový interval zaznamenají staniční hodiny mezi průchodem začátku a konce lodě?

15Ú. Kosmická poutnice opustila Zemi a pohybuje se rychlostí $0{,}99c$ k hvězdě Vega, která je vzdálena 26 ly. Jaký čas zabere cesta na pozemských hodinách, (a) než poutnice dosáhne Vegy, (b) než pozemští pozorovatelé dostanou zprávu o jejím dosažení? O kolik zestárne podle výpočtu pozemských pozorovatelů poutnice (z jejího hlediska) od startu po dosažení Vegy?

16Ú. Letadlo, jehož klidová délka je 40,0 m, se pohybuje vzhledem k Zemi stálou rychlostí 630 m/s. (a) Na jaký zlomek své klidové délky se zkrátí pro pozorovatele na Zemi? (b) Jak dlouho potrvá na pozemských hodinách, než se hodiny v letadle zpozdí o 1,00 μs? (Užijte pro své výpočty speciální relativitu.)

17Ú. (a) Je v principu možné, aby někdo cestoval ze Země do středu Galaxie (který je vzdálen asi 23 000 světelných let) během normální doby života? Pro vysvětlení užijte argumentů založených na dilataci času nebo na kontrakci délky. (b) Jaké konstantní rychlosti by bylo třeba, aby byl takový výlet uskutečněn za 30 let (vlastního času)?

ODST. 38.8 Některé důsledky Lorentzových rovnic

18C. Pozorovatel S připisuje události prostoročasové souřadnice $x = 100$ km a $t = 200$ μs. Jaké jsou souřadnice této události v soustavě S', která se pohybuje ve směru rostoucího x rychlostí $0{,}950c$ vzhledem k S? Předpokládejme $x = x' = 0$ v čase $t = t' = 0$.

19C. Pozorovatel S hlásí, že událost nastala na jeho ose x v místě $x = 3{,}00 \cdot 10^8$ m v čase $t = 2{,}50$ s. (a) Pozorovatel S' se pohybuje ve směru rostoucího x rychlostí $0{,}400c$. Dále je $x = x' = 0$ v čase $t = t' = 0$. Jaké souřadnice přiřadí události pozorovatel S'? (b) Jaké souřadnice by jí přiřadil, kdyby se pohyboval stejnou rychlostí ve směru *klesajícího* x?

20C. Inerciální soustava S' se pohybuje rychlostí $0{,}60c$ vzhledem k soustavě S (obr. 38.9). Dále je $x = x' = 0$ v čase $t = t' = 0$. Jsou pozorovány dvě události. V soustavě S nastává událost 1 v počátku v čase $t = 0$ a událost 2 nastává na ose x v místě $x = 3{,}0$ km v čase $t = 4{,}0$ µs. Jaké časy přiřadí týmž událostem pozorovatel S'? Vysvětlete rozdíl v pořadí časů.

21C. Experimentátor zařídí současné rozsvícení dvou žárovek. Velká žárovka vzplane v počátku jeho vztažné soustavy a malá v místě $x = 30{,}0$ km. Pozorovatel pohybující se rychlostí $0{,}250c$ ve směru rostoucího x uvidí tato vzplanutí. (a) Jaký časový interval mezi nimi určí? (b) Které vzplanutí nastane podle něho dříve?

22C. V tab. 38.2 mohou být Lorentzovy transformační rovnice v pravém sloupci odvozeny z rovnic v levém sloupci prostě výměnou čárkovaných a nečárkovaných prostoročasových souřadnic a současně se změnou znaménka v. Ověřte to přímým algebraickým výpočtem.

23Ú. Hodiny se pohybují podél osy x rychlostí $0{,}600c$ a ukazují nulu, když míjejí počátek. (a) Vypočtěte jejich Lorentzův faktor. (b) Jaký čas budou hodiny ukazovat, když letí nad místem se souřadnicí $x = 180$ m?

24Ú. Pozorovatel S vidí velký světelný záblesk 1 200 m od sebe a malý světelný záblesk o 720 m blíže přesně ve směru k velkému záblesku. Změří časový interval mezi záblesky 5,00 µs, přičemž k velkému záblesku došlo dříve. (a) Jaká je relativní rychlost $\boldsymbol{v}$ (udejte velikost i směr) druhého pozorovatele S', podle něhož došlo k oběma zábleskům v témže místě? (b) Ke kterému záblesku došlo dříve z hlediska S'? (c) Jaký časový interval mezi nimi S' naměřil?

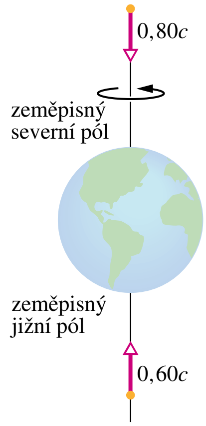
25Ú. V úloze 24 pozorovatel S vidí záblesky na týchž místech jako předtím, ale jsou si nyní méně vzdáleny v čase. Jak blízké si mohou být v čase v soustavě S, aby bylo ještě možné najít soustavu S', v níž nastávají ve stejném místě?

ODST. 38.9 Relativistické skládání rychlostí

26C. Částice se pohybuje podél osy x' soustavy S' rychlostí $0{,}40c$. Soustava S' se pohybuje rychlostí $0{,}60c$ vzhledem k soustavě S. Jaká je rychlost částice v soustavě S?

27C. Soustava S' se pohybuje vzhledem k soustavě S rychlostí $0{,}62c$ ve směru rostoucího x. V soustavě S' je změřena rychlost částice $0{,}47c$ ve směru rostoucího x'. Osy x, x' jsou souhlasně rovnoběžné. (a) Jaká je rychlost částice vzhledem k soustavě S? (b) Jaká by byla rychlost částice vzhledem k S, kdyby se částice pohybovala (rychlostí $0{,}47c$) ve směru *klesajícího* x' v soustavě S'? V obou případech srovnejte vaše odpovědi a předpovědi podle klasických transformačních rovnic.

28C. Dvě částice kosmického záření letěly podél zemské osy. Jedna měla rychlost $0{,}80c$ a dosáhla severního pólu, druhá měla rychlost $0{,}60c$ a dosáhla jižního pólu (obr. 38.23). Jakou relativní rychlostí se částice k sobě blížily? (*Tip*: Je užitečné považovat Zemi a jednu z částic za dvě inerciální vztažné soustavy.)



Obr. 38.23 Cvičení 28

29C. Je zjištěno, že galaxie A se od nás vzdaluje rychlostí $0{,}35c$. Galaxie B, umístěná v přesně opačném směru, se od nás vzdaluje stejnou rychlostí. Jakou rychlost vzdalování najde pozorovatel v galaxii A pro (a) naši Galaxii, (b) pro galaxii B?

30C. Z měření rudého posuvu světla emitovaného kvazarem Q_1 bylo zjištěno, že se od nás vzdaluje rychlostí $0{,}800c$. Kvazar Q_2, který leží v témže směru v prostoru, ale je k nám blíže, se od nás vzdaluje rychlostí $0{,}400c$. Jakou rychlost kvazaru Q_2 by naměřil pozorovatel na kvazaru Q_1?*

31Ú. Kosmická loď, jejíž klidová délka je 350 m, má rychlost $0{,}82c$ vzhledem k jisté vztažné soustavě. Mikrometeorit, který má rovněž rychlost $0{,}82c$ v této soustavě, míjí loď v protisměru. Jak dlouho trvá, než ji mine, podle měření vykonaného na lodi?

32Ú. Má-li družice obletět Zemi na nízké dráze, musí mít rychlost asi 27 000 km/h. Nechť dvě takové družice oblétají Zemi v opačných směrech. (a) Jaká je jejich relativní rychlost, když se míjejí, podle klasické Galileovy transformační rovnice? (b) Jaké relativní chyby se dopustíme, když neužijeme (správné) relativistické transformační rovnice?

33Ú. Speciální kosmická loď je poháněna mohutnými výbuchy; každý zvýší její rychlost o $0{,}5c$. Kolik výbuchů je potřeba, aby loď z klidu překročila rychlost $0{,}999c$?

34Ú. Flotila kosmických lodí, která je dlouhá 1,00 ly (ve své klidové soustavě), se pohybuje rychlostí $0{,}800c$ vzhledem k pozemní stanici S. Posel cestuje zezadu na čelo flotily rychlostí

* Kvazary jsou ve velkých vzdálenostech, při kterých nelze zanedbat zakřivení prostoročasu, jímž se zabývá obecná teorie relativity. Řešení úlohy by proto měla předcházet obecně relativistická analýza pojmu rychlosti (co se rozumí relativní rychlostí vzdálených objektů v zakřiveném prostoročase). V prvním přiblížení, pro informativní odhad, může čtenář tuto komplikaci ignorovat.

$0{,}950c$ vzhledem k S. Jak dlouho trvá jeho cesta, je-li měřena (a) v poslově klidové soustavě, (b) v klidové soustavě flotily, (c) pozorovatelem v soustavě S?

ODST. 38.10 Dopplerův jev pro světlo

35C. Kosmická loď pohybující se od Země rychlostí $0{,}900c$ podává zprávu na frekvenci (měřené v soustavě lodě) 100 MHz. Na jakou frekvenci musejí být pozemští pozorovatelé naladěni, aby zprávu slyšeli?

36C. Ve spektru kvazaru 3C9 se objevují některé běžné vodíkové spektrální čáry, jsou však natolik posunuty ve směru k červenému konci spektra, že pozorované vlnové délky jsou třikrát větší, než jaké se pozorují u vodíkových atomů, které jsou v klidu v laboratoři. (a) Ukažte, že klasická Dopplerova rovnice dává v této situaci relativní rychlost vzdalování větší než c. (b) Za předpokladu, že relativní pohyb 3C9 vzhledem k Zemi je dán čistě vzdalováním, najděte rychlost vzdalování, jakou předvídá relativistická Dopplerova rovnice.

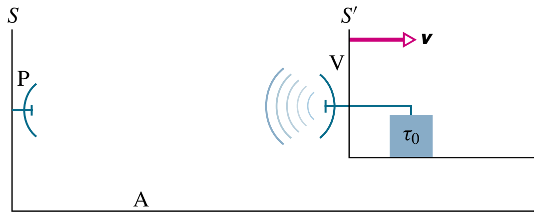
37C. Určete dopplerovský posuv vlnové délky $\lambda - \lambda_0$ (pokud k němu dochází) pro D_2 čáru sodíku (589,00 nm) emitovanou zdrojem pohybujícím se po kružnici konstantní rychlostí $v = 0{,}100c$, jak jej změří pozorovatel umístěný ve středu kružnice.

38Ú. Kosmická loď se vzdaluje od Země rychlostí $0{,}20c$. Cestujícím v lodi se světelný zdroj na zádi lodi jeví jako modrý ($\lambda = 450$ nm). Jakou barvu bude mít tento zdroj pro pozorovatele na Zemi, kteří se dívají za odlétající lodí?

39Ú. Radarový vysílač v místě V je klidný vůči vztažné soustavě S', která se pohybuje doprava rychlostí v vůči vztažné soustavě S (obr. 38.24). Mechanický měřič času (v podstatě hodiny) v soustavě S' s periodou τ_0 (měřenou v S') způsobuje, že vysílač emituje pravidelné radarové pulzy, které se pohybují rychlostí světla a jsou přijímány v P, což je přijímač, který je v klidu v S. (a) Jaká je perioda τ časoměřiče, jak ji určuje pozorovatel, který je v bodě A v klidu v soustavě S? (b) Ukažte, že na přijímači P časový interval mezi pulzy přicházejícími z V není τ ani τ_0, ale

$$\tau_P = \tau_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}.$$

(c) Vysvětlete, proč přijímač P a pozorovatel A, kteří jsou v téže vztažné soustavě, měří rozličnou periodu vysílače. (*Tip*: Hodiny a radarový pulz nejsou totéž.)



Obr. 38.24 Úloha 39

ODST. 38.12 Nový pohled na energii

40C. Jakou práci je třeba vykonat, aby se rychlost elektronu změnila z klidu na (a) $0{,}50c$, (b) $0{,}990c$, (c) $0{,}999\,0c$?

41C. Elektron se pohybuje rychlostí, jakou by mohl oběhnout Zemi kolem rovníku za 1,00 s. (a) Jaká je tato rychlost v poměru k rychlosti světla? (b) Jaká je jeho kinetická energie E_k? (c) Kolikaprocentní chybu uděláme, užijeme-li k výpočtu E_k klasického vzorce?

42C. Najděte rychlostní parametr β a Lorentzův faktor γ pro elektron, jehož kinetická energie je (a) 1,00 keV, (b) 1,00 MeV, (c) 1,00 GeV.

43C. Najděte rychlostní parametr β a Lorentzův faktor γ pro částici, jejíž kinetická energie je 10,0 MeV, je-li touto částicí (a) elektron, (b) proton, (c) α-částice.

44C. Jaká je rychlost elektronu, jehož kinetická energie je 100 MeV?

45C. Částice má rychlost $0{,}990c$ v laboratorní vztažné soustavě. Jaká je její kinetická energie, celková energie a hybnost, je-li touto částicí (a) proton, (b) elektron.

46C. V roce 1979 byla spotřeba elektrické energie v USA asi $2{,}2 \cdot 10^{12}$ kW·h. Jaká hmotnost je ekvivalentní této energii? Je pro vaši odpověď důležité, zda tato energie byla získána spalováním fosilních paliv, v jaderných elektrárnách, nebo v hydrocentrálách?

47C. Kvazary jsou považovány za jádra aktivních galaxií v raných stadiích jejich vývoje. Typický kvazar vyzařuje energii s výkonem 10^{41} W. Jak rychle se mění hmotnost kvazaru ztrátou této energie? Jaký násobek hmotnosti Slunce za rok kvazar vyzáří?

48Ú. Jaká práce se musí vykonat, aby se rychlost elektronu zvýšila (a) z $0{,}18c$ na $0{,}19c$, (b) z $0{,}98c$ na $0{,}99c$? Povšimněte si, že vzrůst rychlosti je v obou případech $0{,}01c$.

49Ú. Jaká je rychlost částice, (a) jejíž kinetická energie je rovna dvojnásobku její klidové energie, (b) jejíž celková energie je rovna dvojnásobku její klidové energie?

50Ú. Do částice o hmotnosti m, která je v klidu v inerciální soustavě S, narazí stejná částice rychlostí $c/2$. Jakou rychlost vůči S má jejich *těžišťová soustava* S_T? (Stejně jako v klasické mechanice je v S_T úhrnná hybnost systému před srážkou rovna nule. Jak tomu bude po srážce? Co když srážka nebude pružná?)

51Ú. (a) Jaké napětí urychlí elektron na rychlost c podle klasické fyziky? (b) Jakou rychlost získá při tomto napětí elektron ve skutečnosti?

52Ú. Částice o hmotnosti m má hybnost mc. Určete její (a) Lorentzův faktor, (b) rychlost, (c) kinetickou energii?

53Ú. Jaká musí být hybnost částice o hmotnosti m, aby její celková energie třikrát převyšovala klidovou energii?

54Ú. Uvažujme následující částice pohybující se v prázdném prostoru: 2,0 eV foton, 0,40 MeV elektron, 10 MeV proton. (a) Která částice se pohybuje nejrychleji? (b) Která nejpomaleji? (c) Která má největší hybnost? (d) Která má nejmenší hybnost? (*Tip*: Foton je částice světla s nulovou klidovou hmotností.)

55Ú. Aspirinová tableta má hmotnost 320 mg. Kolik kilometrů bychom mohli ujet v automobilu při spotřebě ekvivalentní energie? Předpokládejme, že v automobilu 1 litr paliva vystačí na 13 km jízdy a energie získaná z paliva je $3{,}5 \cdot 10^7$ J/l.

56Ú. (a) Je-li změřena kinetická energie E_k a hybnost p částice, mělo by být možné najít její hmotnost m a částici tak identifikovat. Ukažte, že platí

$$m = \frac{(pc)^2 - E_k^2}{2E_k c^2}.$$

(b) Ukažte, že tento výraz se při $u/c \to 0$, kde u je rychlost částice, redukuje na výsledek, který bylo možno očekávat. (c) Najděte hmotnost částice, jejíž kinetická energie je 55,0 MeV a jejíž hybnost je 121 MeV/c. Vyjádřete svou odpověď pomocí hmotnosti elektronu.

57Ú. Při vysokoenergetické srážce mezi částicí kosmického záření a částicí v horní vrstvě zemské atmosféry 120 km nad hladinou moře vznikl pion. Pion má celkovou energii $E = 1{,}35 \cdot 10^5$ MeV a pohybuje se svisle směrem dolů. Ve vlastní klidové soustavě se rozpadá za 35,0 ns po svém vzniku. Jak vysoko nad hladinou moře dojde k rozpadu (ve vztažné soustavě spojené se Zemí)? Klidová energie pionu je 139,6 MeV.

58Ú. Průměrná doba života mionů v klidu je 2,20 μs. Laboratorní měření mionů pohybujících se ve svazku vystupujícím z urychlovače dávají průměrnou dobu života mionů 6,90 μs. Jaká je (a) rychlost, (b) kinetická energie, (c) hybnost těchto mionů vzhledem k laboratoři? Hmotnost mionu je 207krát větší než hmotnost elektronu.

59Ú. (a) Kolik energie se uvolní při výbuchu jaderné bomby obsahující 3,0 kg štěpného materiálu? Předpokládejme, že 0,10 % hmotnosti se přemění v uvolněnou energii. (b) Jaká hmotnost TNT by při explozi uvolnila stejnou energii? Předpokládejme, že každý mol TNT uvolňuje při explozi 3,4 MJ. Molekulová hmotnost TNT je 0,227 kg/mol. (c) Kolikrát efektivnější je jaderná exploze než výbuch TNT při stejné hmotnosti výbušniny? Porovnejte zlomek hmotnosti, který se v obou případech změní v energii.

60Ú. V článku 29.5 jsme ukázali, že částice o náboji Q a o hmotnosti m pohybující se rychlostí v kolmo k homogennímu magnetickému poli B se pohybuje po kružnici poloměru r, který je dán rov. (29.16)

$$r = \frac{mv}{QB}.$$

Ukázali jsme také, že perioda T kruhového pohybu je nezávislá na rychlosti částice. Tyto výsledky platí pouze tehdy, když $v \ll c$. Pro rychlejší částice musíme k výpočtu poloměru kruhové dráhy použít vzorce

$$r = \frac{p}{QB} = \frac{m(\gamma v)}{QB} = \frac{mv}{QB\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Tato rovnice platí při všech rychlostech. Vypočtěte poloměr dráhy 10,0 MeV elektronu, který se pohybuje kolmo na homogenní magnetické pole o indukci 2,20 T užitím (a) klasických, (b) relativistických vzorců. (c) Vypočtěte periodu $T = 2\pi r/v$ kruhového pohybu. Je výsledek nezávislý na rychlosti elektronu?

61Ú. Ionizační měření ukazují, že jistá jaderná částice o malé hmotnosti má dvojnásobný elementární náboj $Q = 2e$ a pohybuje se rychlostí $v = 0{,}710c$. Poloměr křivosti její trajektorie v magnetickém poli o indukci 1,00 T je 6,28 m. (Trajektorie je kružnice, jejíž rovina je kolmá k magnetickému poli.) Najděte hmotnost částice a stanovte, o jakou částici jde. (*Tip*: Jaderné částice o nízké hmotnosti jsou složeny z neutronů (které nemají náboj) a protonů (s nábojem $+e$) ve zhruba stejném množství. Považujte hmotnost každé z těchto částic za 1,00 u. Viz také úlohu 60.)

62Ú. 10 GeV proton kosmického záření doletěl k Zemi s rychlostí $\boldsymbol{v}$ kolmou k zemskému magnetickému poli indukce $\boldsymbol{B}$ v oblasti, kde průměrná hodnota magnetické indukce Země je 55 μT. Jaký je poloměr zakřivení dráhy protonu v této oblasti? (Viz úlohu 60.)

63Ú. 2,50 MeV elektron se pohybuje kolmo k magnetickému poli na dráze, jejíž poloměr křivosti je 3,0 cm. Jaké je magnetické pole $\boldsymbol{B}$? (Viz úlohu 60.)

64Ú. Protonový synchrotron ve Fermilabu urychluje protony na kinetickou energii 500 GeV. Při tak velké energii jsou relativistické jevy důležité; například když roste rychlost protonu, roste rovněž čas, po který proton obíhá kruhovou dráhu v synchrotronu. V cyklotronu, kde magnetické pole a oscilátor mají pevně dané parametry, vede toto časové prodloužení ke ztrátě synchronizace mezi obíháním protonu a oscilátorem. To vylučuje opakované urychlování; proton tak nedosáhne energie vyšší než 500 GeV. V synchrotronu se však velikost magnetického pole a frekvence mění tak, aby prodloužení času dovolily.

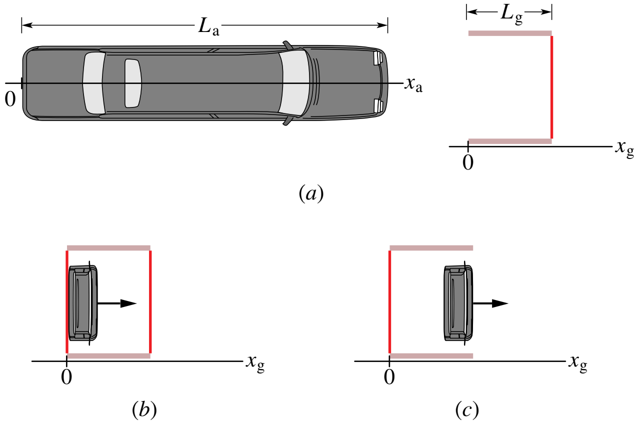
Při energii 500 GeV vypočtěte (a) Lorentzův faktor, (b) rychlostní parametr, (c) magnetické pole na orbitě protonu, která má poloměr křivosti 750 m. (Viz úlohu 60, za klidovou energii protonu dosaďte 938,3 MeV.)

PRO POČÍTAČ

65Ú. Kosmická sonda opouští Zemi a letí rychlostí $0{,}97c$. Hodiny na Zemi v sondě byly na počátku nastaveny na nulu. Každých 6,0 h kontrola vysílá signál (šířící se rychlostí světla) k sondě a žádá si odpověď. Sonda okamžitě posílá zpět odezvu zahrnující údaj jejích hodin v době, kdy byl zachycen signál. Pro každý z prvních pěti signálů vypočtěte čas na pozemských hodinách, v němž odpověď dorazila na Zemi, a čas, který je v odpovědi sdělován. Vypočtěte také vzdálenost sondy od Země v době, kdy každý z daných signálů je sondou zachycen.

PROBLÉM

66. *Problém auta v garáži.* Automobilista právě koupil nejdelší limuzínu světa, jejíž vlastní délka je $L_a = 30{,}5$ m. Na obr. 38.25a ji vidíme parkovat před garáží, jejíž vlastní délka je $L_g = 6{,}00$ m. Garáž má přední vrata (která vidíme otevřena) a zadní vrata (která vidíme zavřena). Limuzína je zřejmě delší než garáž. Přesto garážmistr, který něco ví o relativistické kontrakci délky, uzavírá sázku s automobilistou, že auto lze umístit do garáže, i když budou oboje vrata zavřena. Automobilista, který ve fyzice tak daleko nedošel, prohlašuje takovou věc za principiálně nemožnou.



Obr. 38.25 Úloha 66

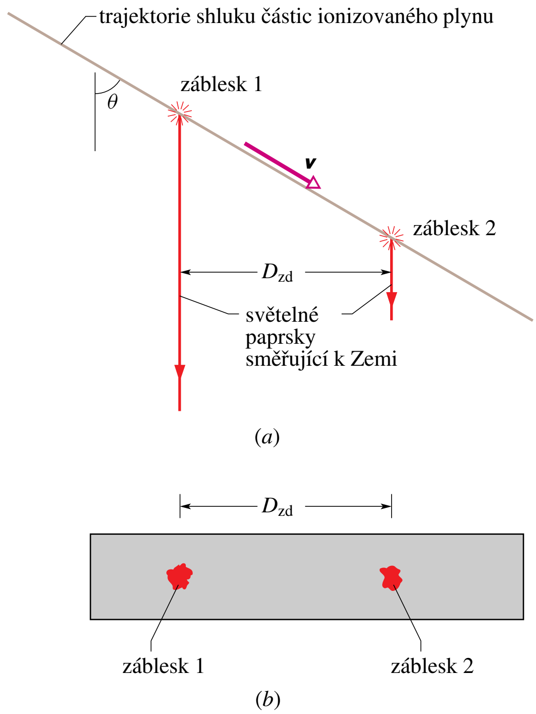
Abychom rozebrali představy garážmistra, spojme osu x_a s limuzínou, nechť $x_a = 0$ na jejím zadním nárazníku, dále spojme osu x_g s garáží a nechť $x_g = 0$ na jejích (nyní otevřených) předních vratech. Automobilista vyjede s limuzínou přímo proti předním vratům rychlostí $0{,}998\,0c$ (což je pochopitelně technicky i finančně fantazie). Automobilista je v klidu ve vztažné soustavě x_a, garážmistr ve vztažné soustavě x_g.

Uvažujme dvě události. *Událost 1*: Když zadní nárazník projede předními vraty, tato vrata se zavřou. Nechť čas této události je pro oba pány nulový: $t_{g1} = t_{a1} = 0$. Událost nastává v místě $x_a = x_g = 0$. Obr. 38.25b ukazuje událost 1 z hlediska vztažné soustavy x_g. *Událost 2*: Když přední nárazník dosáhne zadních vrat, vrata se otevřou. Obr. 38.25c ukazuje událost 2 z hlediska vztažné soustavy x_g.

Jaké jsou podle garážmistra (a) délka limuzíny, (b) prostoročasové souřadnice x_{g2} a t_{g2} události 2? (c) Po jaký čas je limuzína „uvězněna“ v garáži s oběma vraty zavřenými?

Uvažujme nyní situaci z hlediska vztažné soustavy x_a, v níž se garáž řítí kolem limuzíny rychlostí $-0{,}998c$. Odpovězte z hlediska automobilisty na otázky: (d) Jaká je délka letící garáže, (e) jaké jsou prostoročasové souřadnice x_{a2} a t_{a2} události 2, (f) je limuzína po nějaký čas v garáži s oběma vraty zavřenými, (g) která z událostí 1, 2 nastala dříve? (h) Popište stručně události 1, 2, jak je vidí automobilista. (Jsou tyto události příčinně závislé, tj. může jedna z nich způsobit druhou?) (i) A poslední otázka: Kdo vyhrál sázku?

67. *Nadsvětelné výtrysky.* Obr. 38.26a ukazuje dráhu shluku částic ve výtrysku ionizovaného plynu, který byl vyvržen z galaxie. Shluk se pohybuje konstantní rychlostí $\boldsymbol{v}$ pod úhlem θ ve směru k Zemi. Shluk náhodně emituje světelné záblesky, které můžeme zaznamenat na Zemi. Na obr. 38.26a jsou vyznačeny dva záblesky, oddělené dobou t, která je měřena v nehybné soustavě poblíž záblesků. Záblesky jsou znázorněny na obr. 38.26b, jako bychom je fotografovali na týž film, nejprve když světlo záblesku 1 dostihne Zemi a později, když ji dostihne světlo záblesku 2. Zdánlivá vzdálenost D_{zd}, kterou projde shluk mezi dvěma záblesky, je průmět délky dráhy shluku, jak jej vidí pozorovatel. Zdánlivý čas T_{zd} mezi záblesky je rozdíl příchozích časů světla od těchto záblesků. Zdánlivá rychlost shluku je tedy $V_{zd} = D_{zd}/T_{zd}$. Jak budou vyjádřeny pomocí v, t a θ (a) D_{zd}, (b) T_{zd}? (c) Odhadněte V_{zd} pro $v = 0{,}980c$ a $\theta = 30{,}0°$.



Obr. 38.26 Úloha 67