

# 16

## *Kmity*



---

*Stalo se to v roce 1989, v době, kdy se v okolí San Franciska připravovalo zahájení třetí části Světových her. Oblast byla zasažena seizmickými vlnami ze 100 km vzdáleného ohniska zemětřesení poblíž Loma Prieta. Zemětřesení o síle 7,1 stupňů způsobilo rozsáhlé škody a zabilo 67 lidí. Na fotografii vidíme část 1,4 km dlouhého úseku Nimitzovy dálnice, kde došlo k desítkám smrtelných zranění, když se horní betonová deska zřítily na spodní a zasáhla motoristy. Příčinou zřícení byly nepochybně prudké otřesy, vyvolané seizmickými vlnami. Avšak proč byl právě tento úsek tak vážně poškozen, jestliže ostatní úseky dálnice s téměř totožnou konstrukcí zřícení unikly?*

---

## 16.1 KMITÁNÍ

Příklady kmitání, opakujícího se pohybu, nás obklopují ze všech stran. Pozorujeme kývání lustrů, houpání zakotvených člunů, pulzující píсты automobilových motorů. Známe chvění kytarových strun, bubnů, zvonů, membrán v telefonních sluchátkách a v reproduktorech, křemenných krystalů v náramkových hodinkách. Méně evidentní je kmitání molekul vzduchu, které přenáší zvukové rozruchy, kmitání atomů v pevné látce, zodpovědné za vjem teploty, a kmitání elektronů v rádiových anténách a televizních vysílačích.

Kmitání není omezeno na hmotné objekty, jako jsou houslové struny a elektrony. Periodický pohyb pozorujeme také u jevů spojených s šířením světla, rádiových vln, rentgenového záření a  $\gamma$ -záření. Tento druh oscilací budeme studovat v následujících kapitolách. Budou nám tam velmi užitečné analogie s kmitáním mechanických systémů, na které se zaměříme v této kapitole.

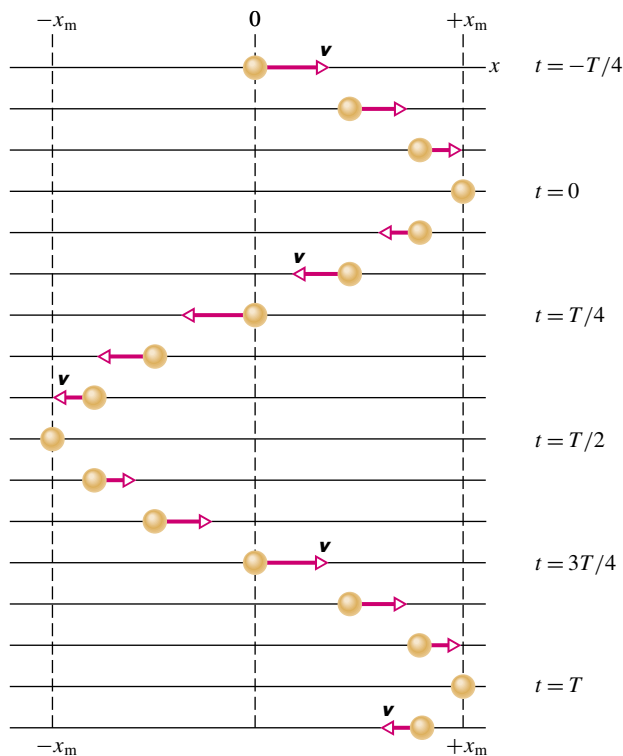
V reálném světě je kmitání obvykle *tlumené*: třecí síly postupně přeměňují mechanickou energii na teplo a pohyb ustává. Takové ztráty mechanické energie nemůžeme nikdy zcela vyloučit, energii však můžeme doplňovat z vhodného zdroje. Například děti na obr. 16.1 dovedou při houpání „pumpovat“, tj. švihnout nohama nebo se skrčit podle okamžitého pohybu houpačky, a tím kmitání udržují nebo i zvětšují. Přeměňují tak vlastně biochemickou energii na mechanickou energii kmitajícího systému.



**Obr. 16.1** Dítě se brzy naučí dodávat houpačce energii a udržovat tím její pohyb.

## 16.2 HARMONICKÝ POHYB

Obr. 16.2 předvádí sérii „snímků“ kmitajícího systému: částice se opakovaně pohybuje tam a zpět kolem počátku osy  $x$ .



**Obr. 16.2** Série „snímků“ (vytvořených po uplynutí stejných časových intervalů) ukazuje polohu částice, která se pohybuje tam a zpět kolem počátku osy  $x$ . Krajními polohami jsou body  $-x_m$  a  $+x_m$ . Délky šipek na obrázku jsou jednotně škálovány a ukazují rychlost částice v daných bodech. V počátku má částice největší rychlost. V polohách  $\pm x_m$  je její rychlost nulová. Jestliže zvolíme počátek odečítání času v poloze  $+x_m$ , částice se do ní vrátí poprvé v čase  $t = T$ , kde  $T$  je perioda pohybu. Pohyb, ke kterému došlo v průběhu právě uplynulé periody, se pak opakuje.

V tomto odstavci pohyb částice pouze popíšeme. Později budeme studovat, jak lze dané kmitání vyvolat.

Začneme zavedením důležitého parametru kmitání, jeho **frekvence** neboli **kmitočtu**. Frekvence udává počet kmitů, které jsou dokončeny v průběhu každé sekundy. Frekvenci označujeme symbolem  $f$ , její jednotkou v soustavě SI je **hertz** (zkratka Hz). Platí tedy

$$1 \text{ hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ kmit za sekundu} = 1 \text{ s}^{-1}. \quad (16.1)$$

S frekvencí souvisí **perioda** pohybu  $T$ . Ta udává dobu, za kterou se uskuteční jeden úplný kmit (jeden **cyklus**). To znamená

$$T = \frac{1}{f}. \quad (16.2)$$

Jakýkoliv pohyb, který se v pravidelných intervalech opakuje, nazýváme **pohyb periodický**. My zde budeme studovat zvláštní případ periodického pohybu: opakující se úsek

bude vždy odpovídat situaci na obr. 16.2. Pro tento případ je časová závislost výchylky částice určena funkcí

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{výchylka}), \quad (16.3)$$

kde  $x_m$ ,  $\omega$  a  $\varphi$  jsou dané konstanty. Tento pohyb budeme nazývat **jednoduchý harmonický pohyb** nebo prostě **harmonický pohyb**.

Veličina  $x_m$  v rov. (16.3) je kladná konstanta, jejíž hodnota závisí na počátečních podmínkách. Nazýváme ji **amplituda**; spodní index  $m$  znamená *maximum*. **Amplituda výchylky** totiž udává velikost největší možné výchylky částice v obou směrech od počátku. Funkce kosinus v rov. (16.3) se mění mezi krajními hodnotami  $\pm 1$ , takže výchylka  $x(t)$  se mění mezi krajními hodnotami  $\pm x_m$ . Vidíme to i na obr. 16.2.

Časově závislý výraz  $(\omega t + \varphi)$  v rov. (16.3) se nazývá **fáze** pohybu, konstanta  $\varphi$  je **počáteční fáze**. Její hodnota závisí na výchylce a rychlosti částice v čase  $t = 0$ . Pro oba průběhy  $x(t)$  na obr. 16.3a je fázová konstanta nulová (srovnajme tyto průběhy a hodnoty získané z rov. (16.3) pro  $t = 0$ ).

Zbývá vysvětlit konstantu  $\omega$ . Po uplynutí jedné periody  $T$  se musí částice navrátit do svého výchozího stavu. Z toho plyne, že pro libovolné  $t$  se musí také  $x(t)$  rovnat  $x(t + T)$ . Položme pro jednoduchost v rov. (16.3)  $\varphi = 0$ . Z uvedených podmínek potom dostaneme

$$x_m \cos(\omega t) = x_m \cos(\omega(t + T)).$$

Funkce kosinus má periodu  $2\pi$  rad. Předchozí rovnice tedy dává

$$\omega t + 2\pi = \omega(t + T)$$

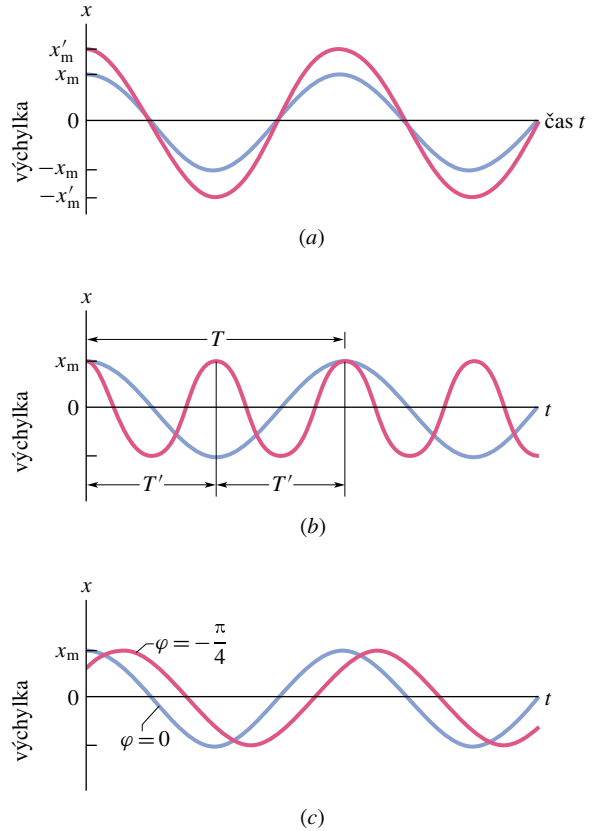
a odtud

$$\omega T = 2\pi.$$

Uvážíme-li ještě rov. (16.2), máme celkově

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \quad (16.4)$$

Veličina  $\omega$  se nazývá **úhlová frekvence** (také **kruhová frekvence** či **úhlový kmitočet**) pohybu; její jednotka v soustavě SI je radián za sekundu. (Máme-li být tedy důslední, musíme vyjadřovat fázi  $\varphi$  v radiánech.) Na obr. 16.3 jsou porovnány dva harmonické pohyby, které se liší buď jen svou amplitudou, nebo jen svou periodou (a tedy frekvencí a úhlovou frekvencí), anebo jen fázovou konstantou.



**Obr. 16.3** Modrá křivka je ve všech třech případech zakreslena podle rov. (16.3) s  $\varphi = 0$ . (a) Červená křivka se liší od modré *pouze* tím, že pro ni je amplituda  $x'_m$  větší. (b) Červená křivka se liší od modré *pouze* tím, že pro ni je perioda  $T' = T/2$ . (c) Červená křivka se liší od modré *pouze* tím, že pro ni je  $\varphi = -\pi/4$  rad a nikoliv nula.

**KONTROLA 1:** Částice vykonává harmonický pohyb s periodou  $T$  (podobně jako na obr. 16.2). V čase  $t = 0$  se nacházela na souřadnici  $-x_m$ . Rozhodněte, zda ji v čase (a)  $t = 2,00T$ , (b)  $t = 3,50T$ , (c)  $t = 5,25T$  nalezneme v bodě o souřadnici  $-x_m$ , o souřadnici  $x_m$ , v počátku souřadnic, mezi  $-x_m$  a 0, mezi 0 a  $x_m$ .

## Rychlost harmonického pohybu

Rychlost částice dostaneme jako obvykle — derivací výrazu pro souřadnici. V případě harmonického pohybu jde

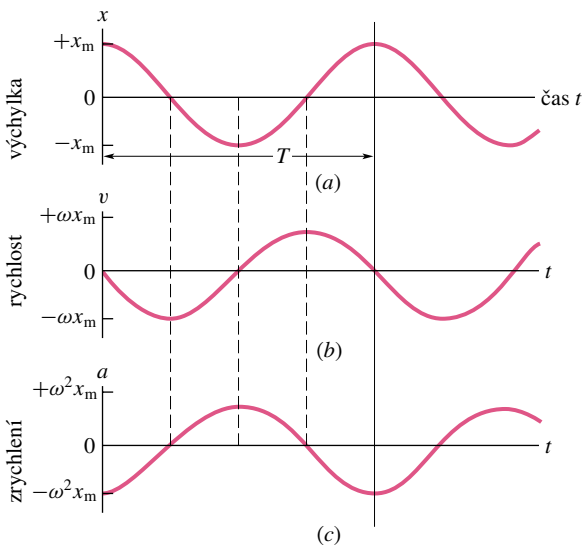
tedy o derivaci rov. (16.3):

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x_m \cos(\omega t + \varphi))$$

neboli

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{rychlost}). \quad (16.5)$$

Na obr. 16.4a je graf funkce odpovídající rov. (16.3) s  $\varphi = 0$ . Obr. 16.4b ukazuje rov. (16.5), rovněž pro  $\varphi = 0$ . Podobně jako jsme nazvali  $x_m$  v rov. (16.3) amplitudou, nazveme nyní kladnou veličinu  $\omega x_m$  v rov. (16.5) **amplitudou rychlosti**  $v_m$ . Na obr. 16.4b vidíme, jak se rychlost kmitající částice mění mezi hodnotami  $\pm v_m$  (tj.  $\pm \omega x_m$ ). Na tomto obrázku si také všimněme, že křivka odpovídající  $v(t)$  je *posunuta* o čtvrtinu periody doleva vzhledem ke křivce  $x(t)$ : jestliže je velikost výchylky největší (tj.  $x(t) = x_m$ ), je velikost rychlosti nejmenší (tj.  $v(t) = 0$ ). A v okamžiku, kdy je velikost výchylky nejmenší (tj. nulová), je velikost rychlosti největší (je rovna  $v_m = \omega x_m$ ).



**Obr. 16.4** (a) Výchylka částice  $x(t)$  pro harmonický pohyb s fázovou konstantou  $\varphi$  rovnou nule. Perioda  $T$  ohraničuje jeden úplný kmit. (b) Rychlost částice  $v(t)$  a (c) zrychlení částice  $a(t)$  pro tento pohyb.

### Zrychlení harmonického pohybu

Derivací rychlosti dostaneme zrychlení částice. V případě harmonického pohybu tedy derivujeme rov. (16.5) a dostaneme

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-\omega x_m \sin(\omega t + \varphi))$$

neboli

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{zrychlení}). \quad (16.6)$$

Na obr. 16.4c je graf funkce odpovídající rov. (16.6), opět pro případ  $\varphi = 0$ . Kladná veličina  $\omega^2 x_m$  v rov. (16.6) se nazývá **amplituda zrychlení**  $a_m$ . Zrychlení částice se tedy mění v rozmezí  $\pm a_m$  (tj.  $\pm \omega^2 x_m$ ); vidíme to také na obr. 16.4c. Navíc si všimněme, že křivka  $a(t)$  je posunuta vzhledem ke křivce  $v(t)$  o čtvrtinu periody doleva.

V této chvíli můžeme propojit rov. (16.3) a (16.6); dospějeme ke vztahu

$$a(t) = -\omega^2 x(t). \quad (16.7)$$

Tato rovnice je jakýmsi „puncem“ harmonického pohybu: zrychlení částice je úměrné výchylce a má opačné znaménko, přitom konstantou úměrnosti je druhá mocnina úhlové frekvence. Největší kladná hodnota výchylky tedy odpovídá zápornému zrychlení s největší velikostí a naopak. Je-li výchylka částice nulová, je její zrychlení také nulové. Tato tvrzení ilustruje obr. 16.4.

### RADY A NÁMĚTY

#### Bod 16.1: Fáze

Všimněte si, jakou roli hraje při kreslení  $x(t)$  konstanta  $\varphi$ . Jestliže je  $\varphi = 0$ , graf funkce  $x(t)$  bude vždy podobný křivce na obr. 16.4a, tj. typické křivce pro funkci kosinus. *Záporná* hodnota  $\varphi$  posune křivku podél časové osy *doprava* (jako na obr. 16.3c), zatímco *kladná* hodnota  $\varphi$  ji posune *doleva*.

Uvažme dva harmonické pohyby, lišící se pouze v této konstantě. Říkáme o nich, že mají *fázový rozdíl*, že jedna vůči druhé má *fázový posuv*, že jsou navzájem *fázově posunuty* neboli že jsou navzájem **rozfázovány**. Například křivky na obr. 16.3c mají fázový rozdíl  $\pi/4$  rad.

Harmonický pohyb se opakuje po uplynutí každé periody  $T$  a funkce kosinus se opakuje po každých  $2\pi$  rad. To znamená, že perioda  $T$  odpovídá fázovému rozdílu  $2\pi$  rad. Na obr. 16.4 je křivka  $x(t)$  posunuta vzhledem ke křivce  $v(t)$  o čtvrtinu periody doprava neboli je vzhledem k ní fázově posunuta o  $-\pi/2$  rad. Současně je tato křivka posunuta vzhledem k  $a(t)$  o polovinu periody doprava neboli je vzhledem k  $a(t)$  posunuta o  $-\pi$  rad. Fázový posuv  $2\pi$  rad způsobí, že se daný harmonický pohyb ztotožní sám se sebou — jinými slovy, vůbec se nezmění.

## 16.3 POHYBOVÁ ROVNICE PRO HARMONICKÝ POHYB

Nyní již víme, jak se zrychlení částice mění s časem. Druhý Newtonův zákon nám odpoví na otázku, jaká síla musí na

částici působit, aby jí bylo udělováno právě toto očekávané zrychlení. Z Newtonova zákona a z rov. (16.6) dostaneme pro harmonický pohyb

$$F = ma = -(m\omega^2)x. \quad (16.8)$$

Síla je tedy přímo úměrná výchylce a opačně orientovaná:

$$F = ma = -kx. \quad (16.9)$$

To odpovídá Hookovu zákonu pro pružinu, jejíž tuhost je v daném případě

$$k = m\omega^2. \quad (16.10)$$

Rov. (16.9) tak vlastně představuje alternativní definici harmonického pohybu. Ta zní:

Částice o hmotnosti  $m$  vykonává harmonický pohyb, jestliže na ni působí síla přímo úměrná výchylce částice z rovnovážné polohy a orientovaná proti výchylce.

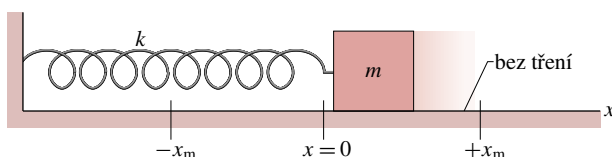
Soustava pružina + těleso na obr. 16.5 se nazývá **harmonický**, někdy též **lineární oscilátor**. Slovo „lineární“ poukazuje na skutečnost, že síla  $F$  je úměrná první (a nikoliv nějaké jiné) mocnině výchylky  $x$ . Jeho úhlová frekvence  $\omega$  souvisí vztahem (16.10) s tuhostí pružiny  $k$  a s hmotností tělesa  $m$ . Dostaneme tedy

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{úhlová frekvence}). \quad (16.11)$$

Kombinací rov. (16.4) a (16.11) pak ihned získáme periodu harmonického oscilátoru na obr. 16.5:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{perioda}). \quad (16.12)$$

Rov. (16.11) říká totéž, co rov. (16.12): velkou hodnotu úhlové frekvence (a tedy malou periodu) dostaneme v případě tuhé pružiny (velké  $k$ ) a lehkého tělesa (malé  $m$ ).



**Obr. 16.5** Harmonický oscilátor. Jakmile poněkud vychýlíme těleso na stranu a poté je uvolníme, vznikne podobně jako u částice na obr. 16.2 harmonický pohyb. Výchylka tělesa je určena rov. (16.3).

U jakéhokoliv kmitajícího systému tohoto typu, ať už je to harmonický oscilátor na obr. 16.5, skokanské prkno nebo houslová struna, najdeme vždy jednak jistou „tendenci k návratu“, jednak „setrvačnost“. V případě oscilátoru na obr. 16.5 jsou obě tyto tendence spojeny s odlišnými složkami kmitajícího systému: „tendence k návratu“ je reprezentována výhradně nehmotnou pružinou a „setrvačnost“ je vázána výhradně na hmotné těleso. V případě houslové struny, jak uvidíme v kap. 17, jsou obě zmíněné tendence vázány na samotnou strunu. Jsou ovšem i jiné mechanismy kmitů. Např. při **relaxačních kmitech** se pro pohybující se předmět vždy v okolí krajní polohy změni „pravidla hry“, podobně u třecích tónů se pravidelně odtrhují víry od překážky v proudění vzduchu. Zde je nebudeme podrobněji rozebírat.

**KONTROLA 2:** Který z následujících vztahů mezi silou  $F$ , působící na částici, a polohou částice  $x$ , popisuje harmonický pohyb: (a)  $F = -5x$ , (b)  $F = -400x^2$ , (c)  $F = 10x$ , (d)  $F = 3x^2$ ?

### PŘÍKLAD 16.1

Těleso o hmotnosti  $m = 680$  g je připojeno k pružině tuhosti  $k = 65$  N·m<sup>-1</sup>. Těleso, pohybující se na hladké podložce, vychýlíme o  $x = 11$  cm z rovnovážné polohy  $x = 0$ . V nové poloze je těleso v klidu. Poté jej v čase  $t = 0$  uvolníme.

(a) Jakou silou působí v okamžiku uvolnění pružina na těleso?

**ŘEŠENÍ:** Podle Hookova zákona platí

$$\begin{aligned} F &= -kx = -(65 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1})(0,11 \text{ m}) = \\ &= -7,2 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Znaménko minus nám připomíná, že síla a výchylka mají opačnou orientaci. Skutečně, pružina působí na těleso silou, která směřuje k rovnovážné poloze, zatímco výchylka směřuje od rovnovážné polohy.

(b) Jaká je úhlová frekvence, frekvence a perioda vzniklého kmitání?

**ŘEŠENÍ:** Podle rov. (16.11) máme

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{(65 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1})}{(0,68 \text{ kg})}} = \\ &= 9,78 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 9,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Frekvenci nyní dostaneme z rov. (16.4):

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{(9,78 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1})}{2\pi} = \\ &= 1,56 \text{ Hz} \doteq 1,6 \text{ Hz}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Perioda je převrácenou hodnotou frekvence:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{(1,56 \text{ Hz})} = 0,64 \text{ s} = 640 \text{ ms.} \quad (\text{Odpověď})$$

(c) Určete amplitudu výchylky.

**ŘEŠENÍ:** V čl. 8.4 jsme zkoumali mechanickou energii soustavy pružina + těleso, podobné lineárnímu oscilátoru na obr. 16.5. Pokud neuvažujeme tření, mechanická energie se během pohybu zachovává. V našem případě je těleso uvolněno s nulovou počáteční rychlostí v okamžiku, kdy je vzdáleno 11 cm od rovnovážné polohy. Má tedy v tomto okamžiku nulovou kinetickou energii a má ji také nulovou, kdykoliv se později opět nachází 11 cm od rovnovážné polohy. Jeho největší možná vzdálenost od rovnovážné polohy je tedy 11 cm, tj.

$$x_m = 11 \text{ cm.} \quad (\text{Odpověď})$$

(d) Určete maximální rychlost kmitajícího tělesa.

**ŘEŠENÍ:** Amplituda rychlosti je určena rov. (16.5). V našem případě

$$v_m = \omega x_m = (9,78 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})(0,11 \text{ m}) = 1,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (\text{Odpověď})$$

Těleso má tuto největší možnou rychlost v okamžiku, kdy právě mívá počátek osy  $x$ . Ukazuje to také srovnání obr. 16.4a a 16.4b; největší rychlost odpovídá  $x = 0$ .

(e) Určete maximální zrychlení tělesa.

**ŘEŠENÍ:** Amplituda zrychlení je určena rov. (16.6). V našem případě

$$a_m = \omega^2 x_m = (9,78 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})^2(0,11 \text{ m}) = 11 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}. \quad (\text{Odpověď})$$

Těleso má toto (co do velikosti) největší možné zrychlení, kdykoliv se nachází v bodech obrátů. V těchto bodech je také největší síla, kterou na těleso působí pružina. Ukazuje to také srovnání obr. 16.4a a 16.4c; výchylka a zrychlení nabývají svých největších i nejmenších hodnot současně.

(f) Jaká je fázová konstanta pohybu  $\varphi$ ?

**ŘEŠENÍ:** V čase  $t = 0$ , tj. v okamžiku uvolnění tělesa, nabývala jeho výchylka  $x$  své maximální hodnoty  $x_m$ . Rychlost  $v$  tělesa byla nulová. Tyto dvě relace se nazývají **počáteční podmínky**. Jestliže je uplatníme postupně v rov. (16.3) a (16.5), dostaneme

$$1 = \cos \varphi \quad \text{a} \quad 0 = \sin \varphi.$$

Nejmenší úhel, který splňuje obě tyto podmínky, je

$$\varphi = 0. \quad (\text{Odpověď})$$

(Podmínky jsou splněny také pro libovolný celý násobek úhlu  $2\pi$  rad.)

### PŘÍKLAD 16.2

Uvažujme harmonický oscilátor na obr. 16.5. V čase  $t = 0$  je výchylka  $x(0)$  rovna  $-8,5$  cm, rychlost  $v(0)$  je  $-0,920$  m $\cdot$ s $^{-1}$  a zrychlení  $a(0)$  je  $+47,0$  m $\cdot$ s $^{-2}$ .

(a) Určete úhlovou frekvenci a frekvenci kmitání.

**ŘEŠENÍ:** V rov. (16.3) položíme  $t = 0$ . Dostaneme

$$x(0) = x_m \cos \varphi. \quad (16.13)$$

Podobně po dosazení  $t = 0$  do rov. (16.5) a (16.6) máme

$$v(0) = -\omega x_m \sin \varphi \quad (16.14)$$

a

$$a(0) = -\omega^2 x_m \cos \varphi. \quad (16.15)$$

Poslední tři rovnice obsahují tři neznámé, jmenovitě  $x_m$ ,  $\varphi$  a  $\omega$ . Postupně je nalezneme všechny, v této části úkolu hledáme pouze úhlovou frekvenci  $\omega$ .

Sestavíme podíl rov. (16.15) a (16.13). Ze vzniklého výrazu vypočteme

$$\omega = \sqrt{-\frac{a(0)}{x(0)}} = \sqrt{-\frac{(47,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})}{(-0,0850 \text{ m})}} = 23,5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (\text{Odpověď})$$

Frekvence  $f$  je určena vztahem (16.4). V našem případě

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{(23,5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})}{2\pi} = 3,74 \text{ Hz.} \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Určete fázovou konstantu  $\varphi$ .

**ŘEŠENÍ:** Nejprve sestavíme podíl rov. (16.14) a (16.13):

$$\frac{v(0)}{x(0)} = \frac{-\omega x_m \sin \varphi}{x_m \cos \varphi} = -\omega \operatorname{tg} \varphi.$$

Z tohoto vztahu nyní vypočteme  $\operatorname{tg} \varphi$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{v(0)}{\omega x(0)} = \frac{-(-0,920 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})}{(23,5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})(-0,0850 \text{ m})} = -0,461.$$

Máme tak zatím dvě možná řešení

$$\varphi = -25^\circ \quad \text{a} \quad \varphi = 155^\circ.$$

V následující části úlohy rozhodneme, která z obou fázových konstant je správná.

(c) Určete amplitudu kmitání  $x_m$ .

**ŘEŠENÍ:** Vyjdeme z rov. (16.13) a prozatímně dosadíme  $\varphi = 155^\circ$ :

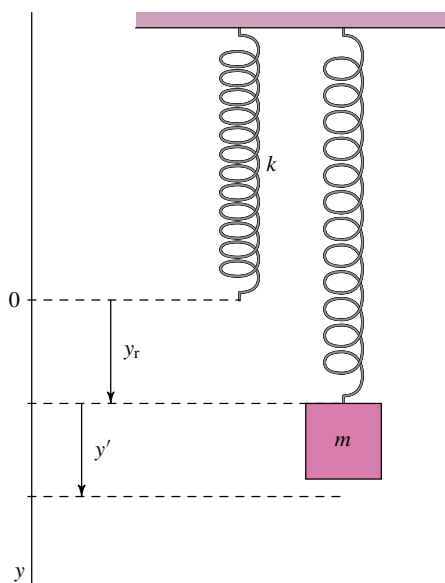
$$x_m = \frac{x(0)}{\cos \varphi} = \frac{(-0,0850 \text{ m})}{\cos 155^\circ} = 0,094 \text{ m} = 9,4 \text{ cm.} \quad (\text{Odpověď})$$

Podobně hodnota  $\varphi = -25^\circ$  by vedla k  $x_m = -9,4 \text{ cm}$ . Avšak amplituda výchylky musí být vždy *kladná* konstanta — úhel  $\varphi = -25^\circ$  musíme vyloučit. Správný výsledek části (b) je tedy

$$\varphi = 155^\circ. \quad (\text{Odpověď})$$

### PŘÍKLAD 16.3

Vliv konstantní síly na harmonický oscilátor. Pružinu z obrázku 16.5 zavěsíme svisle dolů podle obr. 16.6. Osu  $y$  orientujeme podél ní s počátkem v poloze, kde by byl konec *nezatížené* pružiny. Poté pružinu zatížíme tělesem hmotnosti  $m$ .



**Obr. 16.6** Příklad 16.3. Konec nezatížené pružiny je v počátku osy  $y$ . Rovnovážná poloha zatížené pružiny je  $y_r$ . Výchylka z této rovnovážné polohy je  $y'$ .

(a) Jaké je protažení  $y_r$  zatížené pružiny v rovnovážné poloze?

**ŘEŠENÍ:** V rovnovážné poloze je výslednice sil působících na těleso, tj. síly pružnosti  $\mathbf{F}$  a síly tíhové  $\mathbf{G}$ , rovna nule. Jediné nenulové složky jsou  $y$ -ové a platí pro ně

$$F_y + G_y = -ky_r + mg = 0.$$

Odtud určíme hledanou rovnovážnou polohu

$$y_r = \frac{mg}{k}. \quad (16.16)$$

(b) Těleso svisle vychýlíme a uvolníme. S jakou periodou bude kmitat? Porovnejte tuto situaci s obr. 16.5, kdy pružina není namáhána tíhou tělesa, a s obecným řešením v př. 16.1a, b.

**ŘEŠENÍ:** Při výchylce  $y'$  z rovnovážné polohy  $y_r$  působí pružina na těleso silou

$$F_y = -k(y' + y_r). \quad (16.17)$$

Na těleso působí kromě této síly ještě konstantní tíhová síla  $\mathbf{G}$ , takže výsledná síla  $\mathbf{F}_v$  působící na těleso je

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{F} + m\mathbf{g}. \quad (16.18)$$

Po dosazení rov. (16.16) a (16.17) do rov. (16.18) dostáváme

$$F_{v,y} = -k\left(y' + \frac{mg}{k}\right) + mg = -ky'. \quad (16.19)$$

Odtud však plyne, že výsledná síla je opět přímo úměrná výchylce z rovnovážné polohy, je opačně orientovaná a má stejný koeficient úměrnosti — tuhost  $k$ , jaký měla nezatížená pružina. Proto naše soustava kmitá se stejnou frekvencí, s jakou kmitá soustava na obr. 16.5 řešená v př. 16.1.

### RADY A NÁMĚTY

**Bod 16.2:** Určení typu kmitání

V případě libovolného harmonického pohybu jsou zrychlení  $a$  a výchylka  $x$  vázány vztahem tvaru

$$a = -(\text{kladná konstanta}) \cdot x,$$

který říká: zrychlení je úměrné výchylce z rovnovážné polohy, ale je opačně orientované. Jakmile již nalezneme v dané úloze takový vztah, můžeme jej okamžitě srovnat s rov. (16.7), tj. uvedenou kladnou konstantu můžeme identifikovat jako  $\omega^2$ . Tím již vlastně máme úhlovou frekvenci pohybu. Poté nalezneme pomocí rov. (16.4) periodu  $T$  a frekvenci  $f$ .

V př. 16.8 uvidíme, že tentýž postup lze použít k určení harmonických torzních kmitů. V tomto případě jsou úhlové zrychlení  $\varepsilon$  a úhlová výchylka  $\theta$  svázané relací tvaru

$$\varepsilon = -(\text{kladná konstanta}) \cdot \theta,$$

která říká: úhlové zrychlení je úměrné úhlové výchylce z rovnovážné polohy, je však orientované proti této výchylce. Podobně jako v předchozím případě můžeme ztotožnit kladnou konstantu s  $\omega^2$ , a tím najít postupně veličiny  $\omega$ ,  $T$  a  $f$ .

V některých úkolech dospějete nejprve k závislosti síly  $F$  na výchylce  $x$ . V případě harmonického pohybu má tato závislost tvar

$$F_x = -(\text{kladná konstanta}) \cdot x.$$

To znamená, že síla je úměrná výchylce, míří však proti ní. Jakmile již nalezneme takovou závislost, můžeme ji okamžitě srovnat s rov. (16.9), tj. kladnou konstantu můžeme identifikovat jako  $k$ . Jestliže navíc známe hmotnost kmitajícího tělesa, uplatníme postupně rov. (16.11), (16.12) a (16.4) k určení úhlové frekvence  $\omega$ , periody  $T$  a frekvence  $f$ .

Podobně postupujeme pro torzní harmonický pohyb. V tomto případě je vratný moment síly  $M$  vázán s úhlovou výchylkou  $\theta$  vztahem typu

$$M = -(\text{kladná konstanta}) \cdot \theta,$$

který říká: moment síly je úměrný úhlové výchylce z rovnovážné polohy, má však opačný směr.

## 16.4 ENERGIE HARMONICKÉHO OSCILÁTORU

V kap. 8 jsme si již povšimli, jak se energie harmonického oscilátoru přelévá sem a tam mezi energií kinetickou a energií potenciální, zatímco jejich součet — celková mechanická energie oscilátoru  $E$  — zůstává konstantní. Podívejme se nyní na tuto situaci z kvantitativního hlediska.

Potenciální energie harmonického oscilátoru na obrázku 16.5 je spojena výhradně s pružinou. Její velikost závisí na tom, o kolik je pružina stlačena nebo protažena, tedy na výchylce  $x(t)$ . Jestliže použijeme postupně rov. (8.11) a (16.3), dostaneme

$$E_p(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi). \quad (16.20)$$

Všimněme si zde pozorně výrazu  $\cos^2 A$ : jeho význam je  $(\cos A)^2$  a nelze jej zaměňovat s výrazem  $\cos A^2$ , který znamená  $\cos(A^2)$ .

Kinetická energie systému je vázána výhradně na kmitající hmotné těleso. Její velikost závisí na tom, jak rychle se těleso pohybuje, tedy na rychlosti  $v(t)$ . Z rov. (16.5) dostaneme

$$E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi). \quad (16.21)$$

Podle rov. (16.11) můžeme za  $\omega^2$  dosadit  $k/m$ , takže rov. (16.21) lze přepsat do tvaru

$$E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi). \quad (16.22)$$

Celková mechanická energie  $E$  je součtem příspěvků získaných v rov. (16.20) a (16.22):

$$\begin{aligned} E &= E_p + E_k = \\ &= \frac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kx_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \\ &= \frac{1}{2}kx_m^2 (\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)). \end{aligned}$$

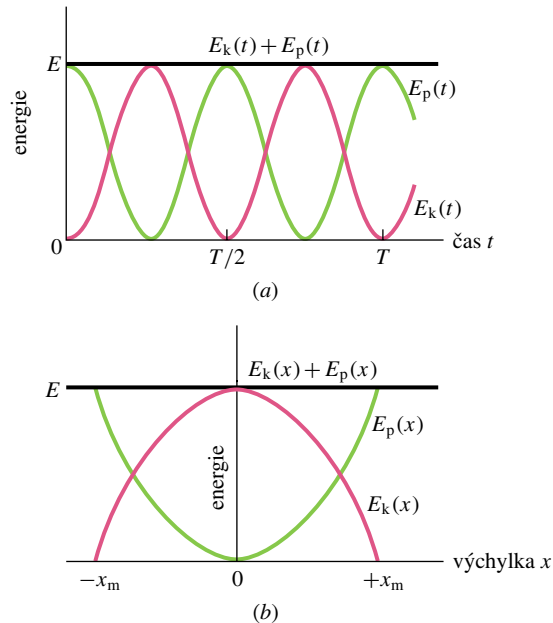
Pro libovolný úhel  $\alpha$  však platí

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Výraz ve velkých závorkách v rovnici pro energii  $E$  je tedy roven jedné a výsledek zní

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kx_m^2. \quad (16.23)$$

Mechanická energie harmonického oscilátoru je tedy skutečně na čase nezávislá, je konstantní. Potenciální energie a kinetická energie lineárního oscilátoru jako funkce času jsou znázorněny na obr. 16.7a a jako funkce výchylky na obr. 16.7b.



**Obr. 16.7** (a) Potenciální energie  $E_p(t)$ , kinetická energie  $E_k(t)$  a celková mechanická energie  $E$  harmonického oscilátoru jako funkce času. Všimněte si, že všechny energie jsou nezáporné a že během jedné periody dojde dvakrát k dosažení maxima jak u kinetické, tak u potenciální energie. (b) Potenciální energie  $E_p(x)$ , kinetická energie  $E_k(x)$  a celková mechanická energie  $E$  harmonického oscilátoru s amplitudou výchylky  $x_m$  jako funkce výchylky  $x$ . Pro  $x = 0$  je veškerá mechanická energie tvořena energií kinetickou, pro  $x = \pm x_m$  naopak energií potenciální.

Nyní je již patrně pochopitelné, proč obvykle zahrnuje kmitající systém jednak jistý element spojený s tendencí návratu do rovnovážné polohy, jednak jistý element setrvačnosti: první z nich na sebe váže potenciální energii a druhý energii kinetickou.



**KONTROLA 3:** Těleso na obr. 16.5 má v jistém okamžiku výchylku  $x = +2,0$  cm. V tomto okamžiku je jeho kinetická energie 3 J a pružina má potenciální energii pružnosti o velikosti 2 J. (a) Jak je velká kinetická energie tělesa při  $x = 0$ ? Jaké jsou hodnoty potenciální energie pružnosti při (b)  $x = -2,0$  cm, a při (c)  $x = -x_m$ ?

### PŘÍKLAD 16.4

(a) Jaká je mechanická energie oscilátoru z příkladu 16.1?

**ŘEŠENÍ:** Dosadíme údaje z př. 16.1 do rov. (16.23):

$$E = \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}(65 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1})(0,11 \text{ m})^2 = 0,393 \text{ J} \doteq 0,39 \text{ J.} \quad (\text{Odpověď})$$

Tato hodnota zůstává během pohybu konstantní.

(b) Jaká je potenciální energie tohoto oscilátoru v okamžiku, kdy se těleso nachází na polovině cesty k bodu obratu, tj. jestliže  $x = \pm x_m/2$ ?

**ŘEŠENÍ:** Pro libovolnou výchylku je potenciální energie určena vztahem  $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ . V našem případě

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{2}x_m\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}kx_m^2\right) = \frac{1}{4}E = \frac{1}{4}(0,393 \text{ J}) = 0,098 \text{ J.} \quad (\text{Odpověď})$$

(c) Jaká je kinetická energie oscilátoru při  $x = x_m/2$ ?

**ŘEŠENÍ:** Kinetickou energii nalezneme prostým odčítáním:

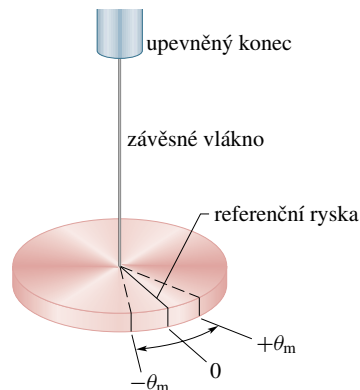
$$E_k = E - E_p = 0,393 \text{ J} - 0,098 \text{ J} \doteq 0,30 \text{ J.} \quad (\text{Odpověď})$$

Jestliže se tedy kdykoliv během kmitání těleso nachází v bodě  $x = x_m/2$ , má 25 % jeho mechanické energie formu energie potenciální a 75 % formu kinetické energie.

## 16.5 TORZNÍ KMITY

Na obr. 16.8 vidíme jinou variantu harmonického oscilátoru. Na rozdíl od předchozích příkladů, kde hybnou silou bylo protažení či stlačení pružiny, zde působí kroucení závěsného vlákna. Uvedené zařízení se nazývá **torzní kyvadlo**, slovo **torze** znamená kroucení.

Jestliže pootočíme disk na obr. 16.8 vzhledem k jeho rovnovážné poloze (v ní ukazuje ryska na značku 0) a pak uvolníme, začne ryska kmitat kolem rovnovážné polohy;



**Obr. 16.8** Torzní kyvadlo je otáčivá varianta lineárního harmonického oscilátoru z obr. 16.5. Disk kmitá ve vodorovné rovině; referenční ryska se vychyluje s úhlovou amplitudou  $\theta_m$ . V průběhu kroucení na sebe závěsné vlákno váže potenciální energii, podobně jako ji dříve vázala pružina. Kroucením se současně vytváří vratný točivý moment.

dojde k **torzním kmitům**. Při úhlové výchylce rysky  $\theta$  v libovolném z obou směrů vzniká vratný silový moment, určený vztahem

$$M = -\kappa\theta. \quad (16.24)$$

Konstanta  $\kappa$  (řecké písmeno *kappa*) se jmenuje **torzní tuhost** neboli **tuhost ve zkrutu**. Její velikost závisí na délce závěsného vlákna, na jeho průměru a na materiálu, z něhož je vlákno vyrobeno.

Při srovnání rov. (16.24) a (16.9) začínáte tušit, že rov. (16.24) je vlastně torzní varianta Hookova zákona. Pokusíme se tedy transformovat rov. (16.12), udávající periodu lineárního oscilátoru, na rovnici pro periodu torzního oscilátoru. V rov. (16.12) předně nahradíme tuhost pružiny  $k$  veličinou, která nyní měří velikost vratné tendence; tou je podle rov. (16.24) torzní tuhost  $\kappa$ . Dále nahradíme v rov. (16.12) hmotnost  $m$  veličinou, která jí nyní odpovídá, tj. která nyní vyjadřuje setrvačnou tendenci při otáčení disku; tou je moment setrvačnosti  $I$  kmitajícího disku. Tyto dvě substituce nás již přivádějí ke vztahu

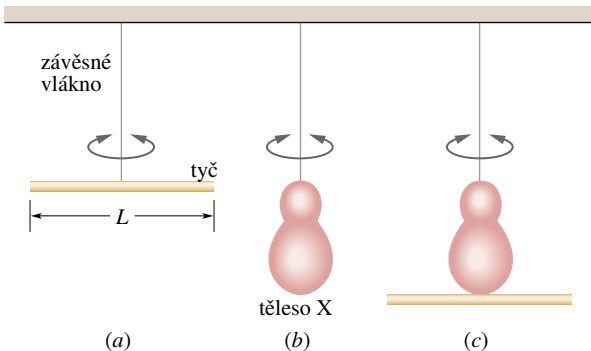
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \quad (\text{torzní kyvadlo}) \quad (16.25)$$

pro periodu torzního oscilátoru neboli torzního kyvadla.

### PŘÍKLAD 16.5

Na obr. 16.9a vidíme tenkou tyč délky  $L = 12,4$  cm o hmotnosti  $m = 135$  g, zavěšenou uprostřed na dlouhém vlákne. Pro tento torzní oscilátor jsme změřili periodu  $T_a = 2,53$  s. Na obr. 16.9b je znázorněno nepravidelné těleso X, zavěšené

na stejném vlákně. Pro tento torzní oscilátor jsme naměřili periodu  $T_b = 4,76$  s.



**Obr. 16.9** Příklad 16.5. Tři zobrazená torzní kyvadla jsou tvořena závěsným vláknem a (a) tyčí, (b) nepravidelným tělesem a (c) tyčí pevně spojenou s nepravidelným tělesem.

(a) Jaký je moment setrvačnosti tělesa X vzhledem k ose, určené závěsným vláknem?

**ŘEŠENÍ:** Podle tab. 11.2e je moment setrvačnosti tenké tyče vzhledem k ose, procházející středem tyče kolmo na její osu, roven  $\frac{1}{12}mL^2$ . Máme tedy

$$I_a = \frac{1}{12}mL^2 = \frac{1}{12}(0,135 \text{ kg})(0,124 \text{ m})^2 = 1,73 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Napišme nyní dvakrát rov. (16.25); jednou pro tyč a podruhé pro těleso X:

$$T_a = 2\pi\sqrt{\frac{I_a}{\chi}} \quad \text{a} \quad T_b = 2\pi\sqrt{\frac{I_b}{\chi}}.$$

Spodní indexy zde odpovídají po řadě obr. 16.9a a 16.9b. Torzní konstanta  $\chi$  vyjadřuje vlastnosti vlákna a to je na obou obrázcích stejné. Liší se pouze momenty setrvačnosti a periody.

Nyní obě uvedené rovnice umocníme a druhou z nich vydělíme rovnicí první. Výsledný vztah představuje rovnici pro  $I_b$ . Jejím řešením dostaneme

$$I_b = I_a \frac{T_b^2}{T_a^2} = (1,73 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2) \frac{(4,76 \text{ s})^2}{(2,53 \text{ s})^2} = 6,12 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jaká by byla perioda kmitů torzního oscilátoru na obr. 16.9c, vzniklého spojením obou uvažovaných těles a jejich zavěšením na uvažované vlákno?

**ŘEŠENÍ:** Opět napíšeme dvakrát rov. (16.25), avšak tentokrát jako

$$T_a = 2\pi\sqrt{\frac{I_a}{\chi}} \quad \text{a} \quad T_c = 2\pi\sqrt{\frac{I_c}{\chi}}.$$

Sestavíme opět podíl druhého a prvního výrazu a dosadíme  $I_c = I_a + I_b$ . Dostaneme tak

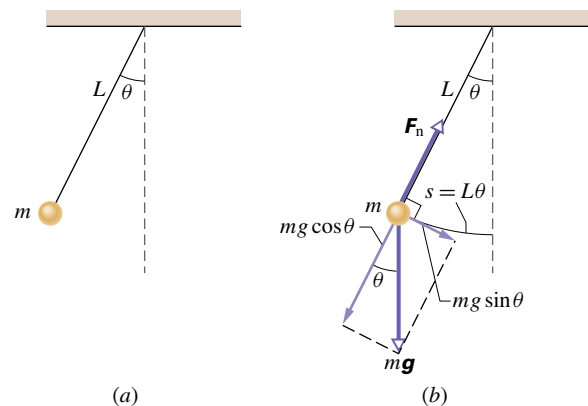
$$\begin{aligned} T_c &= T_a \sqrt{\frac{I_c}{I_a}} = T_a \sqrt{\frac{I_a + I_b}{I_a}} = T_a \sqrt{1 + \frac{I_b}{I_a}} = \\ &= (2,53 \text{ s}) \sqrt{1 + \frac{(6,12 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2)}{(1,73 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2)}} = \\ &= 5,39 \text{ s}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

## 16.6 KYVADLA

Nyní se zaměříme na jistou třídu harmonických oscilátorů, u nichž je vratný element spojen s gravitační silou, a nikoliv s elastickými vlastnostmi vlákna při jeho kroucení, popřípadě se stlačením a protažením pružiny.

### Matematické kyvadlo

Upevníme dlouhé vlákno na nosník a zavěsíme na jeho spodní konec jablko. Když jablko slabě vychýlíme a pak uvolníme, bude jeho další pohyb periodický. Avšak je toto kývání harmonický pohyb? V idealizované situaci budeme uvažovat **matematické kyvadlo**, abstraktní objekt, tvořený bodovou částicí o hmotnosti  $m$  (závaží kyvadla) a nehmotným pevným vláknem délky  $L$ . Vše je znázorněno na obr. 16.10a: závaží se volně houpe tam a zpět v rovině stránky, tj. doleva a doprava od svislé přímky vedené bodem závěsu.



**Obr. 16.10** (a) Matematické kyvadlo. (b) Na závaží působí dvě síly: tíhová síla  $m\mathbf{g}$  a síla vlákna  $\mathbf{F}_n$ . Tečná složka tíhové síly  $m\mathbf{g} \sin \theta$  představuje vratnou sílu: snaží se vrátit závaží do rovnovážné polohy.

Setrvačný element tohoto kyvadla je spojen s částicí hmotnosti  $m$ . Vratný element spočívá v přitažlivém působení mezi částicí a Zemí. Změna potenciální energie je

určena změnou výšky částice nad povrchem Země; na vertikální pohyb závaží můžeme pohlížet jako na změnu délky „gravitační pružiny“.

Na závaží působí dvě síly, obě jsou zobrazeny na obr. 16.10b: tíhová síla  $m\mathbf{g}$  a síla vlákna  $\mathbf{F}_n$ . Tíhovou sílu rozložíme na radiální složku  $mg \cos \theta$  a na složku  $mg \sin \theta$  tečnou k dráze částice, a ta právě představuje vratnou sílu. Působí totiž vždy proti výchylce částice a snaží se ji vrátit do rovnovážné polohy ( $\theta = 0$ ), kde by byla, kdyby nekmitala. Napišme tedy vratnou sílu ve tvaru

$$F = -mg \sin \theta, \quad (16.26)$$

ve kterém záporné znamení upozorňuje, že síla působí proti výchylce.

Předpokládejme nyní, že úhel  $\theta$  na obr. 16.10 je malý. Výraz  $\sin \theta$  je tedy přibližně roven úhlu  $\theta$ , vyjádřenému v radiánech. (Například pro  $\theta = 5,00^\circ$ , tj. pro  $\theta = 0,0873$  rad, dostaneme  $\sin \theta = 0,0872$  — odchylka činí pouze něco kolem 0,1 %.) Dále, výchylku částice  $s$  budeme měřit podél její obloukové trajektorie; je tedy rovna  $L\theta$ . Celkově nabývá rov. (16.26) pro malá  $\theta$  tvar

$$F \approx -mg\theta. \quad (16.27)$$

Letmý pohled zpátky na rov. (16.9) nám ukazuje, že zde máme opět tvar podobný Hookovu zákonu. Roli výchylky  $x$  hraje nyní úhlová výchylka  $\theta$ . Jestliže je tedy úhlová výchylka matematického kyvadla malá, můžeme jej pokládat za harmonický oscilátor, podobný soustavě pružina + těleso na obr. 16.5. Jinými slovy, kývání závaží je harmonický pohyb. Amplitudou úhlové výchylky  $\theta$  je nyní **úhlová amplituda**  $\theta_m$ , tj. největší úhel při kývání. Roli tuhosti pružiny  $k$  hraje veličina  $mg/L$ , tuhost „efektivní gravitační pružiny“ kyvadla.

Periodu kmitů matematického kyvadla získáme z rovnice (16.12), jestliže v ní za  $k$  dosadíme  $mg/L$ :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/L}}, \quad (16.28)$$

tedy celkově

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (\text{matematické kyvadlo}). \quad (16.29)$$

Rov. (16.29) platí pouze v případě, že úhlová amplituda kmitání  $\theta_m$  je malá (pokud nebude řečeno jinak, považujeme tuto podmínku v úkolech této kapitoly za splněnou).

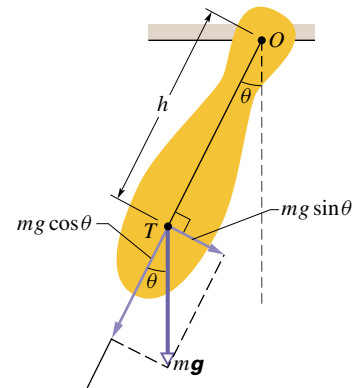
Může se zdát, že v rov. (16.29) chybí element setrvačnosti, protože perioda nám vyšla nezávislá na hmotnosti

částice. Příčina je však patrná z rov. (16.28): vratná tendence, měřená tuhostí „efektivní gravitační pružiny“  $mg/L$ , je sama o sobě úměrná hmotnosti částice. Obě hmotnosti se tedy v rov. (16.28) nakonec zkrátí.

I zde se během každého cyklu mění kinetická energie kyvadla v potenciální a naopak (obr. 8.7).

## Fyzické kyvadlo

Skutečná kyvadla se většinou výrazně odlišují od kyvadla matematického. Na obr. 16.11 vidíme obecné **fyzické kyvadlo**; tak budeme nazývat skutečná kyvadla, kde hmota není soustředěna do jediného bodu. Tíhová síla  $m\mathbf{g}$  působí v těžišti  $T$ .



**Obr. 16.11** Fyzické kyvadlo. Vratný silový moment je  $(mg \sin \theta)(h)$ . Při  $\theta = 0$  se těžiště  $T$  nachází přímo pod bodem závěsu  $O$ .

Když vychýlíme kyvadlo na obr. 16.11 z rovnovážné polohy v libovolném směru o úhel  $\theta$ , vznikne vratný silový moment  $M$ . Tento moment působí vzhledem k ose procházející bodem závěsu  $O$  a platí:

$$M = -(mg \sin \theta)(h). \quad (16.30)$$

Zde  $mg \sin \theta$  je tečná složka tíhové síly  $m\mathbf{g}$  a  $h$  (délka úsečky  $OT$ ) je rameno síly pro tuto tečnou složku. Znaménko minus vyznačuje, že daný silový moment působí proti výchylce. Jinými slovy, silový moment se vždy snaží zmenšit úhel  $\theta$  na nulu.

Nyní opět omezíme naše úvahy na případ malých výchylek, vezmeme tedy  $\sin \theta \approx \theta$ . Rov. (16.30) tak nabývá tvar

$$M \approx -(mgh)\theta. \quad (16.31)$$

Srovnání s rov. (16.24) ukazuje, že jde o analogický případ. V případě *malé* úhlové amplitudy  $\theta_m$  vykonává fyzické kyvadlo harmonický pohyb. Výraz  $mgh$  v rov. (16.31) hraje nyní roli torzní konstanty  $\kappa$  z rov. (16.24). Jestliže tedy provedeme tuto substituci v rov. (16.25), dostaneme pro

periodu fyzického kyvadla vztah (stále za podmínky malé úhlové amplitudy  $\theta_m$ )

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad (\text{fyzické kyvadlo}). \quad (16.32)$$

Zde  $I$  je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose, která prochází bodem závěsu kolmo k rovině kývání, a  $h$  je vzdálenost bodu závěsu od těžiště.

Intuitivně je jasné, že se fyzické kyvadlo nebude kývat, jestliže jej zavěšíme v těžišti; bude se ovšem otáčet. Náš vzorec pro dobu kmitu totiž platí jen pro malou výchylku, tj. malý úhel  $\theta$ . V případě  $h \rightarrow 0$  však i sebemenší podnět způsobí, že tato podmínka nebude splněna a že místo (malých) kyvů dojde prostě k otáčení kolem osy — podobně jako kdybychom do kyvadla s větším  $h$  velmi prudce vrazili. I frekvenci těchto otáček lze ovšem spočítat, ale nikoli podle vzorce (16.32) platného pro *malé* úhlové amplitudy.

Každému fyzickému kyvadlu, které kmitá kolem bodu závěsu  $O$  s periodou  $T$ , odpovídá matematické kyvadlo jisté délky  $L_0$  kmitající se stejnou periodou  $T$ . Tuto tzv. **redukovanou délku**  $L_0$  lze zjistit z rov. (16.29). Pro daný bod závěsu  $O$  fyzického kyvadla můžeme tak vždy určit tzv. **střed kyvu** — bod  $O'$ , ležící na spojnici bodu závěsu  $O$  a těžiště ve vzdálenosti  $L_0$  od bodu závěsu ve směru k těžišti. Necháme-li poté toto kyvadlo kývat kolem středu kyvu  $O'$  (jako tzv. **reverzní kyvadlo**), zjistíme, že se kývá se stejnou periodou  $T$ , jako když bylo zavěšeno v bodě  $O$ . Naopak, experimentálním nalezením bodů  $O$ ,  $O'$  s touto vlastností lze určit  $L_0$  a z něj a z periody  $T$  vypočítat velmi přesně hodnotu tíhového zrychlení  $g$ .

Poznamenejme ještě, že matematické kyvadlo lze pokládat za speciální případ fyzického kyvadla na obr. 16.11. Skutečně, v případě matematického kyvadla je vzdálenost  $h$  na obr. 16.11 jednoduše jeho délka  $L$  a moment setrvačnosti  $I$  je  $mL^2$ . Když tyto dvě veličiny dosadíme do rov. (16.32), vyjde nám

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{mgL}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}},$$

což je přesně rov. (16.29), tj. vztah pro periodu matematického kyvadla.

### Měření tíhového zrychlení

Fyzickým kyvadlem lze měřit tíhové zrychlení  $g$  — tisíce takových měření bylo provedeno během geologických průzkumů.

Uvažme pro jednoduchost kyvadlo tvořené homogenní tyčí délky  $L$ , zavěšenou na jednom konci. Pro takové kyvadlo je veličina  $h$  v rov. (16.32), tj. vzdálenost mezi bodem závěsu a těžištěm, rovna  $\frac{1}{2}L$ . Dále potřebujeme znát moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose otáčení. Ta je kolmá k ose tyče a prochází jejím koncem; z tab. 11.2f zjistíme  $I = \frac{1}{3}mL^2$ . Nakonec dosadíme  $h = \frac{1}{2}L$  a  $I = \frac{1}{3}mL^2$  do rov. (16.32) a řešíme tuto rovnici vzhledem ke  $g$ . Výsledek je

$$g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2}. \quad (16.33)$$

Jestliže tedy změříme délku tyče  $L$  a periodu kmitů  $T$ , můžeme vypočítat hodnotu  $g$ . (Pro zvýšení přesnosti měření se provádí celá řada vylepšení, například kyvadlo se pohybuje ve vakuové komoře).

**KONTROLA 4:** Tři fyzická kyvadla hmotností  $m_0$ ,  $2m_0$ , a  $3m_0$  (z různých materiálů), mají stejný tvar, velikost a bod závěsu. Seřadte je sestupně podle jejich period kmitů.

### PŘÍKLAD 16.6

Metrová tyč na obr. 16.12a, zavěšená na jednom konci, tvoří fyzické kyvadlo.

(a) Jaká je jeho perioda kmitání?

**ŘEŠENÍ:** Z tab. 11.2f zjistíme moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose otáčení, která je kolmá k ose tyče a prochází jejím koncem:  $I = \frac{1}{3}mL^2$ . Vzdálenost  $h$  bodu závěsu od těžiště, které je v bodě  $T$  na obr. 16.12a, je  $\frac{1}{2}L$ . Po dosazení těchto dvou veličin do rov. (16.32) dostaneme

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2/3}{mg(L/2)}} = \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2(1,00 \text{ m})}{3(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})}} = \\ &= 1,64 \text{ s}. \quad (\text{Odpověď}) \quad (16.34) \end{aligned}$$

(b) Uvažme opět metrovou tyč na obr. 16.12a. Jaká je redukovaná délka  $L_0$  mezi bodem závěsu  $O$  a středem kyvu?

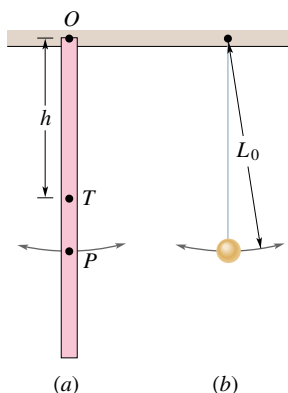
**ŘEŠENÍ:** K určení středu kyvu tyče potřebujeme znát délku  $L_0$  matematického kyvadla (obr. 16.12b), jehož perioda se shoduje s periodou kmitů tyče. Musí se tedy shodovat pravé strany rov. (16.29) a (16.34):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_0}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}.$$

Tato podmínka již dává požadovanou délku

$$L_0 = \frac{2}{3}L = \frac{2}{3}(100 \text{ cm}) = 66,7 \text{ cm}. \quad (\text{Odpověď})$$

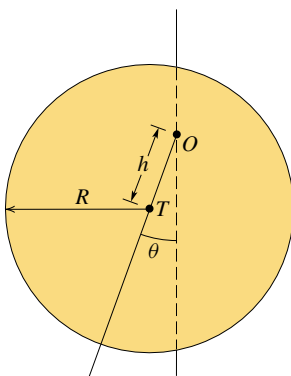
Vypočtená délka je rovna vzdálenosti bodu  $P$  na obr. 16.12a od bodu závěsu  $O$ . Bod  $P$  je tedy středem kyvu daného fyzického kyvadla vzhledem k danému bodu závěsu.



**Obr. 16.12** Příklad 16.6. (a) Metrová tyč, zavěšená na jednom konci, tvoří fyzické kyvadlo. (b) Matematické kyvadlo, jehož délka  $L_0$  je zvolena z podmínky rovnosti period obou kyvadel. Vzdálenost bodu  $P$  původního kyvadla (a) a bodu závěsu je  $L_0$ . Bod  $P$  je tedy střed kyvu původního kyvadla vzhledem k danému bodu závěsu.

### PŘÍKLAD 16.7

Kotouč o poloměru  $R = 12,5$  cm se otáčí kolem bodu  $O$ , umístěného ve vzdálenosti  $h$  od jeho středu  $T$  (obr. 16.13). Při  $h = R/2$  má vzniklé fyzické kyvadlo periodu  $T = 0,871$  s. Jaké gravitační zrychlení  $g$  je v místě, ve kterém se kyvadlo nachází?



**Obr. 16.13** Příklad 16.7. Fyzické kyvadlo je tvořeno homogenním diskem, volně pohyblivým kolem bodu závěsu  $O$ . Vzdálenost bodu závěsu  $O$  od těžiště  $T$  je rovna polovině poloměru disku.

**ŘEŠENÍ:** Moment setrvačnosti kotouče vzhledem k ose, procházející jeho těžištěm ve směru kolmém k rovině disku, má hodnotu  $I_T = \frac{1}{2}mR^2$ . Podle Steinerovy věty je moment setrvačnosti vůči ose, procházející bodem  $O$  a rovnoběžné s popsanou těžišovou osou

$$I = I_T + mh^2 = \frac{1}{2}mR^2 + m\left(\frac{1}{2}R\right)^2 = \frac{3}{4}mR^2.$$

V rov. (16.32) tedy uplatníme  $I = \frac{3}{4}mR^2$  a  $h = \frac{1}{2}R$ :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{3mR^2/4}{mg(R/2)}} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}.$$

Nakonec tuto rovnici vyřešíme vzhledem ke  $g$ :

$$g = \frac{6\pi^2 R}{T^2} = \frac{6\pi^2(0,125 \text{ m})}{(0,871 \text{ s})^2} = 9,76 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}. \quad (\text{Odpověď})$$

### PŘÍKLAD 16.8

Tučňák na obr. 16.14 se určitě vyzná ve vodních sportech. Právě se chystá ke skoku z homogenního skokanského prkna, které se vlevo volně otáčí kolem čepu a vpravo je pevně spojeno s pružinou. Délka prkna je  $L = 2,0$  m, jeho hmotnost  $m = 12$  kg, tuhost pružiny  $k$  činí  $1\,300 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  a její hmotnost je zanedbatelná. Skok tučňáka vyvolá kmitání prkna a pružiny s malou amplitudou. Předpokládejme, že prkno je dostatečně pevné, takže se při kmitání neprohýbá. Nalezněte periodu kmitání  $T$ .

**ŘEŠENÍ:** Pružina působí na prkno proměnným momentem síly  $M$  (vzhledem k ose otáčení prkna). Prkno se proto v čepu otáčí s proměnným úhlovým zrychlením  $\varepsilon$ . Součástí úlohy je pružina a napadne nás, že vzniklé kmitání by mohl být harmonický pohyb. Ponechme však prozatím tuto otázku otevřenou. Místo toho použijeme nejprve rov. (11.30) spolu s rov. (11.35):

$$M = LF \sin 90^\circ = I\varepsilon. \quad (16.35)$$

Zde  $I$  je moment setrvačnosti skokanského prkna při jeho otáčení kolem čepu,  $F$  je síla, kterou působí pružina na pravý konec prkna, a  $90^\circ$  je úhel, který svírá podélná osa prkna se směrem síly  $F$ .

Prkno představuje v podstatě tenkou tyč upevněnou na jednom konci, takže podle tab. 11.2f máme  $I = mL^2/3$ . Pružina vytváří sílu  $F = -kx$ , kde  $x$  je svislá lineární výchylka pravého konce prkna.

Tyto výrazy pro  $F$  a  $I$  dosadíme do druhého a třetího členu v rov. (16.35). Máme tedy

$$-Lkx = \frac{mL^2\varepsilon}{3}. \quad (16.36)$$

Poslední rovnice představuje kombinaci lineární svislé výchylky  $x$  a úhlového zrychlení  $\varepsilon$  při rotaci prkna kolem čepu. Můžeme ji však přepsat do tvaru, který obsahuje pouze úhlové veličiny. Podle rov. (11.15) totiž platí

$$s = \theta r.$$

Zde  $\theta$  je úhlová výchylka prkna při jeho rotaci kolem čepu,  $r = L$  je poloměr této rotace a  $s$  značí délku oblouku, po kterém se pohybuje pravý konec prkna. Pro malé úhlové výchylky  $\theta$  můžeme délku oblouku  $s$  aproximovat svislou výchylkou  $x$ . Napíšeme tedy  $x = \theta L$  a dosadíme do rov. (16.36):

$$-Lk\theta L = \frac{mL^2\varepsilon}{3}.$$

Po jednoduché úpravě nakonec máme

$$\varepsilon = -\frac{3k}{m}\theta. \quad (16.37)$$

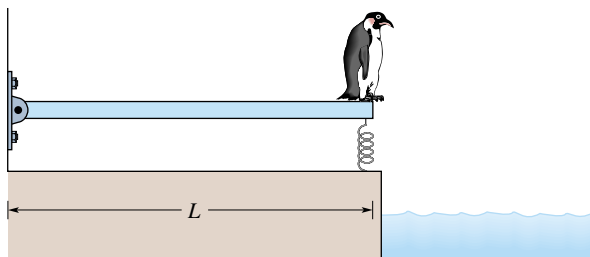
Tato rovnice je úhlová varianta základní rov. (16.7). Říká nám, že prkno skutečně vykonává harmonické kmity s úhlovým zrychlením  $\varepsilon$  a s úhlovou výchylkou  $\theta$ . Srovnání rov. (16.37) a (16.7) navíc poskytuje úhlovou frekvenci pro tento oscilátor:

$$\omega^2 = \frac{3k}{m},$$

to znamená  $\omega = \sqrt{3k/m}$ . Nakonec uplatníme rov. (16.4), podle které  $\omega = 2\pi/T$ , a tedy

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}} = 2\pi\sqrt{\frac{(12 \text{ kg})}{3(1\,300 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1})}} = \\ &= 0,35 \text{ s}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

S překvapením zjišťujeme, že výsledná perioda nezávisí na délce prkna  $L$ . Kdybychom uvažovali působení tíhové síly prkna, dostali bychom stejný výsledek, avšak rovnovážná poloha by byla níž (viz příklad 16.3).

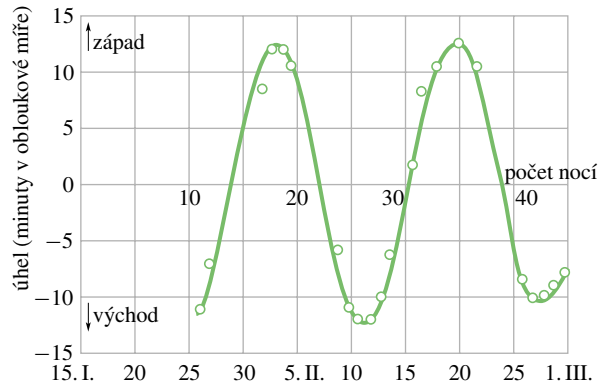


**Obr. 16.14** Příklad 16.8. Skok tučňáka vyvolá kmitání pružiny a skokanského prkna. Na levém konci se prkno otáčí kolem čepu.

## 16.7 KMITÁNÍ A ROVNOMĚRNÝ KRUHOVÝ POHYB

V roce 1610 objevil Galileo s použitím svého nově sestaveného dalekohledu čtyři hlavní měsíce planety Jupiter. Při pozorování, prováděném v průběhu několika týdnů, se každý z měsíců pohyboval tam a zpět v okolí planety. Dnes

bychom asi řekli, že pohyb každého měsíce se jevil jako harmonický pohyb kolem disku Jupitera coby rovnovážné polohy. Záznamy těchto pozorování, psané Galileovou vlastní rukou, jsou dodnes poučné. A. P. French, pracovník MIT, sestrojil na základě Galileových záznamů časovou závislost zdánlivé polohy měsíce Callisto vzhledem k Jupiteru. Výslednou křivku vidíme na obr. 16.15: malé kroužky znázorňují přímo Galileovy hodnoty a samotná křivka předsta-



**Obr. 16.15** Úhel mezi Jupiterem a jeho měsícem Callisto, měřený při pozorování ze Země. Malé kroužky odpovídají Galileově pozorování z roku 1610. Proložená křivka silně připomíná časovou závislost výchylky pro harmonický pohyb. Ze známé střední vzdálenosti Jupitera od Země spočteme, že 10 úhlových minut odpovídá oblouku délky zhruba  $2 \cdot 10^6$  km. (Převzato z knihy A. P. French, *Newtonian Mechanics*, W. W. Norton & Comp., New York, 1971, p. 288.)

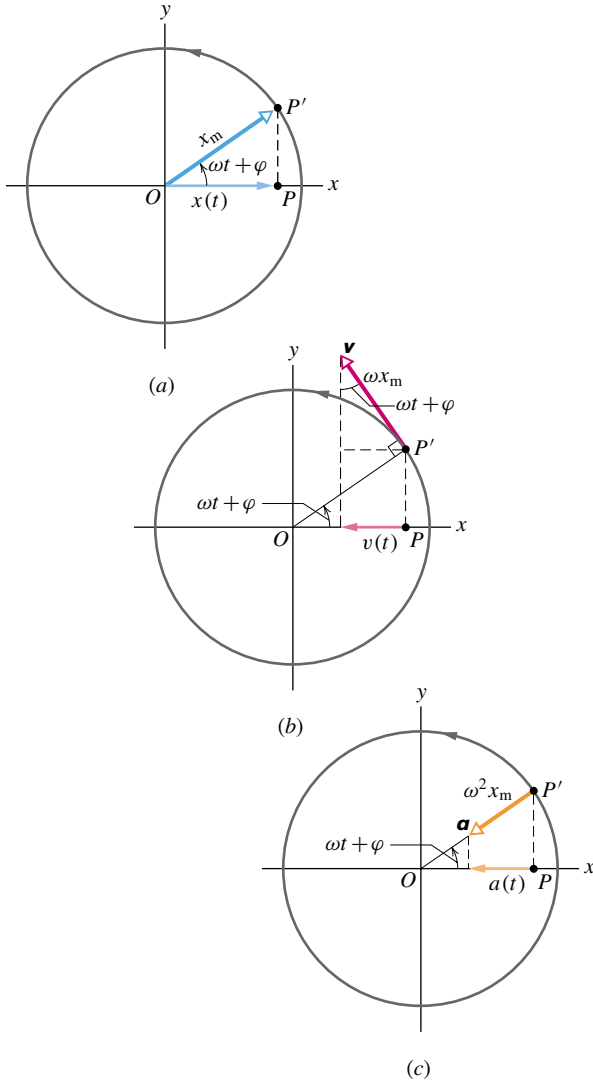
vuje nejlepší aproximaci těchto hodnot, získanou vhodnými numerickými metodami. Křivka silně připomíná výchylku pro harmonický pohyb, určenou rov. (16.3). Perioda pohybu, odečtená přímo z grafu, činí přibližně 16,8 dnů.

Ve skutečnosti však krouží Callisto kolem Jupitera s prakticky konstantní rychlostí po prakticky kruhové dráze. Jeho skutečný pohyb tedy není ani zdaleka harmonický; je to rovnoměrný kruhový pohyb. A to, co Galileo viděl, byla projekce rovnoměrného kruhového pohybu na přímku, ležící v rovině pohybu. Pozoruhodná Galileova měření nás tak přivádějí k závěru, že rovnoměrný kruhový pohyb, pozorovaný ze strany, dává harmonický pohyb. Řečeno formálněji:

Projekcí rovnoměrného kruhového pohybu na průměr kružnice, po níž kruhový pohyb probíhá, vzniká harmonický pohyb.

Na obr. 16.16a vidíme příklad takové projekce. Referenční částice  $P'$  vykonává rovnoměrný kruhový pohyb; pohybuje se (konstantní) úhlovou rychlostí  $\omega$  po referenční

*kružnici*. Poloměr kružnice  $x_m$  udává současně velikost polohového vektoru částice. Úhel, který svírá průvodič částice s osou  $x$  v čase  $t$ , je roven  $\omega t + \varphi$ , kde  $\varphi$  je velikost tohoto úhlu v čase  $t = 0$ .



**Obr. 16.16** (a) Referenční částice  $P'$  se rovnoměrně pohybuje po referenční kružnici o poloměru  $x_m$ . Polohu částice  $P$  získáme projekcí polohy  $P'$  na osu  $x$ . Částice  $P$  vykonává harmonický pohyb. (b) Projekcí vektoru rychlosti  $\mathbf{v}$  referenční částice dostaneme rychlost harmonického pohybu. (c) Projekcí vektoru zrychlení  $\mathbf{a}$  referenční částice dostaneme zrychlení harmonického pohybu.

Projekcí polohy částice  $P'$  na osu  $x$  dostaneme novou polohu. Řekněme, že se v ní nachází jiná částice, částice  $P$ . Jinými slovy, projekcí polohy částice  $P'$  na osu  $x$  dostaneme polohu  $x(t)$  částice  $P$ . Snadno vidíme, že platí

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi).$$

To je přesně rov. (16.3). Náš závěr je tedy správný: jestliže referenční částice  $P'$  vykonává rovnoměrný kruhový pohyb, vykonává projektovaná částice  $P$  harmonický pohyb.

Tento vztah vrhá nové světlo na úhlovou frekvenci  $\omega$  harmonického pohybu. Ukazuje nám, odkud se vzalo adjektivum „úhlová“. Veličina  $\omega$  je jednoduše konstantní úhlová rychlost pohybu referenční částice  $P'$  po referenční kružnici; fázová konstanta  $\varphi$  je určena polohou referenční částice  $P'$  na referenční kružnici v čase  $t = 0$ .

Na obr. 16.16b vidíme rychlost referenční částice  $P'$ . Velikost vektoru rychlosti je  $\omega x_m$ , jeho projekcí na osu  $x$  dostaneme

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi),$$

což je přesně rov. (16.5). Rychlost částice  $P$  na obr. 16.16b míří doleva, ve směru klesající výchylky  $x$ . Tomu odpovídá záporné znaménko v uvedeném vzorci pro rychlost.

Obr. 16.16c ukazuje zrychlení referenční částice  $P'$ . Velikost vektoru zrychlení  $\omega^2 x_m$  a jeho projekce na osu  $x$  má tvar

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi),$$

tedy přesně tvar rov. (16.6). Ať už tedy zkoumáme výchylku, rychlost nebo zrychlení, projekcí rovnoměrného kruhového pohybu dostaneme vskutku harmonický pohyb.

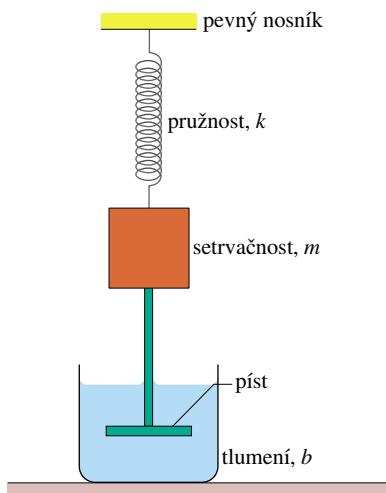
## 16.8 TLUMENÝ OSCILÁTOR

Kyvadlo ponořené do vody se patrně vůbec kývat nebude; bude se třít o vodu natolik, že se jeho pohyb rychle utlumí. Lepší je to u kyvadla ve vzduchu, ale i zde se pohyb po čase zastaví, protože vzduch opět působí na kyvadlo třecí silou, a tím mu odebírá mechanickou energii. Tření působí také v bodě závěsu kyvadla.

Jestliže vnější síla tlumí pohyb oscilátoru, hovoříme o **tlumeném** oscilátoru, popřípadě o **tlumeném** kmitání. Idealizovaný příklad tlumeného oscilátoru vidíme na obr. 16.17: těleso o hmotnosti  $m$  kmitá na pružině tuhosti  $k$ . Těleso je spojeno tyčí s pístem, ponořeným v kapalině (hmotu tyče i pístu zanedbáme). Při pohybu pístu nahoru a dolů působí na něj (a tedy na celý kmitající systém) kapalina brzdou třecí silou. V průběhu času se mechanická energie soustavy pružina + těleso zmenšuje, její část se spotřebuje na zahřátí kapaliny a pístu.

Předpokládejme, že **brzdná síla**  $F_b$ , kterou působí kapalina na píst, je úměrná rychlosti  $\mathbf{v}$  pístu a tělesa (tento předpoklad splněn, pokud se píst pohybuje pomalu). Je tedy

$$F_b = -bv, \quad (16.38)$$



**Obr. 16.17** Idealizovaný příklad tlumeného harmonického oscilátoru. Píst ponořený do kapaliny působí na kmitající těleso tlumící sílu.

kde  $b$  je **součinitel útlumu**. Tato konstanta závisí na vlastnostech pístu a kapaliny. Její jednotka v soustavě SI je  $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$ . Záporné znaménko ukazuje, že třecí síla působí vždy proti rychlosti. Na hmotné těleso tak působí výsledná síla

$$F_v = -kx - bv$$

neboli, jestliže položíme  $v = dx/dt$ ,

$$F_v = -kx - b \frac{dx}{dt}. \quad (16.39)$$

Tuto celkovou sílu dosadíme do druhého Newtonova zákona. Výsledkem je diferenciální rovnice

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

jejímž řešením je funkce

$$x(t) = x_m e^{-bt/(2m)} \cos(\omega' t + \varphi), \quad (16.40)$$

kde úhlová frekvence  $\omega'$  tlumeného oscilátoru je dána výrazem

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \quad (16.41)$$

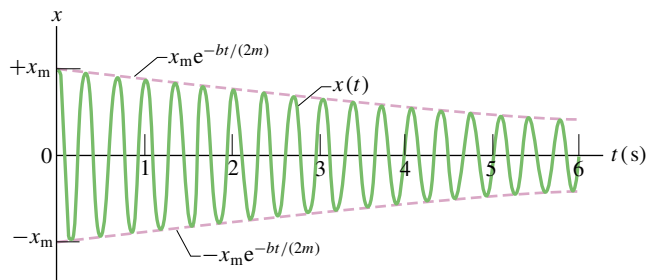
Jestliže tlumení úplně chybí, tj. jestliže  $b = 0$ , redukuje se rov. (16.41) na rov. (16.11) a dostáváme známý výraz  $\omega = \sqrt{k/m}$  pro úhlovou frekvenci netlumeného oscilátoru. Podobně se v tomto případě rov. (16.40) redukuje na

rov. (16.3) pro výchylku netlumeného oscilátoru. Jestliže je tlumení slabé, přesněji jestliže  $b \ll \sqrt{km}$ , platí  $\omega' \doteq \omega$ . Jestliže je naopak tlumení silné, bude při jisté kritické hodnotě součinitele útlumu  $b_c = 2\sqrt{km}$  výraz pod odmocninou v rov. (16.41) nulový a při ještě větším tlumení dokonce záporný. Řešení diferenciální rovnice se pak kvalitativně mění. Rozborem tohoto **aperiodického pohybu** se nebudeme dále zabývat.

Funkce v rov. (16.40) se chová jako oscilující funkce s postupně klesající amplitudou  $x_m e^{-bt/(2m)}$ . Tento závěr je také naznačen na obr. 16.18. Jak jsme viděli dříve, v případě netlumeného oscilátoru je mechanická energie konstantní a je dána rov. (16.23):  $E = \frac{1}{2} k x_m^2$ . U tlumeného oscilátoru mechanická energie s časem klesá. Pro slabé tlumení můžeme amplitudu  $x_m$  v rov. (16.23) nahradit výrazem  $x_m e^{-bt/(2m)}$ . Získáme tak závislost

$$E(t) \approx \frac{1}{2} k x_m^2 e^{-bt/m}, \quad (16.42)$$

kteřá nám říká, že mechanická energie tlumeného oscilátoru klesá exponenciálně s časem.



**Obr. 16.18** Časová závislost výchylky tlumeného oscilátoru na obr. 16.17. Použité parametry odpovídají hodnotám v př. 16.9. Amplituda kmitání, určená výrazem  $x_m e^{-bt/(2m)}$ , klesá exponenciálně s časem.

### PŘÍKLAD 16.9

Tlumený oscilátor na obr. 16.17 je popsán parametry  $m = 250 \text{ g}$ ,  $k = 85 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  a  $b = 70 \text{ g}\cdot\text{s}^{-1}$ .

(a) Určete periodu kmitání.

**ŘEŠENÍ:** Protože platí  $b \ll \sqrt{km} = 4,6 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ , perioda je přibližně určena výrazem pro netlumený oscilátor. Z rov. (16.12) dostaneme

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{(0,25 \text{ kg})}{(85 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1})}} = 0,34 \text{ s}. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Za jak dlouho se zmenší amplituda kmitání na polovinu své počáteční velikosti?



**ŘEŠENÍ:** Závislost amplitudy na čase  $t$  je určena rovnicí (16.40). Amplituda klesá podle vztahu  $x_m e^{-bt/(2m)}$ . Její počáteční velikost v čase  $t = 0$  je  $x_m$ . Hledáme tedy takový čas  $t$ , který splňuje rovnici

$$x_m e^{-bt/(2m)} = \frac{1}{2} x_m.$$

Obě strany rovnice dělíme  $x_m$  a srovnáme přirozený logaritmus obou stran nové rovnice:

$$\ln \frac{1}{2} = \ln(e^{-bt/(2m)}) = -\frac{bt}{2m}$$

neboli

$$t = \frac{-2m \ln(1/2)}{b} = \frac{-2(0,25 \text{ kg})(\ln(1/2))}{(0,070 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1})} = 5,0 \text{ s.} \quad (\text{Odpověď})$$

Na základě výsledku části (a) můžeme také říci, že za vypočtenou dobu proběhne přibližně 15 kmitů.

(c) Za jak dlouho se zmenší mechanická energie oscilátoru na polovinu své počáteční velikosti?

**ŘEŠENÍ:** Vydeme z rov. (16.42): mechanická energie v čase  $t$  je rovna  $\frac{1}{2} k x_m^2 e^{-bt/m}$ , její velikost v čase  $t = 0$  byla  $\frac{1}{2} k x_m^2$ . Hledáme tedy takový čas  $t$ , který splňuje rovnici

$$\frac{1}{2} k x_m^2 e^{-bt/m} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} k x_m^2 \right).$$

Obě strany rovnice dělíme  $\frac{1}{2} k x_m^2$  a novou rovnici řešíme vzhledem k neznámé  $t$ , podobně jako v části (b). Nakonec dostaneme

$$t = \frac{-m \ln(1/2)}{b} = \frac{-(0,25 \text{ kg})(\ln(1/2))}{(0,070 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1})} = 2,5 \text{ s.} \quad (\text{Odpověď})$$

Výsledkem je tedy přesně polovina doby, vypočtené v části (b) úlohy, tj. přibližně 7,5 period. Nakonec poznamenejme, že číselné hodnoty parametrů z této vzorové úlohy byly použity na obr. 16.18.

## 16.9 NUCENÉ KMITY A REZONANCE

Když se někdo pasivně houpe na houpačce, je to příklad *volného kmitání*. Jestliže nějaká další osoba houpačku navíc periodicky tahá nebo tlačí, jako na obr. 16.19, probíhá *nucené kmitání*. V tomto případě se musíme zabývat *dvěma* úhlovými frekvencemi. (1) *Vlastní* úhlová frekvence  $\omega$  je úhlová frekvence systému náhle vyvedeného z rovnováhy a pak ponechaného volně kmitat. (2) Úhlová frekvence  $\omega_b$  vnější budicí síly.



**Obr. 16.19** Z fyzikálního hlediska jsou na obraze Nikolase Lancreta naznačeny dvě frekvence: (1) vlastní frekvence, tj. frekvence, s jakou by se slečna houkala, kdyby byla ponechána sama o sobě, a (2) frekvence, s jakou tahá její přítel za provaz. Rezonance nastane, jsou-li tyto frekvence shodné.

K představě nuceného kmitání harmonického oscilátoru použijeme opět obr. 16.17. Musíme ovšem předpokládat, že se „pevný nosník“ nyní pohybuje harmonicky nahoru a dolů s námi určenou úhlovou frekvencí  $\omega_b$ . U takového oscilátoru se nakonec ustaví nucené kmity s úhlovou frekvencí  $\omega_b$  budicí síly a s výchylkou

$$x(t) = x_m \cos(\omega_b t + \varphi), \quad (16.43)$$

kde  $x_m$  je amplituda nucených kmitů.

Velikost amplitudy výchylky  $x_m$  je dána poměrně komplikovanou funkcí proměnných  $\omega$  a  $\omega_b$ . Jednodušší je popsat amplitudu rychlosti nucených kmitů  $v_m$ : amplituda rychlosti je největší, jestliže splníme podmínku

$$\omega_b = \omega \quad (\text{rezonance}). \quad (16.44)$$

Tato podmínka **rezonance** je současně *přibližnou* podmínkou pro největší amplitudu nucených kmitů  $x_m$ . Jestliže strkáme houpačku s frekvencí rovnou její vlastní frekvenci, dosáhneme velké amplitudy výchylky i amplitudy rychlosti. Děti k tomu dospějí velmi rychle metodou zkoušek

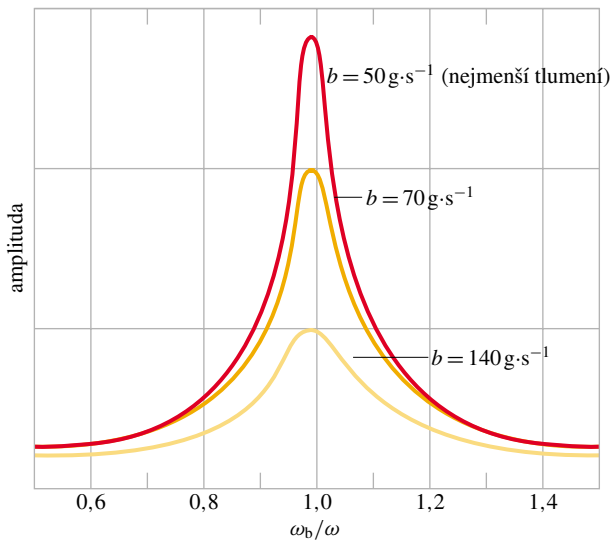
**KONTROLA 5:** Uvažme tři tlumené oscilátory podle obr. 16.17. Jejich parametry jsou zadány v následující tabulce. Ve druhém sloupci tabulky je tuhost pružiny, ve třetím konstanta útlumu a ve čtvrtém hmotnost tělesa.

oscilátor 1	$2k_0$	$b_0$	$m_0$
oscilátor 2	$k_0$	$6b_0$	$4m_0$
oscilátor 3	$3k_0$	$3b_0$	$m_0$

Uspořádejte oscilátory sestupně podle doby, za kterou klesne jejich mechanická energie na jednu čtvrtinu své počáteční hodnoty.

a omylů. Jestliže strkáme s jinou frekvencí, buď vyšší, nebo nižší, amplitudy výchylky a rychlosti nucených kmitů budou malé.

Na obr. 16.20 je zobrazena závislost amplitudy výchylky nucených kmitů na úhlové frekvenci budící síly pro tři hodnoty konstanty útlumu  $b$ . Všimněte si, že ve všech třech případech je amplituda nucených kmitů největší přibližně pro  $\omega_b/\omega = 1$ , to znamená přibližně při splnění rezonanční podmínky rov. (16.44). Z křivek na obr. 16.20 je patrna i následující závislost: čím je tlumení slabší, tím je *rezonanční vrchol* vyšší a užší.



**Obr. 16.20** Amplituda výchylky nucených kmitů  $x_m$  se mění v závislosti na úhlové frekvenci  $\omega_b$  budící síly. Amplituda je největší přibližně při  $\omega_b/\omega = 1$ , tj. přibližně při splnění rezonanční podmínky. Křivky na obrázku odpovídají třem různým hodnotám konstanty útlumu  $b$ .

Všechny mechanické soustavy vykazují jednu nebo více vlastních frekvencí. Když na ně působí velká vnější budící síla s frekvencí, která je v blízkosti jedné z vlastních frekvencí soustavy, mohou vznikající nucené kmity způsobit mechanické porušení. Například letečtí konstruktéři musí zajistit, aby se vlastní frekvence křídél lišila od frekvence pístů při letových otáčkách motoru. Bylo by pochoitelně nebezpečné, kdyby se při určitých otáčkách motoru začalo křídlo divoce třepat.

Příkladem destruktivního působení rezonance je i zřícení 1,4 km dlouhého úseku Nimitzovy dálnice, které jsme viděli na úvodní fotografii této kapitoly. Při průchodu seizmických vln danou oblastí došlo ke kmitání podloží s největší amplitudou rychlosti na úhlové frekvenci okolo  $9 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Tato frekvence odpovídá téměř přesně vlastní

úhlové frekvenci horizontálních konstrukčních dílů dálnice. Příčina toho, že ke zřícení došlo právě jen v uvedeném úseku, je patrna na obr. 16.21: dálnice zde byla postavena na volně členěném jílovitém podloží, které během otřesů vykazovalo *přinejmenším pětkrát větší* amplitudu rychlosti, než tomu bylo u skalnatého podloží v ostatních úsecích dálnice.



**Obr. 16.21** Geologická struktura části Oaklandu v okolí zálivu San Francisco s vyznačením zříceného úseku Nimitzovy dálnice. (Převzato z článku „Sediment-Induced Amplification and the Collapse of the Nimitz Freeway“ autorů S. E. Hougha a ostatních, uveřejněného v časopise *Nature* 26. dubna 1990).

## Parametrická rezonance

Slečna z obr. 16.19, ale houpající se sama bez pomoci přítele, stejně jako samostatně se houpající děti na obr. 16.1 jsou příkladem nového jevu — není to výše popsaná rezonance při působení vnější budící síly, ale tzv. **parametrická rezonance**. Při ní se soustava udržuje v kmitání tím, že se pravidelně mění její vhodný *vnitřní parametr*. V tomto případě se kýváním nohama vsedě anebo pokrčováním nohou vestoje mění moment setrvačnosti houpačky s pasažérem vůči ose rotace. Oproti obyčejné rezonanci jsou zde některé pozoruhodné rozdíly. Jeden úplný kmit houpačky je, řekněme, od levé krajní polohy přes nejnižší polohu, pravou krajní polohu, opět nejnižší polohu a zpět do výchozí levé krajní polohy. Během něj se ale dítě skrčí dvakrát — jde do kolen vždy, když jde houpačka dolů do nejnižší polohy! Rezanční frekvence  $\omega_p$  tohoto mechanismu houpání je tedy zřejmě dvojnásobná oproti vlastní frekvenci  $\omega$  houpačky; platí  $\omega_p = 2\omega$ . Další zvláštní odchylkou od nucených kmitů je to, že parametrickou rezonancí lze sice zesílit už existující kmit, ale nelze se s ní rozhoupat z naprostého klidu. Matematické vyšetřování takových kmitů je však i v nejjednodušším případě mnohem náročnější.

## PŘEHLED & SHRNU TÍ

### Frekvence

Libovolný periodický pohyb (libovolné kmitání) má svou *frekvenci*  $f$ , určující počet kmitů za jednu sekundu. V systému SI je jednotkou frekvence hertz:

$$1 \text{ hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ kmit za sekundu} = 1 \text{ s}^{-1}. \quad (16.1)$$

### Perioda

*Perioda*  $T$  je čas potřebný k provedení jednoho úplného kmitu (jednoho úplného cyklu pohybu). Perioda souvisí s frekvencí vztahem

$$T = \frac{1}{f}. \quad (16.2)$$

### Harmonický pohyb

V případě *harmonického pohybu* je výchylka částice z rovnovážné polohy popsána vztahem

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{výchylka}), \quad (16.3)$$

ve kterém  $x_m$  je *amplituda* výchylky, veličina  $(\omega t + \varphi)$  je *fáze* pohybu a  $\varphi$  je *fázová konstanta*. *Úhlová frekvence*  $\omega$  souvisí s periodou  $T$  a s frekvencí pohybu vztahy

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (\text{úhlová frekvence}). \quad (16.4)$$

První a druhá derivace rov. (16.3) určují časovou závislost rychlosti a zrychlení částice během harmonického pohybu:

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{rychlost}), \quad (16.5)$$

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{zrychlení}). \quad (16.6)$$

Kladná veličina  $\omega x_m$  v rov. (16.5) se nazývá *amplituda rychlosti* pohybu  $v_m$ . Kladná veličina  $\omega^2 x_m$  v rov. (16.6) se nazývá *amplituda zrychlení* pohybu  $a_m$ .

### Harmonický oscilátor

Jestliže částici o hmotnosti  $m$  vrací do rovnovážné polohy síla úměrná výchylce, tj.  $F = -kx$ , dojde k harmonickému kmitání s parametry  $\omega$  a  $T$ , kde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{úhlová frekvence}) \quad (16.11)$$

a

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{perioda}). \quad (16.12)$$

Takový systém se nazývá harmonický oscilátor.

### Energie

Částice, která vykonává harmonický pohyb, má v libovolném čase kinetickou energii  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  a polohovou energii  $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ . Jestliže neuvažujeme tření, zůstává celková mechanická energie  $E = E_k + E_p$  během pohybu konstantní, zatímco  $E_k$  a  $E_p$  se mění.

### Kyvadla

Harmonický pohyb vykazují například torzní kyvadlo na obrázku 16.8, matematické kyvadlo na obr. 16.10 a fyzické kyvadlo na obr. 16.11. V případě malých výchylek je pro tyto systémy perioda určena po řadě vztahy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\chi}} \quad (\text{torzní kyvadlo}), \quad (16.25)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (\text{matematické kyvadlo}) \quad (16.29)$$

a

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad (\text{fyzické kyvadlo}). \quad (16.32)$$

Ve všech případech se ve výrazu pro periodu objevuje podíl „setrvačného“ členu a „vratného“ členu. Vratný člen vyjadřuje velikost tendence k návratu do rovnovážné polohy.

### Kmitání a rovnoměrný kruhový pohyb

Harmonický pohyb vzniká také projekcí rovnoměrného kruhového pohybu na průměr kružnice, po níž kruhový pohyb probíhá. Obr. 16.16 ukazuje, jak všechny parametry rovnoměrného kruhového pohybu (poloha, rychlost a zrychlení) přecházejí uvedeno projekcí na odpovídající hodnoty pro harmonický pohyb.

### Tlumený oscilátor

U reálných kmitajících systémů se mechanická energie  $E$  během pohybu postupně zmenšuje, protože působí brzdící síly, které převádějí mechanickou energii na teplo. Říkáme, že pohyb reálného oscilátoru je tlumený. V případě, kdy je brzdící síla určena vztahem  $F_b = -bv$ , kde  $v$  je rychlost oscilátoru a  $b$  je *konstanta útlumu*, má časová závislost výchylky oscilátoru tvar

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \varphi), \quad (16.40)$$

kde  $\omega'$  je úhlová frekvence tlumeného oscilátoru, určená vztahem

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \quad (16.41)$$

Pro malou hodnotu konstanty útlumu ( $b \ll \sqrt{km}$ ) tedy máme  $\omega' \doteq \omega$ , kde  $\omega$  je úhlová frekvence netlumeného oscilátoru. Pro

malá  $b$  ubývá mechanická energie oscilátoru podle vztahu

$$E(t) \approx \frac{1}{2} k x_m^2 e^{-bt/m}. \quad (16.42)$$

**Nucené kmity a rezonance**

Jestliže na systém s *vlastní* úhlovou frekvencí  $\omega$  působí vnější budící síla s úhlovou frekvencí  $\omega_b$ , systém se rozkmitá s úhlovou

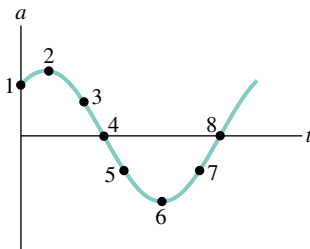
frekvencí  $\omega_b$ . Amplituda rychlosti nucených kmitů je přitom největší při splnění podmínky rezonance

$$\omega_b = \omega. \quad (16.44)$$

Při malém tlumení je za těže podmínky největší amplituda výchylky  $x_m$ .

**OTÁZKY**

1. Který z následujících vztahů mezi zrychlením  $a$  a polohou částice  $x$  implikuje harmonický pohyb: (a)  $a = 0,5x$ , (b)  $a = 400x^2$ , (c)  $a = -20x$  a (d)  $a = -3x^2$ ?
2. Na obr. 16.22 je vynesena časová závislost zrychlení  $a(t)$  pro částici, která vykonává harmonický pohyb. (a) Kterému z číselovaných bodů odpovídá poloha  $-x_m$ ? (b) Je rychlost částice v bodě 4 kladná, záporná, nebo nulová? (c) Odpovídá bodu 5 poloha částice  $-x_m$ ,  $+x_m$ , 0, mezi  $-x_m$  a 0, nebo mezi 0 a  $+x_m$ ?



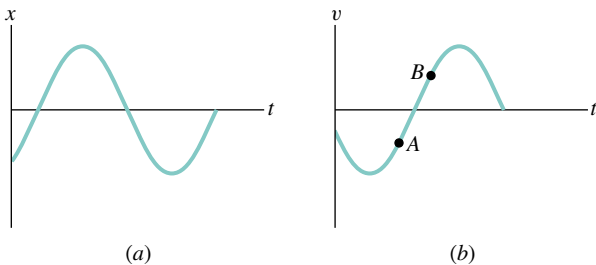
Obr. 16.22 Otázka 2

3. Výchylka kmitající částice je popsána vztahem

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi).$$

Určete, zda se částice v čase  $t = 0$  nachází v  $-x_m$ , v  $+x_m$ , v počátku, mezi  $-x_m$  a 0, nebo mezi 0 a  $+x_m$ , jestliže je  $\varphi$  rovno (a)  $\pi/2$ , (b)  $-\pi/3$ , (c)  $-3\pi/4$  a (d)  $3\pi/4$ .

4. Která z následujících relací popisuje fázovou konstantu  $\varphi$  pro harmonický pohyb na obr. 16.23a: (a)  $-\pi < \varphi < -\pi/2$ , (b)  $\pi < \varphi < 3\pi/2$ , nebo (c)  $-3\pi/2 < \varphi < -\pi$ ?

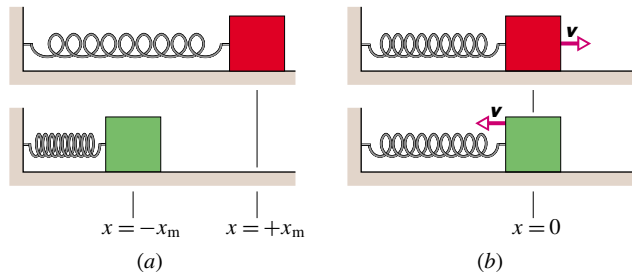


Obr. 16.23 Otázky 4 a 5

5. Na obr. 16.23b vidíme rychlost částice, která vykonává harmonický pohyb. Určete, zda částice s rychlostí odpovídající

- (a) bodu A na grafu a (b) bodu B na grafu je v klidu, pohybuje se směrem k bodu  $-x_m$ , nebo se pohybuje směrem k bodu  $x_m$ . Dále určete, zda se částice s rychlostí odpovídající (c) bodu A na grafu a (d) bodu B na grafu nachází v bodě  $-x_m$ , v bodě  $x_m$ , v bodě 0, mezi  $-x_m$  a 0, nebo mezi 0 a  $x_m$ . Nakonec rozhodněte, zda se rychlost odpovídající (e) bodu A na grafu a (f) bodu B zvětšuje, nebo zmenšuje.

6. Na obr. 16.24 vidíme čtyři oscilátory s vesměs stejně tuhými pružinami a stejně hmotnými tělesy. Jaký je fázový rozdíl dvou oscilátorů (a) na obr. 16.24a a (b) na obr. 16.24b? (c) Jaký je fázový rozdíl červeného oscilátoru na obr. 16.24a a zeleného oscilátoru na obr. 16.24b?



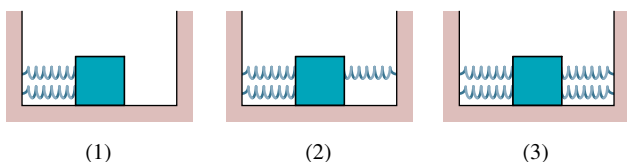
Obr. 16.24 Otázka 6

7. Pružina a těleso tvoří harmonický oscilátor umístěný (1) na vodorovné hladké podložce jako na obr. 16.5, (2) na nakloněné hladké podložce, svírající  $45^\circ$  s vodorovnou rovinou (těleso je připevněno ke spodnímu konci pružiny), a (3) svisle s pružinou upevněnou na stropě a tělesem zavěšeným na pružině. Uspořádejte oscilátory v sestupném smyslu podle (a) protažení pružiny v rovnovážné poloze oscilátoru, (b) frekvence kmitání.

8. Tři pružiny jsou upevněny na stropě a na jejich spodní konce jsou zavěšena tři tělesa. Hmotnosti těles jsou  $m_1 > m_2 > m_3$ . V klidovém stavu jsou protažení pružin vesměs stejná. U každé soustavy vyvoláme harmonický pohyb ve svislém směru. Uspořádejte soustavy v sestupném smyslu podle periody kmitů.

9. Na obr. 16.25 vidíme tři zařízení složená z tělesa a identických pružin. Centrální poloha tělesa odpovídá nezatížené délce pružin. Seřadte zařízení sestupně podle frekvence kmitů.

10. Těleso hmotnosti  $m$  je zavěšeno na pružině tuhosti  $k$ . U soustavy vyvoláme harmonický pohyb ve svislém směru. Poté pružinu rozpůlíme a na jednu její polovinu zavěsíme totéž těleso.



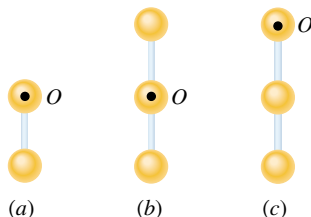
Obr. 16.25 Otázka 9

Opět vyvoláme kmitání. Vykazuje vyšší frekvenci oscilátor s původní, nebo se zkrácenou pružinou?

**11.** Jestliže zatížíme svisle visící pružinu A tělesem hmotnosti  $m_1$  a svisle visící pružinu B tělesem menší hmotnosti  $m_2$ , bude protažení obou pružin stejné. Nyní vyvoláme u obou soustav (pružina + těleso) harmonický pohyb se stejnou amplitudou výchylky. Který z obou oscilátorů má větší mechanickou energii?

**12.** Amplituda výchylky jistého harmonického oscilátoru byla zdvojnásobena. Určete, zda se následující veličiny zvětší, zmenší, nebo zůstanou stejné: (a) perioda, (b) tuhost pružiny, (c) celková mechanická energie, (d) maximální rychlost a (e) maximální zrychlení.

**13.** Na obr. 16.26 vidíme tři fyzická kyvadla tvořená identickými homogenními koulemi vesměs téže hmotnosti, pevně spojenými stejně dlouhými tyčemi zanedbatelné hmotnosti. Každé kyvadlo se otáčí kolem vyznačeného bodu závěsu  $O$ . Seřadte kyvadla v sestupném smyslu podle period jejich kmitů.

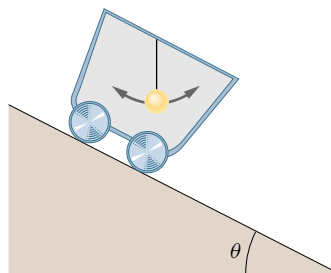


Obr. 16.26 Otázka 13

**14.** Na stropě kabiny stojícího výtahu je zavěšeno kyvadlo. Perioda jeho kmitů je  $T$ . Určete, zda se perioda zvětší, zmenší, nebo zůstane stejná, jestliže se kabina výtahu pohybuje (a) konstantní rychlostí směrem nahoru, (b) konstantní rychlostí směrem dolů, (c) dolů s konstantním zrychlením ve směru nahoru, (d) nahoru s konstantním zrychlením ve směru nahoru, (e) nahoru se zrychlením  $a = g$  ve směru dolů a (f) dolů se zrychlením  $a = g$  ve směru dolů.

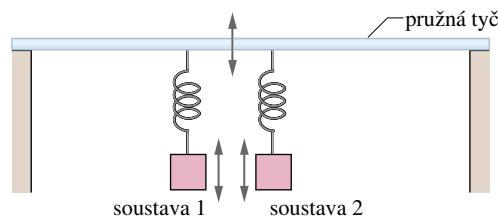
**15.** Ve vozíku, stojícím na vodorovné ploše, je upevněno kyvadlo. Perioda jeho kmitů je  $T$ . Určete, zda se perioda zvětší, zmenší, nebo zůstane stejná, jestliže vozík umístíme na nakloněné rovině, skloněné o úhel  $\theta$  vzhledem k rovině vodorovné

(obr. 16.27) a jestliže se vozík (a) nepohybuje, (b) pohybuje s konstantní rychlostí po nakloněné rovině směrem dolů, (c) pohybuje s konstantní rychlostí po nakloněné rovině směrem nahoru, (d) pohybuje po nakloněné rovině směrem nahoru s konstantním zrychlením, orientovaným podél nakloněné roviny směrem nahoru, (e) pohybuje po nakloněné rovině směrem dolů s konstantním zrychlením, orientovaným podél nakloněné roviny směrem nahoru, (f) pohybuje po nakloněné rovině směrem dolů s konstantním zrychlením  $a = g \sin \theta$ , orientovaným podél nakloněné roviny směrem dolů, a (g) pohybuje po nakloněné rovině směrem nahoru s konstantním zrychlením  $a = g \sin \theta$ , orientovaným podél nakloněné roviny směrem dolů.



Obr. 16.27 Otázka 15

**16.** Máme sestavit přístroj pro přenos kmitání na obr. 16.28. Přístroj je složen ze dvou soustav pružina + těleso. Obě pružiny jsou upevněny na pružné tyči. Jestliže protáhneme pružinu první soustavy a pak ji uvolníme, vznikne harmonický pohyb s frekvencí  $f_1$ . Kmitání se přenáší na tyč a ta působí budící silou na druhou soustavu. Vynucující síla tedy osciluje s frekvencí  $f_1$ . Při konstrukci přístroje si máme vybrat ze čtyř pružin a čtyř hmotných těles: tuhosti pružin  $k$  jsou  $1600 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ ,  $1500 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ ,  $1400 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  a  $1200 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ , hmotnosti těles  $m$  jsou  $800 \text{ kg}$ ,  $500 \text{ kg}$ ,  $400 \text{ kg}$  a  $200 \text{ kg}$ . Naším cílem je dosáhnout maximální amplitudy kmitů u druhé soustavy. Kterou pružinu a které těleso vyberete pro jednotlivé soustavy? Řešte bez provádění detailního výpočtu.



Obr. 16.28 Otázka 16

## CVIČENÍ & ÚLOHY

### ODST. 16.3 Pohybová rovnice pro harmonický pohyb

**1C.** Uvažujme harmonicky kmitající těleso. Doba mezi dvěma po sobě následujícími okamžiky, ve kterých je rychlost tělesa nulová, činí  $0,25 \text{ s}$ . Prostorová vzdálenost poloh tělesa v těchto

dvou okamžicích je  $36 \text{ cm}$ . Vypočítejte (a) periodu, (b) frekvenci, a (c) amplitudu pohybu.

**2C.** Pohyb závaží kmitajícího na pružině se od jistého časového okamžiku začíná po  $0,75 \text{ s}$  opakovat. Nalezněte (a) periodu po-

hybu, (b) frekvenci v hertzích a (c) úhlovou frekvenci v radiánech za sekundu.

**3C.** Závaží o hmotnosti 4,00 kg je zavěšeno na pružinu. Pružina se tím prodlouží o 16,0 cm vzhledem ke své nezátžené délce. (a) Jaká je tuhost pružiny? (b) Dané závaží odstraníme a na tutéž pružinu zavěsíme závaží o hmotnosti 0,500 kg. Poté pružinu ještě poněkud protáhneme a uvolníme. Jaká bude perioda vzniklých kmitů?

**4C.** Oscilátor je tvořen závažím o hmotnosti 0,500 kg zavěšeným na pružině. Jestliže ho rozkmitáme s amplitudou 35,0 cm, pohyb se po každých 0,500 s opakuje. Nalezněte (a) periodu kmitání, (b) jeho frekvenci, (c) úhlovou frekvenci, (d) tuhost pružiny, (e) největší rychlost závaží a (f) největší sílu působící na závaží.

**5C.** Atomy v pevných látkách kmitají za pokojové teploty s frekvencemi řádu  $10^{13}$  Hz. Vyjděme z představy atomů propojených pružinami. Předpokládejme, že v tělese ze stříbra kmitá jeden atom stříbra s uvedenou frekvencí a ostatní atomy se nepohybují. Vypočtete efektivní tuhost pružiny. Jeden mol stříbra ( $6,02 \cdot 10^{23}$  atomů) má hmotnost 108 g.

**6C.** Jaké je největší zrychlení plošiny, která kmitá s amplitudou 2,20 cm a s frekvencí 6,60 Hz?

**7C.** V reproduktoru se vytváří zvuk pomocí kmitající membrány. Předpokládejme, že u daného reproduktoru činí maximální možná amplituda kmitů  $1,0 \cdot 10^{-3}$  mm. Určete obor frekvencí, při kterých převyšuje zrychlení membrány hodnotu  $g$  (tíhové zrychlení).

**8C.** Pružinová váha je na měřítku délky 4,00 in cejchována od 0 do 32,0 lb. Balík, který je zavěšen na váze, kmitá ve svislém směru s frekvencí 2,00 Hz. (a) Určete tuhost pružiny. (b) Jaká je váha balíku?

**9C.** Závaží 20 N zavěsíme na konec svislé pružiny; pružina se tím prodlouží o 20 cm. (a) Jaká je tuhost pružiny? (b) Pružinu nyní umístíme vodorovně na hladkou podložku. Jeden její konec upevníme ke stěně, druhý konec spojíme se závažím 5,0 N. Poté závaží poněkud posuneme (pružina se natáhne) a uvolníme s nulovou počáteční rychlostí. Jaká je perioda vzniklých kmitů?

**10C.** Závaží o hmotnosti 50,0 g zavěsíme na konec svislé pružiny a rozkmitáme. Největší rychlost závaží činí  $15,0 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ , perioda kmitání je 0,500 s. Určete (a) tuhost pružiny, (b) amplitudu kmitání a (c) frekvenci kmitů.

**11C.** Částice hmotnosti  $1,00 \cdot 10^{-20}$  kg harmonicky kmitá s periodou  $1,00 \cdot 10^{-5}$  s a s maximální rychlostí  $1,00 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vypočtete (a) úhlovou frekvenci kmitání a (b) největší výchylku částice.

**12C.** Malé těleso o hmotnosti 0,12 kg harmonicky kmitá s amplitudou 8,5 cm a s periodou 0,20 s. (a) Jaká největší síla působí na částici? (b) Předpokládejme, že kmitání je vyvoláno pružinou. Jaká je tuhost pružiny?

**13C.** Břit elektrického holicího strojku se přesouvá sem a tam na vzdálenosti 2,00 mm. Jeho pohyb lze považovat za harmo-

nické kmitání s frekvencí 120 Hz. Určete (a) amplitudu kmitů, (b) největší rychlost břitu a (c) největší zrychlení břitu.

**14C.** Membrána reproduktoru harmonicky kmitá s frekvencí 440 Hz a amplitudou 0,75 mm. Určete (a) úhlovou frekvenci kmitů, (b) největší rychlost membrány a (c) největší zrychlení membrány.

**15C.** Uvažme kmitání automobilu ve svislém směru. Lze uvažovat, jako by vozidlo bylo umístěno na čtyřech stejných pružinách. U jistého vozidla nastavíme tuhost těchto pružin tak, aby frekvence kmitání činila 3,00 Hz. (a) Jaká je tuhost pružin, předpokládáme-li hmotnost vozidla 1 450 kg a rovnoměrné rozložení váhy? (b) Ve vozidle jede pět osob. Jejich průměrná hmotnost je 73 kg a váha je opět rozložena rovnoměrně. Jaká je frekvence kmitání každé pružiny?

**16C.** Poloha harmonicky kmitajícího tělesa je popsána vztahem

$$x = (6,0 \text{ m}) \cos \left[ (3\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1})t + \frac{1}{3}\pi \text{ rad} \right].$$

V čase  $t = 2,0$  s stanovte (a) výchylku tělesa, (b) rychlost tělesa, (c) zrychlení tělesa a (d) fázi pohybu. Dále určete (e) frekvenci a (f) periodu kmitů.

**17C.** Daná částice harmonicky kmitá s frekvencí 0,25 Hz kolem rovnovážné polohy  $x = 0$ . V čase  $t = 0$  měla výchylku  $x = 0,37$  cm a nulovou rychlost. Určete pro její kmitání (a) periodu, (b) úhlovou frekvenci, (c) amplitudu, (d) výchylku jako funkci času, (e) rychlost jako funkci času, (f) maximální rychlost, (g) maximální zrychlení, (h) výchylku v čase  $t = 3,0$  s, a (i) rychlost v čase  $t = 3,0$  s.

**18C.** Píst ve válcové hlavě parní lokomotivy má záběr (dvojnásobek amplitudy) 0,76 m. Pohyb pístu lze pokládat za harmonické kmitání s úhlovou frekvencí  $180 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$ . Jaká je maximální rychlost pístu?

**19Ú.** Obr. 16.29 ukazuje astronauta sedícího na přístroji k měření tělesné hmotnosti v beztlíživém stavu. Přístroj byl vyvinut pro použití na vesmírných stanicích, udržovaných na oběžné dráze kolem Země. Je tvořen pohyblivou sedačkou spojenou pružinami s rámem: astronaut se usadí na sedačku a měří periodu vyvolaných kmitů. Jeho hmotnost se poté určuje ze vztahu pro periodu kmitající soustavy pružina + hmotný blok. (a) Předpokládejme, že hmotnost astronauta je  $M$  a efektivní hmotnost kmitající sedačky činí  $m$ . Ukažte, že platí

$$M = \frac{k}{4\pi^2} T^2 - m,$$

kde  $T$  je perioda kmitů a  $k$  tuhost pružiny. (b) Přístroj, který byl umístěn na vesmírné stanici SKYLAB TWO, měl tuhost pružiny  $k = 605,6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  a perioda kmitů prázdné sedačky byla 0,901 49 s. Vypočtete efektivní hmotnost sedačky. (c) Perioda kmitů sedačky s astronautem činila 2,088 32 s. Vypočtete hmotnost astronauta.



Obr. 16.29 Úloha 19

**20Ú.** Na pružině visí závaží o hmotnosti 2,0 kg. Přívažek hmotnosti 300 g způsobí dodatečné protažení pružiny o 2,00 cm. (a) Jak velká je tuhost pružiny? (b) Rychlé uvolnění přívažku vyvolá harmonické kmity závaží. Určete periodu pohybu.

**21Ú.** Na pružině harmonicky kmitá závaží o hmotnosti  $m$ . Perioda pohybu činí 2,0 s. Jestliže zvýšíme hmotnost závaží o 2,0 kg, perioda se zvýší na 3,0 s. Určete hmotnost  $m$ .

**22Ú.** Koncový bod jednoho ze dvou ramen ladičky harmonicky kmitá s frekvencí 1 000 Hz a amplitudou 0,40 mm. Určete pro tento bod (a) maximální zrychlení a (b) maximální rychlost. Dále nalezněte (c) zrychlení a (d) rychlost uvažovaného bodu v okamžiku, kdy jeho výchylka činí 0,20 mm.

**23Ú.** Těleso o hmotnosti 0,10 kg osciluje tam a zpět v přímém směru. Jeho výchylka, měřená od počátku souřadnic, je popsána vztahem

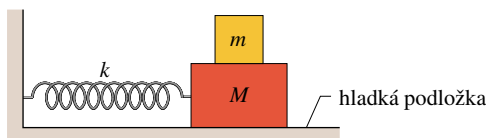
$$x = (10 \text{ cm}) \cos \left[ (10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})t + \frac{1}{2}\pi \text{ rad} \right].$$

(a) Jaká je frekvence kmitů? (b) Jakou maximální rychlostí se těleso pohybuje? Při jaké hodnotě výchylky má těleso tuto maximální rychlost? (c) Jaké je největší zrychlení tělesa? Při jaké hodnotě výchylky je zrychlení největší? (d) Určete časovou závislost síly, která působí na těleso a vyvolává uvedené kmitání.

**24Ú.** Příliv a odliv vyvolává v přístavu změny výšky hladiny moře. Maximální rozdíl výšek hladiny je  $d$ . Pohyb hladiny je přitom možno považovat za harmonický s periodou 12,5 h. Za jak dlouho dojde k poklesu hladiny o vzdálenost  $d/4$  od její nejvyšší úrovně?

**25Ú.** Dvě tělesa s hmotnostmi  $m = 1,0 \text{ kg}$ ,  $M = 10 \text{ kg}$  a pružina jsou uspořádány podle obr. 16.30 na vodorovné hladké podložce. Statický činitel smykového tření mezi oběma tělesy činí 0,40. Jaká může být největší amplituda harmonických kmitů soustavy, má-li se zabránit smýkání mezi oběma tělesy?

**26Ú.** Hmotný blok je umístěn na vodorovný povrch (povrch vibračního stolu). Povrch harmonicky kmitá ve vodorovném směru s frekvencí 2,0 Hz. Statický činitel smykového tření mezi



Obr. 16.30 Úloha 25

blokem a povrchem stolu má velikost 0,50. Jak velká může ještě být amplituda kmitů, má-li se vyloučit možnost klouzání bloku?

**27Ú.** Na pístu, který harmonicky kmitá ve svislém směru, položíme závaží. (a) Je-li perioda kmitů pístu 1,0 s, při jaké amplitudě se závaží oddělí od pístu? (b) Je-li amplituda kmitů pístu 5,0 cm, jaká může být největší frekvence, pro kterou zůstává závaží nepřetržitě v kontaktu s pístem?

**28Ú.** Oscilátor je tvořen hmotným blokem, spojeným s pružinou ( $k = 400 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ ). V jistém čase  $t$  byly zaznamenány následující hodnoty polohy (měřené od rovnovážné polohy soustavy), rychlosti a zrychlení hmotného bloku:  $x = 0,100 \text{ m}$ ,  $v = -13,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a  $a = -123 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Vypočítejte (a) frekvenci kmitů, (b) hmotnost bloku a (c) amplitudu pohybu.

**29Ú.** Harmonický oscilátor je tvořen kvádrem o hmotnosti 2,00 kg spojeným s pružinou tuhosti  $100 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ . V čase  $t = 1,00 \text{ s}$  se kvádr nachází v poloze  $x = 0,129 \text{ m}$  a jeho rychlost činí  $v = 3,415 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . (a) Jaká je amplituda oscilací? Jaká byla (b) poloha kvádra a (c) rychlost kvádra v čase  $t = 0$ ?

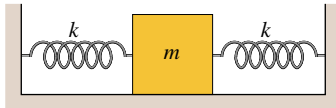
**30Ú.** Nehmotná pružina je zavěšena na stropě místnosti a na její spodní konec připevníme malé závaží. Závaží nejprve udržujeme v klidu v poloze o souřadnici  $y_p$ ; v této poloze má pružina svoji nezátíženou délku. Poté závaží uvolníme s nulovou počáteční rychlostí. V průběhu vzniklého kmitání klesá závaží nejméně 10 cm pod souřadnici  $y_p$ . (a) Jaká je frekvence kmitů? (b) Jaká je rychlost závaží v okamžiku, kdy se právě nachází 8 cm pod počáteční polohou  $y_p$ ? (c) K závaží připevníme přívažek hmotnosti 300 g. Frekvence takto upraveného oscilátoru je rovna polovině původní frekvence. Jaká je hmotnost prvního závaží? (d) Určete rovnovážnou polohu nového oscilátoru vzhledem k výchozí souřadnici  $y_p$ .

**31Ú.** Dvě částice harmonicky kmitají podél přímého segmentu délky  $a$  (pohybují se na opačných stranách přímé a tenké lišty a jejich dráha pokrývá na liště úsečku délky  $a$ ). Oba harmonické pohyby mají tutéž periodou 1,5 s, avšak jsou navzájem fázově posunuty o  $\pi/6$  rad. (a) Jaká je vzdálenost obou částic v okamžiku, kdy se opožděná částice právě nachází v bodě obratu? Výsledek vyjádřete pomocí délky  $a$ . (b) Uvažme malý časový interval bezprostředně následující po okamžiku, popsaném v části (a). Pohybují se obě částice během tohoto intervalu ve stejném směru, v opačném směru od sebe, nebo v opačném směru k sobě?

**32Ú.** Dvě částice harmonicky kmitají kolem stejné rovnovážné polohy se stejnou amplitudou a stejnou frekvencí. Oba pohyby probíhají podél téhož směru. Částice se míjejí vždy tehdy, když se výchylka každé z nich rovná polovině amplitudy. Jaký je fázový rozdíl mezi oběma harmonickými pohyby?

**33Ú.** Dvě stejné pružiny jsou jedněmi konci připevněny ke dvěma protilehlým stěnám kvádru hmotnosti  $m$  a druhými konci vetknuty do protilehlých stěn. Kvádr je umístěn na hladké podložce. Soustava je znázorněna na obr. 16.31. Ukažte, že kvádr harmonicky kmitá s frekvencí

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$



Obr. 16.31 Úlohy 33 a 34

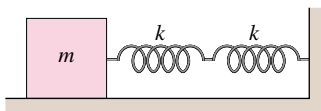
**34Ú.** Vyjdeme ze znění úlohy 33, avšak nyní předpokládejme, že dvě pružiny na obr. 16.31 mají obecně různé tuhosti  $k_1$  a  $k_2$ . Ukažte, že frekvence kmitající soustavy je nyní určena vztahem

$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2},$$

kde  $f_1$ , popř.  $f_2$ , jsou frekvence oscilátorů, tvořených kvádrem a pouze pružinou 1, popř. kvádrem a pouze pružinou 2.

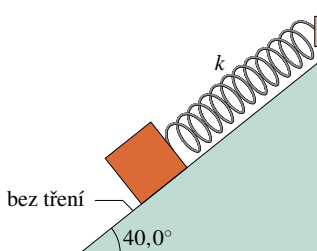
**35Ú.** Soustava dvou stejných, sériově propojených pružin tuhosti  $k$  je jedním svým koncem spojena s kvádrem hmotnosti  $m$  a druhým koncem připevněna ke stěně. Kvádr se pohybuje na hladké podložce. Soustava je znázorněna na obr. 16.32. Ukažte, že soustava harmonicky kmitá s frekvencí

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{2m}}.$$



Obr. 16.32 Úloha 35

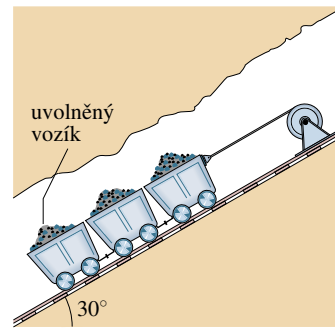
**36Ú.** Kvádr o váze 14,0 N klouže bez tření po nakloněné rovině se sklonem  $40,0^\circ$ . Ke kvádru je připojena nezatížená pružina nezatížené délky 0,450 m a tuhosti  $120 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ . Druhý konec pružiny je upevněn na vrcholu klínu; celá soustava je znázorněna na obr. 16.33. (a) Určete vzdálenost rovnovážné polohy kvádrů od vrcholu klínu. (b) Kvádr poněkud vysuneme z rovnovážné polohy podél nakloněné roviny směrem dolů a poté jej uvolníme. Jaká je perioda vzniklého harmonického pohybu?



Obr. 16.33 Úloha 36

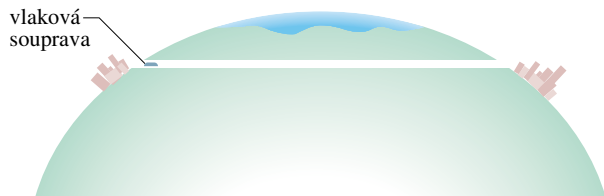
**37Ú.** Homogenní pružina má délku  $L$  a tuhost  $k$ . Pružinu řezem rozdělíme na dvě části délek  $L_1$  a  $L_2$  a označíme  $n = L_1/L_2$ . (a) Vyjádřete tuhosti  $k_1$  a  $k_2$  obou nových pružin pomocí  $k$  a  $n$ . (b) Pokud byl určitý kvádr spojen s původní pružinou, jako na obr. 16.5, kmital vzniklý harmonický oscilátor s frekvencí  $f$ . Jestliže nyní připevníme ke kvádru pružinu délky  $L_1$ , popř. pružinu délky  $L_2$ , bude mít nový oscilátor frekvenci  $f_1$ , popř. frekvenci  $f_2$ . Vyjádřete frekvence  $f_1$  a  $f_2$  pomocí původní frekvence  $f$ .

**38Ú.** Tři navzájem propojené důlní vagony, každý o hmotnosti 10 000 kg, jsou umístěny na nakloněné dráze důlní železnice. Dráha má sklon  $30^\circ$ . Vagony jsou udržovány v klidu závěsným lanem, vedeným rovnoběžně s nakloněným směrem důlní dráhy (obr. 16.34). Váhou vagonů je závěsné lano prodlouženo o 15 cm vzhledem ke své nezatížené délce. V jistém okamžiku se uvolnil spodní vagon; poté zbylé dva vagony harmonicky kmitají. Předpokládejte, že závěsné lano splňuje Hookův zákon a určete (a) frekvenci, (b) amplitudu harmonického pohybu.



Obr. 16.34 Úloha 38

**39Ú.** Ke zmírnění dopravních problémů při cestování mezi dvěma velkými městy (například mezi Bostonem a Washingtonem) navrhují dopravní konstruktéři následující řešení. Obě města budou propojena podél tětiny Země přímým vlakovým tunelem (obr. 16.35). Vlaková souprava, uvolněná ve výchozí stanici, bude samovolně klesat první polovinou tunelu a stoupat druhou polovinou až ke stanici cílové. Předpokládejme, že Země je homogenní koule. Odpor vzduchu a tření zanedbáme. (a) Ukažte, že cesta mezi městy představuje polovinu úplného harmonického kmitu. (b) Vypočtete dobu jízdy mezi městy.



Obr. 16.35 Úloha 39

**ODST. 16.4 Energie harmonického pohybu**

**40C.** Určete mechanickou energii soustavy pružina + těleso,



jestliže pružina má tuhost  $1,3 \text{ N}\cdot\text{cm}^{-1}$  a amplituda kmitů činí  $2,4 \text{ cm}$ .

**41C.** Kmitající soustava pružina + těleso má mechanickou energii  $1,00 \text{ J}$ . Kmitání probíhá s amplitudou  $10,0 \text{ cm}$  a maximální rychlost tělesa je  $1,20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Určete (a) tuhost pružiny, (b) hmotnost tělesa a (c) frekvenci kmitání.

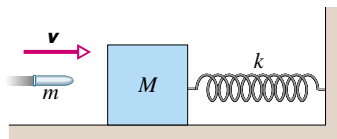
**42C.** Blok o hmotnosti  $5,00 \text{ kg}$  je umístěn na hladké vodorovné podložce a je spojen s pružinou tuhosti  $1\,000 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ . Blok vychýlíme vodorovně z rovnovážné polohy o  $50,0 \text{ cm}$  a udělíme mu počáteční rychlost o velikosti  $10,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  ve směru zpět k rovnovážné poloze. (a) Jaká je frekvence vzniklých kmitů? (b) Jaká je počáteční hodnota potenciální energie pružnosti pro soustavu pružina + hmotný blok? (c) Jaká je počáteční hodnota kinetické energie? (d) Jaká je amplituda kmitů?

**43C.** Jestliže zavěsíme na danou svislou pružinu závaží o hmotnosti  $1,3 \text{ kg}$ , pružina se protáhne o  $9,6 \text{ cm}$ . (a) Vypočítejte tuhost pružiny. Závaží přesuneme tahem o dalších  $5,0 \text{ cm}$  směrem dolů a uvolníme s nulovou počáteční rychlostí. Určete (b) periodu, (c) frekvenci a (d) amplitudu vzniklého kmitání. (e) Jaká je při kmitání maximální rychlost závaží?

**44C.** Gigantický (a hypotetický) prak má vystřelit kámen o hmotnosti  $130 \text{ g}$  tak, aby unikl ze sféry přitažlivosti Země (kámen musí být tedy vystřelen druhou kosmickou rychlostí  $11,2 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ ). Pružný mechanismus praku splňuje Hookův zákon. Je natažen o  $1,5 \text{ m}$  a uvolněn. Veškerá potenciální energie pružnosti se poté transformuje na energii kinetickou. (a) Určete tuhost odpalovacího přístroje. (b) Řekněme, že průměrný muž vyvine sílu  $220 \text{ N}$ . Kolik mužů musí spojit své síly k natažení praku?

**45C.** Výchylka harmonicky kmitající částice je v jistém okamžiku rovna jedné polovině amplitudy. Jaká část celkové mechanické energie má v tomto okamžiku formu energie (a) kinetické a (b) potenciální? (c) Při jaké výchylce má jedna polovina celkové mechanické energie formu energie kinetické? Vyjádřete hledanou výchylku pomocí amplitudy.

**46C.** Těleso o hmotnosti  $M$  je umístěno na vodorovné hladké podložce a spojeno s pružinou, která je na druhém konci upevněna ke stěně. Soustava je v rovnováze. V určitém okamžiku vnikne do tělesa rychlostí  $v$  projektil o hmotnosti  $m$ . Projektil zůstane zachycen v tělese. Situace je znázorněna na obr. 16.36. (a) Určete rychlost tělesa bezprostředně po zásahu. (b) Vypočítejte amplitudu vzniklého harmonického pohybu.



Obr. 16.36 Cvičení 46

**47Ú.** Těleso hmotnosti  $3,0 \text{ kg}$  harmonicky kmitá. Jeho výchylka z rovnovážné polohy je popsána vztahem

$$x(t) = (5,0 \text{ m}) \cos \left[ \left( \frac{1}{3} \pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \right) t - \frac{1}{4} \pi \text{ rad} \right].$$

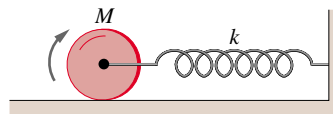
(a) Při jaké výchylce je potenciální energie částice rovna polovině celkové mechanické energie? (b) Jak dlouho trvá pohyb částice z rovnovážné polohy do polohy, kterou jste určili v části (a)?

**48Ú.** Částice o hmotnosti  $10 \text{ g}$  harmonicky kmitá s amplitudou  $2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ . Maximální zrychlení částice činí  $8,0 \cdot 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ , fázová konstanta je  $-\pi/3 \text{ rad}$ . (a) Popište sílu, která na částici působí. Napište vztah, určující časovou závislost této síly. (b) Určete periodu pohybu. (c) Stanovte největší rychlost částice. (d) Vypočítejte celkovou mechanickou energii kmitající částice.

**49Ú.** Nehmotná pružina tuhosti  $19 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  je jedním koncem zavěšena na nosník. Na její volný konec umístíme těleso o hmotnosti  $0,20 \text{ kg}$ . Těleso uvolníme v okamžiku, kdy pružina ještě nebyla protažena. (a) O jakou největší vzdálenost vzhledem ke své počáteční poloze těleso klesne? Určete (b) frekvenci a (c) amplitudu výsledného harmonického pohybu.

**50Ú.** Na pružině tuhosti  $500 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  visí těleso o hmotnosti  $4,0 \text{ kg}$ . Přímo zespodu je do tělesa vstřelena kulka hmotnosti  $50 \text{ g}$ . Kulka vnikne do tělesa rychlostí  $150 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a uvízne v něm. (a) Určete amplitudu takto vyvolaného harmonického pohybu. (b) Jakou část mechanické energie kmitajícího systému představuje původní kinetická energie kulky?

**51Ú\*.** Pevný válec, otáčivý kolem vodorovné osy, je umístěn na vodorovné ploše. K ose válce je připevněna pružina tuhosti  $k = 3,0 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ . Válec uvolníme s nulovou počáteční rychlostí v poloze, ve které je pružina protažena o  $0,25 \text{ m}$  vzhledem k její rovnovážné délce. Poté se válec valí po ploše bez prokluzování (obr. 16.37). Určete kinetickou energii (a) translačního a (b) ro-



Obr. 16.37 Úloha 51

tačního pohybu válce v okamžiku, kdy válec právě prochází rovnovážnou polohou. (c) Ukažte, že při splnění uvedených předpokladů uskutečňuje těžiště válce harmonický pohyb s periodou

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3M}{2k}},$$

kde  $M$  je hmotnost válce. (Tip: Vypočítejte časovou derivaci celkové mechanické energie.)

### ODST. 16.5 Torzní kmitý

**52C.** Plochý homogenní kruhový disk má hmotnost  $3,00 \text{ kg}$  a poloměr  $70,0 \text{ cm}$ . Disk je ve svém středu zavěšen na svislý drát, takže spočívá ve vodorovné rovině. Chceme-li disk vytočit o  $2,50 \text{ rad}$  vzhledem k jeho rovnovážné poloze a poté jej v této nové poloze udržet, musíme na něj působit silovým momentem  $0,0600 \text{ N}\cdot\text{m}$ . (a) Vypočítejte moment setrvačnosti disku při jeho otáčení kolem osy určené drátem. (b) Určete torzní konstantu. (c) Jaká je úhlová frekvence popsaného torzního oscilátoru?

**53Ú.** Homogenní masivní koule hmotnosti 95 kg má poloměr 15 cm. Koule visí na drátě, který je připevněn ke stropu místnosti. Silový moment velikosti  $0,20 \text{ N}\cdot\text{m}$  uděluje kouli úhlovou výchylku  $0,85 \text{ rad}$ . Po uvolnění z uvedené polohy pozorujeme torzní kmity. Jaká je jejich perioda?

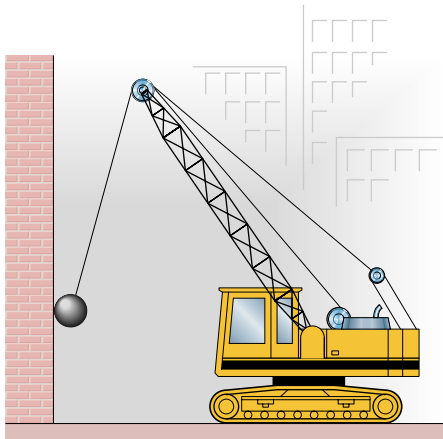
**54Ú.** Technik zkoumá nepravidelné těleso hmotnosti 10 kg. Má za úkol zjistit moment setrvačnosti tělesa vzhledem k jisté ose procházející těžištěm. Technik zavěsí těleso na drát takovým způsobem, aby byla předepsaná osa totožná se směrem drátu. Vzniklé torzní kyvadlo vykoná 20 úplných kmitů za dobu 50 s. Navíc je známo, že použitý drát má torzní konstantu  $\kappa = 0,50 \text{ N}\cdot\text{m}$ . Jaký je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k předepsané ose?

**55Ú.** Nepokoj hodinek torzně kmitá s úhlovou amplitudou  $\pi \text{ rad}$  a s periodou  $0,500 \text{ s}$ . Určete (a) maximální úhlovou rychlost nepokoje, (b) jeho úhlovou rychlost při úhlové výchylce  $\frac{1}{2}\pi \text{ rad}$  a (c) úhlové zrychlení nepokoje při úhlové výchylce  $\frac{1}{4}\pi \text{ rad}$ .

### ODST. 16.6 Kyvadla

**56C.** Matematické kyvadlo se nachází v místě, kde tíhové zrychlení  $g$  činí  $32,2 \text{ ft}\cdot\text{s}^{-2}$ . Perioda jeho kmitů je  $1,00 \text{ s}$ . Jaká je jeho délka?

**57C.** Demoliční koule o hmotnosti  $2\,500 \text{ kg}$  kývá na závěsném laně vedeném přes rameno jeřábu (obr. 16.38). Délka lana od vrcholu ramena ke kouli je  $17 \text{ m}$ . (a) Určete periodu pohybu za předpokladu, že soustavu lze pokládat za matematické kyvadlo. (b) Závisí perioda na hmotnosti koule?



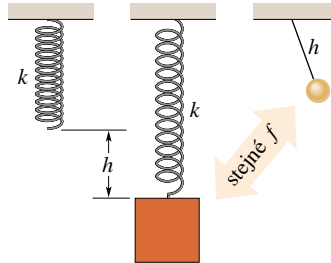
Obr. 16.38 Cvičení 57

**58C.** Matematické kyvadlo odpočítává sekundy: skuteční každé dvě sekundy úplný kmit z jedné krajní polohy do druhé a zpět. Jaká je jeho délka?

**59C.** Matematické kyvadlo délky  $1,50 \text{ m}$  skutečnilo  $72,0$  úplných kmitů za dobu  $180 \text{ s}$ . Jak velké je tíhové zrychlení v místě, kde byly uvedené hodnoty naměřeny?

**60C.** V této kapitole jsme studovali dvě kmitající soustavy: závaží zavěšené na pružině a matematické kyvadlo. Mezi nimi

existuje zajímavý vztah. Předpokládejme, že na konec pružiny zavěšíme závaží a pokud je závaží v klidu, jako na obr. 16.39, pružina se prodlouží o délku  $h$  vzhledem ke své nezatížené délce. Na druhé straně uvažme matematické kyvadlo délky  $h$ . Dokažte, že obě soustavy kmitají se stejnou frekvencí.



Obr. 16.39 Cvičení 60

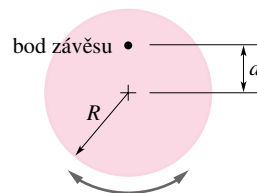
**61C.** Artista sedí na visuté hrazdě a houpe se tam a zpět s periodou  $8,85 \text{ s}$ . Pokud je hrazda v rovnovážné poloze a artista se na ní postaví, zvýší se těžiště soustavy o  $35,0 \text{ cm}$ . Považujte soustavu artista + visutá hrazda za matematické kyvadlo. Vypočítejte jeho periodu, jestliže artista při houpání na hrazdě stojí.

**62C.** Matematické kyvadlo délky  $L$  volně kmitá s malou úhlovou amplitudou. V okamžiku, kdy právě prochází rovnovážnou polohou, znehybníme vlákno kyvadla v polovině délky. Vyjádřete periodu kratšího kyvadla pomocí původní periody  $T$ .

**63C.** Fyzické kyvadlo je tvořeno tyčovým metrem. Ve vzdálenosti  $x$  od rýsky, která označuje  $50 \text{ cm}$ , je vyvrtán malý otvor. Tímto otvorem prochází osa rotace. Kyvadlo má periodu  $2,5 \text{ s}$ . Určete vzdálenost  $x$ .

**64C.** Tenká tyč délky  $L$  má hmotnost  $m$ . Tyč je zavěšena nad středem tyče: vzdálenost bodu závěsu od středu tyče je  $d$ . (a) U tohoto fyzického kyvadla vyvoláme kmitání s malou úhlovou amplitudou. Vyjádřete periodu pohybu pomocí veličin  $d$ ,  $L$ ,  $m$  a  $g$  (tíhové zrychlení). Jak se změní perioda, jestliže (b) zmenšíme vzdálenost  $d$ , (c) zvětšíme délku tyče  $L$  a (d) zvětšíme hmotnost tyče?

**65C.** Fyzické kyvadlo je tvořeno pevným homogenním diskem (poloměru  $R$  a hmotnosti  $M$ ), otáčivým ve svislé rovině kolem bodu závěsu, který je umístěn ve vzdálenosti  $d$  od středu disku (obr. 16.40). Disk vychýlíme o malý úhel z rovnovážné polohy a uvolníme. Určete periodu výsledného harmonického pohybu.

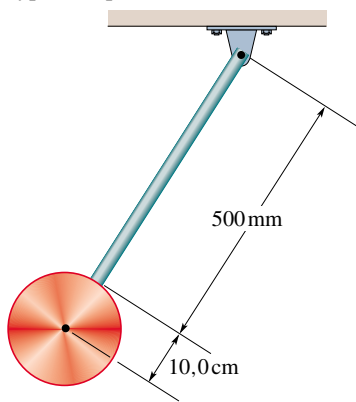


Obr. 16.40 Cvičení 65

**66C.** Homogenní kruhový disk poloměru  $R = 12,5 \text{ cm}$  je zavěšen v bodě, který se nachází na okraji disku. (a) Určete periodu tohoto fyzického kyvadla. (b) Disk nyní zavěšíme v jiném bodě,

jehož vzdálenost od středu disku činí  $r < R$ . Vzniká opět fyzické kyvadlo. Jaká musí být vzdálenost  $r$ , má-li se perioda nového kyvadla rovnat periodě v části (a)?

**67C.** Kyvadlo je tvořeno homogenním diskem o poloměru 10,0 cm a hmotnosti 500 g, spojeným s homogenní tyčí délky 500 mm a hmotnosti 270 g (obr. 16.41). (a) Vypočítejte moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k vodorovné ose procházející bodem závěsu. (b) Jaká je vzdálenost mezi bodem závěsu a těžištěm kyvadla? (c) Vypočítejte periodu kmitů.



Obr. 16.41 Cvičení 67

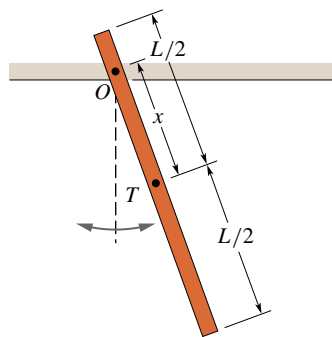
**68C.** (a) Fyzické kyvadlo v př. 16.6 obrátíme a zavěšíme v bodě  $P$ . Jaká bude nyní perioda pohybu? (b) Je tato nová perioda v porovnání s periodou původního kyvadla v př. 16.6 větší, menší, nebo stejná?

**69C.** V př. 16.6 jsme ukázali, že fyzické kyvadlo má střed kyvu  $P$  ve vzdálenosti  $2L/3$  od bodu závěsu  $O$ . Dokažte tvrzení: Pro jakékoliv fyzické kyvadlo je vzdálenost středu kyvu od bodu závěsu rovna  $I/(mh)$ , kde veličiny  $I$  a  $h$  mají stejný význam jako v rov. (16.32) a  $m$  je hmotnost kyvadla.

**70C.** Tyčový metr se otáčí kolem osy umístěné na jeho jednom konci. Jak se změní frekvence tohoto fyzického kyvadla, jestliže tyčový metr zkrátíme na polovinu? Vyjádřete novou frekvenci pomocí původní frekvence  $f_0$ .

**71Ú.** Fyzické kyvadlo na obr. 16.42 je tvořeno tyčí délky  $L$ , zavěšenou v bodě  $O$ . (a) Vyjádřete periodu kyvadla pomocí délky tyče  $L$  a vzdálenosti  $x$  těžiště od bodu závěsu. (b) Pro kterou hodnotu podílu  $x/L$  je perioda pohybu nejkratší? (c) Ukažte, že pro  $L = 1,00$  m a  $g = 9,80$  m·s<sup>-2</sup> je nejkratší perioda v části (b) rovna 1,53 s.

**72Ú.** Střed kyvu fyzického kyvadla má následující zajímavou vlastnost. Uvažme fyzické kyvadlo, které kývá v jisté svislé rovině kolem určitého bodu závěsu  $O$ . Předpokládejme, že právě v okamžiku průchodu kyvadla rovnovážnou polohou na něj zapůsobí krátký impulz síly. Vektorová přímka síly je vodorovná a leží v rovině kyvů. Jestliže síla navíc působí v úrovni středu kyvu  $P$ , nevyvolá její impulz v bodě závěsu  $O$  žádnou reakci. O této vlastnosti dobře vědí hráči baseballu (a rovněž hráči mnoha jiných sportů). Skutečně, když pálkař navede pátku tak, že ke styku s míčkem dojde mimo střed kyvu  $P$ , ucítí v důsledku



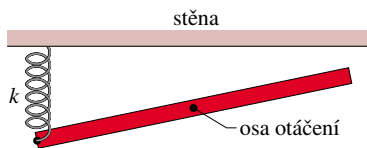
Obr. 16.42 Úloha 71

nárazu bolestivé „škubnutí“ v ruku. Proto také nazývají sportovci střed kyvu „jemný bod“ pátky. Při studiu popsané situace budeme předpokládat, že tyč na obr. 16.12a představuje baseballovou pátku. Nechť na tyč působí v bodě  $P$  vodorovně zprava síla  $F$ , představující úder míčku. Pálkař drží pátku v bodě, který odpovídá bodu závěsu  $O$  na obr. 16.12a. (a) Jak velké zrychlení uděluje bodu  $O$  síla  $F$ ? (b) Jak velké úhlové zrychlení vytváří síla  $F$ , jestliže uvažujeme rotaci kolem osy, procházející těžištěm tyče? (c) Jak velké lineární zrychlení získá bod  $O$  v důsledku úhlového zrychlení, uvažovaného v části (b)? (d) Na základě vyhodnocení velikostí a směrů zrychlení, uvažovaných v částech (a) a (c), se přesvědčte, že střed kyvu  $P$  je skutečně „jemný bod“.

**73Ú.** Přesně vzato, na různých místech povrchu Země má tíhové zrychlení  $g$  poněkud odlišnou hodnotu. Tato skutečnost byla objevena Jeanem Richerem, který v roce 1672 na svých cestách převezl kyvadlové hodiny z Paříže do města Cayenne ve francouzské Guyaně a zjistil, že hodiny se za den zpožďují o 2,5 minuty. Jestliže tíhové zrychlení v Paříži činí  $g = 9,81$  m·s<sup>-2</sup>, jaká je jeho velikost v Cayenne?

**74Ú.** Vědci prováděli přesná měření tíhového zrychlení v určitém místě v Indickém oceánu. Místo bylo zvoleno na rovníku. Při měření se zjišťovala perioda kmitů precizně konstruovaného fyzického kyvadla. K zajištění přesně definovaných podmínek se měření uskutečnilo na palubě ponořené ponorky. Označme  $g_p$  přesnou hodnotu tíhového zrychlení v daném místě. Po vyhodnocení výsledků bylo zjištěno, že změřená hodnota  $g_m$  závisí na tom, zda se ponorka v průběhu měření pohybovala východním, nebo západním směrem. Velikost její rychlosti přitom v obou případech činila 16 km·h<sup>-1</sup>. Objasněte pozorovanou diferenci a vypočítejte relativní chybu  $(g_m - g_p)/g_p$  pro oba směry plavby ponorky.

**75Ú.** Dlouhá homogenní tyč délky  $L$  a hmotnosti  $m$  se otáčí ve vodorovné rovině kolem svislé osy vedené geometrickým středem tyče. Na jednom konci tyče je k ní upevněna vodorovná pružina, druhý konec pružiny je připevněn k pevné stěně. Celá soustava je znázorněna na obr. 16.43 z nadhledu. V rovnovážné poloze je tyč rovnoběžná se stěnou. Po malém vychýlení z rovnovážné polohy tyč uvolníme. Jaká je perioda vzniklého harmonického pohybu?



Obr. 16.43 Úloha 75

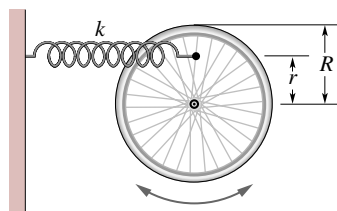
**76Ú.** Určete frekvenci matematického kyvadla délky 2,0 m (a) zavěšeného na stropě místnosti, (b) zavěšeného na stropě výtahu, který se pohybuje vzhůru se zrychlením  $2,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ , a (c) zavěšeného na stropě výtahu, který padá volným pádem.

**77Ú.** Matematické kyvadlo délky  $L$  a hmotnosti  $m$  je zavěšeno v automobilu, který se pohybuje rychlostí stálé velikosti  $v$  po kruhové dráze poloměru  $R$ . Kyvadlo se pohybuje v radiálním směru (kmitá ve svislé rovině, procházející bodem závěsu a středem kruhové dráhy). Určete frekvenci jeho pohybu.

**78Ú.** Nalezněte úhlovou amplitudu matematického kyvadla  $\theta_m$ , pro kterou činí odchylka skutečné velikosti vratného silového momentu a silového momentu, který je předpokládán při harmonickém pohybu kyvadla, 1,0 %. (Při řešení můžete použít „Rozvoje goniometrických funkcí“ v dodatku E.)

**79Ú.** Hmotný bod matematického kyvadla se pohybuje po oblouku kružnice o poloměru  $R$ . (a) V okamžiku, kdy hmotný bod právě prochází rovnovážnou polohou, udílí mu vlákno dostředivé zrychlení ( $mv^2/R$ ), kde  $v$  je okamžitá rychlost hmotného bodu. Ukažte, že v tomto okamžiku činí napětí ve vlákne  $mg(1 + \theta_m^2)$ , kde  $\theta_m$  je úhlová amplituda pohybu. (Viz „Rozvoje goniometrických funkcí“ v dodatku E.) (b) Je při jiných úhlových výchylkách matematického kyvadla napětí ve vlákne větší, menší, nebo stejné jako v části (a)?

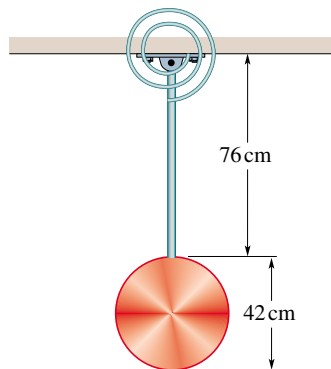
**80Ú.** Kolo bicyklu se otáčí kolem pevné osy. K jednomu z jeho drátů je připevněna ve vzdálenosti  $r$  od osy kola pružina tuhosti  $k$ . Druhý konec pružiny je uchycen v pevné stěně; uspořádání je znázorněno na obr. 16.44. (a) Předpokládejte, že kolo lze považovat za tenkou obruč poloměru  $R$  a hmotnosti  $m$ . Vyjádřete úhlovou frekvenci malých kmitů soustavy pomocí veličin  $m$ ,  $R$ ,  $r$  a tuhosti  $k$ . Jak se změní úhlová frekvence, jestliže (b)  $r = R$  a (c)  $r = 0$ ?



Obr. 16.44 Úloha 80

**81Ú.** Kruhový disk hmotnosti 2,5 kg a průměru 42 cm je pevně spojen s nehmotnou tyčí délky 76 cm. Jak je znázorněno na obr. 16.45, soustava je zavěšena na konci tyče. (a) Nehmotná torzní pružina na obrázku je nejprve odpojena. Jaká je perioda kmitů kyvadla? (b) Nyní připojíme ke kyvadlu torzní pružinu.

V rovnovážné poloze nové soustavy je tyč opět svislá. Jaká musí být torzní konstanta pružiny, aby nová perioda kmitů byla o 0,50 s kratší než perioda původní?

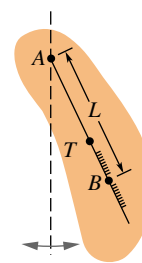


Obr. 16.45 Úloha 81

**82Ú.** Jisté fyzické kyvadlo má dva možné body závěsu: A a B. Bod A je umístěn pevně, poloha bodu B podél délky kyvadla je nastavitelná. Kyvadlo je znázorněno na obr. 16.46. Nejprve zavěsíme kyvadlo v bodě A; perioda pohybu činí  $T$ . Poté kyvadlo obrátíme a zavěsíme jej v bodě B. Jeho poloha je však nastavena tak, aby kyvadlo mělo nyní opět periodu  $T$ . Vzdálenost takto definované polohy bodu B od bodu A činí  $L$ . Dokažte, že pomocí veličin  $L$  a  $T$  lze vyjádřit tíhové zrychlení jako

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}.$$

(Všimněte si, že tímto způsobem můžeme měřit tíhové zrychlení  $g$  i v případě, že neznáme moment setrvačnosti kyvadla ani jeho rozměry, kromě vzdálenosti  $L$ .)



Obr. 16.46 Úloha 82

**83Ú\*.** Homogenní tyč délky  $L$  je v jistém bodě zavěšena, takže vytváří fyzické kyvadlo. Pro jakou vzdálenost bodu závěsu od těžiště je perioda kyvadla nejmenší? Vyjádřete hledanou vzdálenost pomocí délky  $L$ .

### ODST. 16.8 Tlumený oscilátor

**84C.** Během každého pohybového cyklu klesla amplituda slabě tlumeného oscilátoru o 3 %. Kolikrát se zmenší celková mechanická energie tohoto oscilátoru během každého úplného kmitu?

**85C.** Vyjděte ze zadání př. 16.9 a určete, kolikrát se zmenší amplituda tlumených kmitů po provedení 20 úplných kmitů?

**86C.** V uspořádání na obr. 16.17 mějme těleso o hmotnosti 1,50 kg a pružinu tuhosti  $8,00 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ . Třecí síla je určena výrazem  $-b(dx/dt)$ , kde  $b = 230 \text{ g}\cdot\text{s}^{-1}$ . Předpokládejme, že těleso je nejprve vysunuto ze své rovnovážné polohy směrem dolů o 12,0 cm a poté uvolněno. (a) Vypočtěte, za jakou dobu se amplituda kmitání zmenší na jednu třetinu své počáteční hodnoty. (b) Kolik úplných pohybových cyklů uskuteční kmitající těleso během této doby?

**87Ú.** Těleso o hmotnosti  $m = 2,00 \text{ kg}$  kmitá na pružině tuhosti  $k = 10,0 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ . Těleso je navíc vystaveno působení třecí síly  $F = -bv$ . Počáteční amplituda kmitů byla 25,0 cm; v důsledku tlumení se však po provedení čtyř úplných kmitů zmenšila na tři čtvrtiny své původní hodnoty. (a) Určete součinitel útlumu  $b$ . (b) Jak velká mechanická energie se „ztratila“ během uvedených čtyř kmitů?

**88Ú.** (a) V rov. (16.39) vystupuje třecí síla  $-b(dx/dt)$  a síla pružnosti  $-kx$ . Vyjděte z údajů, uvedených v zadání př. 16.9, a určete v průběhu prvního úplného kmitu poměr největší hodnoty třecí síly k největší hodnotě síly pružnosti. (b) Dochází k citelné změně uvedeného poměru, jestliže jej vypočteme pro některý z následujících kmitů?

**89Ú.** Představte si, že provádíte zkoušku tlumičů u automobilu. Automobil má hmotnost 2000 kg. Při současném zatížení tlumičů všech čtyř kol celkovou tíhou automobilu se každý z nich zkrátí o 10 cm vzhledem ke své nezatížené délce. Jestliže vyvoláte kmitání karosérie, zmenší se po vykonání jednoho kmitu amplituda o 50 % své původní hodnoty. Odhadněte hodnoty konstant  $k$  a  $b$  pro tlumící soustavu jednoho kola. Přitom předpokládejte rovnoměrné rozložení tíhy automobilu na jednotlivá kola.

### ODST. 16.9 Nucené kmitý a rezonance

**90C.** Amplituda nucených kmitů  $x_m$  v rovnici (16.43) je určena vztahem

$$x_m = \frac{F_m}{\sqrt{m^2(\omega_b^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}},$$

kde  $F_m$  je (konstantní) amplituda oscilující vnější síly, kterou působí pevný nosník na obr. 16.17 na pružinu. Jaká je (a) amplituda výchylky a (b) amplituda rychlosti v případě rezonance?

**91Ú.** Ve vozidle o hmotnosti 2200 lb se nacházejí čtyři osoby, každá o hmotnosti 180 lb. Při jízdě po nerovné silnici překonává vozidlo přibližně rovnoměrně rozmístěné nerovnosti; vzdálenost sousedních nerovností je 13 ft. Vlivem nerovnosti dochází ke kmitání karosérie vozidla vzhledem k podvozku. Při rychlosti vozidla 10 mi/h má houpání největší amplitudu. O kolik se zvedne karosérie auta, jestliže z něj po zastavení všechny osoby vystoupí?

### PRO POČÍTAČ

**92Ú.** Uvažme kmitající soustavu dvou vozíků spojených pružinou. Vozíky se pohybují bez tření na vodorovné koleji. Tuhost pružiny známe:  $k = 50,0 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ . Použijte druhý Newtonův zákon a dokažte, že perioda kmitání je pro oba vozíky stejná. Závislost periody na hmotnosti vozíků je určena vztahem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1m_2}{k(m_1 + m_2)}}.$$

Detektorem polohy byly určeny závislosti poloh vozíků na čase. Lze je vyjádřit vztahy  $x_1(t) = 2,70(1 - \cos(18,0t))$  a  $x_2(t) = 10,70 + 1,29 \cos(18,0t)$ , kde souřadnice jsou vyjádřeny v centimetrech a čas v sekundách. (a) Použijte zákon zachování hybnosti a nalezněte hmotnosti jednotlivých vozíků. (b) Vytvořte tabulku hodnot  $x_1$  a  $x_2$  v závislosti na čase. Čas zvětšujte od  $t = 0$  do  $t = 35 \text{ s}$  s krokem 0,01 s. Pro každý časový okamžik tabelujte také polohu těžiště, celkovou hybnost soustavy dvou vozíků a sílu, kterou působí pružina na jednotlivé vozíky. Ověřte, že těžiště soustavy se nepohybuje, že celková hybnost se zachovává a že obě síly, působící na jednotlivé vozíky, jsou stejně velké a opačně orientované. (c) Použijte údaje v tabulce a nalezněte klidovou (rovnovážnou) délku pružiny.

**93Ú.** Na těleso o hmotnosti 2,0 kg, připevněné na konec pružiny tuhosti  $350 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ , působí vnější budící síla  $F = (15 \text{ N}) \sin(\omega t)$ , kde  $\omega = 35 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Konstanta tlumení  $b$  má velikost  $15 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ . V čase  $t = 0$  je těleso v klidu a pružina má svou klidovou délku. (a) Použijte numerické integrace a nakreslete graf závislosti výchylky tělesa na čase během první sekundy pohybu. Použijte získaný průběh výchylky ke konci tohoto intervalu a odhadněte amplitudu, periodu a úhlovou frekvenci. Výpočet opakujte pro (b)  $\omega = \sqrt{k/m}$  a (c)  $\omega = 20 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .