Zákony zachování - integrální a diferenciální tvar

- 1D trubice naplněná ideálním plynem o hustotě $\rho(x,t)$ a rychlosti $v(x,t)$
- celková hmotnost úseku (x_1, x_2)
$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)d\,x$$
- tok hmotnosti bodem x je $\rho(x,t)v(x,t)$
- časová změna hmotnosti je rovna rozdílu toků v krajních bodech – integrální tvar zákona zachování
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)d\,x = \rho(x_1,t)v(x_1,t) - \rho(x_2,t)v(x_2,t)$$
- integrací přes (t_1, t_2) dostaneme druhý tvar integrálního zákona zachování
$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t_2)d\,x - \int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t_1)d\,x = \int_{t_1}^{t_2} \rho(x_1,t)v(x_1,t)d\,t - \int_{t_1}^{t_2} \rho(x_2,t)v(x_2,t)d\,t$$
- pro diferencovatelné $\rho(x,t), v(x,t)$ platí
$$\begin{aligned} \rho(x,t_2) - \rho(x,t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)d\,t \\ \rho(x_2,t)v(x_2,t) - \rho(x_1,t)v(x_1,t) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}(\rho(x,t)v(x,t))d\,x \end{aligned}$$

- čili 2. tvar integrálního z.z. lze přepsat jako

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial\rho(x,t)v(x,t)}{\partial x}\right]d\,x\,d\,t=0$$

  toto musí platit pro každý interval (x_1, x_2) a každý interval (t_1, t_2), z čehož plyne diferenciální tvar zákona zachování

$$\rho_t+(\rho v)_x=0$$

- systém zákonů zachování v 1D

$$\vec{U}_t+(\vec{F}(\vec{U}))_x=0$$

- konzervativní tvar skalárního zákona zachování

$$u_t+f(u)_x=0$$

- advekční tvar

$$u_t+f_u u_x=0$$

  advekční rovnice

$$u_t+au_x=0$$

  f_u je rychlost šíření vln

- advekční tvar pro systém z.z.

$$\vec{U}_t+\vec{F}_{\vec{U}}\cdot\vec{U}_x=0$$

  kde $\vec{F}_{\vec{U}}$ je Jakobiho matice

$$\vec{F}_{\vec{U}}=\begin{pmatrix} F^1_{U^1}, & F^1_{U^2}, & \dots \\ F^2_{U^1}, & F^2_{U^2}, & \dots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

- zákony zachování jsou hyperbolické, čili $\vec{F}_{\vec{U}}$ má $\forall x, t$ reálná vlastní čísla
- vlastní čísla

$$\det(\vec{F}_{\vec{U}} - \lambda_i \mathcal{I}) = 0, \lambda_i \in R, i = 1, \cdots, n, \vec{U} \in R^n, \vec{F} \in R^n$$

- vlastní vektory (řádky)

$$\vec{V}_i \cdot \vec{F}_{\vec{U}} = \lambda_i \vec{V}_i$$

- systém je striktně hyperbolický, právě když má $\vec{F}_{\vec{U}}$ navzájem různá vlastní čísla a nezávislé vlastní vektory
- pro hyperbolický systém je

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vdots \\ \vec{V}_n \end{pmatrix}$$

nesingulární matice a

$$\mathcal{P} \cdot \vec{F}_{\vec{U}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \mathcal{P} = \Lambda \cdot \mathcal{P}$$

čili

$$\mathcal{P} \cdot \vec{F}_{\vec{U}} \cdot \mathcal{P}^{-1} = \Lambda$$

- systém

$$\vec{U}_t + \vec{F}_{\vec{U}} \cdot \vec{U}_x = 0$$

vynásobíme zleva maticí $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} \cdot \vec{U}_t + \mathcal{P} \cdot \vec{F}_{\vec{U}} \cdot \vec{U}_x = 0$$

a uvažujeme ho lokálně v bodě (x, t), předpoklad zamrzlých koeficientů, tj. $\mathcal{P}$ nezávisí na x, t

$$(\mathcal{P} \cdot \vec{U})_t + \mathcal{P} \cdot \vec{F}_{\vec{U}} \cdot \mathcal{P}^{-1} \cdot \mathcal{P} \cdot \vec{U}_x = 0$$

- charakteristický systém

$$\vec{W}_t + \Lambda \cdot \vec{W}_x = 0$$

pro charakteristické proměnné $\vec{W} = \mathcal{P} \cdot \vec{U}$

$$W_t^i + \lambda_i W_x^i = 0$$

- lokální rozklad řešení do systému vlastních vektorů Jakobiho matice $\vec{F}_{\vec{U}}$
- vlastní čísla λ_i jsou rychlosti šíření vln

Slabé řešení

- testovací funkce $\phi(x,t) \in C_0^1$ s kompaktním nosičem

$$u_t + f(u)_x = 0$$
$$\phi u_t + \phi f(u)_x = 0$$
$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\phi u_t + \phi f(u)_x) d\,x\; d\,t = 0$$

- per partes a kompaktní nosič

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\phi_t u + \phi_x f(u)) dx\; dt = -\int_{-\infty}^\infty \phi(x,0) u(x,0) dx$$

- pokud platí $\forall \phi \in C_0^1(R \times R^+)$ pak u je slabým řešením zákona zachování

- integrální tvar $(x,t) \in (x_1,x_2) \times (t_1,t_2)$

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} (u_t + f(u)_x) d\,x\; d\,t = 0$$
$$\int_{x_1}^{x_2} [u(x,t_2) - u(x,t_1)] d\,x + \int_{t_1}^{t_2} [f(u(x_2,t)) - f(u(x_1,t))] d\,t = 0$$

Diferenční schemata pro zákony zachování

- zákon zachování v 1D je dán parciální diferenciální rovnicí

$$u_t + f(u)_x = 0$$

kde tok $f(u)$ je obecně nelineární funkcí u

- Lax-Friedrichsovo (LF) schema

$$\frac{u_j^{n+1} - (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)/2}{\Delta t} + \frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)}{2\Delta x} = 0$$

vyjádříme u_j^{n+1}

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{\Delta t(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n))}{2\Delta x} = 0 \\ u_j^{n+1} &= u_j^n + \frac{\Delta x^2}{2}\,\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \\ &\quad - \frac{\Delta t(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n))}{2\Delta x} = 0 \end{aligned}$$

- modifikovaná rovnice

$$u_t + f(u)_x = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}(1 - f_u^2 \Delta t^2/\Delta x^2)u_{xx}$$

– difuzní schema

- dvoukrokové Lax-Friedrichsovo (LF) schema pro zákon zachování má prediktor

$$\frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - (u_{j+1}^n + u_j^n)/2}{\Delta t/2} + \frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)}{\Delta x} = 0$$

počítající řešení na duální (posunuté) výpočetní síti $(n+1/2)\Delta t, (j+1/2)\Delta x$

- korektor LF schematu je prediktor posunutý o $1/2$ v indexech n i j

$$\frac{u_j^{n+1} - (u_{j+1/2}^{n+1/2} + u_{j-1/2}^{n+1/2})/2}{\Delta t/2} + \frac{f(u_{j+1/2}^{n+1/2}) - f(u_{j-1/2}^{n+1/2})}{\Delta x} = 0$$

- z prediktoru a korektoru vyjádříme

$$\begin{aligned}
u_{j+1/2}^{n+1/2} &= \frac{u_{j+1}^n + u_j^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)) \\
u_j^{n+1} &= \frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} + u_{j-1/2}^{n+1/2}}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(u_{j+1/2}^{n+1/2}) - f(u_{j-1/2}^{n+1/2})) \\
u_j^{n+1} &= \frac{u_{j+1}^n + 2u_j^n + u_{j-1}^n}{4} - \frac{\Delta t}{4\Delta x}(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)) \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(u_{j+1/2}^{n+1/2}) - f(u_{j-1/2}^{n+1/2}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= u_j^n + \frac{\Delta x^2}{4}\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \\
&\quad - \frac{\Delta t}{4\Delta x}(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)) \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(u_{j+1/2}^{n+1/2}) - f(u_{j-1/2}^{n+1/2}))
\end{aligned}$$

- modifikovaná rovnice

$$u_t + f(u)_x = \frac{\Delta x^2}{4\Delta t}(1 - f_u^2 \Delta t^2/\Delta x^2) u_{xx}$$

– difuzní schema, méně difuzní než jednokrokové LF schema

- dvoukrokové Lax-Wendroffovo (LW) schema používá stejný prediktor jako LF schema a korektor

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+\frac{f(u_{j+1/2}^{n+1/2})-f(u_{j-1/2}^{n+1/2})}{\Delta x}=0$$

- LW pro advekční rovnici $f(u)=au$, z prediktoru

$$u_{j+1/2}^{n+1/2}=\frac{u_{j+1}^n+u_j^n}{2}-\frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n-u_j^n)=0$$

dosadíme do korektoru

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+\frac{a}{2\Delta x}(u_{j+1}^n+u_j^n-u_j^n-u_{j-1}^n)$$
$$-\frac{a^2\Delta t}{\Delta x^2}(u_{j+1}^n-u_j^n-u_j^n+u_{j-1}^n)=0$$

a dostaneme

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+a\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}-\frac{a^2\Delta t}{2}\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2}=0$$

což je LW pro advekční rovnici, viz základní schemata pro advekční rovnici

Konzervativita

- každé konzervativní schema lze napsat v konzervativním tvaru
$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{F_{j+1/2} - F_{j-1/2}}{\Delta x}$$
kde $F_{i+1/2}$ je numerický tok

- zachovávající se (konzervativní) veličina u na intervalu $x \in (a, b)$

- integrací z.z. $u_t + f(u)_x = 0$ přes interval $x \in (a, b)$ dostaneme
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b u d\, x = f(u(a,t)) - f(u(b,t)),$$
čili časová změna integrálu zachovávající se veličiny je rovna rozdílu toků v krajních bodech intervalu

- obdobně numericky pro konzervativní schema
$$\sum_{j=1}^{J} u_j^{n+1} \Delta x = \sum_{j=1}^{J} u_j^n \Delta x - F_{J+1/2} + F_{1/2}$$

- LW schema je přímo v konzervativním tvaru

- pro jednokrokové LF schema je
$$F_{j+1/2} = -\Delta x \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{2} + \Delta t \frac{f(u_{j+1}^n) + f(u_j^n)}{2}$$

- pro dvoukrokové LF schema je

$$F_{j+1/2} = -\Delta x \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{4} + \Delta t \frac{f(u_{j+1}^n) + f(u_j^n)}{4} + \Delta t \frac{f(u_{j+1/2}^{n+1/2})}{2}$$

Burgersova rovnice

- nejjednodušším zákonem zachování je Burgersova rovnice

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$$

v advekčním tvaru

$$u_t + uu_x = 0$$

- charakteristika

$$x' = u, \qquad x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

- na charakteristice je řešení konstantní

$$u(x,t) = u(x(t),t)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(x(t),t) = u_t + x' u_x = u_t + uu_x = 0$$

Riemannův problém

- Riemannův problém v bodě x_0 je zadán počáteční podmínkou

$$u_0(x) = \begin{cases} u_L & \text{pro} \;\; x < x_0 \\ u_P & \text{pro} \;\; x > x_0 \end{cases}$$

- Riemannův problém pro Burgersovu rovnici
  - $u_L > u_P$ – řešením je rázová vlna pohybující se rychlostí $s = (u_L + u_P)/2$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L & \text{pro} \;\; x - x_0 < st \\ u_P & \text{pro} \;\; x - x_0 > st \end{cases}$$

    charakteristiky se protínají
  - $u_L < u_P$ – řešením je spojitá vlna zředění, charakteristiky se rozbíhají – vějíř charakteristik

- složené schema pro Burgersovu rovnici – vzorový program http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/zz/burg.m

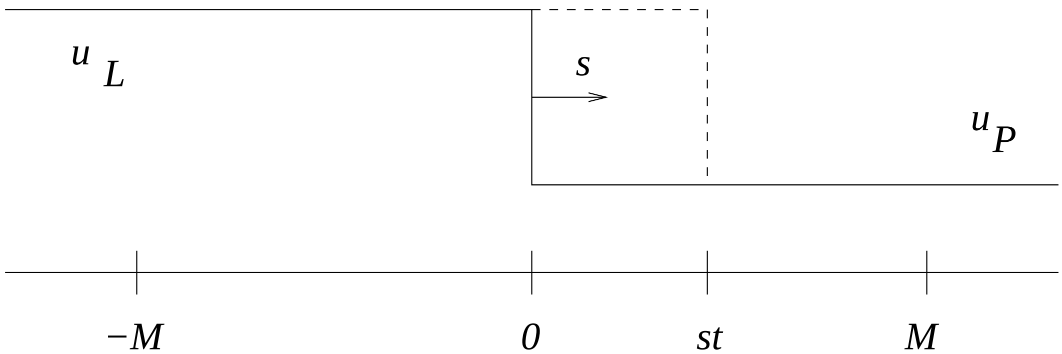
- **Úloha:** ověřte numericky řešení Burgersovy rovnice pro různé Riemannovy problémy

- **Úloha:** demonstrujte generování nespojitého řešení Burgersovy rovnice pro počáteční problém ve tvaru spojitého pulzu ve tvaru cos(x)

Rankine-Hugoniotova podmínka

- rázová vlna o rychlosti s, levý stav u_L, pravý stav u_P

$$u_t + f(u)_x = 0$$



$$\int_{-M}^{M} u(x,t)_t \mathrm{d}x + f(u_P) - f(u_L) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-M}^{M} u(x,t) \mathrm{d}x + f(u_P) - f(u_L) = 0$$

- vyjádříme $\int$

$$\int_{-M}^{M} u(x,t) \mathrm{d}x = (M+st)u_L + (M-st)u_P$$

takže

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-M}^{M} u(x,t) \mathrm{d}x = s(u_L - u_P)$$

čili

$$s(u_L - u_P) + f(u_P) - f(u_L) = 0$$

- Rankine-Hugoniotova podmínka

$$s = \frac{f(u_L) - f(u_P)}{u_L - u_P}$$

- pro Burgersovu rovnici $f(u) = u^2/2$

$$s = \frac{u_L^2 - u_P^2}{2(u_L - u_P)} = \frac{u_L + u_P}{2}$$

- pro systémy z.z.: skoky konzervativních veličin a toků na rázové vlně musí být lineárně závislé

$$s = \frac{\vec{F}(\vec{U}_L) - \vec{F}(\vec{U}_P)}{\vec{U}_L - \vec{U}_P}$$

neboli

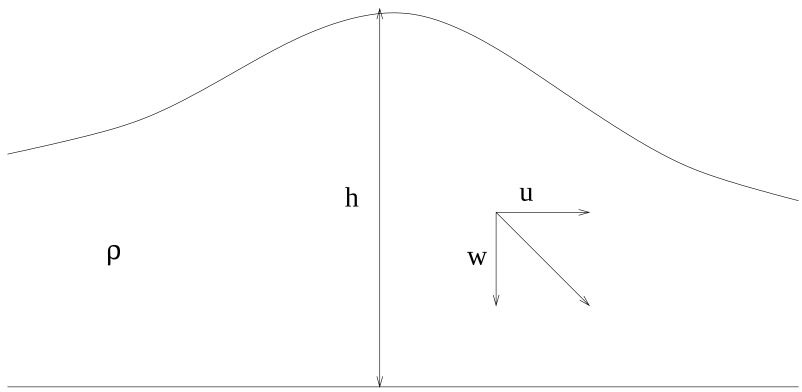
$$s(\vec{U}_L - \vec{U}_P) = \vec{F}(\vec{U}_L) - \vec{F}(\vec{U}_P)$$

Rovnice mělké vody

- nejjednodušší systém zákonů zachování jsou rovnice mělké vody

$$
\begin{aligned}
h_t + (hu)_x &= 0 \\
(hu)_t + \left(hu^2 + g\frac{h^2}{2}\right)_x &= 0,
\end{aligned}
$$

kde $h(t,x)$ je tloušťka vrstvy vody (hloubka), $u(t,x)$ je horizontální rychlost vody a g je gravitační zrychlení



- v konzervativních proměnných $\varphi = gh, m = ghu$

$$
\begin{aligned}
\varphi_t + m_x &= 0 \\
m_t + \left(\frac{m^2}{\varphi} + \frac{\varphi^2}{2}\right)_x &= 0,
\end{aligned}
$$

- systém zákonů zachování

$$\vec{U}_t + (\vec{F}(\vec{U}))_x = 0$$

kde

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \varphi \\ m \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}(\vec{U}) = \begin{pmatrix} m \\ \frac{m^2}{\varphi} + \frac{\varphi^2}{2} \end{pmatrix}$$

- advekční tvar pro systém

$$\vec{U}_t + \vec{F}_{\vec{U}} \cdot \vec{U}_x = 0$$

kde Jakobiho matice $\vec{F}_{\vec{U}}$ je

$$\vec{F}_{\vec{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{m^2}{\varphi^2} + \varphi & \frac{2m}{\varphi} \end{pmatrix}$$

- vlastní čísla Jakobiho matice

$$\det(\vec{F}_{\vec{U}} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{m^2}{\varphi^2} + \varphi & \frac{2m}{\varphi} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{2m}{\varphi}\lambda + \frac{m^2}{\varphi^2} - \varphi = 0$$

$$D = \frac{4m^2}{\varphi^2} - \frac{4m^2}{\varphi^2} + 4\varphi = 4\varphi$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{m}{\varphi} \pm \sqrt{\varphi} = u \pm \sqrt{gh}$$

- při výpočtu se časový krok počítá adaptivně po každém časovém kroku (v_{max} se během výpočtu mění) jako

$$\Delta t = C \frac{\Delta x}{v_{max}},$$

kde

$$v_{max} = \max_j \left| u_j \pm \sqrt{g h_j} \right|$$

je maximální rychlost šíření vlny daná vlastními čísly Jakoviho matice $\lambda_{1,2}$

- složené schema pro rovnice mělké vody – vzorový program http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/zz/voda.m

- **Úloha:** modelujte protržení přehrady – Riemannův problém s nulovou počáteční rychlostí a dvěmi různými hloubkami; řešte další Riemannovy problémy, jedna rázová vlna, jedna vlna zředění
- řešením Riemannova problému pro rovnice mělké vody jsou vždy 2 vlny, levá a pravá
- levá i pravá vlna jsou buď vlna rázová nebo vlna zředění
- rovnice mělké vody v konzervativních proměnných $\varphi = gh, m = ghu$

$$
\begin{aligned}
\varphi_t + m_x &= 0 \\
m_t + \left(\frac{m^2}{\varphi} + \frac{\varphi^2}{2}\right)_x &= 0,
\end{aligned}
$$

- Rankine-Hugoniotova podmínka pro systém

$$
s = \frac{\vec{F}(\vec{U}_L) - \vec{F}(\vec{U}_P)}{\vec{U}_L - \vec{U}_P}
$$

- po složkách

$$
s = \frac{m_L - m_P}{\varphi_L - \varphi_P} = \frac{\frac{m_L^2}{\varphi_L} + \frac{\varphi_L^2}{2} - \frac{m_P^2}{\varphi_P} + \frac{\varphi_P^2}{2}}{m_L - m_P}
$$

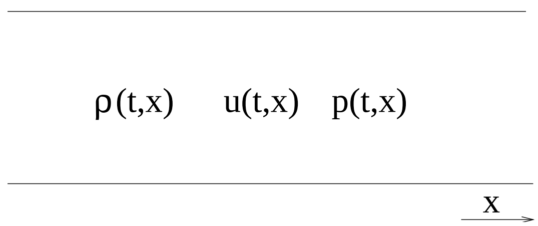
- zvolíme $\varphi_L = 4, \varphi_P = 2, m_P = 0$ a dopočítáme

$$\begin{aligned} \frac{m_L}{2} &= \frac{\frac{m_L^2}{4} + 8 - 2}{m_L} \\ \frac{m_L^2}{2} &= \frac{m_L^2}{4} + 6 \\ m_L^2 &= 24 \\ m_L &= 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

  – Riemanův problém jehož řešením je jedna rázová vlna s rychlostí $s = \sqrt{6}$

Eulerovy rovnice v 1D

- trubice naplněná ideálním plynem



- zákony zachování hmoty, hybnosti a energie

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x &= 0 \\ E_t + (u(E+p))_x &= 0 \end{aligned}$$

  kde $\rho(t,x)$ je hustota, $u(t,x)$ rychlost, $p(t,x)$ tlak a $E(t,x)$ hustota celkové energie

- stavová rovnice ideálního plynu

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{u^2}{2} = \rho e = \rho(\varepsilon + \frac{u^2}{2})$$

  kde $e(t,x)$ je celková energie a $\varepsilon(t,x)$ vnitřní energie, udává vztah mezi tlakem, hustotou a vnitřní energií

- při výpočtu se časový krok počítá adaptivně po každém časovém kroku (v_{max} se během výpočtu mění) jako

$$\Delta t = C \frac{\Delta x}{v_{max}},$$

kde

$$v_{max} = \max_j \left| u_j \pm \sqrt{\gamma \frac{p_j}{\rho_j}} \right|$$

je maximální rychlost šíření vlny a $\sqrt{\gamma p/\rho}$ je rychlost zvuku

- vlastní čísla Jakobiho matice toku – vzorový program http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/zz/euler_eigen.mws
- řešení Riemanova problému pro Eulerovy rovnice jsou vždy 3 vlny, levá, pravá a prostřední
- levá i pravá vlna jsou buď vlna rázová nebo vlna zředění
- prostřední vlna je kontaktní nespojitost – na ní je konstantní rychlost a tlak, skok je v hustotě a vnitřní energii
- Úloha: program voda.m pro rovnice mělké vody zobecněte na Eulerovy rovnice; na intervalu $x \in (0, 1)$ řešte Riemannovy problémy s nespojitostí v bodě x_0 do konečného času T:

Test	ρ_L	u_L	p_L	ρ_R	u_R	p_R	x_0	T
1	1	0.75	1	0.125	0	0.1	0.3	0.2
2	1	-2	0.4	1	2	0.4	0.5	0.15
Noh	1	1	10^{-6}	1	-1	10^{-6}	0.5	1
3	1	0	1000	1	0	0.01	0.5	0.012
5	1.4	0	1	1	0	1	0.5	2
6	1.4	0.1	1	1	0.1	1	0.5	2