Lax-Wendroffovo schema
odvození $u_t + a u_x = 0$

- Taylorův rozvoj v t

$$u(t+\Delta t, x) = u(t,x) + \Delta t\, u_t(t,x) + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}(t,x) + O(\Delta t^3)$$

víme $\quad u_t = -a u_x$
čili $\quad u_{tt} = -a u_{tx} = a^2 u_{xx}$

- dosadíme do Taylora

$$u(t+\Delta t, x) = u(t,x) - a\Delta t\, u_x + \frac{a^2 \Delta t^2}{2} u_{xx} + O(\Delta t^3)$$

- centrální diference $\qquad$ Lax-Wendroff

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\Delta t \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{a^2 \Delta t^2}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$
$$+ O(\Delta t \Delta x^2) + O(\Delta t^2 \Delta x)$$

schema druhého řádu v t, i x $\qquad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} = \text{const}$

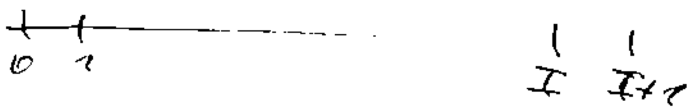
Implicitní schema

- centrální $\qquad u_t + a u_x = 0$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \qquad i = 1, \dots, I$$

+ okrajové podmínky pro $i = 0, I+1$, $x \in (0, X)$

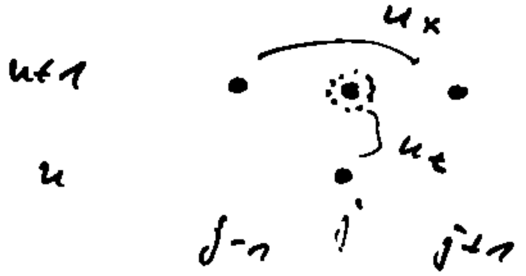
$$\left.\begin{aligned} u_0^{n+1} &= u_1^{n+1} \\ u_{I+1}^{n+1} &= u_I^{n+1} \end{aligned}\right\} \text{volné O.P.} \quad u_x\Big|_{\substack{x=0 \\ x=X}} = 0$$



Implicitní schema

$$u_t + a u_x = 0$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0$$

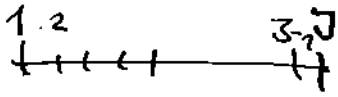


- modifikovaná rovnice

$$u_t + a u_x = \frac{1}{2} \Delta t\, a^2 u_{xx} + O(\Delta^2 x)$$

$$b = \frac{1}{2} \Delta t\, a^2 > 0$$

- vždy stabilní
- ~liska/vyuka/ds/implicit/*.m
- okrajové podmínky $x \in (x_0, x_1)$
  volné



$$u_x \big|_{\substack{x = x_0 \\ x = x_1}} = 0$$

$$u_2^{n+1} - u_1^{n+1} = 0$$
$$u_J^{n+1} - u_{J-1}^{n+1} = 0$$

- $+\, u_1^{n+1} - u_2^{n+1} = 0$

$$-u_{j-1}^{n+1}\, a \frac{\Delta t}{2\Delta x} + u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}\, a \frac{\Delta t}{2\Delta x} = u_j^n, \quad j = 2, \dots, J-1$$

$$-u_{J-1}^{n+1} + u_J^{n+1} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & & & 0 \\ -a\frac{\Delta t}{2\Delta x} & 1 & a\frac{\Delta t}{2\Delta x} & 0 & & & \\ 0 & -a\frac{\Delta t}{2\Delta x} & 1 & a\frac{\Delta t}{2\Delta x} & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & & & 0 & -a\frac{\Delta t}{2\Delta x} & 1 & a\frac{\Delta t}{2\Delta x} \\ & & & & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{J-1}^{n+1} \\ u_J^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2^n \\ u_3^n \\ \vdots \\ u_{J-1}^n \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot u^{n+1} = u^n$$

$$u^{n+1} = M^{-1} \cdot u^n$$

Modifikovaná rovnice diferenčního schematu

- Lax-Friedrichsovo (LF) schema pro $u_t + a u_x = 0$

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

- Taylorův rozvoj v t, x

$$u_t + a u_x + \frac{1}{2}\left(\Delta t\, u_{tt} - \frac{\Delta x^2}{\Delta t} u_{xx}\right) = O(\Delta t^2, \Delta x^2) \approx 0$$

dosadíme (vyloučíme časové derivace kromě u_t)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + O(\Delta t, \Delta x)$$

a dostaneme modifikovanou rovnici

$$u_t + a u_x = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}\left(1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} a^2\right) u_{xx} + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$u_t + a u_x = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}\left(1 - a^2\lambda^2\right) u_{xx} + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

je dobře podmíněná $\Leftrightarrow$ $1 - a^2\lambda^2 \geq 0$

$$|\lambda a| \leq 1$$

což je podmínka stability LF schematu

- LF schema je difusní

modif-lf.mws

~liska/vyuka/ds/analysis/modx.mws

- Lax-Wendroffovo schema má modifikovanou rovnici

$$u_t + a u_x = \frac{\Delta x^2}{6} a \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} a^2 - 1\right) u_{xxx} + c_4 u_{xxxx}$$

$a > 0$, $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$

$c_4 < 0$

- disperzní rovnice $u_t + a u_x = c\, u_{xxx}$

náhrada řešení $u \to \hat{u}_0 e^{-i q(\omega) t} e^{i\omega x}$

$$-i q(\omega) + i\omega a = -i\omega^3 c$$

disperzní relace $q(\omega) = a\omega + c\omega^3$

fázová rychlost vlny $v_f(\omega) = q(\omega)/\omega = a + c\omega^2$

grupová rychlost $v_g(\omega) = q'(\omega) = a + 3c\omega^2$

- různé pro různá vlnová čísla

$c = \frac{1}{6}\Delta x^2 a (a^2\lambda^2 - 1)$, podmínka stability $|a||\lambda| \leq 1$

pro $a > 0 \Rightarrow c < 0 \Rightarrow v_{f,g} < a$ $a < 0 \Rightarrow c > 0$, $v_{f,g} > a$, $|v_{f,g}| < |a|$

čili všechny vlny s vlnovým číslem $\omega \neq 0$ mají menší rychlost

Modifikovaná rovnice pro Lax-Wendroffovo schéma

~liska/vyuka/ds/analysis/modif-lw4.mws

$$u_t + a u_x = \frac{1}{6} a \Delta x^2 u_{xxx} (\lambda^2 a^2 - 1) \qquad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$+ \frac{1}{8} \lambda a^2 \Delta x^3 u_{xxxx} (\lambda^2 a^2 - 1)$$

PDR: $u_t + a u_x = c\, u_{xxx} + d\, u_{xxxx}$ (1)

$u \to \hat{u}\, e^{i\omega x} \Rightarrow$ ODR pro $\hat{u}(t)$

$u \to \bar{u}\, e^{\lambda t} e^{i\omega x}$

$$\lambda + a i \omega = -c\, i\, \omega^3 + d\, \omega^4$$

$$\lambda = -i\omega(a + c\omega^2) + d\omega^4$$

$\hat{u} \sim \bar{u}\; e^{-i\omega(a+c\omega^2)t} e^{d\omega^4 t}$

$u \sim \qquad \cdot\, e^{-i\omega x}$

$\Rightarrow$ PDR (1) je dobře podmíněná pro $d < 0$

" špatně — " — " $d > 0$

CFL: $|a| \lambda \le 1$

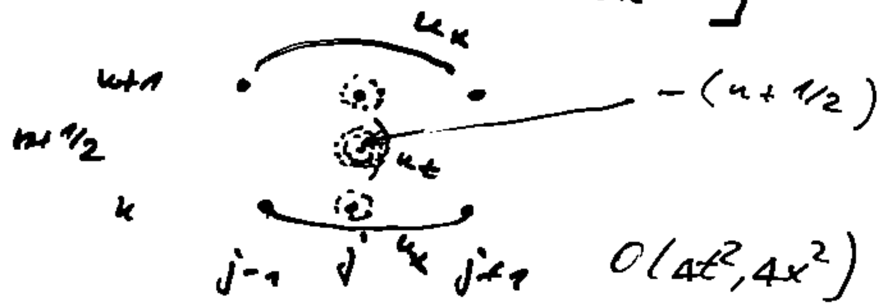
$a^2 \lambda^2 \le 1$

$a^2 \lambda^2 - 1 \le 0$

Crank – Nicolson

- $u_t + a u_x = 0$

- $$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{a}{2}\left[\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{u_{j+1}^{n} - u_{j-1}^{n}}{2\Delta x}\right] = 0$$



$O(\Delta t^2, \Delta x^2)$

- modifikovaná rovnice

$$u_t + a u_x = \left(-\frac{1}{12}\Delta t^2 a^3 - \frac{1}{6} a \Delta x^2\right) u_{xxx}$$

$$= -\frac{1}{12} a \left(\Delta t^2 a^2 + 2\Delta x^2\right) u_{xxx} + O(\Delta t^3, \Delta x^3)$$

- maticové vyjádření

$$\begin{pmatrix} 1, & -1 & & & \\ -a\frac{\Delta t}{4\Delta x}, & 1, & a\frac{\Delta t}{4\Delta x}, & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{a\Delta t}{4\Delta x}, & 1, & a\frac{\Delta t}{4\Delta x} \\ & & & -1, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_J^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2^n - \frac{a\Delta t}{4\Delta x}(u_3^n - u_1^n) \\ \vdots \\ u_j^n - \frac{a\Delta t}{4\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- okrajové podmínky $u_x = 0$ (volné)
- stabilita $|g|^2 = 1 \quad \forall \xi$

(unitární schéma)

~lisa/vyuka/ds/implicit/*.m

$$u_1^{n+1} - u_2^{n+1} = 0$$

$$u_J^{n+1} - u_{J-1}^{n+1} = 0$$

Parabolické rovnice

- rovnice vedení tepla

$$u_t = b u_{xx}$$ počáteční podmínka $u(0,x) = u_0(x)$

- dobře podmíněná pro $b > 0$

- Fourierova transformace v x

$$u = \hat{u}\, e^{i\omega x}$$

$$\hat{u}_t = -b\omega^2 \hat{u}$$

$$\hat{u} = e^{\lambda t} \rightarrow \lambda = -b\omega^2$$

$$\hat{u}(t,\omega) = e^{-b\omega^2 t}\, \hat{u}_0(\omega)$$

- inverzní Fourierova transformace

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} e^{-b\omega^2 t} \hat{u}_0(\omega)\, d\omega$$

$$\hat{u}_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u_0(x)\, dx$$

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} e^{-b\omega^2 t} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega y} u_0(y)\, dy \right) d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-y)} e^{-b\omega^2 t}\, d\omega \right) u_0(y)\, dy =$$

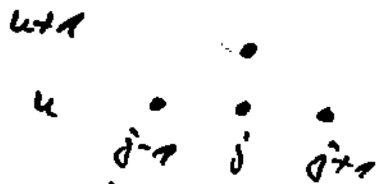
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi b t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4bt}\, u_0(y)\, dy$$

- vážený průměr u_0
- pro malé t velmi úzký pík váhy okolo $y = x$
  pro větší t je váhová funkce mnohem širší
- $u \in C^{\infty}_{t,x}$ – nekonečně diferencovatelné
- $u_0(x) \geq 0 \wedge u_0(x) \not\equiv 0 \Rightarrow u(t,x) > 0,\ t > 0$

Parabolické rovnice

- rovnice vedení tepla

$$u_t = b u_{xx}$$



- diferenční schema

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} = b\,\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

$O(\Delta t, \Delta x^2)$

$$u_j^{n+1} = (1-2b\mu)\,u_j^n + b\mu\,(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)$$

$\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ $\Delta t \le \frac{1}{2b}\Delta x^2$

stabilní pro $0 \le b\mu \le \frac{1}{2}$

- analýza podmíněnosti $u_t = b u_{xx}$

náhrada řešení

$u \to e^{q(\omega)t} e^{i\omega x}$ (Fourier v prostoru)

$q(\omega) = -b\omega^2 \to u \sim e^{-b\omega^2 t} e^{i\omega x}$

čili $b>0$ dobře podmíněná úloha

$b<0$ špatně podmíněná úloha

- podmíněnost $u_t + a u_x = b u_{xx}$?

$b>0$ dobře podmíněná

$b<0$ špatně – " –

$$\frac{u_j^{n+1} - \cancel{\tfrac{1}{2}}u_j^n \cancel{+u_{j-1}^n)/2}}{\Delta t} + a\,\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = b\,\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

stabilní pro $0 \le b\mu \le \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

$A = a\lambda = a\frac{\Delta t}{\Delta x}$ $a \to A\frac{\Delta x}{\Delta t}$

$B = b\mu = b\frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ $b \to B\frac{\Delta x^2}{\Delta t}$

$a^2\lambda \le 2b\mu$

$\Delta t \le \frac{2b}{a^2}$

$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$

lfstop. m

Vedení tepla

$$u_j^{n+1} = (1-2\,b\mu)\,u_j^n + b\mu\,(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = b\,\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

```
bmu = a*dt/dx^2;
for j = 2 : J-1
  un(j) = (1- 2*bmu)*u(j) + bmu*(u(j+1) + u(j-1));
end
```

$$\Delta t \le \frac{\Delta x^2}{2a}$$

$$\Delta t = C\,\frac{\Delta x^2}{2a} \quad C \in (0,1)$$

init.m

```
- dt = C*dx^2/(2*(a));
```

abs

konvekce - difuze

```
- dt = C*min(dx^2/(2*abs(b)), 2*b/a^2);
```

```
alam2 = a*dt/(2*dx);
bmu   = b*dt/dx^2;
for j = 2: J-1
  un(j) = (1 - 2*bmu)*u(j) +          ...
          bmu*(u(j+1) + u(j-1)) -     ...
          alam2*(u(j+1) - u(j-1));
```

implicit

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n}}{\Delta t} = b \, \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \qquad \mu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

vždy stabilní

$$u_{i-1}^{n+1}\, b\mu - (1+2b\mu)\, u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}\, b\mu = -u_i^{n}$$

Neumann o.p.

$$u_1^{n+1} - u_2^{n+1} = 0$$

$$u_J^{n+1} - u_{J-1}^{n+1} = 0$$

$$M \cdot \vec{u}^{\,n+1} = \vec{R}$$

imstep.m

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & & & \\ b\mu, & -(1+2b\mu), & b\mu, & 0 & & \\ 0, & b\mu & , -(1+2b\mu), & b\mu, & 0 & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -1, & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ -u_2^n \\ -u_3^n \\ \vdots \\ -u_{J-1}^n \\ 0 \end{pmatrix}$$

řád přesnosti $O(\Delta t, \Delta x^2)$

Rovnice vedení tepla

Crank-Nicolsonovo schema

$$u_t = b u_{xx}$$

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} = \frac{b}{2}\,\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}+u_{i+1}^{n}-2u_i^{n}+u_{i-1}^{n}}{\Delta x^2}$$

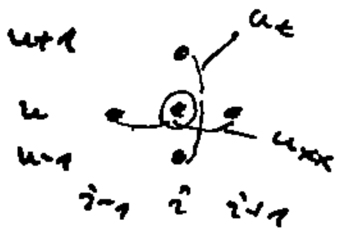
stabilita – von Neumann – stabilní vždy

řád přesnosti – Taylor v x, t v bodě $(i, n+1/2)$

$O(\Delta x^2, \Delta t^2)$

$$u_t - b u_{xx} + \Delta t^2\cdot(\,) + \Delta x^2\cdot(\,) = 0$$

Leap Frog



$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^{n-1}}{2\Delta t} = b\,\frac{u_{i+1}^{n}-2u_i^{n}+u_{i-1}^{n}}{\Delta x^2}$$

stabilita – nestabilní vždy

řád přesnosti – $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$

Du Fort-Frankel

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^{n-1}}{2\Delta t} = b\,\frac{u_{i+1}^{n}-u_i^{n-1}-u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n}}{\Delta x^2}$$

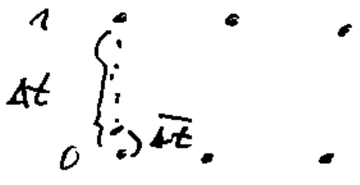
stabilita – stabilní vždy

řád přesnosti – $O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta t^2/\Delta x^2)$ $b\mu = \text{konst}$ $O(\Delta x^2)$ $O(\Delta t)$ $\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

explicitní schema

$$u_i^{n+1}\left(\frac{1}{2\Delta t}+\frac{b}{\Delta x^2}\right) = \frac{u^{n-1}}{2\Delta t} + b\,\frac{u_{i+1}^{n}-u_i^{n-1}+u_{i-1}^{n}}{\Delta x^2}$$

$$u_i^{n+1} = \frac{u^{n-1}+2b\mu\left(u_{i+1}^{n}-u_i^{n-1}+u_{i-1}^{n}\right)}{1+2b\mu}$$



$$\Delta t = \frac{5\Delta x^2}{b}$$

$$b\mu \le \frac{1}{2}$$

$$\Delta t \le \frac{\Delta x^2}{2b}$$

Du Fort–Frankel stabilita

$u_t = b u_{xx}$

$\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

- charakteristický polynom

$$(1+2b\mu)g^2 - 4b\mu\cos\xi\, g - (1-2b\mu) = 0$$

- řešení

$$g_{1,2} = \frac{2b\mu\cos\theta \pm \sqrt{1-4b^2\mu^2\sin^2\xi}}{1+2b\mu}$$

1. $D = 1-4b^2\mu^2\sin^2\xi \geq 0$

$$|g_{1,2}| \leq \frac{2b\mu|\cos\xi| + \sqrt{1-4b^2\mu^2\sin^2\xi}}{1+2b\mu} \leq \frac{2b\mu+1}{1+2b\mu} = 1$$

o.k.

2. $D = 1-4b^2\mu^2\sin^2\xi < 0$

$$g_{1,2} = \frac{2b\mu\cos\xi \pm i\sqrt{4b^2\mu^2\sin^2\xi - 1}}{1+2b\mu}$$

$$|g_{1,2}|^2 = \frac{4b^2\mu^2\cos^2\xi + 4b^2\mu^2\sin^2\xi - 1}{(1+2b\mu)^2} =$$

$$= \frac{4b^2\mu^2 - 1}{4b^2\mu^2 + 2b\mu + 1} < 1$$

- schema je bezpodmínečně stabilní

$$4b^2\mu^2 - 1 < 4b^2\mu^2 + 2b\mu + 1$$

$$-2 < 2b\mu$$

Advekčně difusní rovnice

$$u_t + a u_x = b u_{xx}$$

- rovnice je dobře podmíněná pro $b>0$
- dif. schema

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\,\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = b\,\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

- stabilita $\quad \lambda = a\frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad \mu = b\frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

$$a \to \lambda\frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad b \to \mu\frac{\Delta x^2}{\Delta t}$$

stabilní $\quad \mu \le \frac{1}{2} \wedge \lambda^2 \le 2\mu \Rightarrow a^2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \le 2b\frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

$$\Rightarrow \underline{\Delta t \le \frac{\Delta x^2}{2b} \wedge \Delta t \le \frac{2b}{a^2}}$$

$$u_i^{n+1} = \left(1 - \frac{2b\Delta t}{\Delta x^2}\right)u_i^n + \frac{\Delta t\, b}{\Delta x^2}\left(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n\right) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right)$$

$$\Delta t = C \cdot \min\left(\frac{\Delta x^2}{2b}, \frac{2b}{a^2}\right)$$

~liska/vyuka/dc/pdr.m

Eliptické PDR.

- Laplaceova rovnice $u(x,y)$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{na oblasti } \Omega$$

- Laplaceův operátor

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \operatorname{div} \operatorname{grad}$$

- Poissonova rovnice

$$\nabla^2 u = f(x,y)$$

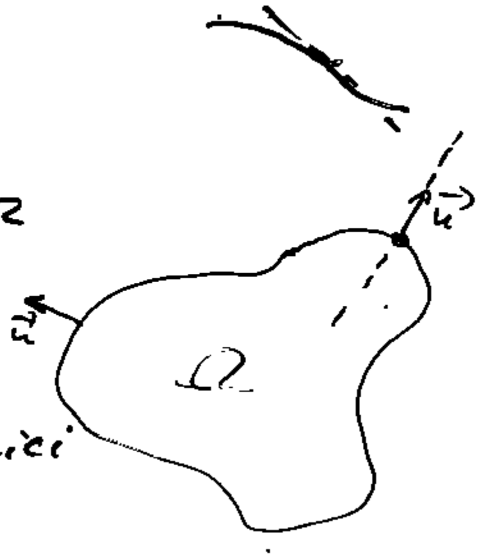
- okrajové podmínky
  - Dirichletova

$$u = b_1(x,y) \quad \text{na hranici } \partial\Omega$$

  - Neumannova

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = b_2(x,y) \quad \text{na } \partial\Omega$$

$\vec{n}$ je vnější normála k hranici



  - Robinova

$$c\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + au = b_3(x,y) \text{ na } \partial\Omega$$

- řešení Poissonovy rovnice – rozložení teploty
  - $f(x,y)$ – zdroje tepla, ochlazení
  - Dirichletova o.p. – daná teplota na hranici
  - Neumannova $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ – ideální izolace

    $\frac{\partial u}{\partial n} = b_2$ – zadaný tok tepla

- Poissonova rovnice s Neumannovou o.p.

$$\nabla^2 u = f(x,y) \text{ na } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = b_2 \text{ na } \partial\Omega$$

podmínka integrability

$$\iint_\Omega f = \int_{\partial\Omega} b_2$$

odvození

$$\iint_\Omega f = \iint_\Omega \underbrace{\nabla^2 u}_{\operatorname{div} \operatorname{grad} u} = \int_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} u}_{\operatorname{grad}} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = \int_{\partial\Omega} b_2$$

Eliptické rovnice

• Def.

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y,u,u_x,u_y) = f(x,y)$$

je eliptická $\Leftrightarrow$

$$a>0,\ c>0,\ b^2 < ac$$

• Př. eliptické rovnice vyššího řádu

biharmonická

$$\nabla^4 u = u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = f(x,y)$$

• princip maxima

Věta: eliptický operátor $Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}$, $(a>0,\ c>0,\ b^2<ac)$

Pokud pro u platí $Lu \ge 0$ na oblasti Ω

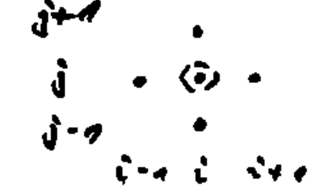
$\Rightarrow$ Lu má maximum na hranici $\partial\Omega$

Diferenční schema

• Poissonova rovnice na čtverci, Dirichletovy O.P.

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y) \qquad u_{\partial\Omega} = b_\Omega$$

• OG síťka, s konst. krokem $\Delta x = \Delta y$, $N\times N$



$$\frac{u_{i-1j} - 2u_{ij} + u_{i+1j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{ij-1} - 2u_{ij} + u_{ij+1}}{\Delta y^2} = f_{ij}$$

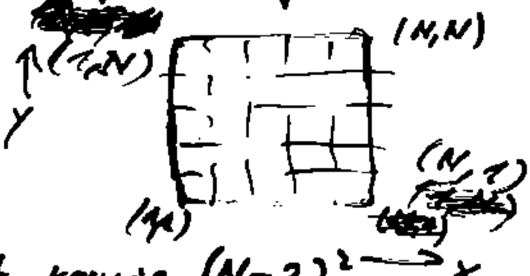
$\Delta y = \Delta x$

$$u_{i-1j} + u_{i+1j} + u_{ij-1} + u_{ij+1} - 4u_{ij} = f_{ij}\,\Delta x^2$$

• Dirichlet. OP

$u_{1j} = b_{1j}$, $u_{Nj} = b_{Nj}$

$u_{i1} = b_{i1}$, $u_{iN} = b_{iN}$

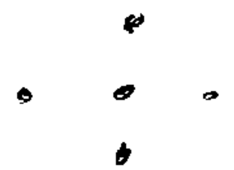


• řešit systém lin. rovnic - počet rovnic $(N-2)^2$

• iterační metody - poč. odhad $u^0_{ij} = 0$, $i=2,\dots,N-1$, $j=2,\dots$

• Jakobiho iterační metoda

$$u^{k+1}_{ij} = \frac{1}{4}\left(u^k_{i-1j} + u^k_{i+1j} + u^k_{ij-1} + u^k_{ij+1} - f_{ij}\,\Delta x^2\right)$$



- řešíme systém

$$\mathbb{A}u = b$$

- reziduum it. řešení

$$r^k = \mathbb{A}u^k - b$$

- max. norma rezidua

$$R^k = \max(|r^k|)$$

- pro náš případ

$$R^k = \max_{ij}\left(|u^k_{i-1j} + u^k_{i+1j} + u^k_{ij-1} + u^k_{ij+1} - 4u^k_{ij} - f_{ij}\Delta x^2|\right)$$

- iterace zastavíme když $R^k < \varepsilon$ - vstupní parametr

$$\varepsilon = 10^{-4}, 10^{-6}$$

- problém: $u = x^2 + y^2$ na $\Omega = (-1,1)\times(-1,1)$

$u_{xx} + u_{yy} = 4$, Dirichlet. podm.

$$u(x=\pm 1, y) = 1 + y^2$$
$$u(x, y=\pm 1) = 1 + x^2$$

~liska/vyuka/ds/eliptic/poison.m

- schema

$$u_{i-1j} + u_{i+1j} + u_{ij-1} + u_{ij+1} - 4u_{ij} = f_{ij}\Delta x^2$$

- Gauss-Seidelova metoda - iterace

$$u^{k+1}_{ij} = \frac{1}{4}\left(u^k_{i+1j} + u^{k+1}_{i-1j} + u^k_{ij+1} + u^{k+1}_{ij-1} - f_{ij}\Delta x^2\right)$$

při přirozeném pořadí cyklu již známe $u^{k+1}_{i-1j}, u^{k+1}_{ij-1}$

- SOR (successive over-relaxation) iterační metoda

$$u^{k+1}_{ij} = u^k_{ij} + \omega\left[\frac{1}{4}\left(u^k_{i+1j} + u^{k+1}_{i-1j} + u^k_{ij+1} + u^{k+1}_{ij-1} - f_{ij}\Delta x^2\right) - u^k_{ij}\right]$$

optimální volba $\omega \in (1,2)$

$$\omega = \frac{2}{1 + Ch} \qquad h = \Delta x = \Delta y$$

konstanta C se určí experimentálně na hrubé síťce

Metoda konjugovaných gradientů

- řešení lineárního systému

$$Ax = b$$

A – matice $N \times N$
- symetrická
- positivně definitní

- algoritmus

x^0 – počáteční odhad řešení ($x^0 = 0$)

$$r^0 = b - Ax^0$$

$$q^0 = Ar^0$$

$$p^0 = r^0$$

iterační krok:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k$$

$$r^{k+1} = r^k - \alpha_k q^k$$

$$p^{k+1} = r^{k+1} + \beta_k p^k$$

$$q^{k+1} = Ar^{k+1} + \beta_k q^k$$

$$\alpha_k = \frac{|r^k|^2}{(p^k, q^k)}$$

$$\beta_k = \frac{|r^{k+1}|^2}{|r^k|^2}$$

$$(q^k, p^k) = \sum_{i=1}^{N} q_i^k p_i^k$$

$$|r^k|^2 = (r^k, r^k)$$

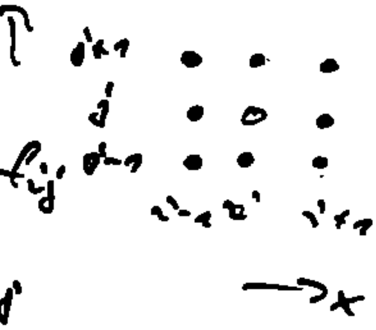
- počet iterací

N	Jacobiho	Gauss-Seidel	SOR	konjugované gradienty
10^2	235	125	125	10
20^2	949	526	526	30
30^2		1189		48
40^2				64
50^2				80

- Poissonova rovnice

$$u_{xx}+u_{yy}=f(x,y) \qquad \Delta y=\Delta x$$

- devítibodové schema



$$\left(\delta_x^2+\delta_y^2+\frac{1}{6}\delta_x^2\delta_y^2\right)u_{ij}=f_{ij}$$

$$\delta_x^2 u_{ij}=\frac{u_{i+1\,j}-2u_{ij}+u_{i-1\,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{2}{3}\left(u_{i+1\,j}+u_{i-1\,j}+u_{i\,j+1}+u_{i\,j-1}\right)+$$

$$\frac{1}{6}\left(u_{i+1\,j+1}+u_{i+1\,j-1}+u_{i-1\,j+1}+u_{i-1\,j-1}\right)$$

$$-\frac{10}{3}u_{ij}=f_{ij}\,\Delta x^2$$

- 5-ti bodové i toto 9-ti bodové schema je řádu $O(\Delta x^2)$
- modifikované 9-ti bodové schema

$$\left(\delta_x^2+\delta_y^2+\frac{1}{6}\delta_x^2\delta_y^2\right)u_{ij}=\left(1+\frac{1}{12}\left(\delta_x^2+\delta_y^2\right)\right)f_{ij}$$

levá strana $=\frac{1}{12}\left(f_{i+1\,j}+f_{i-1\,j}+f_{i\,j+1}+f_{i\,j-1}+8f_{ij}\right)$

má řád přesnosti $O(\Delta x^4)$

- rovnice vedení tepla ve 2D (parabolická rovnice)

$$u_t-b\,(u_{xx}+u_{yy})=f$$

implicitní schema 5-ti bodové

$$\frac{u_{ij}^{n+1}-u_{ij}^{n}}{\Delta t}-b\left(\delta_x^2+\delta_y^2\right)u_{ij}^{n+1}=f_{ij}$$

$$u_{ij}^{n+1}-\Delta t\, b\left(\delta_x^2+\delta_y^2\right)u_{ij}^{n+1}=\Delta t\, f_{ij}+u_{ij}^{n}$$

2D problémy

- advekční rovnice ve 2D , $u(t,x,y)$

$$u_t + a u_x + b u_y = 0 \qquad (1)$$

- počáteční podmínka

$$u(0,x,y) = u_0(x,y)$$

- analytické řešení pro $(x,y) \in R^2$

$$u(t,x,y) = u_0(x-at, y-bt)$$

- ověření

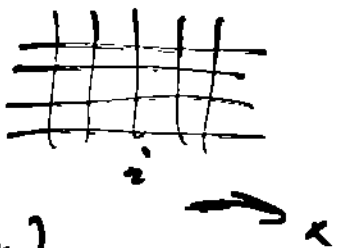
$$-a u_{0x} - b u_{0y} + a u_{0x} + b u_{0y} = 0$$

Metoda rozkladu (splitting)

- rozložíme (1) na

$$u_t + a u_x = 0 \qquad (2)$$

$$u_t + b u_y = 0 \qquad (3)$$



- diskretizace $u_{ij}^n \hat{=} u(n\Delta t, i\Delta x, j\Delta y)$
- známe u_{ij}^n
- $\forall j$ řešíme (2) 1D dif. schematem D_x - vycházíme z u_{ij}^n
  - dostaneme řešení $\tilde{u}_{ij}^{n+1}$
- $\forall i$ řešíme (3) 1D dif. schematem D_y - vycházíme z $\tilde{u}_{ij}^{n+1}$
  - dostaneme řešení u_{ij}^{n+1}

Symetrizace

- základní metoda $u_{ij}^{n+1} = D_y^{\Delta t} D_x^{\Delta t} u_{ij}^n$

  je pouze 1. řádu přesnosti

- Strangův rozklad (Strang splitting)

$$u_{ij}^{n+1} = D_x^{\Delta t/2} D_y^{\Delta t} D_x^{\Delta t/2} u_{ij}^n$$

je 2. řádu přesnosti

$$u_{ij}^{n+k} = D_x^{\Delta t/2} \underbrace{D_y^{\Delta t} D_x^{\Delta t} D_y^{\Delta t} \dots}_{k} D_y^{\Delta t} D_x^{\Delta t/2} u_{ij}^n$$

- symetrizace

$$u_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2}\left(D_y^{\Delta t} D_x^{\Delta t} + D_x^{\Delta t} D_y^{\Delta t}\right) u_{ij}^n$$

je 2. řádu přesnosti

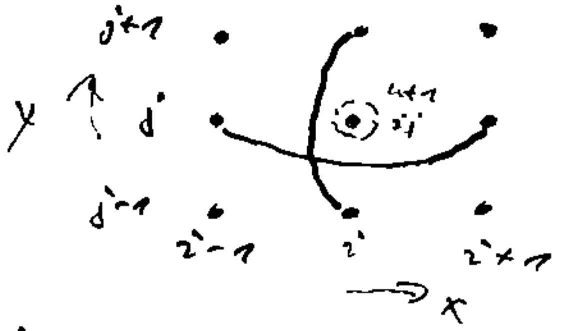
- stabilita - dána stabilitou 1D schemat

$|a|\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq$

při LF $\max(|a|\frac{\Delta t}{\Delta x}, |b|\frac{\Delta t}{\Delta y}$

2D - metody bez rozkladu (non-splitting)

$$u_t + a u_x + b u_y = 0$$



• centrální

$$\frac{u^{n+1}_{ij} - u^n_{ij}}{\Delta t} + a\,\frac{u^n_{i+1\,j} - u^n_{i-1\,j}}{2\Delta x} + b\,\frac{u^n_{i\,j+1} - u^n_{i\,j-1}}{2\Delta y} = 0$$

• Lax - Friedrichs LF

$$\frac{u^{n+1}_{ij} - \frac{1}{4}\left(u^n_{i+1\,j} + u^n_{i-1\,j} + u^n_{i\,j+1} + u^n_{i\,j-1}\right)}{\Delta t}$$

$$+ a\,\frac{u^n_{i+1\,j} - u^n_{i-1\,j}}{2\Delta x} + b\,\frac{u^n_{i\,j+1} - u^n_{i\,j-1}}{2\Delta y} = 0$$

• řád přesnosti - 1. řádu
Taylor v t, x, y

• stabilita

$$u^{n+m}_{i+l,\,j+k} \longrightarrow g^m \cdot e^{i\xi l} \cdot e^{i\eta k}$$

$$g(\xi, \eta, \cdot)$$

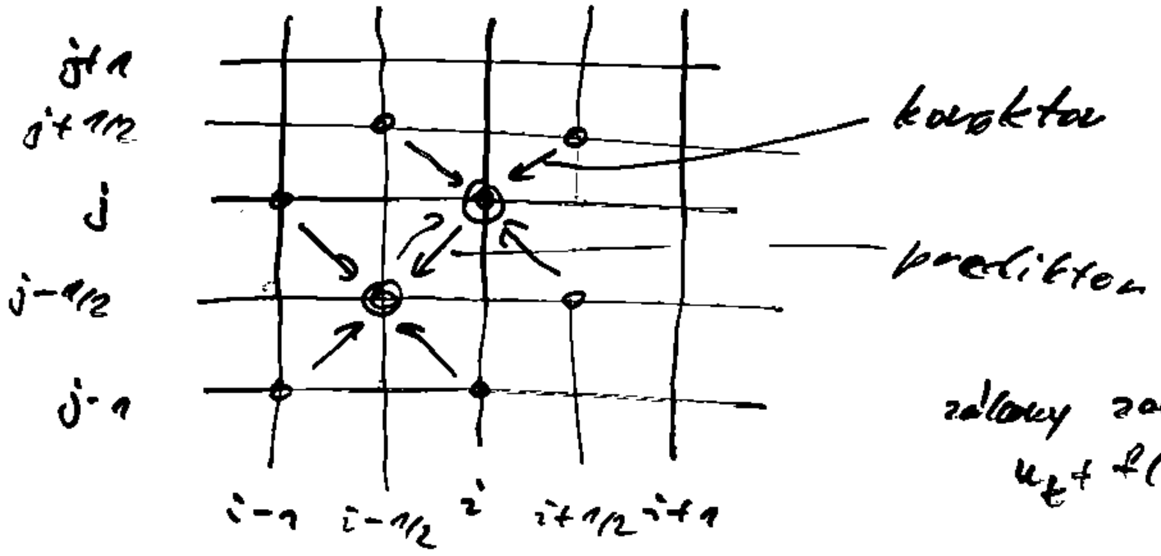
$\forall\xi\ \forall\eta \qquad |g(\xi, \eta, \cdot)| \le 1$ $\quad$ g nezávisí explicitně na $\Delta x, \Delta y, \Delta t$
může záviset na $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, $\mu = \frac{\Delta t}{\Delta y}$

• centrální schema je bezpodmínečně nestabilní

• LF pro $\lambda = \mu = |a|\frac{\Delta t}{\Delta x} = |b|\frac{\Delta t}{\Delta y}$ je stabilní pro $|\lambda| \le \frac{1}{2}$

$u_t + a u_x + b u_y = 0$

• posunutá síť • $\Delta x/2, \Delta y/2$



zákony zachování v 2D

$u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0$

• jako v 1D – prediktor LF

$$\frac{u^{n+1/2}_{i-1/2,j-1/2} - \frac{1}{4}\left(u^n_{ij} + u^n_{i-1,j} + u^n_{i,j-1} + u^n_{i-1,j-1}\right)}{\Delta t/2}$$

$$+ \frac{a}{2\Delta x}\left(u^n_{ij} + u^n_{i,j-1} - u^n_{i-1,j} - u^n_{i-1,j-1}\right)$$

$$+ \frac{b}{2\Delta y}\left(u^n_{ij} + u^n_{i-1,j} - u^n_{i,j-1} - u^n_{i-1,j-1}\right) = 0$$

• korektor LF – menší difuse než 1. kolový LF

$$\frac{u^{n+1}_{ij} - \frac{1}{4}\left(u^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2} + u^{n+1/2}_{i-1/2,j+1/2} + u^{n+1/2}_{i+1/2,j-1/2} + u^{n+1/2}_{i-1/2,j-1/2}\right)}{\Delta t/2}$$

$$+ \frac{a}{2\Delta x}\left(u^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2} + u^{n+1/2}_{i+1/2,j-1/2} - u^{n+1/2}_{i-1/2,j+1/2} - u^{n+1/2}_{i-1/2,j-1/2}\right)$$

$$+ \frac{b}{2\Delta y}\left(u^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2} + u^{n+1/2}_{i-1/2,j+1/2} - u^{n+1/2}_{i+1/2,j-1/2} - u^{n+1/2}_{i-1/2,j-1/2}\right) = 0$$

• korektor LW – má stejný prediktor jako LF

$$\frac{u^{n+1}_{ij} - u^n_{ij}}{\Delta t}$$

$$+ \frac{a}{2\Delta x}\left(u^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2} + u^{n+1/2}_{i+1/2,j-1/2} - u^{n+1/2}_{i-1/2,j+1/2} - u^{n+1/2}_{i-1/2,j-1/2}\right)$$

$$+ \frac{b}{2\Delta y}\left(u^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2} + u^{n+1/2}_{i-1/2,j+1/2} - u^{n+1/2}_{i+1/2,j-1/2} - u^{n+1/2}_{i-1/2,j-1/2}\right) =$$

• liska / vynka / ds / 2d / ...