# PARCIÁLNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

- nezávislé proměnné $t, x, y, z$
- $u(t,x)$
- $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

- typy rovnic
  - eliptické $u_{xx} + u_{yy} = 0$ Laplaceova
  - parabolické $u_t + a u_{xx} = 0$ rovnice vedení tepla
  - hyperbolické $u_t + a u_x = 0$ advekční
    - $u_t + a u_x + b u_{xx} = 0$ 1-stranná vlnová rovnice
- zdrojové členy $s(t,x,u)$ na pravé straně
- podmínky
  - počáteční $u(0,x) = u_0(x)$
  - okrajové $u(t,0) = f(t)$
- podmíněnost PDR

## HYPERBOLICKÉ PDR

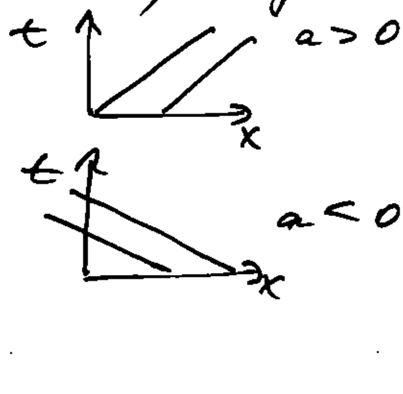
- počáteční problém Cauchyho prob.

$$u_t + a u_x = 0 \quad \forall t \geq 0 \ \forall x \in R$$
$$u(0,x) = u_0(x)$$

- hledám $u(t,x)$ $t \geq 0, x \in R$

- řešení
$$u(t,x) = u_0(x - at)$$
- charakteristiky – přímky na kterých je $u$ $x - at$ konstantní

$$\xi = x - at$$




$a$ – rychlost šíření podél charakteristiky

$$u(t,x) = u_0(\xi)$$

- se zdrojem

$$u_t + a u_x = bu$$
$$u(0,x) = u_0(x)$$

- transformace proměnných

$$\tau = t \quad , \xi = x - at$$
$$t = \tau \quad , x = \xi + a\tau$$
$$\tilde{u}(\tau,\xi) = u(t,x)$$

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} u_t + \frac{\partial x}{\partial \tau} u_x = u_t + a u_x = bu$$

- máme ODR $\dfrac{d\tilde{u}}{d\tau} = b\tilde{u}$

s poč. podmínkou $\tilde{u}(0,\xi) = u_0(\xi)$

- řešení $\tilde{u}(\tau,\xi) = u_0(\xi) e^{b\tau}$

$$u(t,x) = u_0(x-at) e^{bt}$$

- lze rozšířit na řešení

$$u_t + a u_x = f(t,x,u)$$

# HYPERBOLICKÁ PDR S PROMĚNNÝMI KOEFICIENTY

- $$u_t + a(t,x)\,u_x = 0$$
  $$u(0,x) = u_0(x)$$

- transformace do proměnných $\tau, \xi$
  $\tau = t$, $\xi = ?$, $\tilde{u}(\tau,\xi) = u(t,x)$

- $$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}u_t + \frac{dx}{d\tau}u_x = u_t + \frac{dx}{d\tau}u_x$$

- položíme $$\frac{dx}{d\tau} = a(t,x) = a(\tau,x)$$

- dostaneme systém ODR
  $$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} = 0 \qquad \tilde{u}(0,\xi) = u_0(\xi)$$
  $$\frac{dx}{d\tau} = a(\tau,x) \qquad x(0) = \xi$$

- Příklad $\qquad a(t,x) = x$
  $$u_t + x\,u_x = 0$$
  $$u_0(x) = u(0,x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \end{cases} \qquad u_0(\xi) = \begin{cases} 1 & 0 \le \xi \le 1 \\ 0 & \end{cases}$$
  $$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} = 0 \qquad \frac{dx}{d\tau} = x \qquad x(0) = \xi$$
  $$\tilde{u}(0,\xi) = u_0(\xi) \qquad x(\tau) = \xi e^{\tau}, \qquad \xi = x e^{-t} = \text{konst}$$
  charakteristiky $x(t) = \xi e^{t}$

- řešení $\tilde{u}(\tau,\xi) = u_0(\xi)$
  $$u(t,x) = u_0(x e^{-t})$$
  čili
  $$u(t,x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \le x < e^{t} \\ 0 & \end{cases}$$

Systém PDR

$U(\vec{x},t) \in R^d \quad U = (u_1, \dots, u_d)$

$U_t + \mathbb{A}\cdot U_x = 0 \quad / \cdot P \cdot$

$U(0,x) = U_0(x)$

je hyperbolický $\Leftrightarrow$ $\mathbb{A}$ má rozklad vl. čísla

$\exists \mathbb{P}$

$A(x,t)$

$\mathbb{P}(x,t)$

$a_i(x,t)$

$$\mathbb{P}\mathbb{A}\mathbb{P}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & \\ 0 & a_2 & \cdots & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_d \end{pmatrix} = \Lambda$$

$a_i \in R, \quad i = 1, \dots, d$

$\det(\mathbb{A} - \lambda I) = 0$

$\lambda_i = a_i$

$\mathbb{P}$ - vl. vektory

$\mathbb{W} = \mathbb{P}\cdot U \qquad \mathbb{W}(0,x) = PU_0(x)$

$\mathbb{P}\cdot U_t + \mathbb{P}\mathbb{A}\cdot U_x = 0$

$(\mathbb{P}\cdot U)_t + \mathbb{P}\mathbb{A}\mathbb{P}^{-1}\mathbb{P}U_x = 0$

$$\boxed{\mathbb{W}_t + \Lambda\cdot\mathbb{W}_x = 0}$$

$\mathbb{W} = (w_1, \dots, w_d)$

$(w_i)_t + a_i (w_i)_x = 0 \qquad i = 1, \dots, d$

$w_i(0,x) = w_{i0}(x) = (\mathbb{P}\cdot U_0(x))_i$

řešení $\quad \mathbb{W}(x,t) \qquad w_i(t,x) = w_{i0}(x - a_i t)$

$U = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{W}$

---

$u_t + (f(u))_x = 0 \quad \to \quad u_t + f_u u_x = 0$

$U_t + (F(U))_x = 0$

$U_t + \frac{\partial F}{\partial U}\cdot U_x = 0 \quad \to \quad U_t + \underbrace{\mathbb{A}(x,t,U)}_{\partial F/\partial U}\cdot U_x = 0$

$u_t + a u_x = 0$ PDR okrajové podmínky $x \in R_1 \quad t \geq 0$

$u(0,x) = u_0(x)$ $\qquad u(t,x) = u_0(x - at)$

$x \in (0,1)$

$u(t,0) = f_0(t)$

$u(t,1) = f_1(t)$

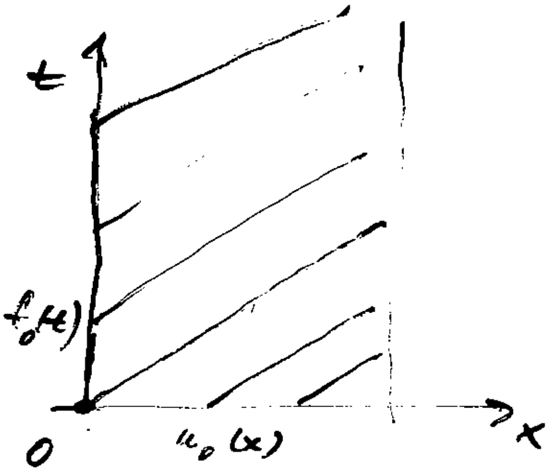
① $a > 0$ $\qquad$ OP $u(t,0) = f_0(t)$

$$u(t,x) = \begin{cases} u_0(x-at) & \text{pro } x - at > 0 \\ f_0(t - x/a) & \text{pro } x - at < 0 \end{cases}$$

② $a < 0$ $\qquad$ OP $u(t,1) = f_1(t)$ pro $x - at < 1$

$$u(t,x) = \begin{cases} u_0(x-at) & \\ f_1(t - (1-x)/a) & \text{pro } x - at > 1 \end{cases}$$

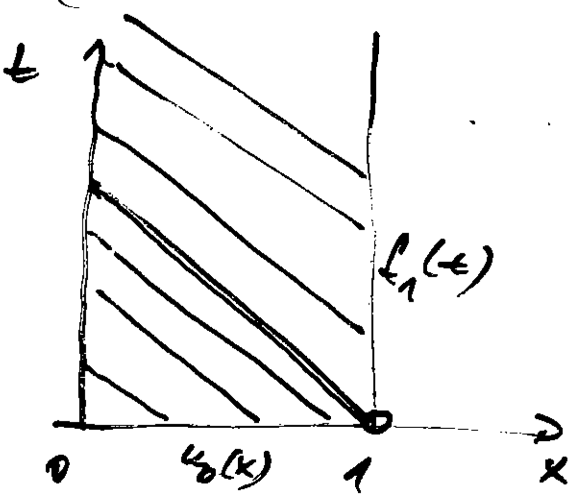
① $a > 0$




OP $u(t,0) = f_0(t)$

~~$f_0(0) = u_0(0)$ spojitost~~

② $a < 0$




OP $u(t,1) = f_1(t)$

~~$f_1(0) = u_0(1)$~~

## Okrajové podmínky $\quad u_t + A U_x = 0$

Př: $\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_x = 0$ $\quad a>0,\ b>0,\ x \in (0,1)$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 - b^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - b^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - \cancel{4a^2} + 4b^2}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = a \pm b$$

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (a \pm b)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = P \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} u^1 + u^2 \\ u^1 - u^2 \end{pmatrix}$$

$$u_t + A \cdot u_x = 0$$

$$P \cdot u_t + P \cdot A \cdot P^{-1} \cdot P \cdot u_x = 0$$

diagonální systém

$$\begin{pmatrix} u^1 + u^2 \\ u^1 - u^2 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^1 + u^2 \\ u^1 - u^2 \end{pmatrix}_x = 0$$

2 nezávislé rovnice

$$(u^1 + u^2)_t + (a+b)(u^1 + u^2)_x = 0 \qquad w^1_t + (a+b)\, w^1_x = 0$$

$$(u^1 - u^2)_t + (a-b)(u^1 - u^2)_x = 0 \qquad w^2_t + (a-b)\, w^2_x = 0$$

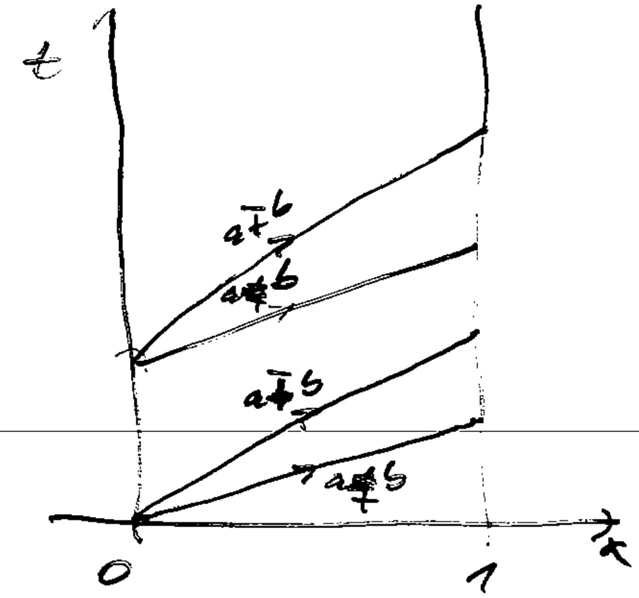
$a>0,\ b>0$

$$u_t + a\, u_x = 0$$

$a > 0$ OP v $x = 0$

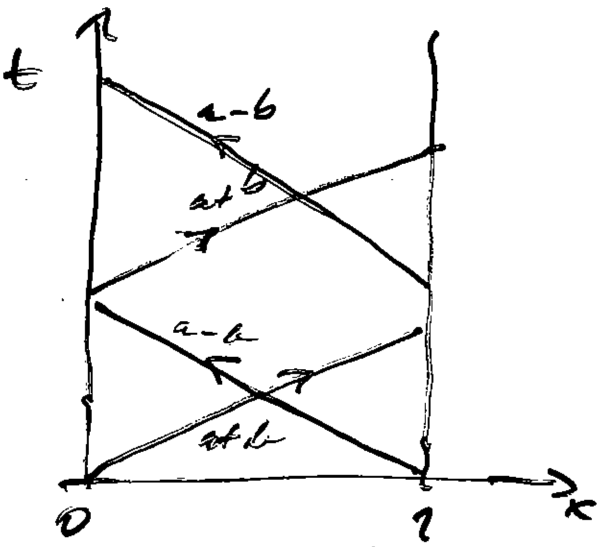
$a < 0$ OP v $x = 1$

(1) $a+b>0 \wedge a-b>0$ $\quad (a>b)$




OP pro $u^1+u^2$ může být v $x=0$
$u^1-u^2$

(2) $a+b>0 \wedge a-b<0$ $\quad (a<b)$




$a+b$ je rychlost šíření $u^1+u^2$
$a-b$ " $u^1-u^2$

OP pro $u^1+u^2$ v bodě $x=0$
$u^1-u^2$ " $x=1$

$$u^1(t,0)+u^2(t,0)=f_0(t)$$
$$u^1(t,1)-u^2(t,1)=f_1(t)$$

## Obecné OP pro $a<b$

$x=0$ $\quad u^1(t,0)+u^2(t,0) = c_1\big(u^1(t,0)-u^2(t,0)\big)+f_0(t)$

$x=1$ $\quad u^1(t,1)-u^2(t,1) = c_2\big(u^1(t,1)+u^2(t,1)\big)+f_1(t)$

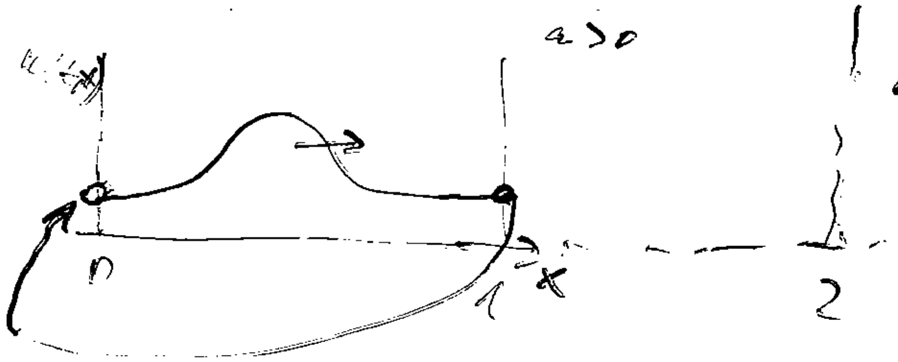
---

## Periodické OP

$$u_t + a u_x = 0 \qquad x\in(0,1),\ t\geq 0$$

PP: $u(0,x)=u_0(x)$

POP
$u(t,0)=u(t,1)$
omezení PP (spojitost)
$u_0(0)=u_0(1)$



## Druhy O.P.

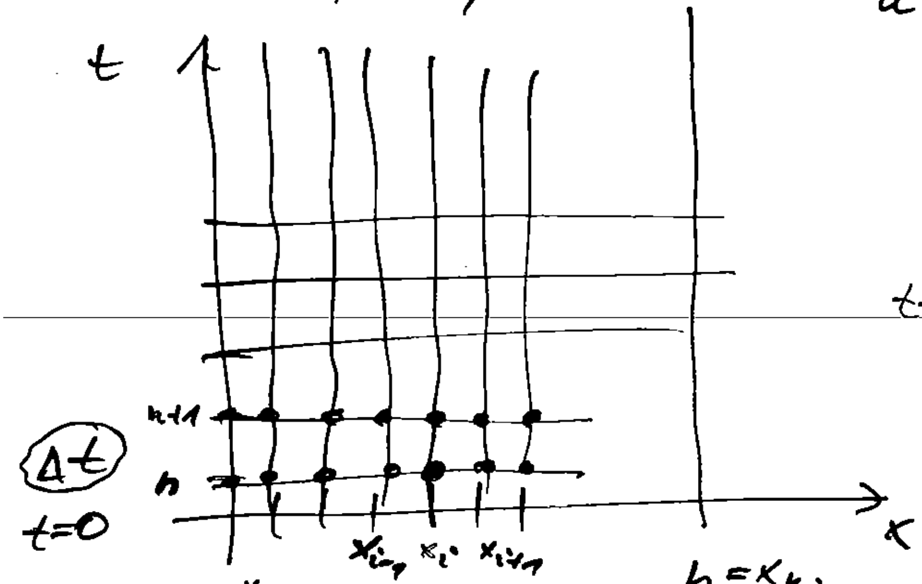
- periodické $\quad u(t,0) = u(t,1)$
- Dirichletovy $\quad u(t,0) = f_0(t)$
- Neumanovy (přivozené) $\quad u_x(t,0) = 0 \longleftarrow f(t)$
- Robinovy $\quad \alpha \cdot u + \beta u_x = \gamma \;, \alpha(x,t), \beta(x,t), \gamma(x,t)$
- odraz
- absorbující

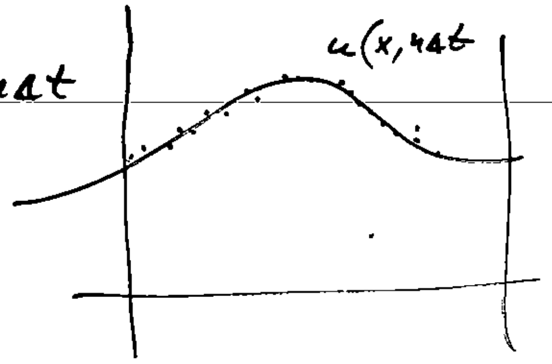
# METODA KONEČNÝCH DIFERENCÍ

$x \in (a,b)$, $t > 0$ $\quad t \in (0,T)$

$u(x,t) \approx u(x_i, t^n)$

$\approx u_i^n = u(x_i, n\Delta t)$




$\Delta x = (b-a)/(n_i - 1)$

$x_i = a + (i-1)\Delta x$, $i = 1, \dots, n_i$

$x_1 = a$, $x_{n_i} = b$

$t^n = n\Delta t$

---

$u_t + A u_x = 0$ $\qquad u_x(a) = 0$ o.P.

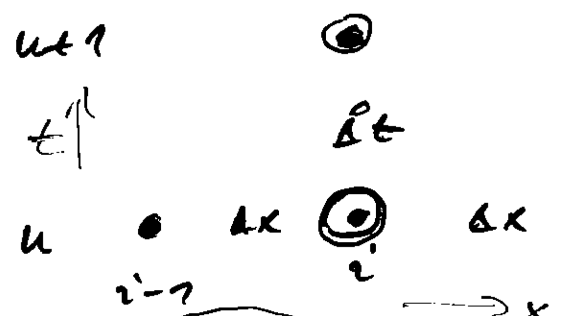
$u_x(b) = 0$

$u(0,x) = u_0(x)$

$u_i^0 = u_0(x_i)$

$$u_t \sim \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \sim \frac{u_i^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + \dots}{\Delta t}$$

$$u_x \sim \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \sim \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} \sim \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}$$




$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + A \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$ dopředné v čase centrální v prostoru diferenční schema

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{A\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right), \quad i = 2, \dots, n_i - 1$$

$u_1^{n+1} = u_2^{n+1}$

$u_{n_i}^{n+1} = u_{n_i-1}^{n+1}$

$u_i^0 = u_0(x_i)$

Lax Friedrichs

9 $\quad u_i^{n+1} = (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)/2 - \frac{A\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right)$

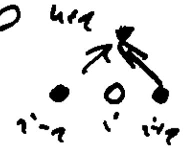
- PDR $\quad u_t + a u_x = 0$

- diferenční schemata – explicitní

$$\frac{u_i^{n+1} - \frac{1}{2}\left(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n\right)}{\Delta t} + a\,\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Lax–Friedrichsova LF

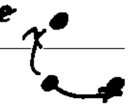
$O(\Delta t, \Delta x)$



$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\,\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0$$

dopředné

$O(\Delta t, \Delta x)$



$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\,\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

zpětné

$O(\Delta t, \Delta x)$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\,\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

centrální

$O(\Delta t, \Delta x^2)$

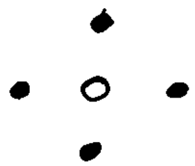
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\,\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{a^2 \Delta t}{2}\,\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

Lax–Wendroffovo LW

$O(\Delta t^2, \Delta x^2)$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + a\,\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Leap-frog



- vícekrokové
- potřebuje inicializaci

$O(\Delta t^2, \Delta x^2)$

- základní náhrady derivací

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u(t+\varepsilon, x) - u(t, x)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u(t, x) - u(t-\varepsilon, x)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u(t+\varepsilon, x) - u(t-\varepsilon, x)}{2\varepsilon}$$

$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}$ $O(\Delta$

$\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}$ $O(\Delta$

$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t}$ $O(\Delta$

# Konvergence a konzistence

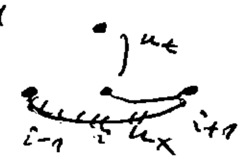
**Def.:** Jednokrokové dif. schema aproximující PDR je KONVERGENTNÍ $\Leftrightarrow$

$\forall$ řešení $u(t,x)$ PDR $\forall$ řešení $u_i^n$ dif. schematu taková, že $u_i^0 \to u_0(x)$ když $i\Delta x \to x$, $\Delta x \to 0$
potom $u_i^n \to u(t,x)$ $(n\Delta t, i\Delta x) \to (t,x)$
$\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$

---

**Def.:** PDR $Pu = f$, dif. schema $P_{\Delta t,\Delta x} u_i^n = f_i^n$ je KONZISTENTNÍ s PDR $\Leftrightarrow$

$\forall$ hladkou funkci $\phi(t,x)$, $P\phi - P_{\Delta t,\Delta x}\phi_i^n \to 0$ pro $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$ (bodová konvergence $O(\Delta t^n, \Delta x^k)$ v každém bodě sítě)




Př. dopředné schema, $P\phi = \phi_t + a\phi_x$

$$P_{\Delta t,\Delta x}\phi_i^n = \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + a\,\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_i^n}{\Delta x}$$

$$\phi_i^n = \phi(n\Delta t, i\Delta x)$$

Taylorův rozvoj v bodě $(n\Delta t, i\Delta x)$

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n + \Delta t\,\phi_t + \frac{1}{2}\Delta t^2 \phi_{tt} + O(\Delta t^3)$$

$$\phi_{i+1}^n = \phi_i^n + \Delta x\,\phi_x + \frac{1}{2}\Delta x^2 \phi_{xx} + O(\Delta x^3)$$

$$P_{\Delta t,\Delta x}\phi_i^n = \phi_t + a\phi_x + \frac{1}{2}\Delta t\,\phi_{tt} + \frac{1}{2}a\Delta x\,\phi_{xx} + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$$

$$P\phi - P_{\Delta t,\Delta x}\phi_i^n = -\frac{1}{2}\Delta t\,\phi_{tt} - \frac{1}{2}a\Delta x\,\phi_{xx} + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

$\to 0$ když $(\Delta t, \Delta x) \to 0$

schema je konzistentní $\forall a$

- centrální $\dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\,\dfrac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$

konzistentní $\forall a$

# Stabilita

**Def.:** Dif. schema $P_{\Delta t, \Delta x}\, u_i^n = 0$ pro PDR 1. řádu je STABILNÍ v oboru stability $S$ $\Leftrightarrow$

$$\exists \underset{J \ll n}{J} \in N_0,\ \forall T>0,\ \exists C_T \in R$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_i^n|^2 \le C_T \sum_{n=0}^{J} \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_i^n|^2$$

pro $0 \le n\Delta t \le T$ a $(\Delta t, \Delta x) \in S$

Pozn.:
- lze používat k určení stability – nepraktické
- praktická metoda – založená na Fourierově ~~trans~~forma

# Podmíněnost

**Def.:** Počáteční problém pro PDR 1. řádu $Pu = 0$ je DOBŘE PODMÍNĚNÝ $\Leftrightarrow$

$\forall T > 0$ $\exists C_T$ $\forall$ řešení $u(t,x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t,x)|^2 dx \le C_T \int_{-\infty}^{\infty} |u(0,x)|^2 dx$$

pro $0 \le t \le T$

# Lax-Richtmyerova věta

**Věta:** Diferenční schema konzistentní s PDR, pro kterou je počáteční problém dobře podmíněný, je konvergentní $\Leftrightarrow$ je stabilní

# Courant-Friedrichs-Lewy podmínka CFL

Věta: PDR $u_t + a u_x = 0$, explicitní dif. schema $u_i^{n+1} = \alpha u_{i-1}^n + \beta u_i^n + \gamma u_{i+1}^n$

s $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ konstantním

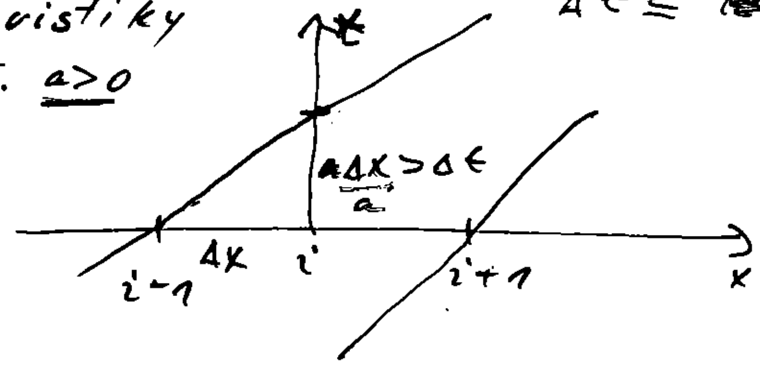
nutná podmínka stability (CFL)

$$|a\lambda| \le 1 \qquad |a|\frac{\Delta t}{\Delta x} \le 1$$

Pro systém $U_t + A U_x = 0$ je CFL podmínka

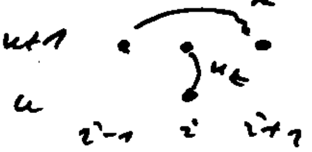
$$|a_i \lambda| \le 1 \quad \forall a_i,\ a_i \text{ je vlastní číslo } A$$

- postačující podmínka může být úplně jiná
- omezení časového kroku $\Delta t \le \frac{\Delta x}{|a|}$ $\qquad \Delta t \le \frac{\Delta x \cdot C}{|a|}$ CFL číslo
- charakteristiky
  např. $a>0$




Věta: Neexistuje explicitní, bezpodmínečně stabilní, konzistentní diferenční schema pro systém hyperbolických PDR.

Př: implicitní schema $u_t + a u_x = 0$




$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} + a\,\frac{u_{i+1}^{n+1}-u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \quad , i = 1,\dots,J$$

+ okrajové podmínky

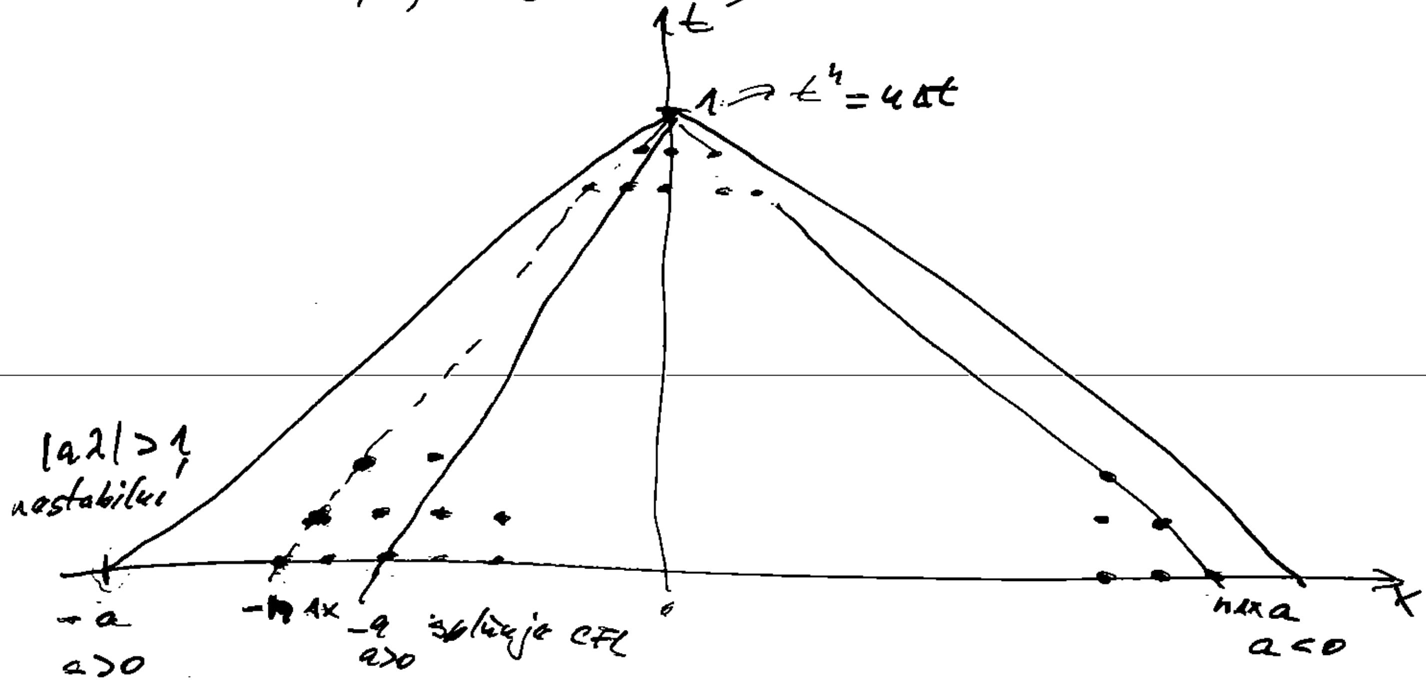
$u_0 = u_1$

$u_{J+1} = u_J$

PDR: $u_t + a u_x = 0$

PP: $u(0,x) = u_0(x)$ $\qquad (x,t) = (0,1)$

Řešení: $u(t,x) = u_0(x - at) =$ $\qquad u(1,0) = u_0(-a)$




CFL podmínka $\qquad |a\lambda| \le 1 \qquad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$

předp. $\qquad |a\lambda| > 1 \qquad u_i^{n+1} = \alpha u_{i-1}^n + \beta u_i^n + \gamma u_{i+1}^n$

$|a|\Delta t > \Delta x \quad / \cdot n \qquad t^n = 1 = n\Delta t$

$|a| n\Delta t > n\Delta x \qquad n = \frac{1}{\Delta t}$

$|a| > n\Delta x$

$|a| > \frac{\Delta x}{\Delta t}$

$|a| \frac{\Delta t}{\Delta x} > 1$

$|a|\lambda > 1 \Rightarrow$ nestabilní

# Fourierova analýza

- Fourierova transformace, $u(x), x \in R$

$$\hat{u}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} u(x)\, dx \quad , \omega \in R$$

- inverzní Fourierova transformace

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \hat{u}(\omega)\, d\omega \quad , x \in R$$

- na diskrétním oboru $\Delta x Z = \{\Delta x m, m \in Z\}$
- síťová funkce $v_m \approx u(\Delta x m)$
- Fourierova transformace

$$\hat{v}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\xi\Delta x} v_m \Delta x, \quad \xi \in \cancel{(-\pi, \pi)} \; (-\pi/\Delta x, \pi/\Delta x)$$

$$\hat{v}(-\pi/\Delta x) = \hat{v}(\pi/\Delta x)$$

- inverzní Fourierova transformace

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} e^{im\xi\Delta x} \hat{v}(\xi)\, d\xi \quad , m \in Z$$

– složení vln

- $L^2$ norma

$$\|u\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^2 dx} \quad , \|v_m\| = \sqrt{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |v_m|^2 \ldots}$$

- Parsevalova rovnost

$$\|u\|_2 = \|\hat{u}\|_2$$

- v diskrétním tvaru

$$\|\hat{v}\|^2_{\Delta x} = \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m|^2 \Delta x = \|v_m\|^2_{\Delta x}$$

# Fourierova analýza a PDR

- derivace inverzní F.T.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} i\omega\, \hat{u}(\omega)\,d\omega$$

čili

$$\widehat{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}(\omega) = i\omega\,\hat{u}(\omega)$$

- derivace $\longrightarrow$ násobení
  DR $\longrightarrow$ algebraická rovnice

- Při $u_t + a u_x = 0$ , $u(0,x) = u_0(x)$
  Fourierova transformace v $x$

$$\hat{u}_t = -ia\omega\hat{u}$$

je ODR pro $\hat{u}$ s řešením

$$\hat{u}(t,\omega) = e^{-ia\omega t}\hat{u}_0(\omega)$$

- s použitím Parsevalovy rovnosti

$$\|u\|^2 = \|\hat{u}\|^2 = \|e^{-ia\omega t}\hat{u}_0\|^2 =$$

$$= \|\hat{u}_0\|^2 = \|u_0\|^2$$

- čili PDR je dobře podmíněná

# Von Neumannova analýza (Fourierova)

- dif. schema $\quad u_t + a u_x = 0$

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + a \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$v_j^{n+1} = (1 - a\lambda) v_j^n + a\lambda v_{j-1}^n \quad , \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$|a|\lambda \leq 1$ CFL podm.

- ~~Fourierova inverzní transf. $v_j$~~

$$v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} e^{i j \Delta x \xi} \hat{v}^n(\xi) \, d\xi$$

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} e^{i j \Delta x \xi} \left[ (1 - a\lambda) + a\lambda e^{-i \Delta x \xi} \right] \hat{v}^n(\xi) \, d\xi$$

- čili

$$\hat{v}^{n+1}(\xi) = \left[ (1 - a\lambda) + a\lambda e^{-i \Delta x \xi} \right] \hat{v}^n(\xi)$$

$$= g(\Delta x \xi) \, \hat{v}^n(\xi)$$

- zesilující faktor

$$g(\Delta x \xi) = (1 - a\lambda) + a\lambda e^{-i \Delta x \xi}$$

- z počáteční podmínky

$$\hat{v}^{n}(\xi) = g(\Delta x \xi)^n \, \hat{v}^0(\xi)$$

- z Parsevalovy rovnosti

$$\| v^n \|_2^2 = \| \hat{v}^n \|_2^2 = \| g(\Delta x \xi)^n \hat{v}^0 \|_2^2 =$$

$$= \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} | g(\Delta x \xi) |^{2n} | \hat{v}^0(\xi) |^2 d\xi \overset{?}{\leq} C_T \| \hat{v}^0 \| = C_T \| v^0 \|$$

- $\| v^n \|^2$ musí být omezené aby bylo schema stabilní

$\Longrightarrow | g(\Delta x \xi) |^2$ musí být omezené $(\leq 1 \quad )$

**Věta:** (von Neumann)

Jednokrokové diferenční schema (s konst. koeficienty) je stabilní $\iff$

může záviset na $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$

$$\exists K \text{ (nezávislé na } \theta, \Delta t, \Delta x) \ \exists \Delta t_0 > 0, \Delta x_0 > 0$$

$$|g(\theta, \Delta t, \Delta x)| \le 1 + K \Delta t, \quad \theta = \Delta x \xi$$

$$\forall \theta, \ 0 < \Delta t \le \Delta t_0, \ 0 < \Delta x \le \Delta x_0$$

Pokud $g(\theta, \Delta t, \Delta x)$ nezávisí na $\Delta t$ a $\Delta x$ je podmínkou stability

$$\forall \theta \quad |g(\theta)| \le 1.$$

- standardní postup

$$v_j^n \to g^n e^{ij\theta} \hat{v}^0$$

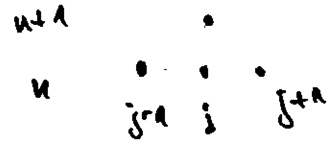
~liska/vyuka/ds/analysis/stab.mws

$$v_{j+k}^{n+m} \to g^m e^{ik\theta^{\xi \Delta x}} \left( g^n e^{ij\theta} \right)$$

# STABILITA

## Proměnné koeficienty

$$u_t + a(t,x)\, u_x = 0$$




- Lax - Friedrichsovo schema

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right) - \frac{1}{2} a(t^n, x_j)\, \lambda \left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right)$$

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

- schema se vyšetřuje lokálně - v bodě $(t^n, x_j)$
  - metoda zamrzlých koeficientů
  - podmínka stability $|a(t^n, x_j)|\lambda \le 1 \quad \forall n\ \forall j$

## Vícekrokové schema

- dosazení m

$$v_{j+k}^{n+m} \longrightarrow g^m e^{ik\theta} \qquad \theta = \Delta x \xi$$

- dostaneme charakteristický polynom dif. schematu

$$P(g, \theta, \Delta t, \Delta x)$$

  a vyšetřujeme jeho kořeny $g_\ell(\theta, \Delta t, \Delta x)$

  (může záviset na $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$)

- pokud $P(g, \theta, \Delta t, \Delta x)$ nezávisí na $\Delta t, \Delta x$ potom schema je stabilní $\Leftrightarrow$

  a) $|g_\ell(\theta)| \le 1 \quad \forall \ell \quad \forall \theta$

  b) $|g_\ell(\theta)| = 1 \Rightarrow g_\ell(\theta)$ je jednoduchý kořen $\forall \theta$

- obecně $g_\ell(\theta, \Delta t, \Delta x)$

  schema je stabilní $\Leftrightarrow$

  a) $\exists K \quad |g_\ell(\theta)| \le 1 + K\Delta t \quad \forall \ell\ \forall \theta$

  b) $\exists\ c_1 > 0 \qquad 1 \le |g_\ell| \le 1 + K\Delta t \Rightarrow$

  $g_\ell$ je jednoduchý kořen a

  $|g_\ell - g_m| \ge c_1 \quad \forall m \ne \ell\ \forall \theta$

- Příklad: $\dfrac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + a\,\dfrac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$ Leap frog

STABILITA

Jednokrokové schema pro systém

$$\sum_k \mathbb{A}_k \vec{u}_{j+k}^{n+1} = \sum_k \mathbb{B}_k \vec{u}_{j+k}^{n}$$

$\Theta = \Delta x \, \xi$

- dosadíme

$$\vec{u}_{j+k}^{n+m} \to \hat{\vec{u}}^{n+m} e^{ik\Theta}$$

$\mathbb{A}(\theta) = \sum_k \mathbb{A}_k e^{ik\theta}$

$$\mathbb{A}(\theta)\hat{\vec{u}}^{n+1} = \mathbb{B}(\theta)\,\hat{\vec{u}}^{n}$$

$$\hat{\vec{u}}^{n+1} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}\,\hat{\vec{u}}^{n}$$

- matice přechodu (zesilující)

$$\mathbb{G} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$$

- podmínka stability

$\|\mathbb{G}(\theta)\| \le 1$ pokud nezávisí na $\Delta t, \Delta x$ $\forall \theta$

$\|\mathbb{G}(\theta, \Delta t, \Delta x)\| \le 1 + K\Delta t$ obecná podmínka $\forall \theta$

- vyšetřují se vlastní čísla matice $\mathbb{G}$ $g_e(\theta)$

$|g_e(\theta)| \le 1 \quad \forall \theta \; \forall_e$

$|g_e(\theta)| \le 1 + K\Delta t \quad \forall \theta \; \forall_e$

# Stabilita systému dif. schémat

• systém PDR

$$u_t - a v_x = 0 \qquad \vec{U} = (u, v)$$
$$v_t - a u_x = 0$$

$$u_{tt} - a v_{xt} = u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$
$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

---

• LF schéma $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} + \frac{a\lambda}{2}\left(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n\right)$$
$$v_j^{n+1} = \frac{v_{j+1}^n + v_{j-1}^n}{2} + \frac{a\lambda}{2}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right)$$

• Fourierova analýza

$$\hat{u}^{n+1} = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\hat{u}^n + \frac{a\lambda}{2}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\hat{v}^n$$
$$\hat{v}^{n+1} = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\hat{v}^n + \frac{a\lambda}{2}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\hat{u}^n$$

$$\hat{u}^{n+1} = \cos\theta\, \hat{u}^n + i a\lambda \sin\theta\, \hat{v}^n \qquad \hat{U}^n = (\hat{u}^n, \hat{v}^n) \; \begin{pmatrix}\hat{u}^n \\ \hat{v}^n\end{pmatrix}$$
$$\hat{v}^{n+1} = \cos\theta\, \hat{v}^n + i a\lambda \sin\theta\, \hat{u}^n$$

$$\hat{U}^{n+1} = \mathbb{B}\, \hat{U}^n$$

$$\mathbb{G} = \mathbb{B} = \begin{pmatrix} \cos\theta, & i a\lambda \sin\theta \\ i a\lambda \sin\theta, & \cos\theta \end{pmatrix}$$

• vl. čísla matice $\mathbb{G}$ symetrická ⇒ vl. čísla

$$g_{1,2} = \cos\theta \pm i a\lambda \sin\theta$$
$$|g_{1,2}|^2 = \cos^2\theta + a^2\lambda^2 \sin^2\theta =$$
$$= 1 + \sin^2\theta\left(a^2\lambda^2 - 1\right) \le 1$$
$$a^2\lambda^2 \le 1$$
$$|a|\lambda \le 1$$

# Řád přesnosti

- diferenční náhrada $u_x$

$$\frac{u_{j+1}-u_j}{\Delta x} = u_x + O(\Delta x) \qquad \text{v bodě } j \qquad O(\Delta x^2) \text{ v bodě } j+1/2$$

$$\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2\Delta x} = u_x + O(\Delta x^2)$$

1D Taylor

~liska/vyuka/ds/analysis/rad.mws

- diferenční schema

$$u_t + a u_x = 0$$

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \qquad \text{centrální}$$

2D Taylor

$$u_t + a u_x + O(\Delta t) + O(\Delta x^2) \qquad \text{v bodě } (n, j)$$

~liska/vyuka/ds/analysis/rad2.mws

dopředné

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0$$

$$u_t + a u_x + O(\Delta t) + O(\Delta x)$$

Lax - Friedrichs

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

collect(simplify(d1));

$$u_t + a u_x + \frac{\Delta t\, u_{tt}}{2} + \frac{1}{6} a \Delta x^2 u_{xxx} - \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{\Delta t} u_{xx} + \dots$$

$$\frac{\Delta x^2}{c \cdot \Delta x} = \Delta x$$