Parabolické rovnice

- rovnice vedení tepla $u_t = bu_{xx}$ s počáteční podmínkou $u(0,x) = u_0(x)$; počáteční problém je dobřepodmíněný pro $b > 0$

- Fourierova transformace v x

$$\begin{aligned} u &= \hat{u}e^{i\omega x} \\ \hat{u}_t &= -b\omega^2\hat{u} \\ \hat{u} &= Ce^{\lambda t} \\ \lambda &= -b\omega^2 \\ \hat{u}(t,\omega) &= e^{-b\omega^2 t}\hat{u}_0(\omega) \end{aligned}$$

- inverzní Fourierova transformace

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}e^{-b\omega^2 t}\hat{u}_0(\omega)d\,\omega \\ \hat{u}_0(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}u_0(x)d\,x \\ u(t,x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}e^{-b\omega^2 t}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega y}u_0(x)d\,y\right)d\,\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x-y)}e^{-b\omega^2 t}d\,\omega\right)u_0(y)d\,y \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi bt}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4bt)}u_0(y)d\,y \end{aligned}$$

- vážený průměr u_0

- pro malé t je váhou velmi úzký pík okolo $y = x$; pro větší t je váhová funkce mnohem širší
- $u \in C^{\infty}_{t,x}$ – nekonečně diferencovatelné
- positivita řešení – $u_0(x) \geq 0 \wedge \exists y, u_0(y) \neq 0 \Longrightarrow u(t,x) > 0, t > 0$
- pro

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x < 0 \\ 0 & \text{pro} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

je řešením v čase $t = \frac{1}{4b}$

$$\begin{aligned} u(1/(4b), x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-(x-y)^2} d\, y \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-z^2} d\, z = \frac{1 - erf(x)}{2} \end{aligned}$$

pro libovolně velké x je $u(1/(4b), x) > 0$

Explicitní schema pro rovnici vedení tepla

- rovnice vedení tepla $u_t = bu_{xx}$
- explicitní schema

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = b\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

- **Úloha:** určete řád přesnosti a podmínku stability tohoto schematu; implementujte toto schema

Implicitní schema pro rovnici vedení tepla

- rovnice vedení tepla $u_t = bu_{xx}$
- implicitní schema

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = b\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

- **Úloha:** určete řád přesnosti a podmínku stability tohoto schematu; implementujte toto schema
- systém s přirozenými okrajovými podmínkami $u_x = 0$

$$\begin{aligned} u_1^{n+1} - u_2^{n+1} &= 0 \\ -u_{j-1}^{n+1} b\mu + u_j^{n+1}(1 + 2b\mu) - u_{j+1}^{n+1} b\mu &= u_j^n, \quad j = 2, \cdots, J-1 \\ -u_{J-1}^{n+1} + u_J^{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

kde $\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

- v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -b\mu & 1+2b\mu & -b\mu & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -b\mu & 1+2b\mu & -b\mu & 0 & 0 & \\ & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b\mu & 1+2b\mu & -b\mu \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \vdots \\ u_{J-1}^{n+1} \\ u_J^{n+1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ u_2^n \\ u_3^n \\ \vdots \\ u_{J-1}^n \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M \cdot U^{n+1} &= UU^n \\ U^{n+1} &= M^{-1} \cdot UU^n \end{aligned}$$

Schema Crank-Nicolsonové

- rovnice vedení tepla $u_t = bu_{xx}$
- implicitní schema

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = b\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x^2} + b\frac{u_{j+1}^{n} - 2u_j^{n} + u_{j-1}^{n}}{2\Delta x^2}$$

- **Úloha:** určete řád přesnosti a podmínku stability tohoto schematu; implementujte toto schema
- **Úloha:** řešte na intervalu $x \in (-1, 1)$ rovnici vedení tepla $u_t = u_{xx}$ s Neumannovými okrajovými podmínkami $u_x = 0$ a počáteční podmínkou

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x < 0 \\ 0 & \text{pro} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

  k jakému stacionárnímu řešení se její řešení blíží s rostoucím časem?

- **Úloha:** řešte na intervalu $x \in (-1, 1)$ rovnici vedení tepla $u_t = u_{xx}$ s Dirichletovými okrajovými podmínkami $u(t, -1) = 1, u(t, 1) = 0$ a počáteční podmínkou

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x < 0 \\ 0 & \text{pro} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

  k jakému stacionárnímu řešení se její řešení blíží s rostoucím časem?

- **Úloha:** řešte na intervalu $x \in (-1, 1)$ rovnici vedení tepla $u_t = u_{xx}$ s Dirichletovými okrajovými podmínkami $u(t, -1) = 1, u(t, 1) = 1$ a počáteční podmínkou $u_0(x) = 2$; ochlazování tyče
- **Úloha:** řešte na intervalu $x \in (-1, 1)$ rovnici vedení tepla se zdrojem $u_t = u_{xx} + 2$ s Dirichletovými okrajovými podmínkami $u(t, -1) = 1, u(t, 1) = 1$ a počáteční podmínkou $u_0(x) = 1$ k jakému stacionárnímu řešení se její řešení blíží s rostoucím časem?

Disipativita

- **Definice:** schema je disipativní řádu $2r (r > 0, r \in N)$ pokud existuje kladná konstanta c, nezávislá na Δx a Δt, taková, že

$$|g(\Theta)| \leq 1 - c \sin^{2r}(\Theta/2)$$

- lze přepsat

$$|g(\Theta)|^2 \leq 1 - c' \sin^{2r}(\Theta/2)$$

- $\Theta = \xi \Delta x$ kde Fourierovská proměnná $\xi \in (-\pi/\Delta x, \pi/\Delta x)$ čili $\Theta \in (-\pi, \pi)$ a největší frekvence jsou pro $|\Theta| = \pi$

- **Úloha:** analyzujte disipativitu schematu Crank-Nicolsonové pro rovnici vedení tepla

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = b \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x^2} + b \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2\Delta x^2}$$

a implicitního schematu

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = b \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

Schema Leap-Frog

- rovnice vedení tepla $u_t = bu_{xx}$
- schema

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = b\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

- **Úloha:** určete řád přesnosti a podmínku stability tohoto schematu

Schema Du Fort-Frankel

- rovnice vedení tepla $u_t = bu_{xx}$
- schema

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = b\frac{u_{j+1}^n - u_j^{n-1} - u_j^{n+1} + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

- **Úloha:** určete řád přesnosti a charakteristický polynom tohoto schematu
- řád přesnosti $O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta t^2/\Delta x^2)$; pro konstantní $\lambda = \Delta t/\Delta x$ není konzistentní; pro konstantní $\mu = \Delta t/\Delta x^2$ je 2. řádu přesnosti $O(\Delta x^2)$
- charakteristický polynom schematu

$$(1 + 2b\mu)g^2 - 4b\mu \cos \Theta g - (1 - 2b\mu) = 0$$

- kořeny

$$g_{1,2} = \frac{2b\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - 4b^2\mu^2\sin^2\Theta}}{1 + 2b\mu}$$

2 případy

$-\ D = 1 - 4b^2\mu^2\sin^2\Theta \geq 0$

$$|g_{1,2}| \leq \frac{2b\mu|\cos\Theta| + \sqrt{1 - 4b^2\mu^2\sin^2\Theta}}{1 + 2b\mu} \leq \frac{2b\mu + 1}{1 + 2b\mu} = 1$$

$-\ D = 1 - 4b^2\mu^2\sin^2\Theta \leq 0$

$$g_{1,2} = \frac{2b\mu\cos\Theta \pm i\sqrt{4b^2\mu^2\sin^2\Theta - 1}}{1 + 2b\mu}$$

$$\begin{aligned} |g_{1,2}|^2 &= \frac{4b^2\mu^2\cos^2\Theta + 4b^2\mu^2\sin^2\Theta - 1}{(1 + 2b\mu)^2} \\ &= \frac{4b^2\mu^2 - 1}{4b^2\mu^2 + 2b\mu + 1} < 1 \end{aligned}$$

čili je schema bezpodmínečně stabilní

Advekčně difuzní rovnice

- kombinace advekční rovnice s rovnicí vedení tepla

$$u_t + a u_x = b u_{xx}$$

je dobře podmíněná pro $b \geq 0$

- transformace proměnných $y = x - at$; soustava pohybující se rychlostí a

$$\begin{aligned} w(t,y) &= u(t, y+at) \\ w_t &= u_t + a u_x = b u_{xx} \\ w_y &= u_x, \quad w_{yy} = u_{xx} \\ w_t &= b w_{yy} \end{aligned}$$

jelikož $u(t,x) = w(t, x-at)$, tak řešení advekčně difuzní rovnice se pohybuje rychlostí a a v pohybující se soustavě je řešením rovnice vedení tepla

- explicitní diferenční schema

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = b\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

- **Úloha:** určete řád přesnosti , modifikovanou rovnici a podmínku stability tohoto schematu; implementujte toto schema

- stabilní pro $\mu \leq 1/2 \wedge \lambda^2 \leq 2\mu$, kde $\lambda = a\Delta t/dx, \mu = b\Delta t/\Delta x^2$; z podmínky stability plyne omezení na časový krok ($b > 0$)

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2b} \wedge \Delta t \leq \frac{2b}{a^2}$$

časový krok počítáme

$$\Delta t = C \min\left(\frac{\Delta x^2}{2b}, \frac{2b}{a^2}\right)$$

Implicitní schema pro advekčně difuzní rovnici

- implicitní schema

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = b\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

- **Úloha:** určete řád přesnosti, modifikovanou rovnici a podmínku stability tohoto schematu; implementujte toto schema