Eliptické rovnice

- Laplaceova rovnice pro $u(x, y)$ na oblasti Ω

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

- Laplaceův operátor

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \mathrm{div}\ \mathrm{grad}$$

- Poissonova rovnice

$$\nabla^2 u = f(x, y)$$

- okrajové podmínky na hranici $\partial\Omega$
  - Dirichletova

  $$u = b_1(x, y)$$

  - Neumannova

  $$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = b_2(x, y)$$

  - Robinova

  $$au + c\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = b_3(x, y)$$

- řešení Poissonovy rovnice – stacionární rozložení teploty
  - $f(x, y)$ – zdroje tepla, ochlazení
  - Dirichletova okrajová podmínka – daná teplota na hranici
  - Neumannova o.p. $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$ – ideální izolace

– Neumannova o.p. $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = b_2$ – zadaný tok tepla na hranici

- Poissonova rovnice s Neumannovou okrajovou podmínkou

$$\nabla^2 u = f(x,y) \;\text{ na }\; \Omega. \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = b_2 \;\text{ na }\; \partial\Omega$$

podmínka integrability

$$\int\int_\Omega f = \int_{\partial\Omega} b_2$$

odvození

$$\begin{aligned}\int\int_\Omega f &= \int\int_\Omega \nabla^2 u = \int\int_\Omega \mathrm{div\ grad\ u} \\ &= \int_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot \mathrm{grad\ u} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \vec{\mathrm{n}}} = \int_{\partial\Omega} \mathrm{b}_2\end{aligned}$$

- **Definice:** rovnice

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y,u,u_x,u_y) = f(x,y)$$

je eliptická právě když $a > 0, c > 0, b^2 < ac$

- příklad eliptické rovnice vyššího řádu – biharmonická rovnice

$$\nabla^4 u = u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = f(x,y)$$

- **Věta:** princip maxima – mějme eliptický operátor $Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}, a > 0, c > 0, b^2 < ac$; pokud pro u platí $Lu \geq 0$ na oblasti Ω, potom u má maximum na hranici $\partial\Omega$

Diferenční schema pro Poissonou rovnici

- Poissonova rovnice $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$ a Dirichletovými okrajovými podmínkami $u_{\partial\Omega} = b(x, y)$ na čtverci $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$
- ortogonální síť $N \times N$ s konstantním krokem $\Delta x = \Delta y = 2/(N-1)$
- schema na 5 bodech

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\Delta y^2} = f_{i,j}$$

- přepíšeme pro $i = 2, \cdots, N-1, j = 2, \cdots, N-1$

$$u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} = f_{i,j}\Delta x^2$$

- Dirichletovy okrajové podmínky pro

$$u_{1,j} = b_{1,j}, u_{N,j} = b_{N,j}, \quad j = 1, \cdots, N$$

$$u_{i,1} = b_{i,1}, u_{i,N} = b_{i,N}, \quad i = 1, \cdots, N$$

- systém $(N-2)^2$ lineárních rovnic pro $(N-2)^2$ proměnných
- iterační metody – počáteční odhad $u^0_{i,j} = 0, i = 2, \cdots, N-1, j = 2, \cdots, N-1$
- Jakobiho iterační metoda

$$u^{k+1}_{i,j} = \frac{1}{4}(u^k_{i-1,j} + u^k_{i+1,j} + u^k_{i,j-1} + u^k_{i,j+1} - f_{i,j}\Delta x^2)$$

- řešíme systém $A \cdot u = b$ s maticí A rozměru $(N-2)^2 \times (N-2)^2$
- reziduum iteračního řešení $r^k = A \cdot u^k - b$, maximová norma rezidua $R^k = \max(|r^k|)$
- pro náš případ

$$R^k = \max_{i,j}(|u^k_{i-1,j} + u^k_{i+1,j} + u^k_{i,j-1} + u^k_{i,j+1} - 4u^k_{i,j} - f_{i,j}\Delta x^2|)$$

- iterace zastavíme když $R^k < \epsilon$
- volíme řešení $u = x^4 + y^4$ na oblasti $\Omega = (-1,1) \times (-1,1)$
- **Úloha:** řešte Poissonovu rovnici $u_{xx} + u_{yy} = 12(x^2 + y^2)$ s Dirichletovými okrajovými podmínkami $u(\pm 1, y) = 1 + y^4, u(x, \pm 1) = 1 + x^4$;
  vzorový program http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/ds/poison.m;
  vyzkoušejte konvergenci řešení
- vyzkoušejte také pro řešení $u = x^2 + y^2$ a $u = \sin(x^2 + y^2)$
- řešíme schema

$$u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} = f_{i,j}\Delta x^2$$

- Gauss-Seidelova iterační metoda

$$u^{k+1}_{i,j} = \frac{1}{4}(u^{k+1}_{i-1,j} + u^k_{i+1,j} + u^{k+1}_{i,j-1} + u^k_{i,j+1} - f_{i,j}\Delta x^2)$$

  při přirozeném pořadí cyklů již známe $u^{k+1}_{i-1,j}, u^{k+1}_{i,j-1}$ a použijeme je

- superrelaxační metoda SOR

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^{k} + \omega\Big[\quad \frac{1}{4}(u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^{k} + u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k} \\ -f_{i,j}\Delta x^2) - u_{i,j}^{k}\Big]$$

  optimální volba $\omega \in (1,2)$

$$\omega = \frac{2}{1 + C\Delta x}$$

  konstanta C se určí experimentálně na hrubé síťce

- pro $\omega = 1$ je superrelaxační metoda metodou Gauss-Seidela

Metoda konjugovaných gradientů

- řešení lineárního systému $A \cdot x = b$, kde matice A je symetrická a positivně definitní matice $m \times m$
- inicializace – x^0 je počáteční odhad řešení ($x^0 = 0$)

$$\begin{aligned} r^0 &= b - A \cdot x^0 \\ q^0 &= A \cdot r^0 \\ p^0 &= r^0 \end{aligned}$$

- iterační krok

$$\begin{aligned} \alpha^k &= \frac{|r^k|^2}{(p^k, q^k)} \\ x^{k+1} &= x^k + \alpha^k p^k \\ r^{k+1} &= r^k - \alpha^k q^k \\ \beta^k &= \frac{|r^{k+1}|^2}{|r^k|^2} \\ p^{k+1} &= r^{k+1} + \beta^k p^k \\ q^{k+1} &= A \cdot r^{k+1} + \beta^k q^k \end{aligned}$$

  kde skalární součin a norma jsou dány

$$(p^k, q^k) = \sum_{i=1}^{m} p_i^k q_i^k, \quad |r^k|^2 = (r^k, r^k)$$

- vzorový program http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/ds/poison_cg.m; porovnejte počty iteračních kroků jednotlivých metod při konvergenci řešení

- předpodmínění konjugovaných gradientů jiným řešičem
- existují metody LU dekompozice pro řídké matice, L a U matice jsou také řídké

Další schemata pro Poissonovu rovnici

- Poissonova rovnice $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$
- pětibodové schema

  $$(\delta_x^2 + \delta_y^2)u_{i,j} = f_{i,j}$$

  kde

  $$\delta_x^2 u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

  $$\delta_y^2 u_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

- devítibodové schema pro $\Delta y = \Delta x$

  $$(\delta_x^2 + \delta_y^2 + \frac{1}{6}\Delta x^2 \delta_x^2 \delta_y^2)u_{i,j} = f_{i,j}$$

  po rozepsání

  $$\begin{aligned} \frac{2}{3}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) + \\ \frac{1}{6}(u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i+,j+1}) \\ -\frac{10}{3}u_{i,j} &= f_{i,j}\Delta x^2 \end{aligned}$$

- pětibodové i toto devítibodové schema jsou druhého řádu přesnosti $O(\Delta x^2)$

- modifikované devítíbodové schema

$$(\delta_x^2 + \delta_y^2 + \frac{1}{6}\Delta x^2 \delta_x^2 \delta_y^2) u_{i,j} = (1 + \frac{1}{12}\Delta x^2 (\delta_x^2 + \delta_y^2)) f_{i,j}$$

  má čtvrtý řád přesnosti $O(\Delta x^4)$

  levá strana po rozepsání

$$\cdots = \frac{1}{12}\Delta x^2 (f_{i+1,k} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} + 8 f_{i,j})$$