Rovnice vedení tepla ve 2D

- parabolická rovnice vedení tepla ve 2D

$$u_t - b(u_{xx} + u_{yy}) = f$$

  je dobře podmíněná pro $b > 0$

- explicitní schema

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{\Delta t} - b(\delta_x^2 + \delta_y^2)u_{ij}^n = f_{ij}$$

  je stabilní pro $\Delta t \approx \Delta x^2$ při $\Delta y = \Delta x$

- implicitní schema

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{\Delta t} - b(\delta_x^2 + \delta_y^2)u_{ij}^{n+1} = f_{ij}$$

  je stabilní vždy a dovoluje volit $\Delta t \approx \Delta x$; matice systému

$$u_{ij}^{n+1} + b\Delta t(\delta_x^2 + \delta_y^2)u_{ij}^{n+1} = \Delta t f_{ij} + u_{ij}^n$$

  je symetrická a pozitivně definitní, tj. můžeme použit metodu konjugovaných gradientů

- metoda střídavých směrů ADI (Altered Direction Implicit); první půlkrok

$$\frac{u_{ij}^{n+1/2} - u_{ij}^n}{\Delta t/2} - b\delta_x^2 u_{ij}^{n+1/2} - b\delta_y^2 u_{ij}^n = f_{ij},$$

druhý půlkrok

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n+1/2}}{\Delta t/2} - b\delta_x^2 u_{ij}^{n+1/2} - b\delta_y^2 u_{ij}^{n+1} = f_{ij},$$

v každém půlkroku řeším N tridiagonálních systémů s maticí $N \times N$; metoda je bezpodmínečně stabilní

Advekční rovnice ve 2D

- advekční rovnice ve 2D pro $u(t,x,y)$

$$u_t + au_x + bu_y = 0$$

  s počáteční podmínkou $u(0,x,y) = u^0(x,y)$

- analytické řešení

$$u(t,x,y) = u_0(x - at, y - bt)$$

  ověření

$$-au_x^0 - bu_y^0 + au_x^0 + bu_y^0 = 0$$

Metoda rozkladu

- dimenzionální rozklad (splitting), rozložíme $u_t + au_x + bu_y = 0$ na 2 rovnice

$$u_t + au_x = 0$$
$$u_t + bu_y = 0$$

- diskretizace $u_{ij}^n \approx u(n\Delta t, i\Delta x, j\Delta y)$
- jeden časový krok z vrstvy n na vrstvu $n+1$, čili znám u_{ij}^n
  - $\forall j$ řeším $u_t + au_x = 0$ 1D diferenčním schematem D_x, vycházím z u_{ij}^n a dostanu $\tilde{u}_{ij}^{n+1} = D_x u_{ij}^n$

– $\forall i$ řeším $u_t + bu_y = 0$ 1D diferenčním schematem D_y, vycházím z $\tilde{u}_{ij}^{n+1}$ a dostanu $u_{ij}^{n+1} = D_y \tilde{u}_{ij}^{n+1}$

- základní metoda $u_{ij}^{n+1} = D_y^{\Delta t} D_x^{\Delta t} u_{ij}^n$ je pouze 1. řádu přesnosti
- symetrizace – Strangův rozklad (splitting)

$$u_{ij}^{n+1} = D_x^{\Delta t/2} D_y^{\Delta t} D_x^{\Delta t/2} u_{ij}^n$$

je 2. řádu přesnosti; lze přepsat

$$u_{ij}^{n+k} = D_x^{\Delta t/2} D_y^{\Delta t} D_x^{\Delta t} D_y^{\Delta t} \cdots D_y^{\Delta t} D_x^{\Delta t/2} u_{ij}^n$$

- symetrizace

$$u_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2}(D_y^{\Delta t} D_x^{\Delta t} + D_x^{\Delta t} D_y^{\Delta t}) u_{ij}^n$$

je také 2. řádu přesnosti, ale je výpočetně náročnější

- stabilita je dána stabilitou 1D schemat, např. optimální stabilita pro $|a|\Delta t/\Delta x \leq 1, |b|\Delta t/\Delta y \leq 1$ dává podmínku na časový krok $\Delta t \leq \max(\Delta x/|a|, \Delta y/|b|)$

2D metody bez rozkladu

- advekční rovnice ve 2D

$$u_t + au_x + bu_y = 0$$

- centrální schema

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + a\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + b\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} = 0$$

- řád přesnosti $O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2)$
- stabilita – dosazením

$$u_{i+l,j+k}^{n+m} \longrightarrow g^m e^{i\xi l} e^{i\eta k}$$

dostanu zesilující faktor $g(\xi, \eta)$ a von Neumannova podmínka stability je

$$\forall \xi, \forall \eta |g(\xi, \eta)| \leq 1,$$

když g nezávisí explicitně na $\Delta t, \Delta x, \Delta y$, ale může záviset na $\lambda = \Delta t/dx$ a $\mu = \Delta t/dx$

- centrální schema je bezpodmínečně nestabilní, viz vzorový program http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/ds/2D/stab2D-central.mws;
- zpětné schema pro $a > 0, b > 0$

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + a\frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} + b\frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta y} = 0$$

je stabilní v případě $a\Delta t/\Delta x = b\Delta t/\Delta y$ pro $a > 0, b > 0$ a $a\Delta t/\Delta x = b\Delta t/\Delta y \leq 1/2$, viz vzorový program http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/ds/2D/stab2D-zpetne.mws

- Lax-Friedrichsovo schema

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - (u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n)/4}{\Delta t} + a\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + b\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} = 0$$

  je stabilní v případě $|a|\Delta t/\Delta x = |b|\Delta t/\Delta y$ pro $|a|\Delta t/\Delta x = |b|\Delta t/\Delta y \leq 1/2$

- zobecněná CLF podmínka ve 2D je $|a|\Delta t/\Delta x \leq 1, |b|\Delta t/\Delta y \leq 1$

- schema stabilní při splnění CFL podmínky je optimálně stabilní

- vzorový program http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/ds/2D/pde.m

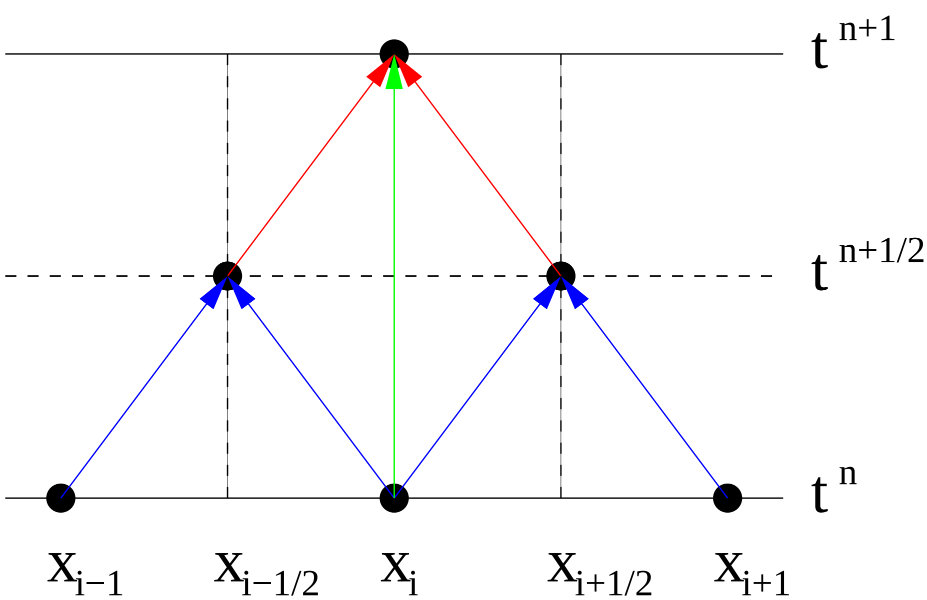
Dvoukrokové metody v 1D

- advekční rovnice v 1D $u_t + au_x = 0$
- primární síť $(t^n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x)$ s hodnotami u_j^n
- duální síť $(t^{n+1/2}, x_{j+1/2}) = (n\Delta t + \Delta t/2, j\Delta x + \Delta x/2)$ s hodnotami $u_{j+1/2}^{n+1/2}$
- prediktor počítá řešení na duální výpočetní síti

$$\frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - (u_{j+1}^n + u_j^n)/2}{\Delta t/2} + a\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0$$

- dvoukrokové Lax-Friedrichsovo schema je pak dáno korektorem, což je prediktor posunutý o $1/2$ v indexech n i j

$$\frac{u_j^{n+1} - (u_{j+1/2}^{n+1/2} + u_{j-1/2}^{n+1/2})/2}{\Delta t/2} + a\frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0$$



- z prediktoru a korektoru vyjádříme

$$\begin{aligned}
u_{j+1/2}^{n+1/2} &= \frac{u_{j+1}^n + u_j^n}{2} - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_j^n) \\
u_j^{n+1} &= \frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} + u_{j-1/2}^{n+1/2}}{2} - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2}) \\
u_j^{n+1} &= \frac{u_{j+1}^n + 2u_j^n + u_{j-1}^n}{4} - \frac{a\Delta t}{4\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \\
&\quad - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= u_j^n + \frac{\Delta x^2}{4}\,\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \\
&\quad - \frac{a\Delta t}{4\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \\
&\quad - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2})
\end{aligned}$$

- modifikovaná rovnice

$$u_t + au_x = \frac{\Delta x^2}{4\Delta t}(1 - a^2\Delta t^2/\Delta x^2)u_{xx}$$

  – difuzní schema

- standardní Lax-Friedrichsovo (LF) schema

$$\frac{u_j^{n+1} - (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)/2}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

  vyjádříme u_j^{n+1}

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{a\Delta t(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{2\Delta x} = 0$$

$$
\begin{aligned}
u_j^{n+1} \;=\; u_i^n + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \\
-\frac{a\Delta t(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{2\Delta x} = 0
\end{aligned}
$$

- modifikovaná rovnice

$$
u_t + f(u)_x = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}(1 - a^2\Delta t^2/\Delta x^2)u_{xx}
$$

– difuzní schema, více difuzní nežli dvoukrokové

- dvoukrokové Lax-Wendroffovo (LW) schema používá stejný prediktor jako LF schema a korektor

$$
\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0
$$

- z prediktoru vyjádříme

$$
u_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{u_{j+1}^n + u_j^n}{2} - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_j^n) = 0
$$

dosadíme do LW korektoru

$$
\begin{aligned}
\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{a}{2\Delta x}(u_{j+1}^n + u_j^n - u_j^n - u_{j-1}^n) \\
-\frac{a^2\Delta t}{\Delta x^2}(u_{j+1}^n - u_j^n - u_j^n + u_{j-1}^n) = 0
\end{aligned}
$$

a dostaneme

$$
\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{a^2\Delta t}{2}\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0
$$

což je LW pro advekční rovnici, viz základní schemata pro advekční rovnici

Dvoukroková schemata ve 2D

- advekční rovnice $u_t + au_x + bu_y = 0$
- prediktor

$$\frac{u^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2} - (u^n_{i,j} + u^n_{i+1,j} + u^n_{i,j} + u^n_{i+1,j+1})/4}{\Delta t/2}$$
$$+\frac{a}{2\Delta x}\left(u^n_{i+1,j} + u^n_{i+1,j+1} - u^n_{i,j} - u^n_{i,j+1}\right)$$
$$+\frac{b}{2\Delta y}\left(u^n_{i,j+1} + u^n_{i+1,j+1} - u^n_{i,j} - u^n_{i+1,j}\right) = 0$$

- LF korektor je prediktor posunutý o $1/2$ v indexech n, i, j
- LW korektor

$$\frac{u^{n+1}_{i,j} - u^n_{i,.j}}{\Delta t}$$
$$+\frac{a}{2\Delta x}\left(u^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2} + u^{n+1/2}_{i+1/2,j-1/2} - u^{n+1/2}_{i-1/2,j+1/2} - u^{n+1/2}_{i-1/2,j-1/2}\right)$$
$$+\frac{b}{2\Delta y}\left(u^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2} + u^{n+1/2}_{i-1/2,j+1/2} - u^{n+1/2}_{i+1/2,j-1/2} - u^{n+1/2}_{i-1/2,j-1/2}\right)$$

- obě dvoukroková LF a LW schemata jsou optimálně stabilní, tj. stabilní pro $|a|\Delta t/\Delta x \leq 1, |b|\Delta t/\Delta y \leq 1$; časový krok volíme $\Delta t = C \min(\Delta x/|a|, \Delta y/|b|)$
- vzorový program
  http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/ds/2D/pde2step.m