Obyčejné diferenciální rovnice, ODR, analytické metody

- definice – diferenciální, obyčejné
- $y(x) \in S$, 1. řádu, $f(y', y, x) = 0$,
  nejjednodušší $y' = g(y, x)$
- počáteční podmínka $y(0) = c$
- vyššího řádu, např. $y'' = 0$ řešení $y = c_1 x + c_2$,
  2 počáteční podmínky nebo 2 okrajové podmínky
- transformace na systém
- existence řešení, jednoznačnost řešení, bifurkace
- speciální případy - separace proměnných

  $$y' = f(x)g(y)$$

  $$\int \frac{d\,y}{g(y)} = \int f(x) d\,x + c$$

- lineární ODR s konstantními koeficianty, homogenní rovnice

  $$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

  substituce $y = Ce^{\lambda x}$, charakteristický polynom

  $$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

  s kořeny $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ dává obecné řešení

  $$y = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i x}$$

  pro násobné kořeny $c_i = A_i x + B_i$

- nehomogenní rovnice – partikulární řešení + obecné řešení homogenní rovnice; partikulární řešení variací konstant

  $$y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) e^{\lambda_i x}$$

- teorie řízení – Laplaceova transformace
- nenumerické metody řešení
  - řady – Taylor
  - Picardova metoda pro ODR $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$

    $$y_{i+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_i(s)) d\, s$$

- příklady na analytické řešení ODR v Maple
  http://kfe.fjfi.cvut.cz/˜liska/drp/odes/anal.mws

Systém obyčejných diferenciálních rovnic

- obecný systém ODR pro $\vec{Y}(x)$

$$\vec{Y}' = \vec{F}(x, \vec{Y})$$

- lineární systém n ODR s konstantrními koeficienty

$$\begin{aligned}
y_1' &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j} y_j + b_1(x) \\
y_2' &= \sum_{j=1}^{n} a_{2j} y_j + b_2(x) \\
&\cdots \\
y_n' &= \sum_{j=1}^{n} a_{nj} y_j + b_n(x)
\end{aligned}$$

$$\vec{Y}' = \mathbf{A} \cdot \vec{Y} + \vec{B}(x)$$

- homogenní systém $\vec{B}(x) = 0$

$$\vec{Y}' = \mathbf{A} \cdot \vec{Y}$$

- substituce

$$\vec{Y} = \vec{C} e^{\lambda x}$$

dává

$$\lambda \vec{C} e^{\lambda x} = \mathbf{A} \cdot \vec{C} e^{\lambda x}$$

$$\mathbf{A} \cdot \vec{C} = \lambda \vec{C}$$

- vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ matice $\mathbf{A}$ (kořeny charakteristického polynomu $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$

- vlastní vektory $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \cdots, \vec{C}_n$ matice $\mathbf{A}$ odpovídající vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$
- navzájem různá vlastní čísla $\lambda_j \neq \lambda_k, j \neq k, \quad j,k = 1, \cdots, n$ – obecné řešení

  $$\vec{Y} = \sum_{j=1}^{n} d_j \vec{C}_j e^{\lambda_j x}, \quad d_j \in R$$

  konstanty d_j se dopočítají z počátečních podmínek
- komplexní vlastní číslo $\lambda_j \in C$ s vlastním vektorem $\vec{C}_j$ potom i $\bar{\lambda}_j$ je kořenem charakteristického polynomu s vlastním vektorem $\bar{C}_j$

  $$e^{\lambda_j x} = e^{Re\lambda_j x}(\cos(Im\lambda_j x) + i\sin(Im\lambda_j x))$$
- násobné vlastní číslo $\lambda_1 = \lambda_2$
  - $\vec{C}_1$ a $\vec{C}_2$ jsou lineárně nezávislé

    $$d_1\vec{C}_1 e^{\lambda_1 x} + d_2\vec{C}_2 e^{\lambda_1 x}$$
  - $\vec{C}_1$ a $\vec{C}_2$ jsou lineárně závislé

    $$(d_1 x + d_2)\vec{C}_1 e^{\lambda_1 x}$$
- systém ODR je stabilní pokud $Re(\lambda_j) \leq 0, j = 1, \cdots, n$

Stabilita obyčejných diferenciálních rovnic

- **Definice:** ODR je stabilní právě když malé změně počátečních podmínek odpovídá malá změna řešení ODR (pro rostoucí x)
- **Úloha:** ověřte experimentálně stabilitu diferenciálních rovnic

$$y' = 2y - 3e^{-x}, \qquad y' = -2y + e^{-x}$$

pro počáteční podmínky $y(0) = y_0 = 0.97, 1.0, 1.03$ – vzorový program
http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/odes/ode-stab.mws

- **Věta:** mějme ODR $y' = f(x,y)$, $f \in C^1_{x,y}$, pokud existuje K, L takové, že

$$K \leq \frac{\partial f}{\partial y} \leq L, \quad \forall x, y, \quad x \in (x_0, x_1)$$

potom pro 2 řešení $y(x), \tilde{y}(x)$ ODR na intervalu $x \in (x_0, x_1)$ s počátečními podmínkami $y(x_0) = y_0, \tilde{y}(x_0) = \tilde{y}_0$ platí $\forall x,\ x \in (x_0, x_1)$

$$|y_0 - \tilde{y}_0| e^{K(x-x_0)} \leq |y(x) - \tilde{y}(x)| \leq |y_0 - \tilde{y}_0| e^{L(x-x_0)}$$

- **Příklad 1:** pro ODR $y' = 2y - 3e^{-x}$ je $\frac{\partial f}{\partial y} = 2$ čili $K = L = 2$ a platí

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| = |y_0 - \tilde{y}_0| e^{2(x-x_0)}$$

čili rovnice je nestabilní

- **Příklad 2:** pro ODR $y' = -2y + e^{-x}$ je $\frac{\partial f}{\partial y} = -2$ čili $K = L = -2$ a platí

  $$|y(x) - \tilde{y}(x)| = |y_0 - \tilde{y}_0| e^{-2(x-x_0)}$$

  čili rovnice je stabilní

- **Příklad 3:** pro ODR $y' = -x^2y^3 + \cos(x)$ je $\frac{\partial f}{\partial y} = -3x^2y^2 \leq 0$ čili $L = 0$ a platí

  $$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq |y_0 - \tilde{y}_0|$$

  čili rovnice je stabilní

- **Věta:** mějme ODR $y' = f(x,y), f \in C^1_{x,y}$, pokud

  $$\frac{\partial f}{\partial y} \leq 0, \quad \forall x, y$$

  potom je ODR stabilní

Numerické řešení ODR

- ODR $y' = f(x, y)$ pro $y(x)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$
- výpočetní krok h - malý, Taylorův rozvoj

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + hy'(x) + O(h^2) \\ &\approx y(x) + hf(x, y(x)) \end{aligned}$$

- definujeme výpočetní síť $x_n = x_0 + nh$ s hodnotami $y_n = y(x_n)$ – kompatibilní s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$
- Eulerova metoda

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Runge Kuttova metoda RK2

– obyčejná diferenciální rovnice $y' = f(x)$ má řešení

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(z)d\ z$$

po aproximaci integrálu

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + y'(x+h/2)h + O(h^2) \\ &\approx y(x) + f(x+h/2)h \end{aligned}$$

rekurentní předpis

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n + h/2)h$$

– obdobně pro $y' = f(x, y)$

$$\begin{aligned} y(x+h) &\approx y(x) + f(x+h/2, y(x+h/2))h \\ y(x+h/2) &\approx y(x) + f(x, y(x))h/2 \end{aligned}$$

– metoda RK2 - prediktor-korektor je druhého řádu přesnosti $O(h^2)$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + h/2, y_n + k_1 h/2) \\ y_{n+1} &= y_n + k_2 h \end{aligned}$$

Runge Kuttovy metody

– diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$, máme výpočetní síť $x_{n+1} = x_n + h$ a hodnoty $y_n \approx y(x_n)$

– obecná expliplicitní r-kroková Runge-Kuttova metoda

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} k_1 h) \\ k_3 &= f(x_n + c_3 h, y_n + (a_{31} k_1 + a_{32} k_2) h) \\ &\dots \\ k_r &= f(x_n + c_r h, y_n + h \sum_{j=1}^{r-1} a_{rj} k_j) \\ y_{n+1} &= y_n + h \sum_{j=1}^{r} b_j k_j \end{aligned}$$

se popisuje tabulkou
$$\begin{array}{c|ccccc} c_2 & a_{21} & & & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ c_r & a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr-1} & \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_{r-1} & b_r \end{array}$$

– nejjednodušší RK metoda pro $r = 1$, neznámá konstanta b_1

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + h b_1 k_1 \\ y(x_n + h) &= y_n + h b_1 f(x_n, y_n) \end{aligned}$$

označíme $L(h) = y(x_n + h)$, $P(h) = y_n + h b_1 f(x_n, y_n)$

– funkční hodnoty $L(0) = P(0)$

– pro derivace (podle h)

$$\begin{aligned} L'(h=0) &= y'(x_n) = f(x_n, y_n) \\ P'(h=0) &= b_1 f(x_n, y_n) \end{aligned}$$

čili $b_1 f = f$ a $b_1 = 1$ a jednokroková RK metoda je

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + hk_1, \end{aligned}$$

což je Eulerova metoda

Dvoukroková RK metoda

– $r = 2$, neznámé konstanty c_2, a_{21}, b_1, b_2

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} k_1 h) \\ y(x_n + h) &= y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2) \end{aligned}$$

označíme $L(h) = y(x_n+h), P(h) = y_n+h(b_1k_1+b_2k_2)$

– funkční hodnoty $L(0) = P(0)$

– pro první derivace (podle h)

$$\begin{aligned} L'(h=0) &= y'(x_n) = f(x_n, y_n) \\ P'(h=0) &= (b_1 k_1 + b_2 k_2)|_{h=0} = b_1 f(x_n, y_n) + b_2 f(x_n, y_n) \\ &= f(b_1 + b_2) \\ L' &= P' \Rightarrow f(b_1 + b_2) = f \\ & \qquad\quad b_1 + b_2 = 1 \end{aligned}$$

– pro druhé derivace

$$
\begin{aligned}
L''(h=0) &= y''(x_n) = f'(x_n, y_n) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x_n) \\
&= f_x + f_y f \\
P''(h=0) &= (b_1 k_1 + b_2 k_2 + h(b_1 k_1 + b_2 k_2)')'|_{h=0} \\
&= 2(b_1 k_1 + b_2 k_2)' = 2 b_2 k_2' \\
&= 2b_2(f_x c_2 + f_y a_{21} k_1) = 2b_2(f_x c_2 + f_y f a_{21}) \\
L'' = P'' &\Rightarrow f_x + f_y f = 2b_2(f_x c_2 + f_y f a_{21}) \\
&\qquad f_x(1 - 2b_2 c_2) + f_y f(1 - 2b_2 a_{21}) = 0
\end{aligned}
$$

toto musí platit pro libovolnou funkci f čili pro neznámé konstanty c_2, a_{21}, b_1, b_2 dostáváme systém

$$
\begin{aligned}
1 - 2b_2 c_2 &= 0 \\
1 - 2b_2 a_{21} &= 0 \\
b_1 + b_2 &= 1
\end{aligned}
$$

musí platit $b_2 \neq 0, c_2 \neq 0, a_{21} \neq 0$

– pro $b_1 = 0$ dostáváme $b_2 = 1, c_2 = 1/2, a_{21} = 1/2$, čili RK metoda $\begin{array}{c|cc} 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$ což je RK2 metoda odvozená dříve

– pro $b_1 = 1/2$ dostáváme $b_2 = 1/2, c_2 = 1, a_{21} = 1$, čili RK metoda $\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$

– odvodili jsme jednoparametrickou ($b_1 \in [0, 1)$) rodinu dvoukrokových RK metod druhého řádu přesnosti

Tříkroková RK metoda

– $r = 3$, neznámé konstanty $c_2, c_3, a_{21}, a_{31}, a_{32}, b_1, b_2, b_3$

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} k_1 h) \\
k_3 &= f(x_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) \\
y(x_n + h) &= y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|ccc}
c_2 & a_{21} & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & b_3
\end{array}$$

– rovnice pro první, druhé a třetí derivace

– odvození pro RK2 v Maple je v souboru
http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/odes/rk2.mws

– **Úloha:** odvoďte tříkrokovou RK metodu v Maple

Eulerova metoda

- příklad: ODR $y' = -y$ s PP $y(0) = 1$
- implementace Eulerovy metody v Matlabu je v http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/odes/eul.m

```
function eu=euler(x0,y0,x1,h)
% Eulerova metoda pro reseni ODR

N = round((x1 - x0)/h);
x = zeros(N,1);
y= zeros(N,1);
x(1) = x0;
y(1) = y0;
n = 1;
while x(n) <= x1
  y(n+1) = y(n) + h*f(x(n),y(n));
  x(n+1) = x(n) + h;
  n = n+1;
end;
plot(x,y);

function ff = f(x,y)
ff = -y;
```

- **Úloha:** vyzkoušejte řešení dané ODR Eulerovou metodou na intervalu $x \in (0, 5)$ s krokem $h \in (0.1, 1)$

určete chyby této metody pro kroky sítě $h = 1, 0.5, 0.25, 0.125$ porovnáním numerického řešení y_n s analytickým $y(x) = e^{-x}$ pomocí chyby v maximové normě $||y_n - y||_{max} = \max_n(|y_n - y(x_n)|)$

- **Úloha:** implementujte metodu RK2

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} k_1 h) \\
y(x_n + h) &= y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c|cc}
1/2 & 1/2 & \\
\hline
 & 0 & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + h/2, y_n + k_1 h/2) \\
y_{n+1} &= y_n + k_2 h
\end{aligned}
$$

určete chyby této metody pro kroky sítě $h = 1, 0.5, 0.25, 0.125$

- **Úloha:** implementujte Heunovu metodu RK3

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} k_1 h) \\
k_3 &= f(x_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) \\
y(x_n + h) &= y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c|ccc}
c_2 & a_{21} & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & b_3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc}
1/3 & 1/3 & & \\
2/3 & 0 & 2/3 & \\
\hline
 & 1/4 & 0 & 3/4
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + h/3, y_n + k_1 h/3) \\
k_3 &= f(x_n + 2/3h, y_n + 2/3k_2 h)) \\
y(x_n + h) &= y_n + h(k_1/4 + 3/4k_3)
\end{aligned}
$$

určete chyby této metody pro kroky sítě $h = 1, 0.5, 0.25, 0.125$

- **Úloha:** implementujte metodu RK4

$$
\begin{array}{c|cccc}
1/2 & 1/2 & & & \\
1/2 & 0 & 1/2 & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + h/2, y_n + k_1 h/2) \\
k_3 &= f(x_n + h/2, y_n + k_2 h/2)) \\
k_4 &= f(x_n + h, y_n + k_3 h)) \\
y(x_n + h) &= y_n + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6
\end{aligned}
$$

určete chyby této metody pro kroky sítě $h = 1, 0.5, 0.25, 0.125$

sestavte tabulku chyb pro Eulerovu metodu, RK2, RK3 a RK4; jak se chyby mění při zmenšujícím se kroku sítě?

- **Úloha:** ODR $y' = -xy$ s PP $y(0) = 1$ řešte Eulerovou metodou na intervalu $x \in (0, 5)$ s krokem $h \in (0.1, 0.5)$ a potom pro $x \in (0, 50)$

Eulerova metoda - absolutní stabilita

- jeden krok metody pro řešení ODR $y' = f(x,y)$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

- nechť $\varphi(x)$ je řešením ODR $y' = f(x,y)$
- Taylorův rozvoj f podle y v $y(x) = \varphi(x)$

$$\begin{aligned} y'(x) = f(x,\varphi(x)) \; &+ \; \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (y - \varphi(x)) + O((y(x) - \varphi(x))^2) \\ y'(x) - f(x,\varphi(x)) \; &\approx \; f_y \cdot (y(x) - \varphi(x)) \\ y'(x) - \varphi'(x) \; &= \; J \cdot (y(x) - \varphi(x)); \qquad J = f_y \end{aligned}$$

- zavedeme $u(x) = y(x) - \varphi(x)$ a dostaneme $u' = Ju$
- dosadíme do kroku metody

$$u_{n+1} = u_n + hJu_n = (1 + hJ)u_n$$

- definujeme funkci stability

$$R(hJ) = 1 + hJ = R(z), \quad z \in C$$

- máme

$$u_{n+1} \; = \; R(hJ_n)u_n$$

- podmínka stability pro skalární případ jedné ODR

$$|R(hJ_i)| \leq 1, \quad \forall i$$

- ODR $y' = -xy$ s PP $y(0) = 1$ na intervalu $x \in (0, 50)$ s krokem $h \in (0.1, 0.5)$

  $J = f_y = -x$, podmínka stability

$$\begin{aligned}
|1 - hx| &\leq 1 \\
-1 \leq 1 - hx &\leq 1 \\
-2 \leq -hx &\leq 0 \\
hx &\leq 2 \\
h &\leq \frac{2}{x}
\end{aligned}$$

  adaptivní volba kroku metody

$$h_n \leq \frac{2}{x_n}$$

Runge Kuttovy metody pro systém

- systém diferenciálních rovnic $\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y})$ s počáteční podmínkou $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$
- obecná expliplicitní r-kroková Runge-Kuttova metoda

$$
\begin{aligned}
\vec{k}_1 &= \vec{f}(x_n, \vec{y}_n) \\
\vec{k}_2 &= \vec{f}(x_n + c_2 h, \vec{y}_n + a_{21}\vec{k}_1 h) \\
\vec{k}_3 &= \vec{f}(x_n + c_3 h, \vec{y}_n + (a_{31}\vec{k}_1 + a_{32}\vec{k}_2)h) \\
&\dots \\
\vec{k}_r &= \vec{f}(x_n + c_r h, \vec{y}_n + h \sum_{j=1}^{r-1} a_{rj}\vec{k}_j) \\
\vec{y}_{n+1} &= \vec{y}_n + h \sum_{j=1}^{r} b_j \vec{k}_j
\end{aligned}
$$

- **Úloha:** řešte ODR $y'' + 0.2y' + 4.01y = 0$ s PP $y(0) = 1, y'(0) = 0$, ODR převedeme na systém

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= -0.2y_2 - 4.01y_1
\end{aligned}
$$

systém řešíme Eulerovou metodou na intervalu $x \in (0, 10)$ s krokem $h \in (0.01, 0.5)$

implementace pro systém je v http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/odes/eulers.m

implementujte metodu RK4 pro systém

Eulerova metoda pro systém - absolutní stabilita

- systém m rovnic $\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y})$ pro $\vec{y}, \vec{f} \in R^m$
- nechť $\vec{\varphi}(x)$ je řešením ODR $\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y})$
- Taylorův rozvoj $\vec{f}$ podle $\vec{y}$ v $\vec{y}(x) = \vec{\varphi}(x)$

$$\begin{aligned}
\vec{y}\,'(x) = \vec{f}(x, \vec{\varphi}(x)) \; &+ \; \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}} \cdot (\vec{y} - \vec{\varphi}(x)) + O((\vec{y}(x) - \vec{\varphi}(x))^2) \\
\vec{y}\,'(x) - \vec{f}(x, \vec{\varphi}(x)) \; &\approx \; \vec{f}_{\vec{y}} \cdot (\vec{y}(x) - \vec{\varphi}(x)) \\
\vec{y}\,'(x) - \vec{\varphi}\,'(x) \; &= \; J \cdot (\vec{y}(x) - \vec{\varphi}(x)); \qquad J = \vec{f}_{\vec{y}}
\end{aligned}$$

- J je Jakobián $\vec{f}$ podle $\vec{y}$, tj. matice $m \times m$ s vlastními čísly λ_j a vlastními vektory $\vec{v}_j$
- zavedeme $\vec{u}(x) = \vec{y}(x) - \vec{\varphi}(x)$ a dostaneme $\vec{u}\,' = J\vec{u}$
- Eulerova metoda

$$\vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n + h\vec{f}(x_n, \vec{u}_n) \approx (I + hJ)\vec{u}_n$$

- funkce stability $R(hJ) = I + hJ, R(z) = 1 + z$
- rozložíme do vlastních vektorů $\vec{v}_j$

$$\vec{u}_n = \sum_{j=1}^{m} c_j \vec{v}_j$$

a dosadíme do Eulerovy metody

$$\vec{u}_{n+1} \; = \; (I + hJ) \sum_{j=1}^{m} c_j \vec{v}_j$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{m} c_j(\vec{v}_j + hJ\vec{v}_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} c_j(\vec{v}_j + h\lambda_j\vec{v}_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} c_j(1 + h\lambda_j)\vec{v}_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} c_j R(h\lambda_j)\vec{v}_j
\end{aligned}
$$

- podmínka stability pro systém ODR

  $$|R(h\lambda_j)| \leq 1, \quad \forall j = 1, \cdots, m$$

- obor stability

  $$S = \{z \in C, |R(z)| \leq 1\}$$

- pro Eulerovu metodu $R(z) = 1 + z, \quad z \in C$

  $$
  \begin{aligned}
  |1 + z|^2 &\leq 1 \\
  z &= a + ib, \quad |1 + a + ib|^2 = (1 + a)^2 + b^2 \leq 1
  \end{aligned}
  $$

  je obor stability kruh o poloměru 1 se středem v (-1,0)

- $z = hf_y$ pro 1 ODR, resp. $z = h\lambda_j$ pro systém ODR

- pokud $Re(z) > 0$ je ODR nestabilní a nemusí jít ji řešit explicitní RK metodou, tj. $f_y > 0$ pro jednu ODR resp. $Re(\lambda_j) > 0$ pro systém

- Eulerova metoda je absolutně stabilní pro jednu ODR pro

  $$hf_y \in (-2, 0)$$

  pro systém ODR potom pro

  $$|1 + h\lambda_j| \leq 1, \forall j = 1, \cdots, m$$

- pro $Re(\lambda_j) = 0$ nemusí jít Eulerovu metodu použít, existují RK metody, které lze použít

Funkce stability pro obecnou RK metodu

- Dalquistova testovací rovnice

$$y' = ay, \quad y(0) = 1, \quad z = ah, \quad a \in C$$

- RK metoda

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} k_1 h) \\
k_3 &= f(x_n + c_3 h, y_n + (a_{31} k_1 + a_{32} k_2) h) \\
&\ldots \\
k_r &= f(x_n + c_r h, y_n + h \sum_{j=1}^{r-1} a_{rj} k_j) \\
y_{n+1} &= y_n + h \sum_{j=1}^{r} b_j k_j
\end{aligned}$$

s tabulkou
$$\begin{array}{c|ccccc}
c_2 & a_{21} & & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
c_r & a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{r-1} & b_r
\end{array}$$

- dosadíme pravou stranu Dalquistovy rovnice $f(x, y) = ay$ a vyjádříme

$$y_{n+1} = R(ah) y_n = R(z) y_n$$

a dostaneme funkci stability $R(z)$

$$R(z) = 1 + z \sum_j b_j + z^2 \sum_{j,k} b_j a_{jk} + z^3 \sum_{j,k,l} b_j a_{jk} a_{kl} + \cdots$$

- **Úloha:** určete funkci stability pro metodu RK2

$$\begin{array}{c|cc} 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + h/2, y_n + k_1 h/2) \\ y_{n+1} &= y_n + k_2 h \end{aligned}$$

vzorový program http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/odes/fstab.mws

- **Úloha:** určete funkci stability pro metodu RK3

$$\begin{array}{c|ccc} 1/3 & 1/3 & & \\ 2/3 & 0 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + h/3, y_n + k_1 h/3) \\ k_3 &= f(x_n + 2/3h, y_n + 2/3k_2 h)) \\ y(x_n + h) &= y_n + h(k_1/4 + 3/4k_3) \end{aligned}$$

- **Úloha:** určete funkci stability pro metodu RK4

$$\begin{array}{c|cccc} 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + h/2, y_n + k_1 h/2) \\ k_3 &= f(x_n + h/2, y_n + k_2 h/2)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
k_4 &= f(x_n + h, y_n + k_3 h)) \\
y(x_n + h) &= y_n + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6
\end{aligned}
$$

Řád přesnosti RK metody

- **Věta:** RK metoda je p-tého řádu přesnosti právě když

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^p}{p!} + O(z^{p+1})$$

- **Věta (Butcherova bariéra):** Pro $p \geq 5$ neexistuje explicitní RK metoda řádu p, která by měla $s = p$ kroků.
- pro $p = 5$ dostaneme 17 rovnic pro 15 koeficientů c_i, b_i, a_{ij} a tento systém nemá řešení; pro řád přesnosti 5 potřebujeme alespoň 6-tikrokovou metodu
- pro explicitní s-krokovou RK metodu řádu přesnosti $p = s$ (tj. $p = s \leq 4$) platí

$$R(z) = 1 + z + \cdots + \frac{z^p}{p!}$$

Obor absolutní stability

- **Definice:** Obor stability RK metody je množina

$$S = \{z \in C, |R(z)| \leq 1\}$$

- pro Dalquistovu rovnici $y' = ay$ platí: pokud $ha \in S$ potom je RK metoda stabilní
- pro obecnou rovnici $y' = f(x, y)$ je podmínka absolutní stability $hf_y(x) \in S, \forall x$, kde $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$

- pro systém rovnic $\vec{Y}' = \vec{F}(x, \vec{Y})$ je podmínka absolutní stability $h\lambda_i(x) \in S, \forall i, \forall x$, kde $\lambda_i(x)$ jsou vlastní čísla Jacobiho matice $J = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{Y}}$
- **Úloha:** nakreslete obor stability pro Eulerovu rovnici s funkcí stability $R(z) = 1 + z$; vzorový program http://kfe.fjfi.cvut.cz/˜liska/drp/odes/stab.mws
  pro $Re(\lambda_j) = 0$ nemusí jít Eulerovu metodu použít
- **Úloha:** nakreslete obor stability pro metodu RK2 s funkcí stability $R(z) = 1 + z + z^2/2$
  pro $Re(\lambda_j) = 0$ nemusí jít RK2 metodu použít
- **Úloha:** nakreslete obor stability pro Heunovu metodu RK3 s funkcí stability $R(z) = 1 + z + z^2/2 + z^3/6$
  pro $Re(\lambda_j) = 0$ lze metodu RK3 použít
- **Úloha:** nakreslete obor stability pro metodu RK4 s funkcí stability $R(z) = 1 + z + z^2/2 + z^3/6 + z^4/24$
  pro $Re(\lambda_j) = 0$ lze metodu RK4 použít
- **Úloha:** nakreslete obor stability pro Dormand-Princovu metodu DOPRI5 (6-ti kroková metoda řádu 5) s funkcí stability $R(z) = 1 + z + z^2/2 + z^3/6 + z^4/24 + z^5/120 + z^6/600$
  pro $Re(\lambda_j) = 0$ lze metodu DOPRI5 použít
- ODR $y' = -xy$ s PP $y(0) = 1$ na intervalu $x \in (0, 50)$ s krokem $h \in (0.1, 0.5)$

  $J = f_y = -x$, podmínka stability $hf_y = -hx \in S$

  $$-C \leq -hx \leq 0$$

$$hx \leq C$$
$$h \leq \frac{C}{x}$$

kde C je dáno metodou

metoda	C
Euler	2
RK2	2
RK3	2.5
RK4	2.8
DOPRI5	3.3
DOPRI8	5.1

adaptivní volba kroku metody

$$h_n \leq \frac{C}{x_n}$$

Vnořené RK metody

- tabulka vnořené (embedded) RK metody

$$
\begin{array}{c|ccccc}
c_2 & a_{21} \\
c_3 & a_{31} & a_{32} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
c_r & a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr-1} \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{r-1} & b_r \\
\hline
 & \hat{b}_1 & \hat{b}_2 & \cdots & \hat{b}_{r-1} & \hat{b}_r
\end{array}
$$

- aproximace derivace

$$k_j = f(x_n + c_j h, y_n + h \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} k_i)$$

- krok metody RKp, řádu $p, O(h^p)$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^{r} b_j k_j$$

krok metody RK$\hat{p}$, řádu $\hat{p}, O(h^{\hat{p}})$

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^{r} \hat{b}_j k_j$$

nečestěji $\hat{p} = p + 1$ nebo $\hat{p} = p - 1$

- odchylka $||y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}|| = Ch^{\min(p,\hat{p})}$ dává odhad chyby řešení a slouží k adaptivnímu určování kroku h, tak aby výsledné y_{n+1} mělo požadovanou přesnost

- zadává se absolutní a relativní přesnost

- vnořená metoda RK$p(\hat{p})$, nejčastěji používaná Runge-Kutta-Fehlberg RK4(5), neboli RKF45

ODR s okrajovými podmínkami

- počáteční problém

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$$

je po substituci

$$y_1 = y, y_2 = y'$$

ekvivalentní systému

$$y'_2 = f(x, y_1, y_2), y'_1 = y_2, \quad y_1(x_0) = y_0, y_2(x_0) = y'_0$$

- okrajový problém $x \in (x_0, x_1)$

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = a, y(x_1) = b$$

- ekvivalentní systém

$$y'_2 = f(x, y_1, y_2), y'_1 = y_2, \quad y_1(x_0) = a, y_1(x_1) = b$$

- obecný systém

$$y'_2 = f_2(x, y_1, y_2), y'_1 = f_1(x, y_1, y_2), \quad y_1(x_0) = a, y_1(x_1) = b$$

- **Příklad:**

$$y'' = e^y, \quad x \in (0, 1), \quad y(0) = a, y(1) = b$$

metoda střelby, řeším počáteční problém

$$y'' = e^y, \quad y(0) = a, y'(0) = p$$

v tomto případě je $y(1,p)$ monotonní funkcí p; najdu p_1, p_2 taková, že

$$y(1,p_1) < b < y(1,p_2)$$

a potom volím $p_3 = \frac{p_1+p_2}{2}$ a dále pokračuji bisekcí dokud $y(1,p_2) - y(1,p_1)$ není dostatečně malé

vzorový program http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/odes/BC.m http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/odes/eulerBC.m počítá řešení počátečního problému pro $a = 1, p = -1.7, \cdots, -0.3$

- **Příklad:**

$$y'' = -e^y, \quad x \in (0,1), \quad y(0) = 1, y(1) = b$$

počáteční problém

$$y'' = -e^y, \quad y(0) = a, y'(0) = p$$

v tomto případě není $y(1,p)$ monotonní funkcí p; úloha nemá jednoznačné řešení; existují 2 řešení

Úloha: řešte tento počáteční problém pro $p = 0, 1, \cdots, 9$

Metoda konečných diferencí pro okrajový problém

- příklad

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = a, y(x_n) = b, \quad x \in (x_0, x_n)$$

- na intervalu (x_0, x_1) vytvoříme výpočetní síť s krokem h

$$x_i = x_0 + ih, \quad h = \frac{x_n - x_0}{n}$$

  a funkci $y(x)$ reprezentujeme diskrétními hodnotami $y_i \approx y(x_i)$ v uzlech sítě $x_i, i = 0, 1, \cdots, n$

- nahradíme derivace jejich diskrétní approximací

$$y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y_i'' \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

- v každém vnitřním bodě sítě dostaneme rovnici

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right), i = 1, \cdots, n-1$$

  a na okrajích potom $y_0 = a, y_n = b$

- řešíme systém $n-1$ algebraických rovnic pro neznámé $y_i, i = 1, \cdots, n-1$