Eulerovy rovnice v 1D

- zákony zachování hmoty, hybnosti a energie

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0 \tag{1}$$
$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0 \tag{2}$$
$$E_t + (u(E+p))_x = 0 \tag{3}$$

kde ρ je hustota, u rychlost, p tlak a E hustota celkové energie

- stavová rovnice ideálního plynu

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho\frac{u^2}{2} = \rho e = \rho(\varepsilon + \frac{u^2}{2})$$

kde e je celková energie a ε vnitřní energie

Lagrangeovské souřadnice

- Lagrangeovské souřadnice jsou pevně spojené s tekutinou, se kterou se pohybují
- Lagrangeovská částice má hmotnost, hustotu, rychlost $u = x_t$, energii
- vlastnost částice $f(t,x) = f(t,x(t))$

$$\frac{df}{dt} = f_t + \frac{dx}{dt} f_x = f_t + u f_x$$

Eulerovy rovnice v Lagrangeovských souřadnicích

- přepíšeme Eulerovský zákon zachování hmoty (1)

$$\begin{aligned} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0 \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho u_x &= 0 \end{aligned}$$

- rozvineme derivace v Eulerovském zákonu zachování hybnosti (2)

$$\begin{aligned} \rho_t u + \rho u_t + (\rho u)_x u + \rho u u_x + p_x &= 0 \\ u(\rho_t + (\rho u)_x) + \rho(u_t + u u_x) + p_x &= 0 \end{aligned}$$

první člen vypadne díky (1), čili

$$\rho \frac{du}{dt} + p_x = 0$$

- rozvineme derivace v Eulerovském zákonu zachování energie (3)

$$\begin{aligned} \rho_t e + \rho e_t + (\rho u)_x e + \rho u e_x + (up)_x &= 0 \\ e(\rho_t + (\rho u)_x) + \rho(e_t + u e_x) + (up)_x &= 0 \end{aligned}$$

první člen vypadne díky (1), čili

$$\rho \frac{de}{dt} + (up)_x = 0$$

- Eulerovy rovnice v Lagrangeovských souřadnicích

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho u_x &= 0 \\ \rho \frac{du}{dt} + p_x &= 0 \\ \rho \frac{de}{dt} + (up)_x &= 0 \end{aligned}$$

- do rovnice zachování energie dosadíme za celkovou energii

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt}\left(\varepsilon + \frac{u^2}{2}\right) + (up)_x &= 0 \\ \rho \left(\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{1}{2}\frac{du^2}{dt}\right) + u_x p + u p_x &= 0 \\ \rho \left(\frac{d\varepsilon}{dt} + u\frac{du}{dt}\right) + u_x p + u p_x &= 0 \\ u\left(\rho \frac{du}{dt} + p_x\right) + \rho \frac{d\varepsilon}{dt} + p u_x &= 0 \end{aligned}$$

první člen je nulový díky zákonu zachování hybnosti

- rovnice pro vnitřní energii

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} + p u_x = 0$$

Hmotnostní souřadnice

- hmotnostní souřadnice

$$s = \int_{x_0}^{x} \rho(y,t)dy, \;\; s_x = \rho$$

- derivace dle x

$$\frac{\partial}{\partial x} = s_x \frac{\partial}{\partial s} = \rho \frac{\partial}{\partial s}$$

- v Lagrangeovských rovnicích transformujeme derivace dle x na derivace dle s

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho^2 u_s &= 0 \\ \rho \frac{du}{dt} + \rho p_s &= 0 \\ \rho \frac{de}{dt} + \rho (up)_s &= 0 \\ \rho \frac{d\varepsilon}{dt} + \rho p u_s &= 0 \end{aligned}$$

- Lagrangeovské rovnice v hmotnostní souřadnici

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) - u_s &= 0 \\ \frac{du}{dt} + p_s &= 0 \\ \frac{de}{dt} + (up)_s &= 0 \\ \frac{d\varepsilon}{dt} + p u_s &= 0 \end{aligned}$$

Pohyb Lagrangeovských souřadnic

- pohyb Lagrangeovských souřadnic popisuje obyčejná diferenciální rovnice

$$\frac{dx}{dt} = u$$

- tato ODR se řeší pro každý uzel Lagrangeovské výpočetní sítě
- Lagrangeovská rovnice zachování hmoty se většinou neřeší, hustota se bere jednoduše z pohybu sítě – hmota výpočetních buněk se nemění, tekutina nepřekračuje hranice buněk

LF a LW schemata v hmotnostních souřadnicích

- pro každou konzervativní veličinu w prediktor

$$w_i^{n+1/2} = \frac{m_{i+1/2} w_{i+1/2}^n + m_{i-1/2} w_{i-1/2}^n}{m_{i+1/2} + m_{i-1/2}} - \frac{\Delta t}{m_{i+1/2} + m_{i-1/2}} \left(f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n \right)$$

- korektor LF

$$w_{i+1/2}^{n+1} = \frac{w_{i+1}^{n+1/2} + w_i^{n+1/2}}{2} - \frac{\Delta t}{2 m_{i+1/2}} \left(f_{i+1}^{n+1/2} - f_i^{n+1/2} \right)$$

- korektor LW

$$w_{i+1/2}^{n+1} = w_{i+1/2}^n - \frac{\Delta t}{m_{i+1/2}} (f_{i+1}^{n+1/2} - f_i^{n+1/2})$$

Diskretizace v buňkách i uzlech sítě

- skalární veličiny ρ, ε, p diskretizovány v buňkách $i + 1/2$
- vektorové veličiny u, x v uzlech sítě i
- rovnice pro rychlost a vnitřní energii (není konzervativní)

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + p_s &= 0 \\ \frac{d\varepsilon}{dt} + pu_s &= 0 \end{aligned}$$

- umělou viskozitu (viskózní tlak) q přičítáme k tlaku v oblastech komprese

$$q^n_{i+1/2} = \begin{cases} 0 & ,v^n_{i+1} - v^n_i \geq 0 \\ -\frac{3}{2}\varrho^n_{i+1/2}(v^n_{i+1} - v^n_i)\ \sqrt{(\gamma-1)\gamma\varepsilon^n_{i+1/2}} & ,v^n_{i+1} - v^n_i < 0 \end{cases}$$

- schema pro rychlost

$$\frac{u^{n+1}_i - u^n_i}{\Delta t} = -\frac{p^n_{i+1/2} + q^n_{i+1/2} - p^n_{i-1/2} - q^n_{i-1/2}}{m_i}$$

- posun síťky

$$\frac{x^{n+1}_i - x^n_i}{\Delta t} = \frac{u^{n+1}_i + u^n_i}{2}$$

- schema pro vnitřní energii

$$\frac{\varepsilon_{i+1/2}^{n+1} - \varepsilon_{i+1/2}^{n}}{\Delta t} = - (p_{i+1/2}^{n} + q_{i+1/2}^{n}) \frac{\frac{1}{2}(u_{i+1}^{n+1} + u_{i+1}^{n}) - \frac{1}{2}(u_{i}^{n+1} + u_{i}^{n})}{m_{i+1/2}}$$

- hustota z pohybu sítě - hmota buňky zůstává konstantní

$$\varrho_{i+1/2}^{n+1} = \frac{m_{i+1/2}}{x_{i+1}^{n+1} - x_{i}^{n+1}}$$