Markovovské náhodné procesy

U **Markovovského náhodného proces** nezávisí další vývoj na způsobu, jak se proces dostal do současného stavu. Platí

$$\forall\ t_1 < \ldots < t_n \qquad P[x_n(t_n)|x_1(t_1), \ldots, x_{n-1}(t_{n-1})] = P[x_n(t_n)|x_{n-1}(t_{n-1})]$$

O **Markovovském řetězci** mluvíme, pokud je množina časů t nejvýše spočetná. Náhodný proces $\xi(t)$ je vlastně posloupnost náhodných veličin $\{\xi_n\}$, kde $n = 0, 1, \ldots$.

Markovovský řetězec s nejvýše spočetným počtem stavů (MRS)

- ξ_n jsou diskrétní náhodné veličiny

Pravděpodobnost

$$\begin{aligned} P(\xi_0 = k_0, \xi_1 = k_1, \ldots, \xi_n = k_n) &= P(k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}) \cdot P(k_n|k_0, \ldots, k_{n-1}) = \\ = P(k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}) \cdot P(k_n|k_{n-1}) &= \ldots = p^{(0)}_{k_0} p^{(1)}_{k_0 k_1} p^{(2)}_{k_1 k_2} \ldots p^{(n)}_{k_{n-1} k_n} \end{aligned}$$

kde $p^{(l)}_{k_i k_j}$ je pravděpodobnost přechodu ze stavu k_i v $l-1$ kroku do stavu k_j v l-tém kroku.

Pro pravděpodobnost j-tého stavu v n-tém kroku platí

$$p^{(n)}_j \geq 0 \qquad \sum_{j \in \mathcal{S}} p^{(n)}_j = 1 \qquad \forall n \geq 0$$

kde $\mathcal{S}$ je množina všech stavů náhodného řetězce s nejvýše spočetným počtem stavů (MRS).
Pro pravděpodobnosti přechodu ze stavu i v kroku $n-1$ platí

$$p^{(n)}_{ij} \geq 0 \qquad \sum_{j \in \mathcal{S}} p^{(n)}_{ij} = 1 \qquad \forall n \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{S}$$

Označme pro $m < n$

$$P(\xi_n = j|\xi_m = i) = p^{(m,n)}_{ij} \qquad \left(p^{(m,n)}_{ij}\right) \ - \ \text{matice přechodu}$$

Platí

$$p^{(n)}_j = \sum_{i \in \mathcal{S}} p^{(m)}_i \cdot p^{(m,n)}_{ij} \qquad \forall j \in \mathcal{S} \ \ \forall m < N$$

a dále

$$P\left(k_m^{(m)},\ k_{m+1}^{(m+1)}\right) = p_{k_m}^{(m)} \cdot p_{k_m k_{m+1}}^{(m+1)} = \sum_{k_0,\dots,k_{m-1}\in\mathcal{S}} p_{k_0}^{(0)} \cdot p_{k_0 k_1}^{(1)} \cdot p_{k_{m-1}k_m}^{(m)} \cdot p_{k_m k_{m+1}}^{(m+1)}$$

Definice – Říkáme, že Markovův řetězec se spočetným počtem stavů je homogenní, jestliže pravděpodobnost přechodu $p_{ij}^{(n)}$ nezávisí na kroku n.

Pak pro matice přechodu platí

$$\left(p_{ij}^{(n)}\right) = (p_{ij}) = \mathbf{P} \qquad \left(p_{ij}^{(m,m+n)}\right) = (p_{ij}(n)) = \mathbf{P}(n) = \mathbf{P}^n$$

Př. Nechť je homogenní MRS se 3 stavy (-1, 0, 1) takový, že z hodnoty 0 přejdu s pravděpodobností $p = 0.5$ na 1 nebo -1, z 1 se stejnými pravděpodobnostmi na 0 a 1 a z hodnoty -1 na -1 a 0.

Pak matice přechodu jsou

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}(2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Obecně pro libovolné n je

$$\mathbf{P}(n) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} [1+(-1)^n/3]/2 & (-1)^{n+1}/3 & \dots \\ (-1)^{n+1}/3 & 2(-1)^n/3 & \dots \\ -[1-(-1)^n/3]/2 & (-1)^{n+1}/3 & \dots \end{pmatrix}$$

První z matic je tedy limitou pro $n \to \infty$. Ať byl výchozí stav jakýkoliv, po dostatečně dlouhé době je pravděpodobnost každého stavu $1/3$.

Klasifikace stavů HMRS

Def. Stav $i \in \mathcal{S}$ homogenního Markovova řetězce s nejvýše spočetným počtem stavů je **nepodstatný** právě tehdy, pokud $\exists$ stav $j \in \mathcal{S}$ a n přirozené takové, že $p_{ij}(n) > 0$ a zároveň $p_{ji}(m) = 0$ pro $\forall m \in \mathcal{N}$.

Def. Podstatné stavy $i, j \in \mathcal{S}$ jsou **sousledné**, pokud $\exists\, m, n \in \mathcal{N}$ takové, že $p_{ij}(n) > 0 \wedge p_{ji}(m) > 0$.

Pozn. Souslednost definuje ekvivalenci na množině podstatných stavů. Dva podstatné stavy jsou ekvivalentní, pokud jsou sousledné.

Množinu stavů $i \in \mathcal{S}$ lze rozdělit na **třídy**
$S^{(0)}$ – třída nepodstatných stavů
$S^{(i)}$ – i = 1, 2, ...– třídy sousledných podstatných stavů

Def. Jestliže některá třída $S^{(i)},\ i > 0$ obsahuje pouze 1 stav, pak se tento stav nazývá **absorpční**.

Def. Označme $f_{ij}(n)$ pravděpodobnost, že po n krocích přejde HMRS ze stavu i poprvé do stavu j

$$f_{ij}(n) = P(\xi_n = j, \xi_{n-1} \neq j, \ldots, \xi_1 \neq j | \xi_0 = i)$$

Označme N minimální dobu přechodu z stavu i do stavu j,
tj. $N = \min n > 0$ takových, že $f_{ij}(n) > 0$.

Označme F_{ij} celkovou pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j. Ta je dána vztahem

$$F_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n)$$

Označme $f_j(n) = f_{jj}(n)$ a $F_j = F_{jj}$.

Def. Stav HMRS je **trvalý**, pokud $F_j = 1$. Stav je **přechodný**, pokud $F_j < 1$.

Def. Stav HMRS je **periodický**, pokud $\exists$ největší společný dělitel $d_j > 1$ všech n takových, že $p_{jj}(n) > 0$. (opak neperiodický).

Pro trvalý stav je

$$P_j = \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) = \infty$$

Pro přechodný stav je

$$F_j = \frac{P_j}{1 + P_j}$$

Def. Stav HMRS je **nulový**, pokud $\lim_{n\to\infty} p_{jj}(n) = 0$ (opak nenulový).

Def. Trvalý nenulový neperiodický stav HMRS je **ergodický**.

Def. HMRS je **nerozložitelný**, pokud je prostor $\mathcal{S}$ roven jediné třídě podstatných vzájemně sousledných stavů.

Věta o solidaritě U nerozložitelného HMRS jsou všechny stavy téhož typu. (Pokud je 1 stav trvalý, $\forall$ jsou trvalé; pokud je 1 stav periodický s periodou d, pak jsou $\forall$ periodické s periodou d; pokud je 1 nulový, pak jsou $\forall$ nulové.

Finální pravděpodobnosti (pro konečný počet stavů)

Def. Jestliže $\exists \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = p_j$ nezávislé na i, pak p_j jsou **finální pravděpodobnosti**.

Platí

$$p_{ij}(n+1) = \sum_{k=1}^{r} p_{ik}(n) p_{kj} \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad p_j = \sum_{k=1}^{r} p_k \, p_{kj}$$

$$\sum_{j=1}^{r} p_{ij}(n) = 1 \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \sum_{j=1}^{r} p_j = 1$$

Pozn. Vektor (p_k) je vlastní řádkový (pro násobení zleva) vektor matice přechodu (p_{ij}) s vlastním číslem $\lambda = 1$.

Pozn. Matice přechodu $\mathbf{P}$(n) má $\forall |\lambda| \leq 1$.

Věta Markovova Jestliže $\exists\, n \in \mathcal{N}$ takové, že $\mathbf{P}(n) = (p_{ij}(n))$ má $\forall$ prvky nenulové $p_{ij}(n) > 0$, pak $\exists$ finální pravděpodobnosti p_j.

Věta Pro homogenní Markovův řetězec s konečným počtem r stavů kladné finální pravděpodobnosti $p_1, \ p_2, \ldots, \ p_r$ existují právě tehdy, když je nerozložitelný a neperiodický.

Věta Nechť je dán nerozložitelné homogenní Markovův řetězec s konečným počtem stavů. Je-li stav $j \in \mathcal{S}$ ergodický, pak jeho finální pravděpodobnost p_j je rovna převrácené hodnotě střední doby 1. návratu systému do stavu j

$$p_j = \frac{1}{\sum_{m=1}^{\infty} m\, f_j(m)} = \frac{1}{m_j}$$

Příklad Nechť HMRS má matici přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Jedná se o proces periodický s periodou $d = 2$ a proto neexistují finální pravděpodobnosti p_j. Přesto $\lambda = 1$ je vlastním číslem matice přechodu $\mathbf{P}$.

Příklad Nechť HMRS má matici přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tento proces má finální pravděpodobnosti $p_1 = p_2 = 0$ a $p_3 = 1$. Stav 3 je absorpčním stavem, stavy 1 a 2 jsou nepodstatné.

Markovovy procesy se spočetným počtem stavů (MPS)

Časová osa je spojitá, předpokládáme $t \in \langle 0, \infty)$. Pravděpodobnost, že systém je ve stavu $j \in \mathcal{S}$ v čase t, je $p_j(t)$

$$p_j(t) \geq 0 \qquad \sum_{j \in \mathcal{S}} p_j(t) = 1$$

Pro $s < t$ je

$$P(\xi = \xi_j,\ t | \xi = \xi_i,\ s) = p_{ij}^{(s,t)} \geq 0 \qquad \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij}^{(s,t)} = 1$$

Vlastnosti

$$p_j(t) = \sum_{i \in \mathcal{S}} p_i(s) \cdot p_{ij}^{(s,t)} \qquad p_{ij}^{(s,t)} = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_{ik}^{(s,u)} \cdot p_{kj}^{(u,t)}$$

Def. MPS je homogenní, když pro $\forall i, j \in \mathcal{S}$ a pro $\forall s, t;\ 0 \leq s < t$ je $p_{ij}^{(s,t)}$ závislé pouze na rozdílu časů $t - s$ $\left(p_{ij}^{(s,t)} = p_{ij}(u = t - s)\right)$.

Předpoklad Nechť pravděpodobnosti $p_{ij}(t)$ jsou spojité pro $t > 0$, nechť $\lim_{t\to 0^+} p_{ii}(t) = 1$ a $\lim_{t\to 0^+} p_{ij}(t) = 0$ pro $i \neq j$. Definujeme $p_{ii}(0) = 1$ a $p_{ij}(0) = 0$ pro $i \neq j$.

Věta Pokud platí předpoklad, pak pro $\forall\, i, j \in \mathcal{S}$, $i \neq j$ existuje konečná derivace

$$p'_{ij}(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{p_{ij}(t)}{t} = q_{ij}$$

Také derivace p_{ii} v 0 existuje, ale nemusí být konečná

$$-p'_{ii}(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = -q_{ii} = q_i$$

Matice $\mathbf{Q} = (q_{ij})$ je matice intenzit přechodu.

Def. Definujeme derivace pravděpodobnosti přechodu

$$p'_{ij}(t) = \lim_{s\to 0^+} \frac{p_{ij}(t+s) - p_{ij}(t)}{s}$$

Kolmogorovovy rovnice Pro derivace pravděpodobnosti přechodu platí

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k\in\mathcal{S}} p_{ik}(t) \cdot q_{kj} = \sum_{k\in\mathcal{S}} q_{ik} \cdot p_{kj}(t)$$

Def. HMPS je regulární (konzervativní), pokud pro $\forall i \in \mathcal{S}$ platí

$$\sum_{j\in\mathcal{S},\ j\neq i} q_{ij} = -q_{ii} < \infty$$