Degenerovaný elektronový plyn

fermiony – v daném stavu jen fermion

stavový objem na 1 fermion

$$\Delta p \cdot \Delta V = \frac{h^3}{n_{sp}}$$

n_s – počet orientací spinu
elektron spin $\pm 1/2$
$n_{sp} = 2$

pro $T = 0$ $\forall$ stavy s energií $\leq \varepsilon_F$ obsazeny – Fermiho energie

$\forall$ stavy $\varepsilon > \varepsilon_F$ prázdné

N fermionů stejných v objemu V | $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$ hybnost $p_F = \sqrt{2m\varepsilon_F}$

$$N = \frac{V n_{sp}}{h^3} \int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp = V \frac{4\pi n_{sp} p_F^3}{3h^3} = V \frac{4\pi n_{sp} (2m\varepsilon_F)^{3/2}}{3h^3}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_F = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3n}{4\pi n_{sp}}\right)^{2/3} \quad \text{elektrony} \quad \varepsilon_F = \frac{h^2}{2m_e}\left(\frac{3n_e}{8\pi}\right)^{2/3}$$

elektrony $\varepsilon_F \cong 7{,}9\ eV$ pro $n_e = 10^{23}\ cm^{-3} = 10^{29}\ m^{-3}$
protony $\varepsilon_F \cong 50\ K$ pro $n_i = 10^{23}\ cm^{-3} = 10^{29}\ m^{-3}$

vnitřní energie elektronů pro $T = 0$

$$U_e = V \cdot \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m_e} p^2 dp = \frac{8\pi V}{h^3} \frac{1}{2m_e} \frac{p_F^5}{5} = \frac{3}{5} n_e V \varepsilon_F = \frac{3}{5} N \varepsilon_F$$

elektronový tlak při $T = 0$ (pro $T = 0 \rightarrow S = 0$)

$$p_e = -\left(\frac{\partial U_e}{\partial V}\right)_{S,N} = -\frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{3}{5} N \frac{h^2}{2m_e}\left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{2/3}\right] = \frac{2n_e}{5}\left[\frac{h^2}{2m_e}\left(\frac{3n_e}{8\pi}\right)^{2/3}\right]$$

$$p_e = \frac{2}{5} n_e \varepsilon_F \quad \Rightarrow \quad U_e = \frac{3}{2} p_e V$$

elektrony Fermi-Diracovo rozdělení

$$n_e = \frac{8\pi}{h^3}\int_0^\infty \frac{p^2\,dp}{e^{\frac{\varepsilon_e-\mu}{k_BT_e}}+1} \qquad \varepsilon_e = \frac{p^2}{2m_e}$$

chemický potenciál μ = energie potřebná k dodání 1 částice při S, V = konst.

pro $T_e = 0$ $\quad \mu = \varepsilon_F$

$$\frac{\mu}{k_BT_e} = \frac{1}{\Theta_D} \qquad \left(\Theta_D = \frac{k_BT_e}{\varepsilon_F}\right)$$

---

opačný extrém $T_e \gg \varepsilon_F$ ideální plyn

zanedbáme 1 ve jmenovateli

$$n_e = \frac{8\pi}{h^3}\int_0^\infty p^2\,dp\; e^{\frac{\mu-\varepsilon_e}{k_BT_e}}$$

$$e^{-\frac{\mu}{k_BT_e}} = \frac{8\pi}{n_e h^3}\int_0^\infty p^2 e^{-\frac{p^2}{2m_ek_BT_e}}\,dp =$$

$$= \frac{2(2\pi m_e k_BT_e)^{3/2}}{n_e h^3} = \frac{3\sqrt{\pi}\,\Theta_D^{3/2}}{4}$$

$$\frac{\mu}{k_BT_e} = \ln\left(\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\right) - \frac{3}{2}\ln\Theta_D$$

pro $\Theta_D = \Theta_{crit} = 0.827$
$\mu = 0$

$\mu < 0$ pro $\Theta_D > \Theta_{crit}$

ideální plyn

můžeme dodat částici s $E = 0$,

ale S se zvýší $\Rightarrow$ musíme energii odebrat

fit (Ichimaru)

$$\frac{\mu}{k_BT_e} = -\frac{3}{2}\ln\Theta_D + \ln\left(\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\right) + \frac{0.2505\,\Theta_D^{-1.858} + 0.072\,\Theta^{-\frac{1.858}{2}}}{1 + 0.2505\,\Theta_D^{-0.858}}$$

viz Chem_potential.jpg

Obrázek – plná čára – přesná hodnota, čárkovaně – asymptotické vzorce odvozené výše