

Jednokapalinové přiblížení (MHD-magnetohydrodynamika)

MHD popisuje pomalé pohyby plazmatu– kvazineutralita se zachovává

MHD popisuje plazma jako jednu elektricky vodivou kapalinu– rovnice pro hmotovou hustotu ρ_M , rychlost \vec{u} , elektrický proud \vec{j} , magnetické pole \vec{B} , a elektrické pole \vec{E}

MHD obsahuje zákony zachování hmoty a náboje, zachování hybnosti, zobecněný Ohmův zákon a Maxwellovy rovnice

Zákon zachování hmoty – zákony zachování počtu elektronů a iontů násobeny hmotnostmi a sečteny

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div}(n_e \vec{u}_e) = 0$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{div}(n_i \vec{u}_i) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rho_M + \text{div}(\rho_M \vec{u}) = 0 \quad (1)$$

$$\rho_M = m_e n_e + M_i n_i$$

$$\vec{u} = \frac{m_e n_e \vec{u}_e + M_i n_i \vec{u}_i}{m_e n_e + M_i n_i}$$

$$\vec{u} \approx \vec{u}_i, \rho_M \approx \rho_i$$

Jestliže vynásobíme obě rovnice nábojem (q_e, q_i) a sečteme, dostane zákon zachování náboje (rovnice pro hustotu náboje ρ_c a hustotu proudu \vec{j})

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (2)$$

Zákon zachování hybnosti pro elektrony a ionty můžeme zapsat

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_\alpha n_\alpha \vec{u}_\alpha) + \operatorname{div} (m_\alpha n_\alpha \vec{u}_\alpha \otimes \vec{u}_\alpha) = q_\alpha n_\alpha (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}) - \nabla p_\alpha - \sum_\beta m_\alpha n_\alpha v_{\alpha\beta} (\vec{u}_\alpha - \vec{u}_\beta)$$

kde operátor \otimes je definován $\vec{a} \otimes \vec{b} = a_i b_j$

Po sečtení dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_M \vec{u}) + \operatorname{div} (\rho_M \vec{u} \otimes \vec{u}) = \rho_c \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p \quad (3)$$

$$\text{kde} \quad \rho_c = q_e n_e + q_i n_i \quad \vec{j} = q_e n_e \vec{u}_e + q_i n_i \vec{u}_i \quad p = p_e + p_i$$

(výměna hybnosti mezi elektrony a ionty $A_{ei} = -m_e n_e v_{ei} (\vec{u}_e - \vec{u}_i)$ a $A_{ie} = -M_i n_i v_{ie} (\vec{u}_i - \vec{u}_e)$ se vyruší)

Rovnice pro elektrický proud

k získání rovnice pro \vec{j} lze sečíst pohybové rovnice vynásobené ($\times q_\alpha / m_\alpha$), ale uzavřít systém rovnic bude obtížné bez použití předpokladu $m_e \ll M_i$.

Vyjděme tedy z předpokladu zanedbatelné hmotnosti elektronu a požadujme, aby rozdíl zrychlení elektronů a iontů byl nulový. Zatímco rozdíl zrychlení působeného gravitací je nulový, u ostatních sil je zrychlení iontů zanedbatelné proti elektronům a tedy chceme, aby jejich celková síla, působící na elektrony, byla nulová

$$0 = -\nabla p_e + q_e n_e (\vec{E} + \vec{u}_e \times \vec{B}) - m_e n_e \nu_{ei} (\vec{u}_e - \vec{u}_i)$$

Dále využijeme kvazineutrality pro pomalé pohyby a vyjádříme elektrické pole

$$\vec{E} = -\vec{u} \times \vec{B} - \frac{M_i}{e\rho_M Z} \nabla p_e + \frac{M_i}{e\rho_M Z} \vec{j} \times \vec{B} + \frac{m_e \nu_{ei}}{e^2 n_e} \vec{j} \quad (4)$$

Proud podél magnetického pole – dominují elektrony

$$-\frac{e\vec{E}}{m_e} - \nu_{ei} \cdot \vec{u}_e \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{j} = -en_e \vec{u}_e = \frac{e^2 n_e}{m_e \nu_{ei}} \vec{E} \quad \sigma_E = \frac{e^2 n_e}{m_e \nu_{ei}} \quad \text{el. vodivost}$$

a poslední člen rovnice (4) lze tedy upravit do tvaru $\frac{\vec{j}}{\sigma_E}$

Z (4) získáme rovnici pro proud

$$\vec{j} + \frac{M_i \sigma_E}{e \rho_M Z} (\vec{j} \times \vec{B}) = \sigma_E \left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} + \frac{M_i}{e \rho_M Z} \nabla p_e \right) \quad (5)$$

pro uzavření rovnic vyjádříme $p_e \approx \alpha p$, kde $\alpha = 1$ pro $Z \gg 1$
a $\alpha = 1/2$ pro $Z = 1, T_e = T_i$

po přidání Maxwellových rovnic a stavové rovnice pro tlak dostaneme uzavřený systém rovnic, který lze řešit

V MHD se obvykle rovnice zjednoduší pomocí dalších předpokladů:

zanedbá se Hallův proud proti vlivu proudění $\vec{j} \times \vec{B} \ll \vec{u} \times \vec{B}$.

pro nízké teploty zanedbáme tlak v rovnici pro proud (tlak vede k Biermannovu bateriovému členu – bez něho v MHD nemůže B vzniknout z nuly)

pak lze vyjádřit proud

$$\Rightarrow \vec{j} = \sigma_E (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad \text{Ohmův zákon} \quad (6)$$

Ideální MHD $(\nu \rightarrow 0 \Rightarrow \sigma_E \rightarrow \infty)$

$$\frac{\partial \rho_M}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_M \vec{u}) = 0$$

$$\rho_M \frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\vec{u} \times \vec{B})$$

$$\vec{E} = -\vec{u} \times \vec{B}$$

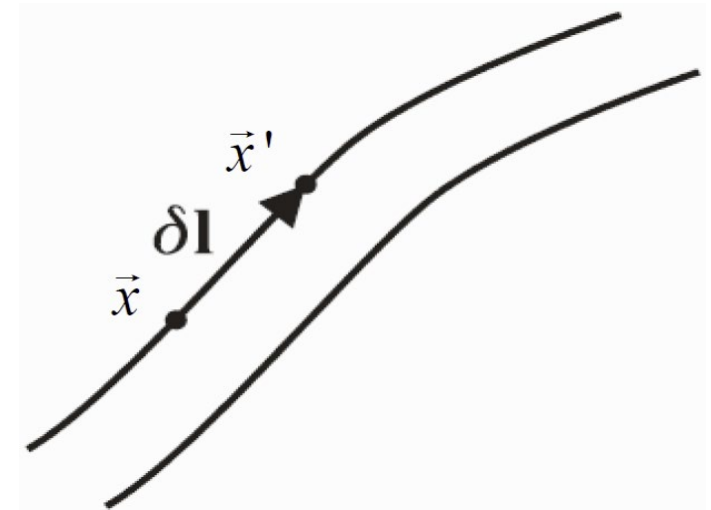
$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \nabla$$

Zamrzání magnetického pole do plazmatu

plazma se pohybuje podle proudnic, element proudnice

je $\delta \vec{l} = \vec{x}' - \vec{x}$

a rychlost \vec{u}' v bodě \vec{x}' je $\vec{u}' = \vec{u} + (\delta \vec{l} \nabla) \vec{u}$, pak časová derivace elementu proudnice



$$\frac{d}{dt} \delta \vec{l} = \frac{d}{dt} (\vec{x}' - \vec{x}) = \vec{u}' - \vec{u} = (\delta \vec{l} \nabla) \vec{u} \quad .$$

Upravíme rovnici pro časovou derivaci B s využitím známé vektorové identity

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{B} \operatorname{div} \vec{u} + (\vec{B} \nabla) \vec{u} - (\vec{u} \nabla) \vec{B}$$

Pokud tuto rovnici zkombinujeme s rovnicí kontinuity, dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{B}}{\rho} \right) + (\vec{u} \nabla) \left(\frac{\vec{B}}{\rho} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{B}}{\rho} \right) = \left(\frac{\vec{B}}{\rho} \nabla \right) \vec{u}$$

Změny vektorů $\delta \vec{l}$ a \vec{B}/ρ jsou dány stejnou rovnicí, tudíž magnetické siločáry sledují pohyb plazmatu, jsou do plazmatu jakoby *vmraženy*.

Pro povrch S pohybující se spolu s plazmatem platí $\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = 0$ (Alfvénův teorém)

Hydromagnetická rovnováha

Vyjdeme z rovnic $\rho_M \frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B}$ $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Rovnováha $\frac{d\vec{u}}{dt} \simeq \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla p = \vec{j} \times \vec{B}$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \Rightarrow (\vec{B} \times \nabla p) = B^2 \vec{j} - (\vec{j} \cdot \vec{B})\vec{B}$$

pro složku $\parallel B$ splněno vždy, \vec{j}_{\parallel} odtud nelze určit ($\vec{j}_{\parallel} = \sigma_E E_{\parallel}$)

$$\vec{j}_{\perp} = \frac{\vec{B} \times \nabla p}{B^2} \quad (\text{rot } \vec{B}) \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} \times \vec{B}) = \mu_0 (\vec{j}_{\perp} \times \vec{B}) = \mu_0 \left(\frac{\vec{B} \times \nabla p}{B^2} \times \vec{B} \right) = \mu_0 \nabla p$$

$$\nabla \left(p + \frac{1}{\mu_0} \frac{B^2}{2} \right) = \frac{1}{\mu_0} \underbrace{(\vec{B} \nabla) \vec{B}}_{\text{často} = 0} \Rightarrow p + \frac{1}{\mu_0} \frac{B^2}{2} = \text{const.} \quad \text{diamagnetický efekt}$$

$$B^2/2\mu_0 = \text{magnetický tlak}$$

$$\beta = \frac{p}{B^2} = \frac{\sum n_\alpha k_B T_\alpha}{B^2}$$

$$\frac{2\mu_0}{2\mu_0}$$

termokinetický tlak/magnetický tlak

(parametr β zařízení udává poměr maximálního termokinetického tlaku k maximálnímu magnetickému tlaku)

Neideální MHD – difúze plazmatu do magnet. pole

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \vec{j} = \sigma_E (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

budeme předpokládat $u \approx 0$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0 \sigma_E} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0 \sigma_E} \Delta \vec{B}$$

$$\tau = L^2 \mu_0 \sigma_E$$

τ je doba průniku plazmatu do pole

Jde o dobu disipace \vec{B} - přeměna energie pole v teplo

$$W = \frac{j^2}{\sigma_E} = \frac{1}{\sigma_E} \frac{B^2}{\mu_0^2 L^2} \quad \text{kde bylo použito} \quad |\vec{j}| = \frac{1}{\mu_0} |\text{rot } \vec{B}| = \frac{B}{\mu_0 L}$$

odtud energie disipovaná

$$W\tau = \frac{1}{\sigma_E} \frac{B^2}{\mu_0^2 L^2} \cdot L^2 \mu_0 \sigma_E = \frac{B^2}{\mu_0}$$

Proudění a zároveň průnik

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \sigma_E} \Delta \vec{B} + \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B})$$

první člen je difúze, druh člen je zamrzání (pole se pohybuje spolu s prouděním)

Magnetické Reynoldsovo číslo

$$R_M = \frac{\text{člen zamrzání}}{\text{člen difúze}} = \frac{\frac{1}{L} u B}{\frac{1}{\sigma_E \mu_0} \frac{1}{L^2} B} = \sigma_E \mu_0 u L$$

Nestability hnané gradientem tlaku

1. **Rayleigh-Taylorova nestabilita** rozhraní kapalin, pokud

$$\nabla p \cdot \nabla \rho < 0$$

disperzní vztah vln

$$\omega^2 = \frac{kg(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 + \rho_2}$$

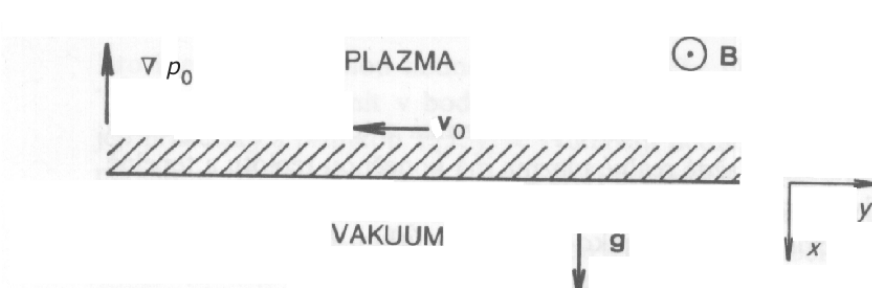


pro $\rho_2 < \rho_1$ vlny na povrchu kapaliny

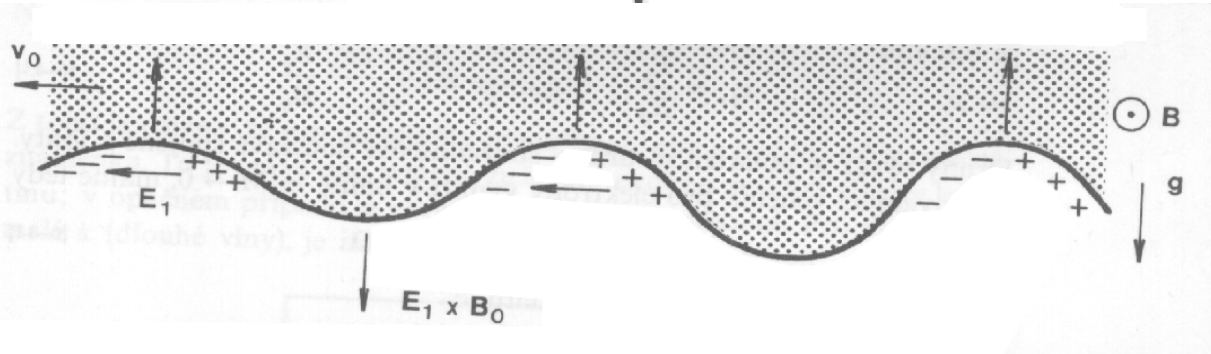
pro $\rho_2 > \rho_1$ $\omega_1 = i\gamma$ amplituda roste \Rightarrow nestabilita

2. **Nestabilita plazmatu drženého magnetickým polem (Kruskal-Schwartzschildova)**

B lehčí kapalina, plazma těžší kapalina



Drift iontů $\vec{v}_0 = \frac{m_i}{q_i} \frac{\vec{g} \times \vec{B}_0}{B_0^2}$,
drift elektronů lze zanedbat



V důsledku pohybu iontů se na
zvlněném povrchu vytváří náboj, ten indukuje elektrické pole, a to působí $E \times B$
drift iontů a elektronů, který zvětšuje vlny

Odvození z 2 kapalinového modelu (lze též z MHD):

ionty – pohybové rovnice

$$m_i \left[\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_0 \nabla) \vec{v}_1 \right] = q_i (\vec{E}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{B}_0) \quad \text{neobsahuje } g \text{ (je v rychlosti } v_0)$$

$$\vec{E}_1 = (0, E_y, 0)$$

$$\vec{k} = (0, k_y, 0)$$

$$-i(\omega - k_y v_0) \vec{v}_1 m_i = q_i (\vec{E}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{B}_0)$$

$$\text{pro } (\omega - kv_0)^2 \ll \frac{q_i^2 B_0^2}{m_i^2} = \Omega_c^2 \Rightarrow v_{1x} = \frac{E_{1y}}{B_0} \quad v_{1y} = -i \frac{\omega - kv_0}{\Omega_c} \frac{E_{1y}}{B_0}$$

v_{1x} je $E \times B$ drift (pro ionty i elny), v_{1y} polarizační drift (pro elny zanedbatelný)
 rovnice kontinuity pro ionty

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla n_1 + n_1 \text{div } \vec{v}_0 + \vec{v}_1 \cdot \nabla n_0 + n_0 \text{div } \vec{v}_1 = 0$$

$$-i\omega n_1 + ikv_0 n_1 + v_{1x} \nabla n_0 + ikv_{1y} n_0 = 0$$

rovnice kontinuity pro elektrony $-i\omega n_1 + v_{1x} \nabla n_0 = 0$, kde jsme předpokládali
 $Z=1$ a kvazineutralitu $n_{i1} = n_{e1}$ po dosazení získáme disperzní vztah

$$\omega = \frac{1}{2} kv_0 \pm \sqrt{\frac{1}{4} k^2 v_0^2 + \frac{\vec{g} \cdot \nabla n_0}{n_0}}$$

čili dostatečně dlouhé vlny narůstají, pokud gradient hustoty jde proti tíhovému zrychlení