

Ionozvukové vlny (elektrostatické nízkofrekvenční vlny)

jsou podélné vlny podobné klasickému zvuku

v plynu
$$c_s = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{\gamma k_B T}{M} \right)^{1/2}$$

plazma – zvuk pomalý pro elektrony, rychlý pro ionty

Hustota elektronů je v každém okamžiku v rovnováze s okamžitým potenciálem:

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\Phi_1}{k_B T_e}\right) = n_0 \left(1 + \frac{e\Phi_1}{k_B T_e} + \dots\right)$$

$$n_1 = n_0 \frac{e\Phi_1}{k_B T_e} \quad \text{elektrony jsou izotermální } (\gamma = 1)$$

Elektrické pole lze odvodit i z požadavku zachování kvazineutality – suma sil na elektrony = 0

$$eE_1 = -e\nabla\Phi_1 = -\frac{1}{n_0} \nabla p_{e1} = -\frac{k_B T_e}{n_0} \nabla n_1 = -ik k_B T_e \frac{n_1}{n_0} \Rightarrow E_1$$

hydrodynamické rovnice pro iontovou tekutinu

$$i\omega n_{i1} = n_{i0} ikv_{i1}$$

$$-i\omega Mv_{i1} = -\frac{\nabla p_{i1}}{n_{i0}} + ZeE_1$$

$$n_{i0} = \frac{n_0}{Z}$$

$$E_1 = -\nabla\Phi = -ik\Phi_1$$

Poissonova rovnice není potřeba

~~$$-\varepsilon_0 \Delta\Phi_1 = Zen_{i0} - en_1 = e(Zn_{i1} - n_1)$$~~

pomalý pohyb \rightarrow kvazineutralita $Zn_{i1} = n_1$

vyjádříme $\Phi_1 = \frac{k_B T_e}{en_0} n_1 = \frac{k_B T_e}{en_0} Zn_{i1} \Rightarrow$ pohybová rovnice

$$-i\omega Mn_{i0} v_{i1} = -ik\gamma_i k_B T_i n_{i1} - ikk_B T_e Zn_{i1} - \text{pohyb iontů}$$

$$i\omega n_{i1} = n_{i0} ikv_{i1} \quad \text{rovnice kontinuity}$$

\Rightarrow disperzní vztah

$$\omega^2 = \underbrace{\left(\frac{\gamma_i k_B T_i + Z k_B T_e}{M} \right)}_{c_s^2} \cdot k^2$$

obvykle ionty adiabatické $\gamma_i = 5/3$

Pokud je $ZT_e \approx T_i$, pak je silný bezesrážkový útlum na iontech,
fázová rychlost $c_s \approx$ iontová tepelná rychlost

Iontozvukové vlny pro $ZT_e \gg T_i$ slabě tlumené

zvuková rychlost

$$c_s \approx \sqrt{\frac{Z k_B T_e}{M}}$$

Použité plazmatické přiblížení neplatí pro velká k srovnatelná s λ_{De}^{-1} . Proto odvodíme disperzní vztah bez plazmatického přiblížení:

$$\nabla \vec{E}_1 = -\Delta \Phi_1 = k^2 \Phi_1 = e(Zn_{i1} - n_{e1}) / \varepsilon_0$$

$$n_{e1} = \frac{e\Phi_1}{k_B T_e} n_0$$

dosadíme do Poissonovy rovnice

$$\Phi_1 \left(k^2 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 k_B T_e} \right) = \frac{Z e n_{i1}}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_1 = \frac{Z e n_{i1}}{\varepsilon_0} \frac{\lambda_{De}^2}{1 + k^2 \lambda_{De}^2}$$

dosadíme potenciál Φ_1 do pohybové rovnice iontů

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{Zk_B T_e}{M} \frac{1}{1 + k^2 \lambda_{De}^2} + \frac{\gamma_i k_B T_i}{M} \right)^{1/2}$$

Disperzní vztah iontozvukové vlny se při započtení odchylky od kvazineutrálnosti liší jen členem $k^2 \lambda_{De}^2$,

nejjednodušší vztah pro $k \gg \lambda_{De}^{-1}$ a $T_i = 0$

$$\omega^2 = \frac{n_0 Z e^2}{\epsilon_0 M} = \frac{n_{i0} Z^2 e^2}{\epsilon_0 M} = \omega_{pi}^2$$

... iontová plazmová frekvence

Elmg. vlny v plazmatu bez vnějšího magnetického pole B_0

Maxwellovy rovnice

převédeme na vlnovou rovnici

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}\end{aligned}\quad \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

Vliv plazmatu dán hustotou vysokofrekvenčního proudu \vec{j} (elektronový dominuje)
Fluidní rovnice pro elektrony – rovnice pro střední rychlost elektronového plynu

$$\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + (\vec{v}_e \nabla) \vec{v}_e = -\frac{1}{n_e m_e} \nabla p_e - \frac{e}{m_e} (\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B})$$

Studujeme lineární (tj. slabou) elektromagnetickou vlnu, linearizace

$$\vec{E} = \vec{E}_1 \quad \vec{B} = \vec{B}_1 \quad \vec{j} = \vec{j}_1 \quad \vec{v}_e = \vec{v}_1 \quad n_e = n_0 + n_1 \quad p_e = p_0 + p_1$$

Magnetická síla $-e (\vec{v}_1 \times \vec{B}_1)$ zanedbána (malá 2. řádu)

$$\vec{v}_1 \parallel \vec{E}_1, \quad \text{div} \vec{E}_1 = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{v}_1 = 0, \quad n_1 = 0 \Rightarrow p_1 = 0$$

elektronová hustota se nemění, rovnice pro elektronovou rychlost se zjednoduší

$$\frac{\partial \vec{v}_{e1}}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \vec{E}_1 \quad \text{proudová hustota}$$

$$\vec{j}_1 = -en_0 \vec{v}_1 = -en_e \vec{v}_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{j}_1}{\partial t} = -en_e \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = \frac{e^2 n_e}{m_e} \vec{E}_1$$

Pro monochromatickou vlnu s frekvencí ω a časovou závislostí $\exp(-i\omega t)$

$$\vec{v}_1 = -\frac{ie\vec{E}_1}{m_e\omega} \quad \vec{j}_1 = \sigma \vec{E}_1 = \frac{ie^2 n_e}{m_e\omega} \vec{E}_1$$

Relativní permitivita pro elektromagnetickou (příčnou) vlnu ϵ_r^{tr}

$$\epsilon_r^{tr} = 1 + \frac{i\sigma}{\epsilon_0\omega} = 1 - \frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e \omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \quad (\text{není prostorová dispersze})$$

Vložíme vztah pro hustotu proudu do vlnové rovnice

$$-\Delta \vec{E}_1 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}_1}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e} \vec{E}_1$$

Pro vlnu s vlnovým vektorem \vec{k} získáme disperzní vztah

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k^2$$

Jestliže započteme i iontový proud, pak $\omega_{pe}^2 \rightarrow \omega_p^2$

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r^{tr} = \omega^2 (1 - \omega_p^2 / \omega^2) / c^2$$

$$\text{fázová } v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{c^2 + \omega_p^2 / k^2} \qquad \text{grupová } v_g = \frac{d\omega}{dk} = c^2 k / \omega = c^2 / v_\varphi$$

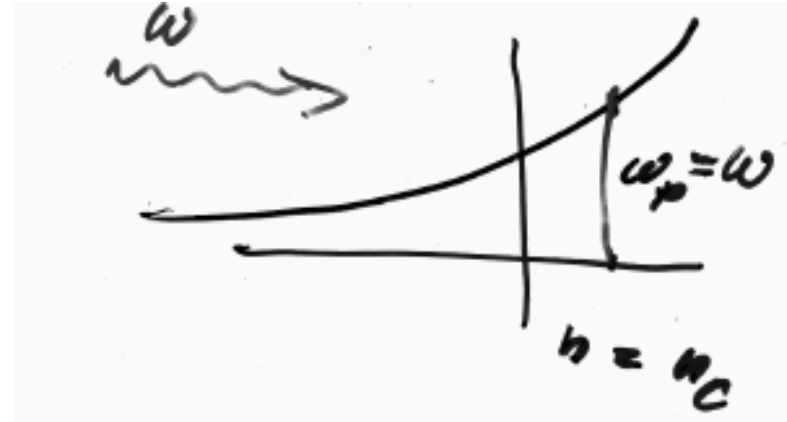
pro $\omega < \omega_p \rightarrow k^2 < 0$ vlna se nešíří, do plazmatu proniká pouze skin-efektem

pro $\omega \rightarrow \omega_{p+}$ $k \rightarrow 0$ a dochází k úplnému odrazu (mezní frekvence)

!! žádná absorpce v bezsrážkovém přiblížení

$$n_c = \frac{\epsilon_0 m_e \omega^2}{e^2}$$

$$\text{Re}(\epsilon_r) = 1 - \frac{n_e}{n_c} \quad n_c - \text{kritická hustota}$$



$$n_c = 10^{21} \text{ cm}^{-3} \quad \rightarrow \quad \lambda = 1,06 \text{ } \mu\text{m} \quad (\text{Nd-laser})$$

$$n_c = 10^{19} \text{ cm}^{-3} \quad \rightarrow \quad \lambda = 10,6 \text{ } \mu\text{m} \quad (\text{CO}_2\text{-laser})$$

$$n_c = 10^{13} \text{ cm}^{-3} \quad \rightarrow \quad \lambda = 1,06 \text{ cm} \quad (\text{cm vlny})$$

Srážková absorpce (také nazývána inverzní brzdné záření)

Srážky elektronů s jinými typy částic způsobují absorpci (pro jednoduchost dominance budeme předpokládat dominanci elektron-iontových srážek)

Absorpce fotonu při srážce s iontem je proces, do kterého se při **obrácení času** změně emise brzdného záření.

Odvození absorpčního koeficientu z mikroskopického popisu – zdlouhavé.

Makroskopicky - srážky \Rightarrow tření, které zpomaluje oscilace elektronů
 Rovnice pro rychlost elektronového plynu se započtením elektron-iontové srážkové frekvence ν_{ei}

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \nu_{ei} \vec{v}_1 = -\frac{e}{m_e} \vec{E}_1$$

Pro monochromatickou vlnu o frekvenci ω s časovou závislostí $\exp(-i\omega t)$

$$\vec{v}_1 = -\frac{ie\vec{E}_1}{m_e(\omega + i\nu_{ei})}$$

$$\vec{j}_1 = \sigma \vec{E}_1 = \frac{ie^2 n_e}{m_e(\omega + i\nu_{ei})} \vec{E}_1 = i \frac{\omega e^2 n_e}{m_e(\omega^2 + \nu_{ei}^2)} \vec{E}_1 + \frac{\nu_{ei} e^2 n_e}{m_e(\omega^2 + \nu_{ei}^2)} \vec{E}_1$$

Část proudu ve fázi s elektrickým polem \Rightarrow Joulov ohřev, absorpce
 Výkon absorbovaný v jednotce objemu

$$W = \langle \vec{j}_1 \cdot \vec{E}_1 \rangle = \frac{1}{2} \Re \{ \vec{j}_1 \cdot \vec{E}_1^* \} = \frac{1}{2} \frac{\nu_{ei} e^2 n_e}{m_e(\omega^2 + \nu_{ei}^2)} |\vec{E}_1|^2$$

Relativní permitivita - komplexní s kladnou imaginární částí

$$\varepsilon_r^{tr} = 1 + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0\omega} = 1 - \frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e \omega (\omega + i\nu_{ei})} \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_{ei}^2} + i \frac{\nu_{ei}}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_{ei}^2}$$

Vlnový vektor je pak dán výrazem

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r^{tr} = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_{ei}^2} + i \frac{\nu_{ei}}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_{ei}^2} \right)$$

Imaginární část – pokles amplitudy elektrického pole ve směru šíření

Absorbovaná energie je transformována do **elektronové tepelné energie**, ionty nejsou přímo ohřívány. Jelikož je výměna energie mezi elektrony a ionty pomalý proces, elektronová teplota v koruně laserových terčů je obvykle vyšší než iontová teplota.

Kolmý dopad elektromagnetické vlny na rovinné plazma

Permitivita závisí jen na souřadnici x ($\varepsilon_r = \varepsilon_r(x)$) a vlnový vektor je ve směru osy x

$$\text{rot } E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

$$\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$$

$$\text{rot } B - \mu_0 \frac{\partial D}{\partial t} = 0$$

$$\text{div } \vec{D} = 0 = \varepsilon \text{ div } \vec{E} + \underbrace{\vec{E} \nabla \varepsilon}_0 \Rightarrow \text{div } \vec{E} = 0$$

pokud charakteristický čas změny hustoty $\tau \gg \omega^{-1}$ $\varepsilon_r(x, t) \rightarrow \varepsilon_r(x)$

$$\Delta E - \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega \quad E \sim e^{-i\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r E = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r \quad \text{stacionární vlnová rovnice}$$

pokud $\lambda \left| \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \right| \ll 1 \Rightarrow \varepsilon$ pomalu proměnné v prostoru

WKB přiblížení

$$E = E_+(x) e^{i \int k dx} + E_-(x) e^{-i \int k dx} \quad E'' = \left[\underbrace{-k^2 E_+}_{0. \text{řád}} + \underbrace{2ik \frac{\partial E_+}{\partial x} + i \frac{\partial k}{\partial x} E_+}_{1. \text{řád}} + \underbrace{\frac{\partial^2 E_+}{\partial x^2}}_{2. \text{řád}} \right] e^{i \int k dx} + \dots$$

$$0. \text{řád} \quad k^2 E_+ = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r E_+ \quad \text{splněno}$$

$$1. \text{řád} \quad 2ik \frac{\partial E_+}{\partial x} + i \frac{\partial k}{\partial x} E_+ = 0 \quad E \sim k^{-1/2} \sim \varepsilon_r^{-1/4}$$

$$E = \frac{E_{0+}}{\sqrt[4]{\varepsilon_r}} e^{i \int k dx} + \frac{E_{0-}}{\sqrt[4]{\varepsilon_r}} e^{-i \int k dx} \quad \text{WKB řešení (žádný odraz!!)}$$

Existují profily hustoty (permitivity), kde WKB řeší úlohu přesně

Okolí kritického bodu – $\varepsilon \rightarrow 0$ - WKB neplatí

nalezneme řešení pro lineární profil hustoty n_e

relativní permitivita $\varepsilon_r = -ax + iS$ kde $S = \frac{v_c}{\omega}$ v kritické ploše

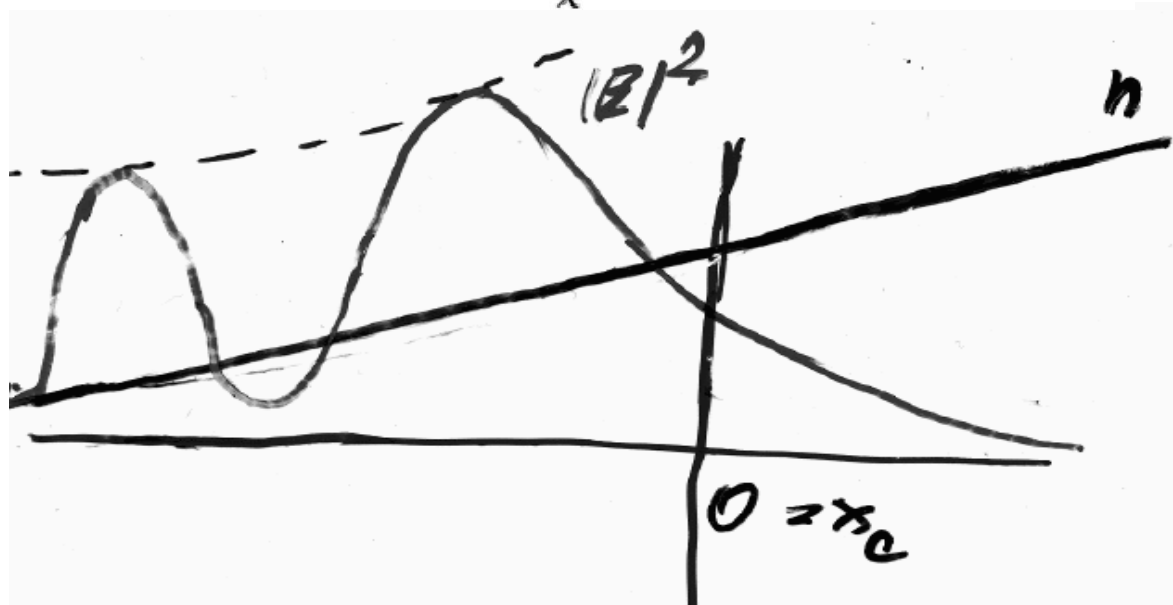
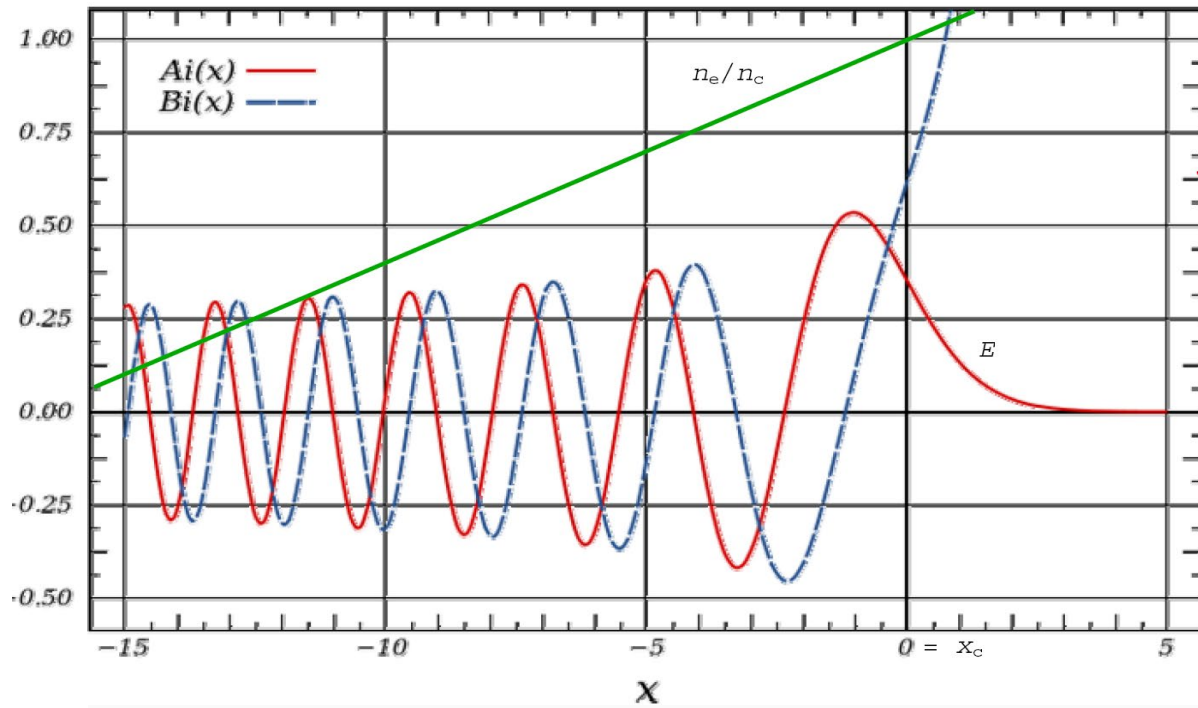
Hustota plazmatu tedy roste ve směru osy x – pole musí jít k 0 pro $x \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2}(-ax + iS)E = 0 \quad \xi = \left(\frac{\omega}{ca}\right)^{2/3}(-ax + iS) \Rightarrow \frac{d^2 E}{d\xi^2} + \xi E = 0$$

Existuje přesné řešení splňující okrajovou podmínku

$$E = 3C \text{Ai}(-\xi) \quad \text{Ai} = \underline{\text{Airyho funkce}}$$

$$= \begin{cases} C \xi^{1/2} \left[J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \xi^{3/2} \right) + J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \xi^{3/2} \right) \right] & \text{Re}(\xi) > 0 \\ C (-\xi)^{1/2} \left[I_{1/3} \left(\frac{2}{3} (-\xi)^{3/2} \right) + I_{-1/3} \left(\frac{2}{3} (-\xi)^{3/2} \right) \right] & \text{Re}(\xi) < 0 \end{cases}$$

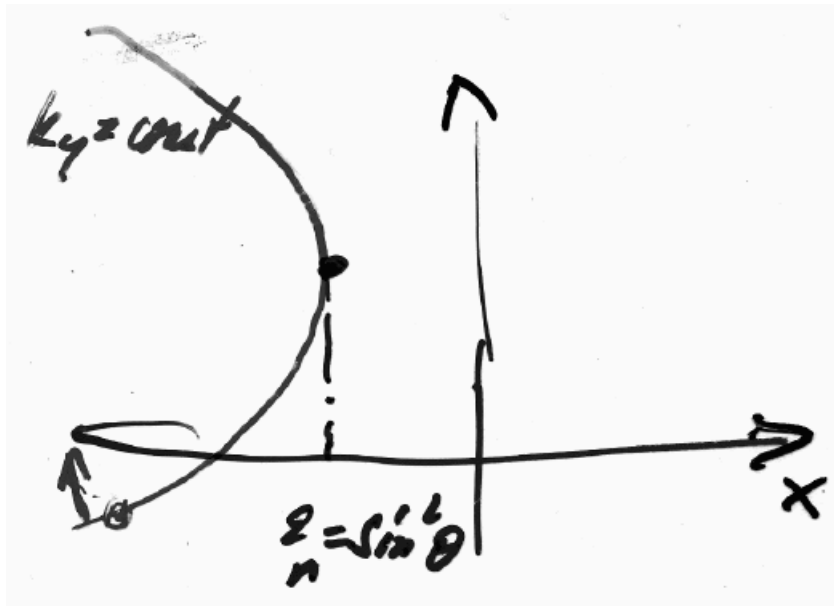


Šikmý dopad vlny a rezonanční absorpce

Permitivita závisí jen na souřadnici x ($\epsilon_r = \epsilon_r(x)$) a vlnový vektor $\vec{k} = (k_x, k_y, 0)$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 = k_x^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 \theta_0$$

bod odrazu $\text{Re}(\epsilon_r) = \sin^2 \theta_0$



$\odot E$ }
 $\nwarrow B$ } TE vlna =
 s-polarizace

$\odot B$ }
 $\nwarrow E$ } TM vlna =
 p-polarizace

p-polarizace

$$\vec{E} \cdot \nabla \epsilon \neq 0$$

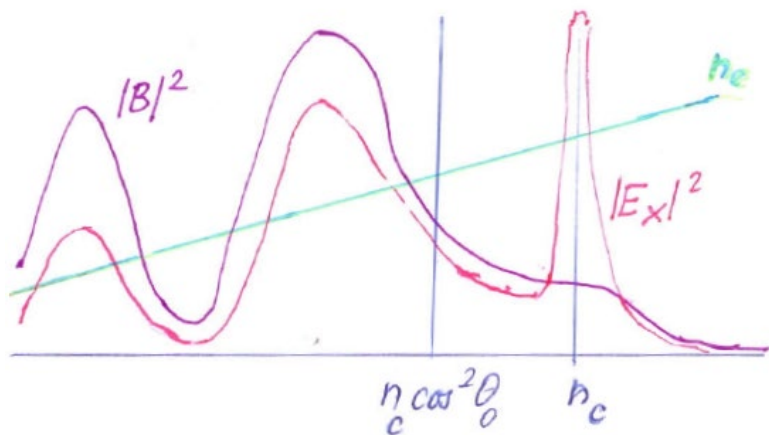
$$\text{div } \vec{E} \neq 0$$

$$\frac{d^2 B}{dx^2} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dx} \frac{dB}{dx} + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_r - \sin^2 \theta_0) B = 0$$

$$E_x = -\frac{k_y B}{\omega \mu_0 \varepsilon} = -\frac{\sin \theta_0}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \cdot \frac{B}{\varepsilon_r} \quad \text{v kritické ploše singularita}$$

Rezonanční absorpce $t \rightarrow l$ (příčná elmg. vlna se mění v podélnou plazmovou)

- l nemůže z plazmatu uniknout – absorpce srážkami nebo bezesrážkově



v principu lineární jev – existuje i při malých intenzitách I

$$\text{při } \frac{v}{\omega} \rightarrow 0 \quad A = f(q) \quad q = (k_0 L)^{2/3} \sin^2 \theta_0$$

$$\theta_0 \rightarrow 0 \quad E_x \Big|_{x_c} \rightarrow 0 \quad \text{kolmý dopad – není } E_x$$

$$L \rightarrow \infty \quad E_x \Big|_{x_c} \rightarrow 0 \quad \text{bod odrazu daleko od } x_c$$

K rezonanční absorpci dochází v důsledku skinování pole od bodu odrazu do kritické plochy, kde je pole elmg. vlny v rezonanci s plazmovou vlnou a pro p-polarizaci vytváří poruchy hustoty náboje, které obě vlny vážou navzájem.

$$\frac{B(x_c)}{B_0} \cong \frac{2(\pi \cos \theta_0)^{1/2}}{3^{1/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)(k_0 L)^{1/6}} \quad (\text{pro malá } q)$$

$$q \ll 1 \quad A = q \left(1 - \frac{2}{3}q\right)$$

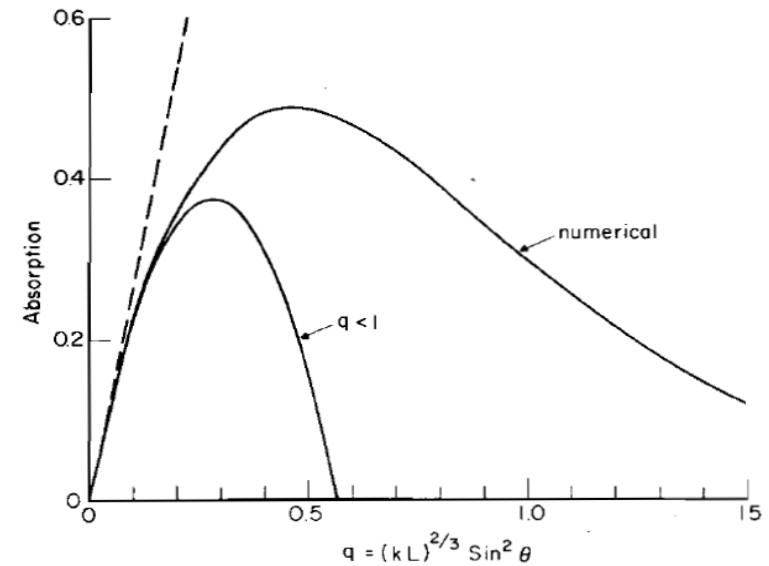
$$q \gg 1$$

$$A = 2 \exp\left(-\frac{4}{3}q^{3/2}\right) - \exp\left(-\frac{8}{3}q^{3/2}\right)$$

maximální $A \approx 0.5$ při $q \approx 0.65$

srážky $\varepsilon(x_c) = i \frac{v_c}{\omega}$

$$E_z(x_c) = \frac{\sin \theta_0}{\frac{v_c}{\omega}} B(x_c) \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$



Šířka maxima Δ

$$\underbrace{\frac{|n - n_c|}{n_c}}_{\frac{\Delta}{L}} = \frac{v_c}{\omega} \Rightarrow \Delta = \frac{v_c}{\omega} L$$

Absorbovaná energie

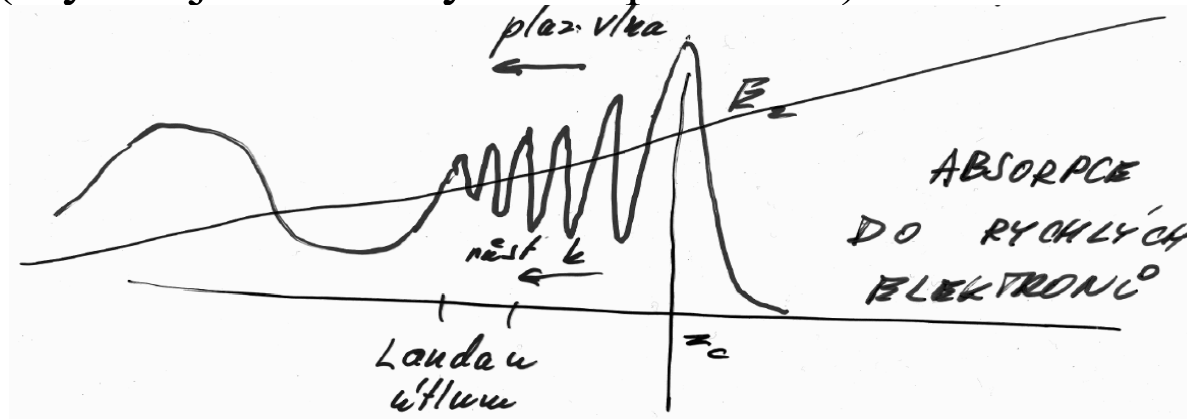
$$W = \frac{\omega}{c} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{v_{ei}}{\omega} |E|^2 dz \simeq \frac{v_c}{\omega} \frac{\omega}{c} |E_z(x_c)|^2 \cdot \Delta = \frac{\omega v_c}{c \omega} \frac{\sin^2 \theta_0}{\left(\frac{v_c}{\omega}\right)^2} B^2(x_c) c^2 \cdot \left(\frac{v_c}{\omega}\right) L$$

$$W = \omega c B^2(x_c) \times L \sin^2 \theta_0 \quad \text{nezávisí na } v_c$$

Teplé plazma (prostorová disperze podélného pole)

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \vec{D} = \varepsilon_r^{tr} \vec{E} + \frac{3v_{Te}^2}{c^2} \left[\text{grad div} \vec{E} - \frac{1}{3} \frac{\nabla \varepsilon_r^{tr}}{\varepsilon_r^{tr} - 1} \text{div} \vec{E} \right]$$

Plazmová vlna se šíří z kritické plochy do řidšího plazmatu, při poklesu hustoty roste vlnové číslo k , a tedy klesá v_ϕ tak, až se stane srovnatelnou s tepelnou rychlostí \Rightarrow Landauův útlum (urychluje elektrony ven z plazmatu)



Při vyšších intenzitách se plazmová vlna tlumí nelineárním mechanismem lámání vln (wavebreaking) – energie je předána malé skupině tzv. „horkých (rychlých) elektronů“. Elektrony jsou urychlovány jak do terče, tak i k hranici plazmatu s vakuem, kde se ale většina elektronů odrazí v elektrostatickém poli dvojvrstvy („sheath“) zpět do terče.

Nelinearity při šíření elektromagnetických vln v plazmatu

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e \omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

A. $\rightarrow m_e$ – *relativistická nelinearita*

$$m_e = \frac{m_{e0}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{m_{e0}}{\sqrt{1 - \frac{e^2 |E_L|^2}{2 m_e^2 c^2 \omega^2}}} \quad (\text{pro } v_{\text{osc}} \gg v_{Te})$$

pokud $v_{\text{osc}} \ll c \Rightarrow \varepsilon_r = 1 - \frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_{e0} \omega^2} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{e^2 |E_L|^2}{m_{e0}^2 c^2 \omega^2} \right)$

nelinearita $\delta\varepsilon \sim |E_L|^2 / \omega^2 \sim I \lambda^2$ - kvadratická nelinearita – permitivita **roste** s kvadrátem pole

B. $\rightarrow n_e$ - změnu hustoty způsobí ponderomotorická síla nebo gradient tlaku

a) ponderomotorická nelinearita

$$F_p = -\frac{\rho}{2\rho_c} \varepsilon_0 \nabla \langle E^2 \rangle = -\frac{\rho}{4\rho_c} \varepsilon_0 \nabla |E_L|^2$$

$$F_p - \nabla p = 0$$

Ponderomotorická síla vytlačuje plazma z oblasti intenzivního pole \Rightarrow vznikne grad hustoty \Rightarrow grad tlaku.

V rovnováze grad tlaku vyrovnává ponderomotorickou sílu:

$$-\frac{n_e}{4n_c} \varepsilon_0 \nabla |E_L|^2 - k_B T_e \nabla n_e = 0 \quad \Rightarrow \quad n_e = n_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_0 |E_L|^2}{4k_B T_e n_c}\right)$$

pro malé I – kladná kvadratická nelinearita $\delta\varepsilon \sim |E_L|^2 / n_c \sim I\lambda^2$

b) tepelná – v maximu pole se plazma nejvíce zahřeje a hustota se sníží, aby byl tlak konstantní

Projevy nelinearity

A. *Vznik filamentů (intenzivních zón uvnitř laserového svazku)*

Kvadratické prostředí $\varepsilon_R = \varepsilon_L + \varepsilon_2 \langle E^2 \rangle$

Vlna $E = E_0 \cos(k_0 x - \omega t)$ $E \parallel z$ $\delta E \parallel z$

Porucha (pro jednoduchost periodická ve směru kolmém k E)

$$\delta E = [e_1(x) \cos(k_0 x - \omega t) + e_2(x) \sin(k_0 x - \omega t)] \cdot \cos(k_{\perp} y)$$

e_1 je složka poruchy ve fázi s hlavní rovinnou vlnou

$$\varepsilon = \varepsilon_L + \varepsilon_2 \langle (E + \delta E)^2 \rangle = \underbrace{\varepsilon_L + \frac{1}{2} \varepsilon_2 E_0^2}_{\varepsilon_m} + \varepsilon_2 e_1(x) E_0 \cos(k_{\perp} y)$$

porucha pole vyvolává poruchu permitivity periodickou v y

$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_m \quad \text{vlnový vektor v homogenním prostředí}$$

označení $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + (\partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2) = \nabla_{\parallel}^2 + \nabla_{\perp}^2$

$$2ik_0 \frac{\partial \delta E}{\partial x} + \nabla_{\perp}^2 \delta E + \frac{\omega^2}{c^2} \delta \varepsilon E_0 = 0 \quad \text{vlnová rovnice pro poruchu}$$

rozepsaná po složkách

$$-2k_0 \frac{de_2}{dx} - k_{\perp}^2 e_1 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 E_0^2 e_1 = 0 \quad \sim \cos(k_0 x - \omega t)$$

$$\sim \sin(k_0 x - \omega t)$$

$$2k_0 \frac{de_1}{dx} - k_{\perp}^2 e_2 = 0$$

Předpoklad: $e_1(x) \sim e^{k_{\parallel} x} \quad k_{\parallel} = \pm \frac{k_{\perp}}{2k_0} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 E_0^2 - k_{\perp}^2}$

Čím větší intenzita záření, tím užší poruchy mohou narůstat

$$\text{max. růst} \quad k_{\parallel} = \frac{\omega \varepsilon_2 E_0^2}{4c\sqrt{\varepsilon_m}} \quad \text{pro} \quad k_{\perp}^2 = \frac{\omega^2}{2c^2} \varepsilon_2 E_0^2$$

Laserový svazek se nakonec rozpadne do několika intenzivních zón - při pozorování z boku se tvoří vlákna (filamenty)

B. Autofokuzace (samofokuzace - self-focusing)

Laserový svazek se fokusuje jako celek – při kvadratické nelinearitě se pro velké I dříve vytvoří filamenty

Vlnová rovnice (ε_L je lineární a $\delta\varepsilon$ nelineární část permitivity)

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [(\varepsilon_L + \delta\varepsilon) E] = 0$$

$$E = \Psi(x, y, z, \xi) \exp(ikx - i\omega t)$$

$$\xi = t - \frac{x}{v_g}$$

Ψ je pomalu proměnná komplexní amplituda vlny

$$\left(2ik \frac{\partial}{\partial x} + \nabla_{\perp}^2 \right) \Psi = -k^2 \frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon_L} \Psi$$

parabolická rovnice

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon_L / c^2$$

$$\Psi = A \exp(i\varphi)$$

Ψ rozepíšeme na reálnou amplitudu a fázi

Rozepíšeme na rovnici pro amplitudu a fázi

$$k \frac{\partial}{\partial x} A^2 = -\nabla_{\perp} (A^2 \nabla_{\perp} \varphi) \dots$$

popisuje transport energie

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi + \frac{1}{2k} (\nabla_{\perp} \varphi)^2 - \frac{k}{2} \left(\frac{\nabla_{\perp}^2 A}{k^2 A} + \frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon} \right) = 0$$

tvar vlnoplochy

difrakce

refrakce

Pro kolimovaný svazek

$$\nabla_{\perp} \varphi = 0$$

K samofokuzaci kolimovaného svazku dochází, pokud je refrakce větší než difrakce

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} > -\frac{\nabla_{\perp}^2 A}{k^2 A}$$

Pro Gaussovský svazek

$$A = A_0 \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right)$$

V cylindrické geometrii je

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

a podmínka pro samofokuzaci má tvar $\frac{\varepsilon_2 A_0^2}{\varepsilon_L} > \frac{2}{k^2 a^2}$

Protože $A_0^2 a^2 \sim P$, k samofokuzaci dochází, pokud je výkon svazku $P > P_0$ – prahový výkon pro samofokuzaci [pro relativistickou NL je $P_0 \approx 17.5(n_c / n_e)$ GW].

V ideální situaci by se podle uvedených rovnic Gaussovský svazek fokusoval do bodového ohniska, ale v okolí ohniska neplatí přiblížení pomalu proměnné amplitudy.

Elmg. vlny v plazmatu s vnějším magnetickým polem B_0

Uvažujeme homogenní stacionární magnetické pole B_0 .

Plazma je **anizotropní**, odvodíme **tenzor vodivosti** σ_{ij} a z něj spočteme tenzor **vysokofrekvenční permitivity** ε_{ij} .

Budeme uvažovat vysokofrekvenční vlny, a proto pro jednoduchost zanedbáme iontový proud. Dále budeme pro jednoduchost uvažovat chladné plazma a zanedbáme vliv gradientu vysokofrekvenčního tlaku.

Nechť osa z je ve směru B_0 . Nechť slabé vysokofrekvenční pole E_1 (B_1 lineární vodivost neovlivní) má frekvenci ω . Plazma je bezesrážkové. Pak

$$\vec{u}_1 = -i \frac{e}{m_e \omega} \vec{E}_1 - i \frac{\omega_c}{\omega} \vec{u}_1 \times \hat{z}$$

Magnetické pole neovlivní vodivost ve směru z a pro směry x, y získáme

$$u_{1x} = -i \frac{\omega e E_{1x}}{m_e (\omega^2 - \omega_c^2)} - \frac{e \omega_c E_{1y}}{m_e (\omega^2 - \omega_c^2)}$$

$$u_{1y} = \frac{e \omega_c E_{1x}}{m_e \omega^2 (\omega^2 - \omega_c^2)} - i \frac{\omega e E_{1y}}{m_e (\omega^2 - \omega_c^2)}$$

Proud je $\vec{j}_1 = -en_{e0} \vec{u}_1 = \vec{\sigma} \vec{E}_1$ a permitivita je $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r,ij} = \varepsilon_0 \left(\delta_{ij} + i \frac{\sigma_{ij}}{\omega \varepsilon_0} \right)$

$$\vec{\varepsilon}_r = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} & i \frac{\omega_c}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} & 0 \\ -i \frac{\omega_c}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{pmatrix}$$

Z Maxwellových rovnic získáme vlnovou rovnici

$$i\vec{k} \times \vec{E} - i\omega \vec{B} = 0 \quad i\vec{k} \times \vec{B} + i\omega \varepsilon_0 \vec{\varepsilon}_r \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\varepsilon}_r \vec{E} = 0$$

Souřadný systém lze zvolit tak, aby $\vec{k} = (k_x, 0, k_z)$ a nenulové řešení homogenní rovnice existuje jen, pokud je determinant roven 0.

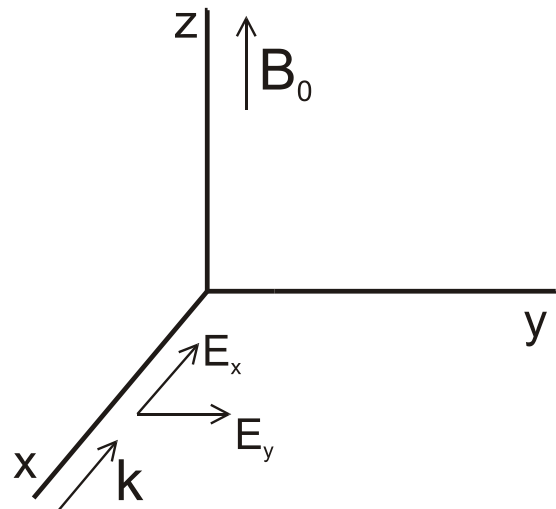
$$\det \begin{pmatrix} k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{r,xx} & -\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{r,xy} & -k_x k_z \\ -\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{r,yx} & k_x^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{r,yy} & 0 \\ -k_x k_z & 0 & k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{r,zz} \end{pmatrix} = 0$$

A. šíření kolmo k magnetickému poli $k_z=0$

pokud $\vec{E} \parallel \vec{B}_0$ B_0 neovlivní vlnu - **vlna řádná (ordinary)-O**

3. řádek determinantu

$$k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{r,zz} = 0 \Rightarrow \omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$$



$\vec{E} \perp \vec{B}_0$ **vlna mimořádná (extraordinary) - X**
ovlivněna polem B_0 - 1. a 2. řádek a sloupec det.

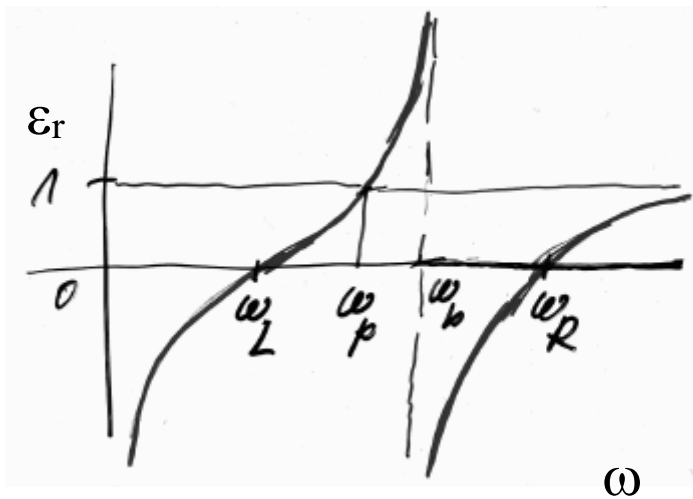
$$\Rightarrow v_{1y} \Rightarrow F_x \sim v_{1y} \times B_0 \rightarrow v_{1x} \Rightarrow j_x \Rightarrow E_x$$

Disperzní vztah pro X vlnu je ($\omega_h^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2$)

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \frac{c^2 k_x^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2}$$

Relativní permitivita plazmatu pro vlnu X (kvadrát indexu lomu n)

$$\epsilon_r = n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2}$$



permitivita $\epsilon_r = \pm\infty$ pro $\omega = \omega_h$

permitivita $\epsilon_r = 0$ pro $\omega_L = \frac{1}{2} \left[-\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} \right]$

a pro $\omega_R = \frac{1}{2} \left[\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} \right]$

pro $\omega \rightarrow \omega_{h-}$ nastává rezonance ($k \rightarrow \infty$) \Rightarrow úplná absorpce vlny

bod $\omega \rightarrow \omega_{R+}, \omega_{L+}$ jsou mezní frekvence ($k \rightarrow 0$) \Rightarrow úplný odraz vlny

B. $k \parallel B_0$ (šíření podél magnetického pole $k_x = 0$)

$$\det \begin{pmatrix} k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{r,xx} & -\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{r,xy} \\ -\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{r,yx} & k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{r,yy} \end{pmatrix} = 0$$

Levotočivá (L vlna)

$$\epsilon_r = n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{1 + \frac{\omega_c}{\omega}}$$

ω_L - mezní frekvence, šíření pro $\omega > \omega_L$

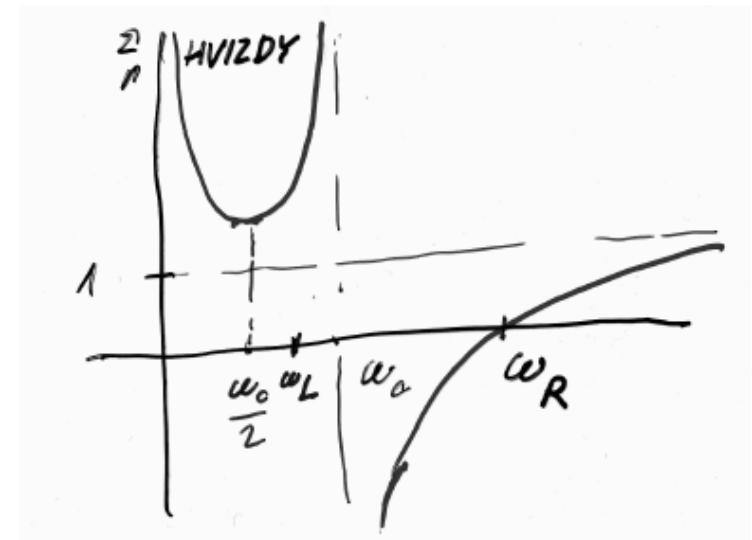
Pravotočivá (R vlna) – cyklotronová rotace elektronů je pravotočivá - rezonance!!

$$\epsilon_r = n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega_c}{\omega}}$$

šíří se pro $\omega > \omega_R$

a pro $\omega < \omega_c$ (hvizdy) – rezonance pro ω_c

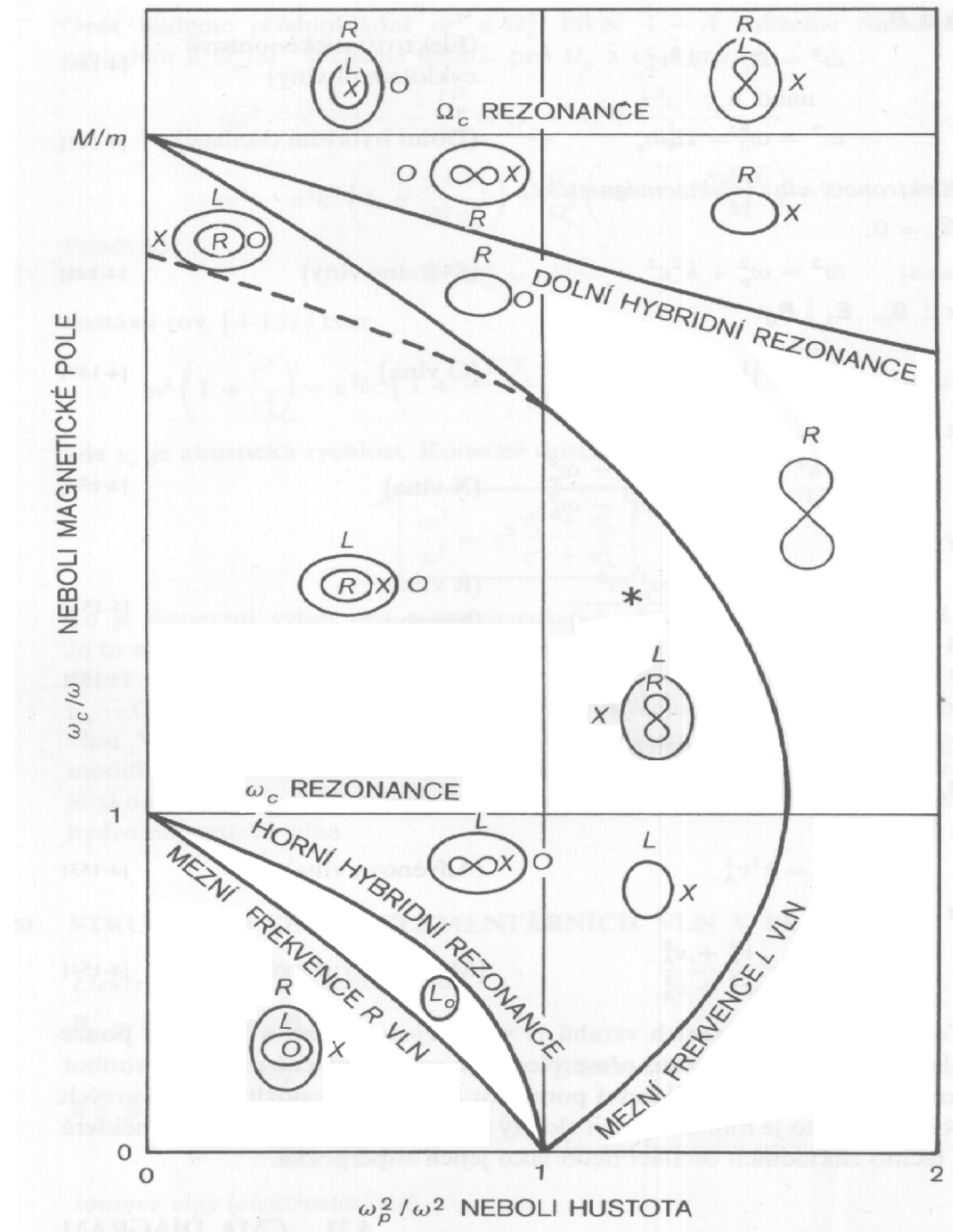
permitivita pro R vlnu



CMA diagram (pro elektromagnetické vlny)

Obsahuje

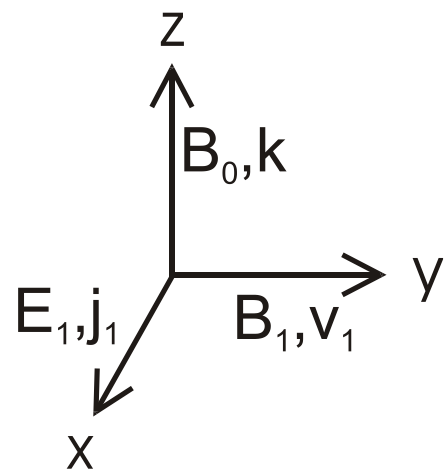
- hranice mezi jednotlivými oblastmi typů šíření
- svisle – šíření podél B, vodorovně – kolmo k B
- závislost fázové rychlosti na směru šíření
- přechod mezi typy vln při změně směru šíření



lontové elektromagnetické vlny (hydromagnetické vlny)

– existují jen v přítomnosti B_0

a) $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$ – **Alfvénova vlna**



elektronová hustota

$$i\vec{k} \times \vec{E}_1 = i\omega\vec{B}_1$$

$$\frac{1}{\mu_0} i\vec{k} \times \vec{B}_1 + i\omega\epsilon_0\vec{E}_1 = n_0e(\vec{v}_i - \vec{v}_e)$$

$$0 = -e\vec{E}_1 - e\vec{v}_e \times \vec{B}_0$$

$$-i\omega M_i \vec{v}_i = Ze\vec{E}_1 + Ze\vec{v}_i \times \vec{B}_0$$

pohybové rovnice

$$v_{ex} = 0 \quad v_{ey} = \frac{\vec{E}_1 \times \vec{B}_0}{B_0^2} \quad \text{E} \times \text{B drift}$$

$$v_{iy} = -i \frac{ZeB_0}{\omega M_i} v_{ix} = -i \frac{\Omega_c}{\omega} v_{ix} \quad \Omega_c = \frac{ZeB_0}{M_i} \quad \text{iontová cyklotronová}$$

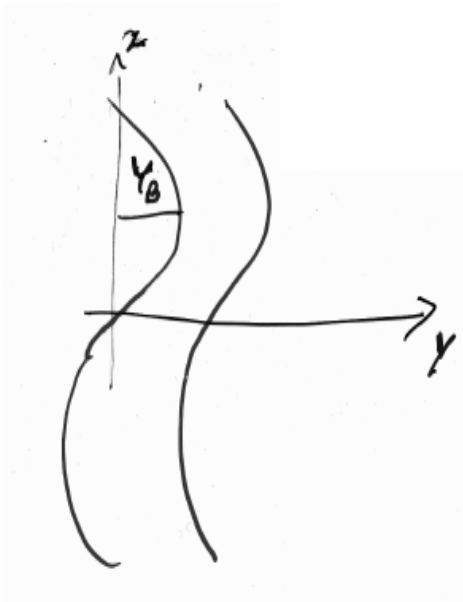
$$v_{ix} = i \frac{ZeE_{1x}}{\omega M_i \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)}$$

$$\omega_{pi}^2 = \frac{Ze^2 n_0}{\epsilon_0 M_i}$$

iontová plazmová frekvence

dosadíme proud do vlnové rovnice \Rightarrow disperzní vztah $1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_c^2 - \omega^2} = 0$

pro $\omega^2 \ll \Omega_c^2$ $\omega^2 = \frac{k^2 v_A^2}{1 + \left(\frac{v_A}{c}\right)^2}$ kde $v_A^2 = \frac{c^2 \Omega_c^2}{\omega_{pi}^2} = \frac{c^2 B_0^2 \epsilon_0}{\rho_M}$ Alfvénova rychlost



$$Y_B(z, t) = \int \frac{B_y(z', t)}{B_0} dz' \quad v_B = -i\omega Y_B = -\frac{\omega B_y}{k B_0} \quad B_y = \frac{k}{\omega} E_x$$

Y_B posun polohy siločáry, v_B rychlost pohybu siločáry

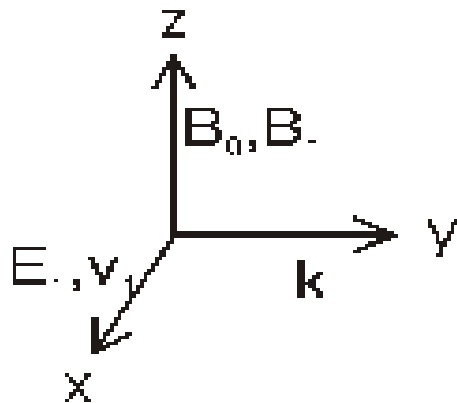
$$\Rightarrow v_B = -\frac{E_x}{B_0} = v_D$$

Plazma se pohybuje stejnou rychlostí jako siločára
Magnetické siločáry jsou „zamrzlé v plazmatu“

Alfvénovy vlny – příčné vlny „na struně“
 (Hannes Alfvén – Nobelova cena – 1970)

Struna \cong magnetická siločára

b) $\vec{k} \perp \vec{B}_0$ – magnetozvuková vlna $\vec{E} \perp \vec{B}_0$



disperzní vztah pro studené plazma

$$\omega^2 = \frac{k^2 v_A^2}{1 + \frac{v_A^2}{c^2}} \approx k^2 v_A^2$$

pro $T_e \neq 0$ působí navíc tlak

$$\omega^2 = k^2 \frac{v_A^2 + c_s^2}{1 + \frac{v_A^2}{c^2}} \approx k^2 (v_A^2 + c_s^2)$$