Podminenost matice

Co a k cemu je podminenost matice? Muzeme pomoci ni odhadnout, jak moc se nam projevi chyby v zadani a ve vypoctu v konecnem reseni. Predpokladejme, ze resime soustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ale vysledek $\mathbf{x}^*$ nam nevyjde uplne presne. Ve skutecnosti tedy neplati $\mathbf{Ax}^* = \mathbf{b}$, ale plati neco jako $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$. Z rovnice $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ a vlastnosti norem nam plyne nerovnost

$$\|\mathbf{x}\| \;\geq\; \frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{A}\|}\ . \tag{1}$$

Dale z rovnice $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$ muzeme vyjadrit $\Delta\mathbf{x}$ jako

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) &= \mathbf{Ax} + \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} \;=\; \mathbf{b} + \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} \;=\; \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} \Rightarrow \\
\Delta\mathbf{x} &= \mathbf{A^{-1}}\Delta\mathbf{b}\ .
\end{aligned}$$

Pro normu $\|\Delta\mathbf{x}\|$ tedy z vlastnosti norem plati odhad

$$\|\Delta\mathbf{x}\| \;\leq\; \|\mathbf{A^{-1}}\Delta\mathbf{b}\ . \tag{2}$$

Vydelenim obou vyse uvedenych nerovnosti ziskame odhad relativni chyby reseni jako

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \;\leq\; \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A^{-1}}\|\frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}\ . \tag{3}$$

Cislo $\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A^{-1}}\|$ se oznacuje jako C_p a nazyva podminenost matice.

Pokud je matice $\mathbf{A}$ spatne podminena $C_p \gg 1$ a i pro male chyby ve vypoctu muzeme dostat velmi nepresne reseni. To se tyka i metod pouzivajicich pivoting.
Priklad: Resime 2 velmi podobne soustavy linearnich rovnic s jen nepatrne odlisnou pravou stranou. Prvni soustava je

$$\begin{aligned}
x + y &= 2 \\
x + 1.0001y &= 2.0001\ .
\end{aligned}$$

Tato soustava ma reseni $x = 1$, $y = 1$.
Druha soustava je

$$\begin{aligned}
x + y &= 2 \\
x + 1.0001y &= 2.0002\ .
\end{aligned}$$

Tato soustava ma vsak jiz reseni $x = 0$, $y = 2$. Vidime tedy, ze pri velmi male zmene prave strany doslo k velmi postatne zmene vysledku. Podminenost teto matice priblizne 40004.

Soutez :-) Pokuste se najit matici 2x2 s co nejvetsi podminenosti. Matici si definujte v Matlabu prikazem **A=[1 2;3 4];** a podminenost vypocitejte prikazem **norm(A)*norm(inv(A));**.

Co je teda ta spatna podminenost? V matici $\mathbf{A}$ nebo v matici $\mathbf{A}^{-1}$ musi byt nejake hodne velke cislo. To je typicke u matic u kterych jsou radky (rovnice soustavy) temer linearne zavisle. Vyzkousejte si spocitat podminenost matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 100 & 1 \\ 1.001 & 0.01 \end{pmatrix}$$

Radky teto matice jsou skoro linearne zavisle. V Matlabu **A=[100 1;1.001 0.01];**.
Nyni zkuste spodni radek vynasobit 100.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 100 & 1 \\ 100.1 & 1 \end{pmatrix}$$

Radky jsou opet skoro linearne zavisle, ale stejneho radu. V Matlabu **A=[100 1;100.1 1];**. Podminenost matice se zlepsila o 2 rady. Nicmene dal jiz pravdepodobne vylepsit nejde.