Vlny v plazmatu

lineární $\times$ nelineární

Lineární vlny - malá porucha určitého stacionárního konstantního nebo v čase a/nebo v prostoru pomalu proměnného stavu

Lineární rozvoj veličin

$$a = a_0 + a_1(\vec{r}, t) \qquad b = b_0 + b_1(\vec{r}, t)$$

a_0, b_0 mohou obecně být funkcemi $\vec{r}$, t

Součiny $a_1^2, a_1 \cdot b_1, b_1^2$ zanedbáme (malé 2.řádu)

V neohraničeném prostředí $\quad a_1 = \int a_{\vec{k}} \exp(i\vec{k}\vec{r})\, \mathrm{d}\vec{k}$ $\quad$ Fourierův rozvoj

Poruchy se vyvíjejí nezávisle na sobě, stačí zkoumat vývoj periodických poruch.

Často nás budou zajímat vlastní módy, tj. řešení ve tvaru

$$a = \mathrm{Re}\left\{a_1 \cdot \exp\left[i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)\right]\right\}$$

Vlastní módy jsou jednou z charakteristik prostředí. Budeme hledat disperzní vztah $\omega = \omega(\vec{k})$

Způsob popisu

- Dvoukapalinová hydrodynamika - jednoduchý, ale v některých případech neúplný popis prostředí
- Vlasovova rovnice

Rozdělení vln

- Podélné vlny x příčné vlny
- Vysokofrekvenční (elektronové) vlny x nízkofrekvenční
- Plazma bez stacionárního *B* x plazma v magnetickém poli

Plazmové vlny

(doručená literatura – Chen 4.3, 4.4, 7.4 nebo Nicholson 6.3-6.8,7.3,7.4)

podélné vlny - rychlost $\vec{u} \parallel \vec{k}$

vysokofrekvenční (v 1. přiblížení $m_i \to \infty$)

Uvažujeme malé odchylky od homogenního stacionárního stavu

$$n_e = n_0 + n_1(\vec{r}, t) \qquad \vec{u}_e = \underbrace{\vec{u}_0}_{=\vec{0}} + \vec{u}_1(\vec{r}, t) \qquad n_0 = Zn_i$$

Rovnice kontinuity

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div}(n_e \vec{u}_e) = 0$$

0. řád $\quad \dfrac{\partial n_0}{\partial t} + \operatorname{div}(n_0 \vec{u}_0) = 0 \qquad n_0 = const.$

1. řád $\quad \dfrac{\partial n_1}{\partial t} + \operatorname{div}\left(n_1 \underbrace{\vec{u}_0}_{0} + n_0 \vec{u}_1 \right) = 0 \qquad$ zanedbáme $\cancel{n_1 \vec{u}_1} = 2.$ řád

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0$$

Změny hustoty elektronů –> $\vec{E} = 0 + \vec{E}_1(\vec{r}, t)$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{q_e}{\varepsilon_0}(n_e - Zn_i) \qquad \operatorname{div}\vec{E}_1 = \frac{q_e}{\varepsilon_0} n_1$$

Pohybová rovnice (zákon zachování hybnosti)

$$\frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} + (\vec{u}_e \nabla)\vec{u}_e = \frac{q_e}{m_e}\vec{E} - \frac{\nabla p_e}{m_e n_e} - \nu_{ei}(\vec{u}_e - \vec{u}_i)$$

$$\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \nu_{ei} \cdot \vec{u}_1 = \frac{q_e}{m_e}\vec{E}_1 - \frac{\nabla p_1}{m_e n_0} \qquad (\nabla p_0 = 0)$$

Budeme předpokládat řešení tvaru $e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$ (k reálné)

$$a(\vec{r}, t) = \operatorname{Re}\left(A\,\mathrm{e}^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\right) = \operatorname{Re}\left(A^*\,\mathrm{e}^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega^* t)}\right)$$

$$a = \frac{1}{2}(A\,\mathrm{e}^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} + c.c.)$$

Velká písmena – komplexní amplitudy

Studené plazma bez srážek (vypadnou poslední členy na obou stranách pohyb.rce)

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0$$

$$-i\,\omega N_1 + n_0 i\,k\,U_{\|} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E}_1 = -\frac{e}{\varepsilon_0} n_1$$

$$i\,k\tilde{E}_{\|} + \frac{e}{\varepsilon_0} N_1 = 0$$

$$\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \vec{E}_1$$

$$-i\,\omega U_{\|} + \frac{e}{m_e} \tilde{E}_{\|} = 0$$

$$\vec{u}, \vec{E} \parallel \vec{k}$$

$$\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} + \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m_e} n_1 = 0 \qquad \omega_{pe}^2 = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m_e} \qquad U_{\|} = \frac{\omega}{k} \cdot \frac{N_1}{n_0} \qquad \tilde{E}_{\|} = \frac{i\,e}{\varepsilon_0 k} N_1$$

Oprava na ionty

$$\omega_p^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 \qquad \omega_{pi}^2 = \frac{Z e^2 n_0}{\varepsilon_0 m_i}$$

Reakce na vysokofrekvenční pole $\vec{E}_1$ (může být vnější nebo vnitřní)

$$\vec{j}_e = -e\left(n_0\vec{u}_1 + \underbrace{n_1\vec{u}_0}_{0}\right) = \underbrace{\frac{ie^2 n_0}{m_e\omega}}_{\sigma_E}\vec{E}_1$$

$$\varepsilon_0 \operatorname{div}\vec{E} = \rho \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0 \qquad \operatorname{div}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\vec{E}\right) = -\operatorname{div}\vec{j}$$

frekvence ω

$$-i\omega \operatorname{div}\left(\varepsilon_0\vec{E} + \frac{i\vec{j}}{\omega}\right) = 0$$

$$\operatorname{div}\varepsilon_0\underbrace{\left(1 + \frac{i\sigma_E}{\omega\varepsilon_0}\right)}\vec{E} = 0$$

vlastní vlny náboje

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m_e \omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$\varepsilon\vec{E} = 0$$

$$\vec{E} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_r = 0$$

a tedy disperzní vztah $\omega = \omega_p$ nezávisí na $k \Rightarrow$ plazmové oscilace

Vliv srážek

$$\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \nu_{ei} \cdot \vec{u}_1 = -\frac{e}{m_e}\vec{E}_1 \qquad \frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} + \nu_{ei} \cdot \frac{\partial n_1}{\partial t} + \omega_p^2 n_1 = 0$$

řešení $\sim e^{-i\omega t}$ $\quad \omega_{1,2} = -i\frac{\nu_{ei}}{2} \pm \sqrt{\omega_p^2 - \frac{\nu_{ei}^2}{4}} \quad n_1 = n_{10} e^{-i\omega_p t} e^{-\frac{\nu_{ei}}{2}t}$ tlumené osc.

Vliv tlaku (nenulové teploty)

při $T = 0$ $\quad \vec{\mathrm{v}}_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\vec{k}} = \vec{0}$ ale když $T \neq 0$, poruchy se šíří

prostorový tvar poruchy se zachovává, zvolíme $\vec{k} = k\,\hat{x} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_1 = u_1 \hat{x}$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{e}{m_e}E_1 - \frac{1}{m_e n_0}\underbrace{\frac{\partial}{\partial r_j}P_{1xj}}_{\frac{\partial}{\partial x}P_{1xx}}$$

adiabatický děj, $\omega > \nu_{ei} \Rightarrow$ srážky nestačí izotropizovat rozdělovací funkci

Neporušený tlak $p_0 = n_0 k_B T_0$ (skalár, T_0 elektronová teplota)
Porucha tlaku napříč vlnovému vektoru je dáno pouze změnou hustoty

$$P_{1yy} = P_{1zz} = n_1 k_B T_0 \qquad \left(T_{1\perp} = 0\right)$$

V podélném směru práce tlaku se musí změnit v tepelnou energii

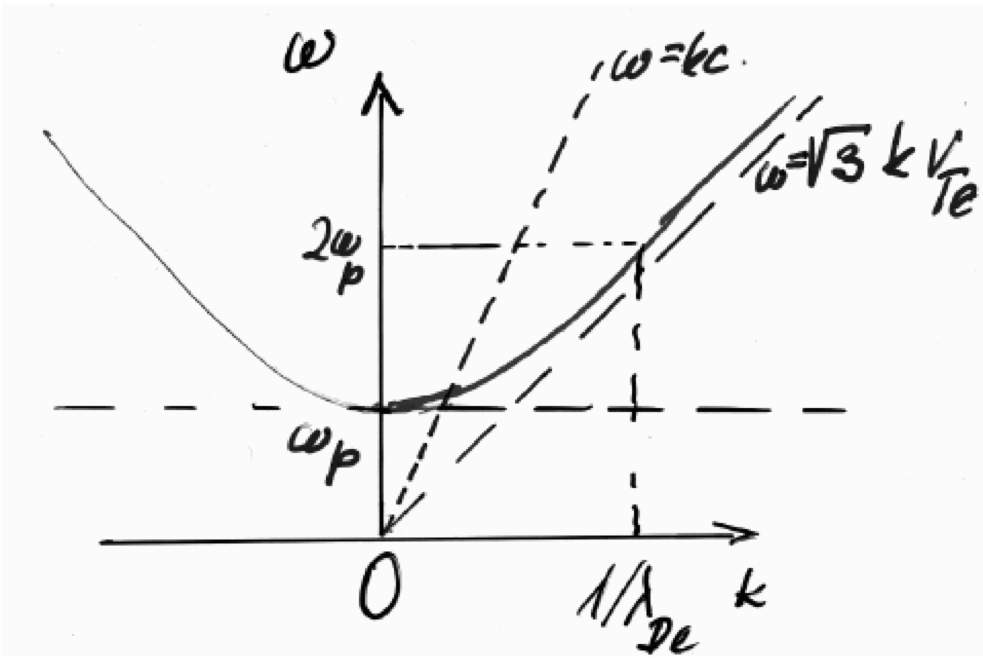
$$\underbrace{\frac{1}{2} n_0 V_0 k_B \,\mathrm{d}T_{\parallel}}_{\mathrm{d}U} = -p_0 \,\mathrm{d}V = p_0 V_0 \frac{\mathrm{d}n}{n_0} \qquad \mathrm{d}n \to n_1, \quad \mathrm{d}T_{\parallel} \to T_{1\parallel}$$

$$\Rightarrow k_B T_{1\parallel} = \frac{2p_0}{n_0^2} n_1 = \frac{2k_B T_0}{n_0} n_1 \qquad P_{1xx} = n_1 k_B T_0 + n_0 k_B T_{1\parallel} = 3k_B T_0 n_1$$

V podélném směru se elektrony chovají jako částice s 1 stupněm volnosti (γ=3)

$$\frac{\partial}{\partial t} u_1 = -\frac{e}{m_e} E_1 - \frac{3k_B T}{m_e n_0} \frac{\partial n_1}{\partial x} \qquad \Rightarrow \frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} - \frac{3k_B T_0}{m_e} \frac{\partial^2 n_1}{\partial x^2} + \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m_e} n_1 = 0$$

Plazmová vlna se šíří $\omega^2 = \omega_p^2 + 3k^2 \mathrm{v}_{Te}^2 \qquad \left(\mathrm{v}_{Te}^2 = k_B T_e / m_e\right)$



Disperzní vztah $\omega^2 = \omega_p^2 + 3k^2 \mathrm{v}_{Te}^2$

$$\mathrm{v}_\varphi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{3\mathrm{v}_{Te}^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2}}$$

$$\mathrm{v}_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{3k\mathrm{v}_{Te}^2}{\sqrt{\omega_p^2 + 3k^2\mathrm{v}_{Te}^2}}$$

$$\mathrm{v}_g = \frac{3\mathrm{v}_{Te}^2}{\mathrm{v}_\varphi}$$

prostředí s časovou a prostorovou disperzí $\varepsilon_r^{(l)}\left(\omega,\vec{k}\right) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{3k^2\mathrm{v}_{Te}^2}{\omega^2}$

Popis pomocí Vlasovovy rovnice

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \vec{\mathrm{v}}\frac{\partial f_e}{\partial \vec{r}} - e\vec{E}\frac{\partial f_e}{\partial \vec{p}} = 0$$

řešení $f_0(\vec{p})$, $\vec{E}_0 = 0$

Poruchy $f_1(\vec{r},\vec{p}), \vec{E}_1$, $\vec{k} = \hat{x}k$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathrm{v}_\mathrm{x}\frac{\partial f_1}{\partial x} - eE_1\frac{\partial f_0}{\partial p_x} = 0$$

Řešení tvaru exp(ikx-$i\omega t$)

$$f_1 = i\frac{eE_1}{\omega - k\mathrm{v}_x}\frac{\partial f_0}{\partial p_x}$$

porucha nemusí být malá pro $\mathrm{v}_\mathrm{x} = \mathrm{v}_\varphi = \omega / k$

$\Rightarrow$ ***rezonanční elektrony***

$$\mathrm{div}\,\vec{E}_1 = -\frac{e}{\varepsilon_0}n_1 = -\frac{e}{\varepsilon_0}\int f_1 \mathrm{d}\vec{p}$$

$$ikE_1 = -\frac{e}{\varepsilon_0}\int i\frac{eE_1}{\omega - k\mathrm{v}_x}\frac{\partial f_0}{\partial p_x}\mathrm{d}\vec{p}$$

$$ik\varepsilon_0\underbrace{\left(1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 k}\int\frac{1}{\omega - k\mathrm{v}_x}\frac{\partial f_0}{\partial p_x}\mathrm{d}\vec{p}\right)}_{\varepsilon_r}E_1 = 0$$

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\int\frac{g(p_x)}{\left(1 - \frac{k\mathrm{v}_\mathrm{x}}{\omega}\right)^2}\mathrm{d}p_x$$

kde $g(p_x) = n_0^{-1}\int f_0(\vec{p})\mathrm{d}p_y\mathrm{d}p_z$

Při $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} \gg v_{Te}$ použijeme Taylorův rozvoj, rezonanční elektrony zanedbáme

(při v_φ > c nejsou vůbec žádné rezonanční elektrony)

$$\varepsilon_r \cong 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\int g(p_x)\left(1 + \frac{2k\mathrm{v_x}}{\omega} + \frac{3k^2\mathrm{v_x^2}}{\omega^2}\right)\mathrm{d}p_x \qquad \text{předp. } \langle \mathrm{v}_x \rangle = u_x = 0$$

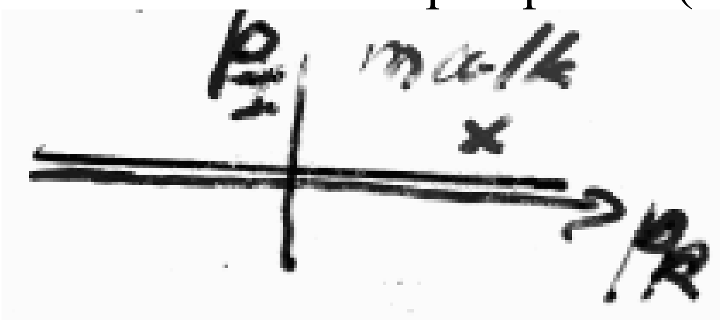
Pak $$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{3k^2\mathrm{v}_{Te}^2}{\omega^2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad \Rightarrow \qquad \omega^2 \cong \omega_p^2 + 3k^2\mathrm{v}_{Te}^2$$

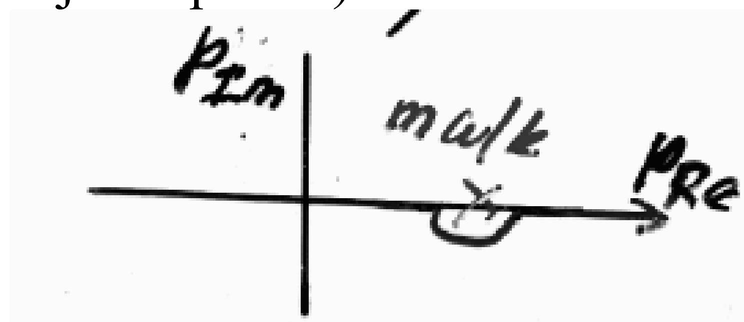
Při v_φ < c ? co s pólem v integrálu – odpověď musíme hledat řešením počáteční úlohy, tj. porucha je zadána na počátku v čase t_0 a sledujeme, jak se vyvíjí
Pro řešení počáteční úlohy musíme použít Laplaceovu transformaci

Laplaceův obraz je definován integrálem $A(\omega) = \int_{t_0}^{\infty} a(t)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{d}t$ pro ω s dostatečně velkou kladnou imaginární částí (pro *a(t)* omezené je to pro Im(ω) > 0)
Pro ostatní ω získáme Laplaceův obraz analytickým prodloužením funkce

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{m_e \omega_p^2}{k} \int \frac{1}{\omega - k\mathrm{v}_\mathrm{x}} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p_x}\, \mathrm{d}p_x$$

Pro Im(ω) > 0 leží integrační cesta pod pólem, při analytickém prodloužení musí cesta zůstat nadále pod pólem (musíme pól obejít zespodu !)



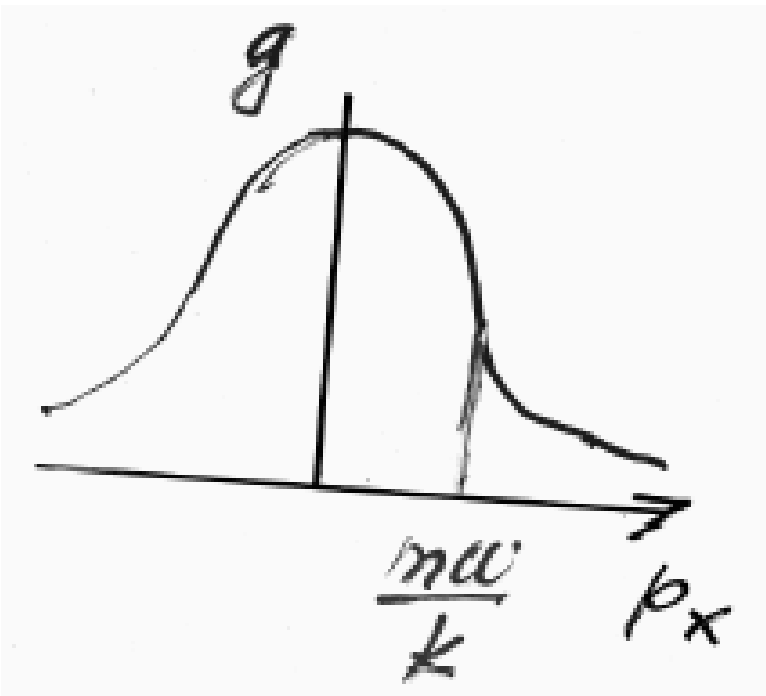


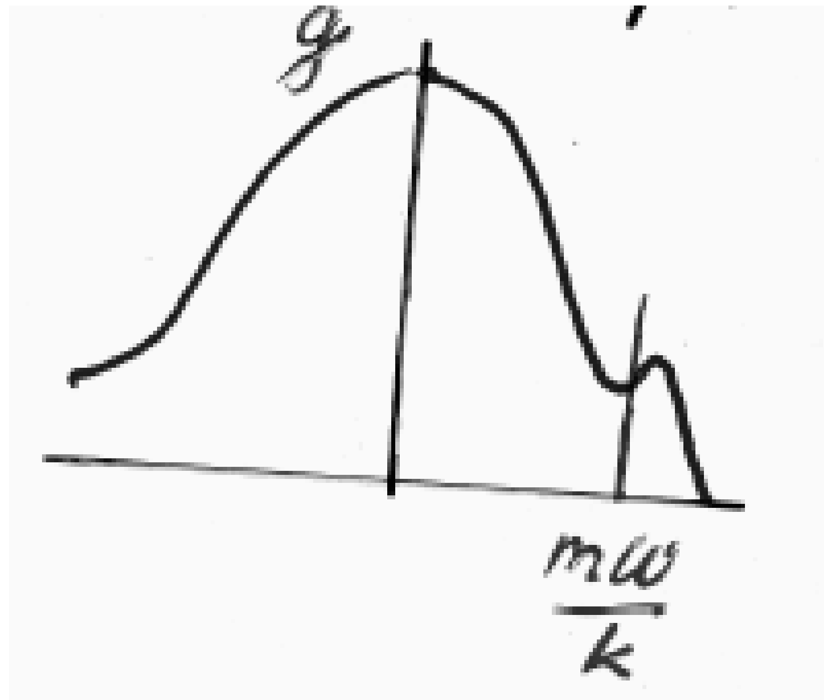
Z reziduové věty víme že integrál přes polokružnici dá $i \times \pi \times$reziduum
Pro ω/k << c je

$$\frac{1}{\omega - k\mathrm{v}_x} = -\frac{m_e}{k} \frac{1}{p_x - \frac{m_e \omega}{k}} = -\frac{m_e}{k} \frac{\mathrm{P}}{p_x - \frac{m_e \omega}{k}} - i\pi \frac{m_e}{k} \delta\left(p_x - \frac{m_e \omega}{k} \right)$$

Zde **P** označuje integrál ve smyslu hlavní hodnoty

Pro ω reálné je
$$\operatorname{Im} \varepsilon_r(\omega,k) = -\pi\, \omega_p^2 \frac{m_e^2}{k^2} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p_x}\bigg|_{p_x=\frac{m_e\omega}{k}}$$





Im(ε_r) > 0 Im(ε_r) < 0

Hledáme komplexní $\omega = \omega_R + i\,\omega_I$ takové, že $\varepsilon_r(\omega,k) = 0$

Slabě tlumené (pomalu rostoucí) vlny $|\omega_I| << \omega_R$

$$\varepsilon_r(\omega_R + i\omega_I) = \mathrm{Re}\,\varepsilon_r(\omega_R) + i\,\mathrm{Im}\,\varepsilon_r(\omega_R) + i\omega_I \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Re}\,\varepsilon_r(\omega_R)}{\mathrm{d}\omega_R} = 0$$

Pro $\omega_R/k >> \mathrm{v}_{Te}$ je $\mathrm{Re}\,\varepsilon_r(\omega_R) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_R^2} - \frac{3k^2\mathrm{v}_{Te}^2}{\omega_R^2} = 0$

a tedy $\omega_R^2 = \omega_p^2 + 3\,k^2\mathrm{v}_{Te}^2$

imaginární část frekvence je

$$\omega_I = -\frac{\mathrm{Im}\,\varepsilon_r(\omega_R)}{\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Re}\,\varepsilon_r(\omega_R)}{\mathrm{d}\,\omega_R}} = \pi\,\omega_p^2 \frac{m_e^2\omega_R}{2k^2} \left.\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p_x}\right|_{p_x = \frac{m_e\omega_R}{k}}$$

Vývoj je $\exp(-i\omega_R t)\exp(\omega_I t)$ - rychlost Landauova útlumu je $\gamma_L = -\omega_I$

Pro Maxwellovo rozdělení je $\omega_I = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_p^2\omega_R^2}{k^3\mathrm{v}_{Te}^3} \exp\left(-\frac{\omega_R^2}{2\,k^2\mathrm{v}_{Te}^2}\right)$

Energie plazmové vlny

$$-\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E^2 = -\vec{j}\vec{E} \qquad\qquad E = \frac{1}{2}\left(\tilde{E}\, e^{-i\omega_R t} + \tilde{E}^*\, e^{i\omega_R t}\right)$$

$\tilde{E}$ je komplexní amplituda, *R* značí reálnou část, středuji přes čas $\left\langle \ \right\rangle_{\frac{2\pi}{\omega_R}}$

$$\frac{\varepsilon_0}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\tilde{E}\right|^2 = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{Re}\,\sigma(\omega)\right)\left|\tilde{E}\right|^2 \qquad\qquad \mathrm{Re}\,\sigma(\omega) = \mathrm{Re}\,\sigma(\omega_R) - \omega_I \left.\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Im}\,\sigma}{\mathrm{d}\,\omega}\right|_{\omega_R}$$

$$\frac{\varepsilon_0}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\tilde{E}\right|^2 - \frac{1}{4}\left.\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Im}\,\sigma}{\mathrm{d}\,\omega}\right|_{\omega_R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\tilde{E}\right|^2 = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\sigma(\omega_R)\left|\tilde{E}\right|^2 \qquad \text{užito } \frac{\mathrm{d}\,\tilde{E}}{\mathrm{d}\,t} = \omega_I \tilde{E}$$

Vodivost σ a permitivita ε_r souvisí $\varepsilon_r = 1 + \dfrac{i\,\sigma}{\omega\varepsilon_0}$ $\rightarrow$ označme $\varepsilon_R = \mathrm{Re}(\varepsilon_r)$

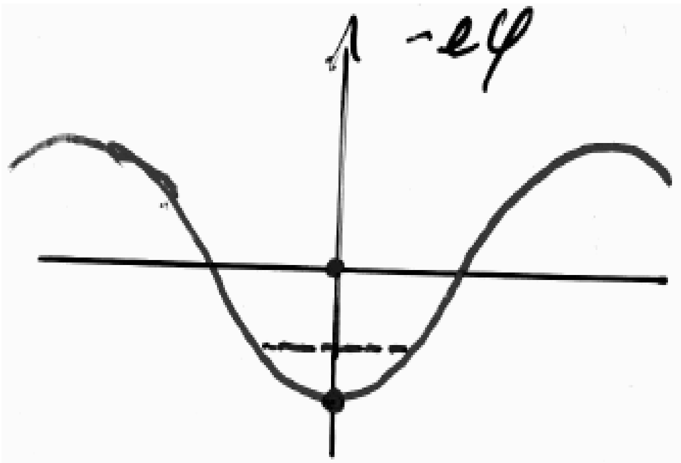
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\left[\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\omega\varepsilon_0\varepsilon_R)\Big|_{\omega_R}\left|\tilde{E}\right|^2\right]}_{W_{tot}\,=\,\text{hustota energie}} = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\sigma(\omega_R)\left|\tilde{E}\right|^2$$

obecný vztah

(plazmová vlna $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\omega}(\omega\varepsilon_0\varepsilon_R) = 2\varepsilon_0$)

<u>Lineární × Nelineární Landaův útlum</u>

v soustavě spojené s vlnou je ω_R=0



$E_1 = \tilde{E}\sin kx$ a $U_p = -e\varphi = -\frac{e\tilde{E}}{k}\cos kx$ a

pohybová rovnice elektronu je

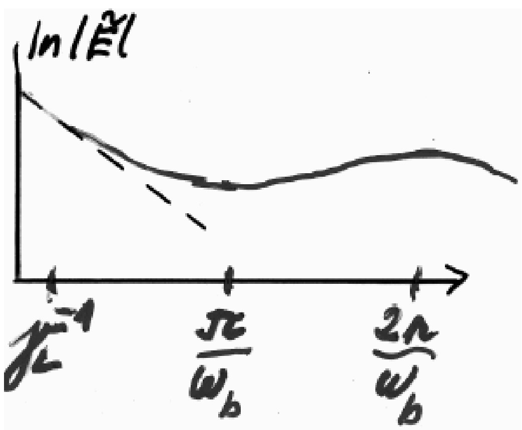
$$m_e\ddot{x} = -e\tilde{E}\sin kx$$

elektron osciluje v potenciální jámě s frekvencí

$$\omega_b = \left(\frac{e\tilde{E}k}{m_e}\right)^{1/2} \quad \text{(bounce frequency)}$$

pro časy $t \ll \omega_b^{-1}$ pohyb není ovlivněn polem a Landaův útlum je lineární

pro $\gamma_L = -\omega_I > \omega_b$ v čase $t = \pi/\omega_b$ začínají elektrony vracet energii vlně

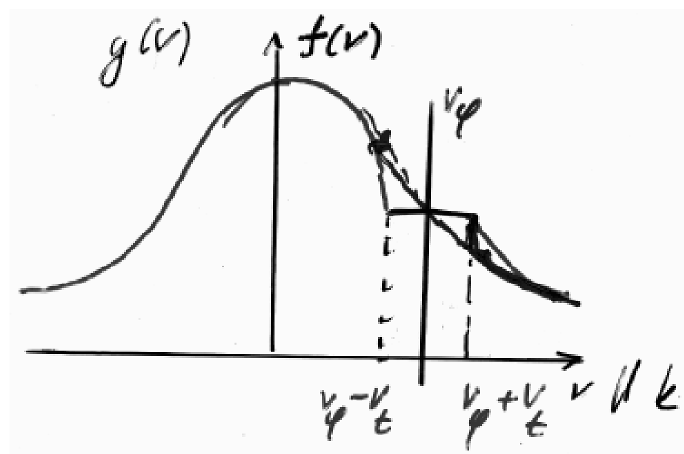


zachycené elektrony

$$\mathrm{v}_\varphi - \mathrm{v}_t < \mathrm{v} < \mathrm{v}_\varphi + \mathrm{v}_t$$

$$m_e\mathrm{v}_t^2/2 = 2|e\varphi_m|$$

$$\mathrm{v}_t = 2\left(\frac{e\tilde{E}}{m_e k}\right)^{1/2}$$



<u>BGK módy</u> <u>(Bernstein, Green, Kruskal)</u>

Vychází z nehomogenní rovnováhy – přesné **<u>nelineární</u>** řešení

Stacionární Vlasovova rovnice pro částice ***s*** má řešení

$$\mathrm{v}_x \frac{\partial f}{\partial x} + q_s E \frac{\partial f}{\partial p} = 0 \qquad f = f\left(\frac{p^2}{2m_s} + q_s \varphi(x)\right) = f(U)$$

Nejjednodušší řešení pro chladné nezachycené svazky

$$n_e(\mathrm{x})\mathrm{v}_e(x) = n_0 \mathrm{v}_{e0} \qquad n_i(\mathrm{x})\mathrm{v}_i(x) = \frac{n_0}{Z}\mathrm{v}_{i0} \qquad \mathrm{v}_e(x) = \sqrt{\mathrm{v}_{e0}^2 + 2e\varphi(x)/m_e}$$

Rovnice kontinuity pro *e,i* a pohyb částic v potenciálním poli ($\mathrm{v_i}$ obdobně)

Hustoty nábojů částic dosadíme do Poissonovy rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} = \frac{e\,n_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{\mathrm{v}_{e0}}{\mathrm{v}_e(x)} - \frac{\mathrm{v}_{i0}}{\mathrm{v}_i(x)}\right) = \frac{e\,n_0}{\varepsilon_0}\left\{\left(1 + \frac{2e\varphi}{m_e \mathrm{v}_{e0}^2}\right)^{-1/2} - \left(1 - \frac{2Ze\varphi}{M_i \mathrm{v}_{i0}^2}\right)^{-1/2}\right\}$$

Rovnice obdobná jako pro pohyb v potenciálním poli – potenciál *V(φ)*

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\partial}{\partial\varphi}V(\varphi) \quad \text{kde} \quad V(\varphi) = -\frac{n_0}{\varepsilon_0}\left\{m_e \mathrm{v}_{e0}^2\left(1 + \frac{2e\varphi}{m_e \mathrm{v}_{e0}^2}\right)^{1/2} + \frac{M_i \mathrm{v}_{i0}^2}{Z}\left(1 - \frac{2Ze\varphi}{M_i \mathrm{v}_{i0}^2}\right)^{1/2}\right\}$$

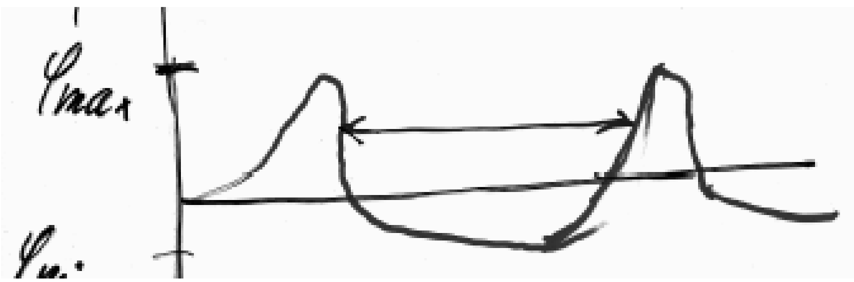
Pro malá φ $\quad |e\varphi(x)| \ll m_e \mathrm{v}_{e0}^2 \quad \wedge \quad |e\varphi(x)| \ll \dfrac{M_i \mathrm{v}_{i0}^2}{Z}$

$$\frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d}\, x^2} + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{m_e \mathrm{v}_{e0}^2} + \frac{Z}{M_i \mathrm{v}_{i0}^2}\right)\varphi = 0$$

řešení

$$\varphi(x) = \varphi_0 \sin\left(x / \lambda_{BGK}\right)$$

kde $\lambda_{BGK}^{-2} = \omega_{pe}^2 / \mathrm{v}_{e0}^2 + \omega_{pi}^2 / \mathrm{v}_{i0}^2$



periodický potenciál
elektrony jej vidi obrácenĕ

K libovolnému potenciálu lze sestrojit takové stacionární rozdělení iontů a elektronů, že vyvolá příslušný potenciál

Case-van Kampenovy módy

Hledá se f_1 pro zadané ω, k $\quad f_1 = \tilde{f}_1 \exp\left(ikx - i\omega t\right)$ obsahují δ funkce - nefyzikální
Existují kombinace CvK módů, které singularity nemají

Vysokofrekvenční elektrostatické vlny v plazmatu se stacionárním magnetickým polem B_0

$\vec{k} \parallel \vec{B}_0$ magnetické pole vlny neovlivní $\Rightarrow$ plazmové vlny

$\vec{k} \perp \vec{B}_0$ kromě elektrostatické síly elektrony vrací navíc i magnetické pole – cyklotronová frekvence ω_c

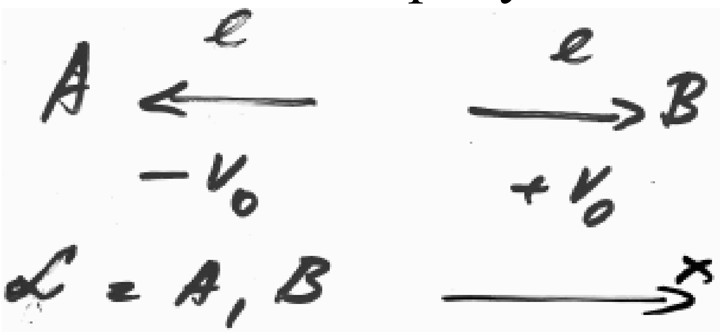
při T=0 $\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 \equiv \omega_h^2$ **horní hybridní frekvence**

horní hybridní vlny – plazmové vlny ve směru kolmém na $\vec{B}_0$
v teplém plazmatu se šíří v důsledku termokinetického tlaku (obdobně jako plazmové vlny)

navíc existují vlastní ***lineární*** módy Vlasovovy rovnice, které nemají hydrodynamický ekvivalent – **Bernsteinovy módy**

<u>Svazkové nestability</u> <u>(Dvousvazková nestabilita)</u>

Mnoho situací – pohyb elektronů proti iontům či pohyb skupin elektronů



Nejjednodušší situace (*zvláště z hlediska analytického řešení*) – 2 svazky elektronů proti sobě – ionty nehybné u_i=0

$n_{A0} = n_{B0} = n_0/2$, $\quad Zn_i = n_0$

$v_{Te} << v_0$ $\quad E_0$=0

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(n_\alpha u_\alpha\right) = 0 \qquad \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + (u_\alpha \nabla u_\alpha) = -\frac{eE}{m_e} \qquad \operatorname{div} E = -\frac{e}{\varepsilon_0}\left(n_A + n_B - n_0\right)$$

hledáme vývoj lineární poruchy $n_{\alpha 1}$, $u_{\alpha 1}$, E_1 ~ exp(ikx-$i\omega t$)

$$-i\omega n_{A1} + ik\left(n_0 u_{A1}/2 - \mathrm{v}_0 n_{A1}\right) = 0 \qquad -i\omega n_{B1} + ik\left(n_0 u_{B1}/2 + \mathrm{v}_0 n_{B1}\right) = 0$$

$$-i\omega u_{A1} - ik\mathrm{v}_0 u_{A1} = -\frac{eE_1}{m_e} \quad -i\omega u_{B1} + ik\mathrm{v}_0 u_{B1} = -\frac{eE_1}{m_e} \quad ikE_1 = -\frac{e}{\varepsilon_0}\left(n_{A1} + n_{B1}\right)$$

z pohybových rovnic vyjádříme amplitudy rychlostí a dosadíme do rovnic kontinuity

$n_{A1} = k\frac{n_0}{2}(-i)\frac{eE_1}{m_e\left(\omega + k\mathrm{v}_0\right)^2}$ $\qquad n_{B1} = k\frac{n_0}{2}(-i)\frac{eE_1}{m_e\left(\omega - k\mathrm{v}_0\right)^2}$ a dosadíme do

Poissonovy rovnice $ikE_1 = ik\frac{e^2 n_0}{2\varepsilon_0 m_e}\left(\frac{1}{\left(\omega + k\mathrm{v}_0\right)^2} + \frac{1}{\left(\omega - k\mathrm{v}_0\right)^2}\right)E_1$ a odtud

získáme disperzní vztah $1 = \frac{\omega_{pe}^2}{2}\left(\frac{1}{\left(\omega + k\mathrm{v}_0\right)^2} + \frac{1}{\left(\omega - k\mathrm{v}_0\right)^2}\right)$ a upravíme

$\omega^4 - (2k^2\mathrm{v}_0^2 + \omega_{pe}^2)\,\omega^2 + k^2\mathrm{v}_0^2\left(k^2\mathrm{v}_0^2 - \omega_{pe}^2\right) = 0$, charakter řešení závisí na **znaménku absolutního členu**, pokud > 0, $\omega_1^2 > 0, \omega_2^2 > 0$ a systém je stabilní, pokud $k^2\mathrm{v}_0^2 < \omega_{pe}^2$, pak $\omega_1^2 > 0, \omega_2^2 < 0$ a existuje kořen s kladnou imaginární frekvencí – řešení roste v čase – **nestabilita**

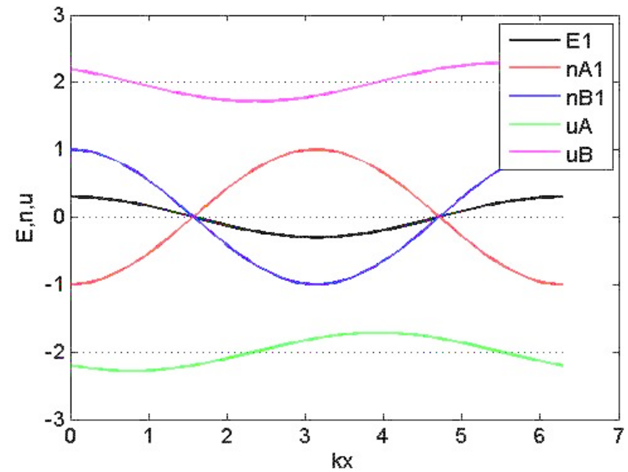
$\omega_{1,2}^2 = k^2\mathrm{v}_0^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + 8\frac{k^2\mathrm{v}_0^2}{\omega_p^2}}\right)$, pro $k^2\mathrm{v}_0^2 < \omega_{pe}^2$ je $\omega_{3,4} = \pm i\sqrt{-\omega_2^2}$

a řešení $\omega_3 = i\sqrt{-\omega_2^2}$ je rostoucí exp(-$i\omega_3 t$) = exp (γt)

pro $k^2 v_0^2 \ll \omega_{pe}^2$ je $\omega_3 = i\gamma = i|k| v_0$ chceme najít mód (k), který roste

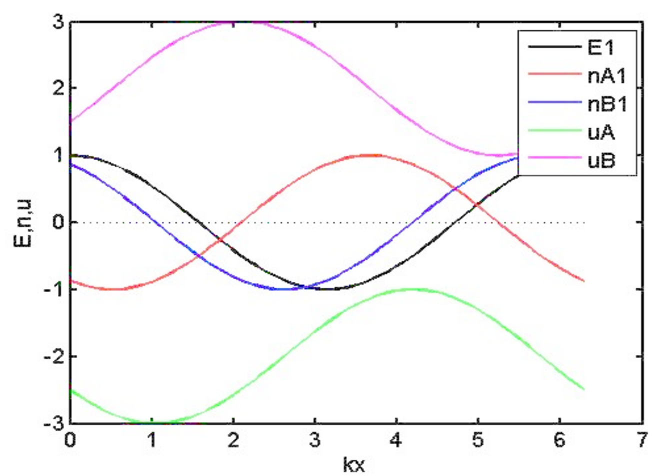
nejrychleji – v maximu $\dfrac{d(-\omega_2^2)}{d(k^2 v_0^2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 v_0^2 = \dfrac{3}{8}\omega_{pe}^2; \quad \gamma = \dfrac{\omega_{pe}}{\sqrt{8}}$

čili nejrychleji rychlejší mód roste jen o trochu pomaleji než je ω_{pe}



Jak vypadají rostoucí módy ?

Pro malé k pro narůstající mód $\omega = i|k| v_0$ se poruchy hustot svazku A,B téměř vyruší (horní obrázek – v_0=2) Pole E_1 vytvářeno jen malou sumou hustot řádu $\sim k^2 v_0^2/\omega_{pe}^2$ narůstající pole $\exp(ikx+kv_0 t)$



Nejrychleji rostoucí mód (dolní obr.)
Je vidět nenulovou sumu poruch hustot svazků A,B
Zde zvláštní případ zesilující se statické poruchy (dáno symetrií úlohy)

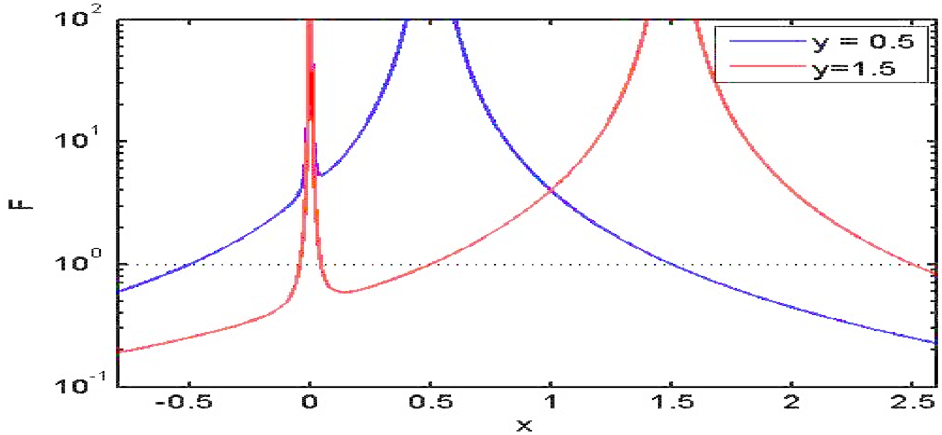
Jiný případ – pohyb elektronů vůči iontům rychlostí v_0

zavedu $x=\omega/\omega_{pe}$ a $y=kv_0/\omega_{pe}$

Disperzní vztah $$1=\frac{Zm_e/M_i}{x^2}+\frac{1}{(x-y)^2}=F(x,y)$$

pro y> hranice má disperzní vztah 4 reálné kořeny - je stabilní

pro y < hranice má rovnice jen 2 reálné kořeny – nestabilita



hranice stability $$y^2=\left(1+\sqrt[3]{\frac{M_i}{Zm_e}}\right)^2\left(\frac{Zm_e}{M_i}\right)^{2/3}\left(1+\sqrt[3]{\frac{Zm_e}{M_i}}\right)\approx 1$$ (tedy $kv_0\approx\omega_{pe}$)

maximální růst $$\gamma_{\max}=\omega_{pe}\left(\frac{Zm_e}{M_i}\right)^{1/3}$$