Způsoby popisu dynamiky plazmatu

Pohyby částic v poli vnějším
Pohyby částic v selfkonsistentním poli
Kinetické rovnice
Hydrodynamické (fluidní) rovnice * 2 tekutiny
* 1 tekutina
* magnetohydrodynamika

Pohyby částic ve vnějších polích

(doručená literatura – D.R. Nicholson, kap. 2, Chen – kap. 2, 8.4)

A) Homogenní pole

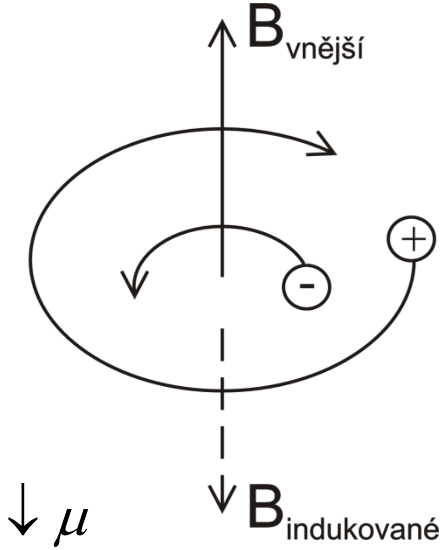
a) $\vec{E} = 0$ $\qquad m\dfrac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = q\vec{\mathrm{v}} \times \vec{B}$ $\qquad \vec{B} = B\hat{z}$

$$m\dot{\mathrm{v}}_x = qB\mathrm{v}_y \qquad m\dot{\mathrm{v}}_y = -qB\mathrm{v}_x \qquad m\dot{\mathrm{v}}_z = 0$$

$$\ddot{\mathrm{v}}_x = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 \mathrm{v}_x \qquad \ddot{\mathrm{v}}_y = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 \mathrm{v}_y \qquad \omega_c \equiv \frac{|q|B}{m}$$ cyklotronová frekvence

$$\mathrm{v}_{x,y} = \mathrm{v}_\perp \exp(\pm i\omega_c t + \delta_{x,y}) \qquad \mathrm{v}_x = \mathrm{v}_\perp \exp(i\omega_c t) \qquad \mathrm{v}_y = \frac{m}{qB}\dot{\mathrm{v}}_x = \pm i \mathrm{v}_\perp e^{i\omega_c t}$$

$$x - x_0 = -i\frac{\mathrm{v}_\perp}{\omega_c} e^{i\omega_c t} \quad y - y_0 = \pm \frac{\mathrm{v}_\perp}{\omega_c} e^{i\omega_c t}$$



Larmorův poloměr $$r_L = \frac{\mathrm{v}_\perp}{\omega_c} = \frac{m\mathrm{v}_\perp}{|q|B}$$

při $\mathrm{v}_\perp = \mathrm{v}_T = \left(\frac{k_B T}{m}\right)^{1/2}$ $$r_L = \frac{(mk_B T)^{1/2}}{|q|B}$$

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2}\oint \vec{r} \times \vec{I}\,\mathrm{d}l = -I\vec{S} = \mp\frac{q}{T} S\vec{n} = -\frac{q^2 B}{2\pi m}\pi\left(\frac{m\mathrm{v}_\perp}{qB}\right)^2 \vec{n} = -\frac{m\mathrm{v}_\perp^2}{2B}\vec{n}$$

(x_0, y_0, z) gyrační střed

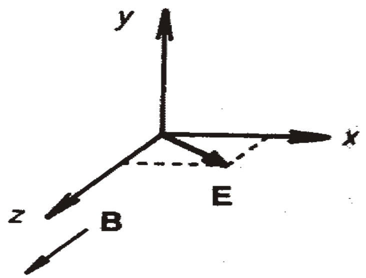
DIAMAGNETIKUM – $\mu \sim 1/B \Rightarrow$ není klasické magnetikum (to má $\mu \sim B$)

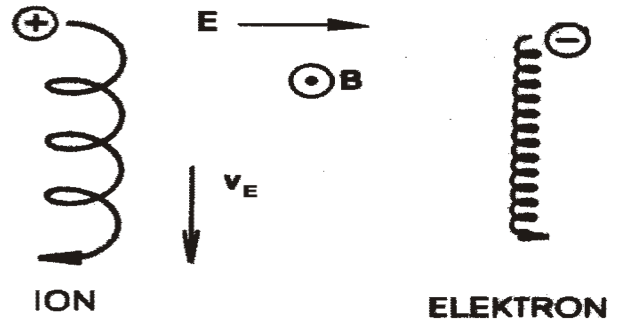
b) $E \neq 0$

$$m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{\mathrm{v}} \times \vec{B}) \qquad E = (E_x, 0, E_z) \qquad \frac{d\mathrm{v}_z}{dt} = \frac{q}{m}E_z$$

$$\frac{d\mathrm{v}_x}{dt} = \frac{q}{m}E_x \pm \omega_c \mathrm{v}_y \qquad \frac{d\mathrm{v}_y}{dt} = \mp\omega_c \mathrm{v}_x \qquad \ddot{\mathrm{v}}_x = -\omega_c^{\ 2}\mathrm{v}_x$$

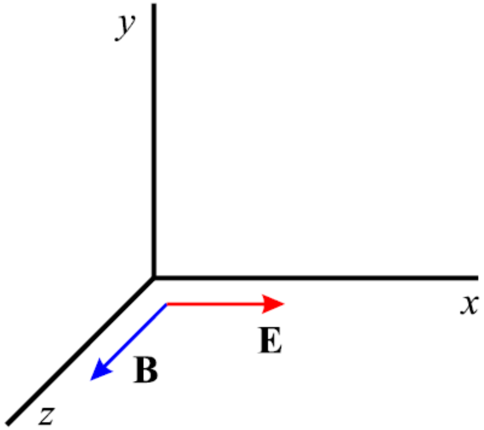
$$\ddot{\mathrm{v}}_y = \pm\omega_c\left(\frac{q}{m}E_x \pm \omega_c \mathrm{v}_y\right) = -\omega_c^{\ 2}\left(\mathrm{v}_y + \frac{E_x}{B}\right) \qquad \frac{d^2}{dt^2}\left(\mathrm{v}_y + \frac{E_x}{B}\right) = -\omega_c^{\ 2}\left(\mathrm{v}_y + \frac{E_x}{B}\right)$$

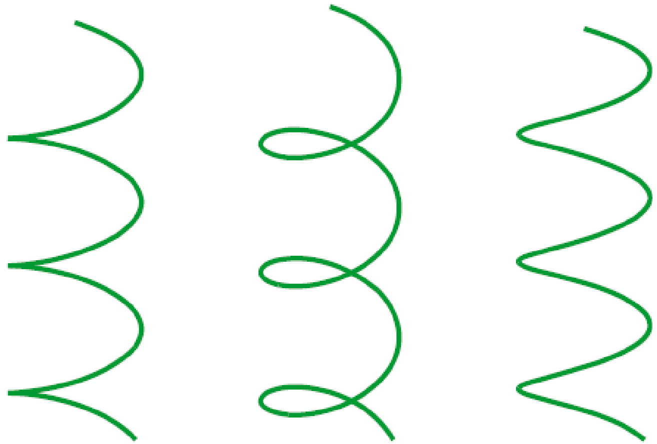


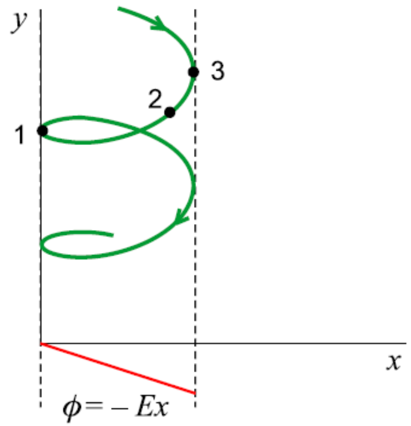


$$\mathrm{v}_x = \mathrm{v}_\perp e^{i(\omega_c t + \delta)} \qquad \mathrm{v}_y = \pm i\mathrm{v}_\perp e^{i(\omega_c t + \delta)} - \frac{E_x}{B}$$

v_{gs} - stac. $\vec{E} + \mathrm{v} \times \vec{B} = 0$ gs…gyrační střed $\vec{\mathrm{v}}_{\perp gs} = \dfrac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \equiv \vec{\mathrm{v}}_E$ drift v E poli







zde $q > 0$, $\mathrm{v}_E = \omega_C r_L$ $\mathrm{v}_E < \omega_C r_L$ $\mathrm{v}_E > \omega_C r_L$ potenciál. energie - 1 max, 3 min

pokud v(t=0) = 0, pak $\mathrm{v}_E = \omega_c r_L = \mathrm{v}_\perp$ (cykloida), jinak trochoida, častý případ $\mathrm{v}_\perp \approx \mathrm{v}_T > \mathrm{v}_E$

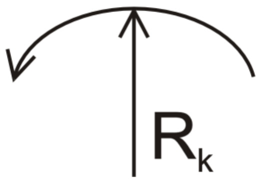
obecná síla např. gravitační síla

$$\vec{\mathrm{v}}_f = \frac{1}{q} \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{B^2} \qquad \vec{\mathrm{v}}_g = \frac{m}{q} \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2}$$

gravitační drift

různý směr pro elektrony a ionty $\vec{j} = n(M+m)\dfrac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2}$ gravitační proud

B) Nehomogenní $\vec{B}$



$$\vec{F}_{od} = \frac{m\mathrm{v}_{\parallel}^{2}}{R_k}\hat{r} = \frac{m\mathrm{v}_{\parallel}^{2}}{R_k^{2}}\vec{R}_k$$

(odstředivá síla)

drift zakřivení

$$\vec{\mathrm{v}}_R = \frac{1}{q}\frac{\vec{F}_{od}\times\vec{B}}{B^2} = \frac{m\mathrm{v}_{\parallel}^{2}}{q}\frac{\vec{R}_k\times\vec{B}}{R_k^{2}B^2}$$

div $\vec{B}$ =0 rot $\vec{B}$ =0 zakřivené pole nemůže být konstantní

a) $\nabla|B| \perp \vec{B}$ grad-B drift

$$B_z = B_z(y) = B_0 + \Delta y\frac{\partial B}{\partial y}$$

lineární aproximace pole při pohybu částice po Larmorově kružnici

$$F_y = -q\mathrm{v}_x B_z(y) = -q\mathrm{v}_{\perp}\left(\cos\omega_c t\right)\left[B_0 \pm r_L\left(\cos\omega_c t\right)\frac{\partial B}{\partial y}\right]$$

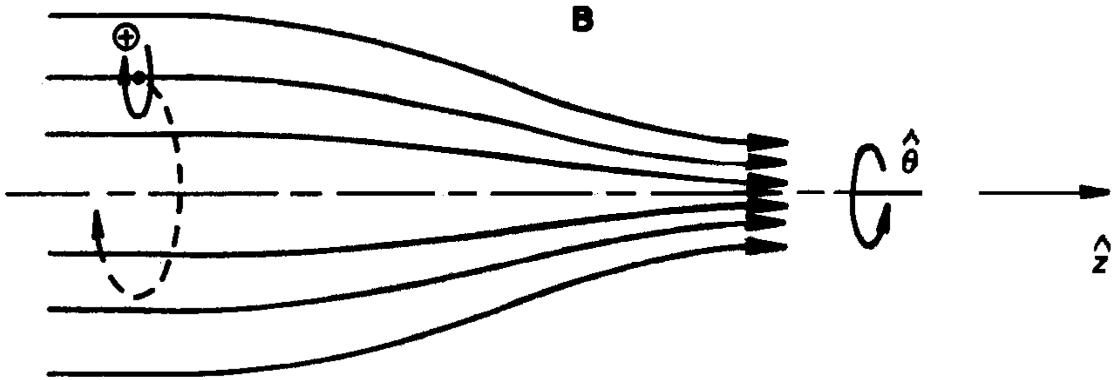
$$\vec{B} = \vec{B}_0 + (\vec{r}\nabla)\vec{B} + \dots \qquad B_z = B_0 + y(\partial B_z/\partial y) + \dots \qquad \langle \cos^2 \omega_c t \rangle = 1/2$$

$$\langle \vec{F}_y \rangle = \pm q \mathrm{v}_\perp r_L \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial y} = -\frac{m\mathrm{v}_\perp^{\ 2}}{2B}\nabla|B| \qquad \vec{\mathrm{v}}_{\nabla B} = \pm\frac{1}{2}\mathrm{v}_\perp r_L \frac{\vec{B}\times\nabla|\vec{B}|}{B^2}$$

často se drift zakřivení a grad-B drift doplňují

$$\frac{\nabla|B|}{|B|} \cong -\frac{\vec{R}_k}{R_k^{\ 2}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathrm{v}}_{\nabla B} + \vec{\mathrm{v}}_R = \frac{m}{q}\frac{\vec{R}_k\times\vec{B}}{R_k^{\ 2}B^2}\left(\mathrm{v}_\parallel^{\ 2} + \frac{1}{2}\mathrm{v}_\perp^{\ 2}\right)$$

b) $\nabla|B| \parallel \vec{B}$ Magnetická zrcadla



cylindrická symetrie

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \frac{\partial B_z}{\partial z} \to B_r$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

=> v okolí osy

$$B_r = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z} \triangleq -\frac{r}{2}\nabla|\vec{B}|$$

$$F_z = q\overbrace{\mathrm{v}_\perp B_r}^{\mathrm{v}_\theta B_r} = -q\mathrm{v}_\perp \frac{r_L}{2}\nabla B = -\underbrace{\frac{m{\mathrm{v}_\perp}^2}{2B}}_{\mu}\nabla B \qquad \vec{F} \equiv (\vec{\mu}\cdot\nabla)\vec{B} = -\mu\nabla B$$

μ magnetický moment

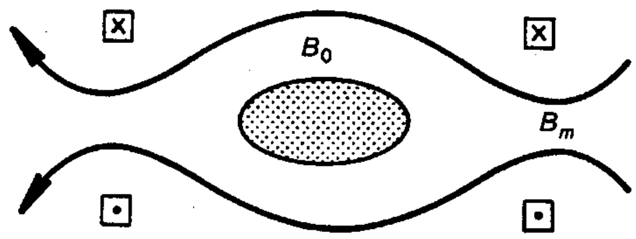
$$\mu ? \;\; \mu = J\cdot S \qquad S = \pi {r_L}^2 = \pi\frac{m^2}{q^2B^2}{\mathrm{v}_\perp}^2 \qquad \mu = \frac{1}{2}\frac{m{\mathrm{v}_\perp}^2}{B} \qquad J = \frac{q}{T} = \frac{q\omega_c}{2\pi} = \frac{q^2B}{2\pi m}$$

Invariantnost μ (s…dráha podél siločáry)

$$m\frac{d\mathrm{v}_\parallel}{dt} = -\mu\frac{\partial B}{\partial s} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m{\mathrm{v}_\parallel}^2\right) = -\mu\mathrm{v}_\parallel\frac{\partial B}{\partial s} = -\mu\frac{dB}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m{\mathrm{v}_\parallel}^2 + \frac{1}{2}m{\mathrm{v}_\perp}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m{\mathrm{v}_\parallel}^2 + \mu B\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad -\mu\frac{dB}{dt} + \frac{d}{dt}(\mu B) = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = 0$$

adiabatický invariant



Kde se odrazí částice s $\vec{v}_0$ z oblasti B_0?

$$\frac{1}{2} m v_{\perp 0}^{2} \Big/ B = \frac{1}{2} m v_{\perp}'^{2} \Big/ B' \qquad v_{\parallel}' = 0 \qquad v'^2 = v_0^{2}$$

$$\frac{B_0}{B'} = \frac{v_{\perp 0}^{2}}{v_{\perp}'^{2}} = \frac{v_{\perp 0}^{2}}{v_0^{2}} \equiv \sin^2\theta \qquad \sin^2\theta_m = \frac{B_0}{B_m} = \frac{1}{R_m},$$

kde R_m je zrcadlový poměr, definuje únikový kužel – pro $\theta < \theta_m$ se částice nezachytí.

Adiabatický invariant – veličina, která se při pomalých prostorových a časových změnách systému zachovává.

Klasická mechanika – při periodickém pohybu se akce $J = \oint p\,dq$ zachovává.

Gyrační pohyb $p = m\mathrm{v}_x; \quad q = x$

$$J = \oint m\mathrm{v}_x dx = \int_0^{2\pi/\omega_c} m\mathrm{v}_\perp^2 \sin^2(\omega_c t)\,dt = \frac{\pi m\mathrm{v}_\perp^2}{\omega_c} = \frac{2m\pi}{q}\mu \Rightarrow \mu = konst.$$

Kdy se adiabatický invariant μ nezachovává?

a) cyklotronový ohřev

$\omega \approx \omega_c$, B, E osciluje $\Rightarrow \omega << \omega_c$ neplatí $\Rightarrow \mu \neq$ konst.

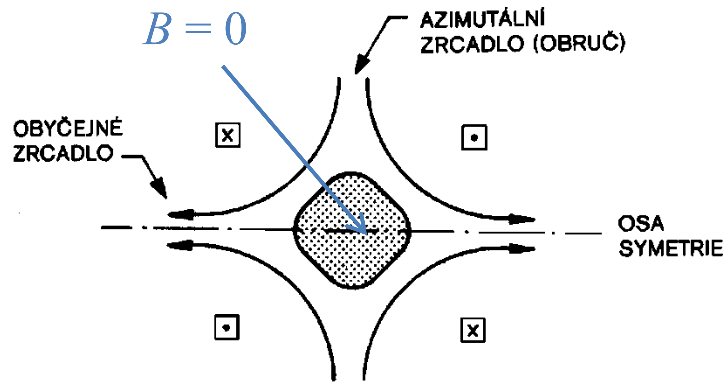
b) magnetické čerpání

B se sinusově mění v čase, srážkami s pohybujícím se zrcadlem se invariantnost μ poruší

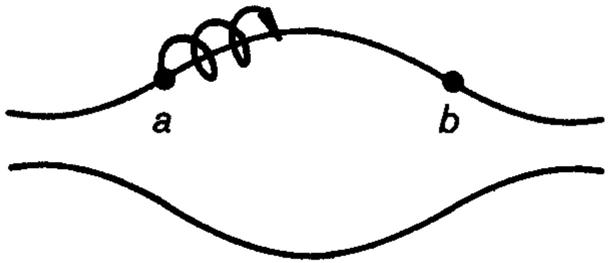
Pokud ke srážce dojde při kompresi (zvětšení pole), tak $\mathrm{v}_\perp \to \mathrm{v}_\parallel$ $\to$ při expanzi se $\mathrm{v}_\parallel$ nezmění

c) vstřícná zrcadla uprostřed $B = 0 \to \omega_c = 0$

$\Rightarrow \mu \neq$ konst.



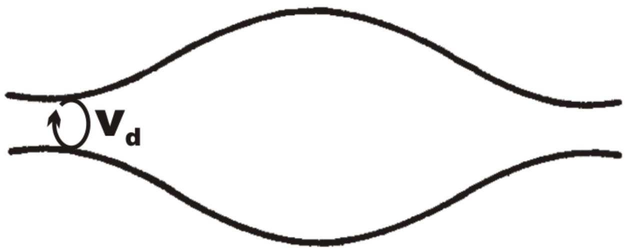
Druhý adiabatický invariant



a,b … body obratu

$$J = \int_a^b \mathrm{v}_{\parallel} ds$$ podélný invariant

Třetí adiabatický invariant



$\vec{\mathrm{v}}_{\nabla B}, \vec{\mathrm{v}}_R \perp \vec{B}, \vec{R}_k$ - drift ve směru úhlu φ

$J_3 = \oint \mathrm{v}_d dl$ 3. adiabat. invariant

C) Nehomogenní E

$E = \hat{x}\cos ky\ E_0 \qquad \vec{B} = \hat{z}B$

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}t} = q\left(\vec{E}(y) + \vec{\mathrm{v}}\times\vec{B}\right) \qquad y = y_0 \pm r_L\cos\omega_c t$$

$$\ddot{\mathrm{v}}_y = 0 = -\omega_c{}^2\bar{\mathrm{v}}_y - \omega_c\frac{E_0}{B}\underbrace{\overline{\cos k(y_0 \pm r_L\cos\omega_c t)}}_{\approx\cos ky_0\cdot\left(1-\frac{1}{4}k^2r_L{}^2\right)}$$

$$\vec{\mathrm{v}}_E = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}\left(1-\frac{1}{4}k^2r_L{}^2\right) = \left(1+\frac{1}{4}r_L{}^2\nabla^2\right)\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}$$

Polarizační drift (časově proměnné E)

$\vec{E}\perp\vec{B} \qquad \dfrac{\partial E}{\partial t}\neq 0 \qquad \vec{B} = B_0\hat{z} \qquad \vec{E}(t) = -\dot{E}\,t\,\hat{y}$

$$m\dot{\vec{v}} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + v_E\hat{x} + v_p\hat{y}$$ předpoklad v_p = konst.

$$m\left(\dot{\vec{v}}_0 + \dot{\vec{v}}_E\right) = -q\dot{E}t\hat{y} + q\vec{v}_0\times\vec{B} - qv_E B_0\hat{y} + qv_p B_0\hat{x}$$

$$m\dot{\vec{v}}_0 = q\vec{v}_0\times\vec{B}$$ cyklotronová rotace

$$m\dot{\vec{v}}_E = qv_p B_0\hat{x}$$ v_p = polarizační drift

$$0 = -q_s\dot{E}\,t\,\hat{y} - q_s v_E B_0\,\hat{y}$$ v_E – $\vec{E}\times\vec{B}$ drift

$$v_E\hat{x} = -\frac{\dot{E}t}{B_0}\hat{x} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}_0}{B_0{}^2} \Rightarrow \dot{v}_E = -\frac{\dot{E}}{B_0}$$

$$v_p = -\frac{m\dot{E}}{B_0}\frac{1}{qB_0} = -\frac{m}{qB_0{}^2}\dot{E}$$

$$\vec{v}_p = \frac{m}{qB_0{}^2}\frac{d}{dt}\vec{E}$$

$$\vec{J}_p = n_e e(\vec{v}_{pi} - \vec{v}_{pe}) = \left(m_e + \frac{M_i}{Z}\right)\frac{n_e}{B_0^2}\frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{\rho_M}{B_0^2}\frac{d\vec{E}}{dt}$$

polarizační proud

PONDEROMOTORICKÁ SÍLA

= nízkofrekvenční síla, která působí na nabité částice v nehomogenním vysokofrekvenčním poli.

Energie oscilací nabitých částic ve vysokofrekvenčním poli je dána polohou částice – je tedy jakousi potenciální energií U a existuje síla $F = -\nabla U$, která vyhání nabité částice z oblasti silného pole.

Ponderomotorická síla působí na každé dielektrikum, jehož permitivita závisí na hustotě (elektrostrikce) !!

Ponderomotorická síla se sestává ze 2 částí – síly v důsledku kmitání nabité částice v nehomogenním elektrickém poli a síly v důsledku působení magnetického pole na oscilující částici

Nejprve odvodíme sílu v důsledku kmitání nabité částice v nehomogenním elektrickém poli $\vec{E}$ s frekvencí ω:

$$\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r})\cos\omega t$$

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E} = q\vec{E}_0(\vec{r})\cos\omega t \qquad \overline{\vec{r}} = \vec{r}_0 \qquad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1$$

Provedeme linearizaci pole v oblasti oscilace r_1 a napíšeme pohybové rovnice

$$m(\ddot{\vec{r}}_0+\ddot{\vec{r}}_1)=q\left[\vec{E}_0+\left(\vec{r}_1\nabla\right)\vec{E}_0\right]\cos\omega t$$

$$m\ddot{\vec{r}}_1=q\vec{E}_0\cos\omega t\rightarrow\vec{r}_1=-\frac{q\vec{E}_0}{m\omega^2}\cos\omega t\quad\Rightarrow\ddot{\vec{r}}_0=\frac{q}{m}\left(\overline{\vec{r}_1\cos\omega t}\,\nabla\right)\vec{E}_0=-\frac{q^2}{2m^2\omega^2}\left(\vec{E}_0\nabla\right)\vec{E}_0$$

Nízkofrekvenční síla je tedy
$$\vec{F}_E=-\frac{q^2}{2m\,\omega^2}\left(\vec{E}_0\nabla\right)\vec{E}_0$$

Vysokofrekvenční magnetické pole působí na oscilující částici

$$\vec{B}=\vec{B}_0(\vec{r})\sin\omega t\qquad\vec{B}_0=-\frac{1}{\omega}\operatorname{rot}\vec{E}_0\qquad\vec{\mathrm{v}}=\frac{q}{m\,\omega}\vec{E}_0\sin\omega t$$

Síla je pak dána výrazem

$$\vec{F}_B=\overline{q\vec{\mathrm{v}}\times\vec{B}}=\frac{q^2}{m\,\omega}\vec{E}_0\times\vec{B}_0\overline{\sin^2\omega t}=-\frac{1}{2}\frac{q^2}{m\,\omega^2}\vec{E}_0\times\operatorname{rot}\vec{E}_0$$

Celková ponderomotorická síla je pak dána součtem sil

$$\vec{F}_p = \vec{F}_E + \vec{F}_B = -\frac{1}{2}\frac{q^2}{m\,\omega^2}\left[\left(\vec{E}_0\nabla\right)\vec{E}_0 + \vec{E}_0 \times \mathrm{rot}\,\vec{E}_0\right] = -\frac{1}{4}\frac{q^2}{m\,\omega^2}\nabla E_0^2 = -\frac{1}{4}\frac{q^2}{m\,\omega^2}\nabla\left|E_0\right|^2$$

Při odvození jsme používali reálnou amplitudu, obecně pole může být fázově posunuto, proto obecný výraz obsahuje absolutní hodnotu amplitudy pole.
Na částici tedy působí nízkofrekvenční síla

$$\vec{F}_p = -\frac{q^2}{4m\omega^2}\nabla\left|E_0\right|^2 \qquad \vec{F}_p = -\nabla W_{osc}$$ síla rovná -gradientu potenciální energie

$$W_{osc} = \frac{1}{2}m\overline{\mathrm{v}^2} = \frac{1}{2}m\frac{q^2 E_0^{\ 2}}{m^2\omega^2}\overline{\cos^2\omega t} = \frac{1}{4}\frac{q^2}{m\omega^2}E_0^{\ 2}$$

Existuje též vysokofrekvenční síla s frekvencí $2\omega_0$.
Pro pole s 2 frekvencemi $\exists$ síly se součtem a rozdílem frekvencí.